



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Larbi Tébessa - Tébessa



Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie

Département : Mathématique et Informatique

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Equations différentielles et applications

Par

Zoulikha CHOUGUI

Intitulée

**Quelques schémas de synchronisation chaotique
dans les systèmes dynamiques fractionnaires**

Soutenue le : 29/06/2021

Devant le Jury composé de :

Mm. Hadia MESSAOUDENE	M.C.A	Université de Tébessa	Présidente
Mr. Adel OUANNAS	M.C.A	Université d'Oum El Bouaghi	Rapporteur
Mr. Okba ZEHROUR	Prof.	Université d'Oum El Bouaghi	Examineur
Mm. Hakima DEGAICHIA	M.C.A	Université de Tébessa	Examinatrice
Mm. Ahlem GASRI	M.C.A	Université de Tébessa	Examinatrice
Mr. Taki Eddine OUSSAEIF	M.C.A	Université d'Oum El Bouaghi	Examineur

Année universitaire : 2020/2021

Remerciements :

En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Adel OUANNAS, Maître de conférence au département de mathématiques de université de Larbi Ben M'hidi O.E.B qui m'a encadré, tout le long de cette thèse. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son aide consistante, ses conseils précieux et ses remarques objectives.

Je remercie madame Hadia MESSAOUDENE Maître de conférences à l'université de Larbi Tébessi Tébessa qu'a accepté la présidence du Jury de ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur Okba ZEHROUR Professeur à l'université de d'Oum El Bouaghi , madame Hakima DEGAICHIA, Maître de conférence à l'université de Tébessa, madame Ahlem GASRI Maître de conférence à l'université de Tébessa et Monsieur Taki Eddine OUSSAEIF Maître de conférence à l'université d'Oum El Bouaghi qui ont accepté de juger ce travail.

Je conclurai en remerciant tous les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A ma mère, mes frères, ma sœur et toute ma famille

A Mon Mari et toute sa famille

A mes enfants

Iyes , kamel-eddine et mariya

A la mémoire de mon père et mon frère

A tous ceux que j'aime et je respecte

Résumé:

La nature est intrinsèquement non linéaire. Il n'est donc pas surprenant que la plupart des systèmes que nous rencontrons dans le monde réel sont non linéaires. Et ce qui est intéressant, c'est que certains de ces systèmes non linéaires peuvent être décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire qui peuvent afficher une variété de comportements, y compris chaos et hyper-chaos

Récemment, une étude sur la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire a commencé à attirer l'attention de nombreux chercheurs et jusqu'à présent, une grande variété de techniques fractionnelles ont été utilisées pour concevoir un contrôle de synchronisation dans des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

Dans cette thèse a abordé le problème de la synchronisation généralisée (GS) entre différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dimensionnel. Sur la base de la théorie de la transformée de Laplace et de l'approche fractionnaire basée sur Lyapunov, une méthode de contrôle pour un nouveau schéma GS complexe est présentée. Des exemples illustratifs sont réalisés pour montrer l'efficacité de l'approche proposée.

Mots clés:

Chaos et hyper chaos, synchronisation généralisée, systèmes d'ordre fractionnaire, différentes dimensions, approche fractionnaire basée sur Lyapunov

Abstract:

Nature is inherently nonlinear. So it's no surprise that most of the systems we encounter in the real world are nonlinear. And what's interesting is that some of these nonlinear systems can be described by fractional-order differential equations that can display a variety of behaviors including chaos and hyper-chaos.

Recently, study of the synchronization of fractional-order chaotic systems has begun to gain more and more attention from many researchers; and so far, a wide variety of fractional techniques have been used to design synchronization control in chaotic systems of fractional order.

this thesis has approached the problem of generalized synchronization (GS) between different chaotic systems of fractional dimensional order. Based on the Laplace transform theory and the fractional approach based on Lyapunov, a control method for a new complex GS scheme is presented. Illustrative examples are made to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words:

Chaos and hyper chaos, generalized synchronization, fractional order systems, different dimensions, fractional Lyapunov-based approach

ملخص

الطبيعة بطبيعتها غير خطية. لذلك ليس من المستغرب أن تكون معظم الأنظمة التي نواجهها في العالم الحقيقي غير خطية. والمثير للاهتمام هو أن بعض هذه الأنظمة غير الخطية يمكن وصفها من خلال المعادلات التفاضلية ذات الترتيب الكسري والتي يمكن أن تعرض مجموعة متنوعة من السلوكيات بما في ذلك الفوضى والفوضى المفرطة.

بدأت الأنظمة الفوضوية ذات الترتيب الجزئي في جذب انتباه العديد من الباحثين بشكل متزايد. حتى الآن و تم استخدام مجموعة متنوعة من التقنيات الجزئية لتصميم التحكم في التوقيت في الأنظمة الفوضوية ذات الترتيب الكسري.

بين أنظمة فوضوية مختلفة من ترتيب الأبعاد الكسرية. استناداً إلى نظرية تحويل (GS) تتناول هذه الأطروحة مشكلة التزامن العام معقد جديد. تم عمل أمثلة توضيحية لإظهار GS ، يتم تقديم طريقة تحكم لمخطط Lyapunov لابلاس والنهج الجزئي المستند إلى فعالية النهج المقترح

الكلمات المفتاح

التزامن المعمم ، أنظمة الترتيب الكسري ، أبعاد مختلفة ، النهج الجزئي القائم على الفوضى

Table des matières

1	Théorie du chaos :	6
1.1	Introduction :	6
1.2	Intermède historique :	6
1.3	Définitions basiques :	7
1.3.1	Système continue :	7
1.3.2	Système discret :	9
1.3.3	Solutions des systèmes dynamiques :	9
1.4	Stabilité :	10
1.4.1	Différents types de stabilité :	10
1.4.2	Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) :	11
1.4.3	Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe) :	13
1.4.4	Stabilité des points fixes : théorème de Hurwitz :	14
1.5	Bifurcation :	15
1.5.1	Bifurcations statiques :	15
1.5.2	Bifurcations de Hopf :	19
1.6	Transition vers le chaos :	20
1.6.1	Cascade sous-harmonique :	20
1.6.2	Intermittence :	21
1.6.3	Scénario de Ruelle et Takens :	22
1.7	Caractérisation du chaos :	22
1.7.1	Portrait de phase :	22
1.7.2	Sensibilité aux conditions initiales :	23
1.7.3	Exposants de Lyapunov :	24
1.7.4	Dimension de Lyapunov :	27
1.7.5	Section et application de Poincaré :	27
1.7.6	Diagramme de bifurcation :	29
1.7.7	Représentation spectrale :	30
1.8	Utilisation du chaos :	30
1.8.1	En communication :	31
1.8.2	En biologie :	31
1.8.3	En économie :	33
1.8.4	En informatique :	33

1.8.5	En art :	33
1.9	Conclusion :	34
2	Calcul fractionnaire :	35
2.1	Introduction :	35
2.2	Bref historique :	35
2.3	Fonctions utiles :	41
2.3.1	Fonction Gama :	41
2.3.2	Fonction Béta :	42
2.3.3	Fonction Mittag-Leffler :	43
2.3.4	Transformée de Laplace :	44
2.4	Eléments de base du calcul fractionnaire :	46
2.4.1	Intégral fractionnaire :	46
2.4.2	Dérivée fractionnaire :	47
2.5	Propriétés de base des dérivés fractionnaires :	50
2.5.1	Linéarité :	50
2.5.2	Règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire :	51
2.5.3	Intégration par partie :	51
2.5.4	Composition :	53
2.5.5	Relation entre les dérivées :	56
2.5.6	Exemples :	56
2.6	Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires :	59
2.6.1	Transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Leitnikov :	59
2.6.2	Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-liouville :	59
2.6.3	Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo :	60
2.7	Domaines d'applications :	62
2.7.1	Thermique :	62
2.7.2	Electricité :	64
2.7.3	Automatique :	65
2.7.4	Viscoélasticité :	66
2.7.5	Vibrations amorties viscoélastiques	67
2.7.6	Viscoplasticité :	68
2.7.7	Équation de Bagley-Torvik	69
2.8	Conclusion :	70
3	Systèmes dynamiques chaotiques fractionnaires :	71
3.1	Introduction :	71
3.2	Problème de Cauchy :	71
3.2.1	Théorème d'existence et unicité :	72
3.3	Stabilité des systèmes fractionnaires :	72
3.3.1	Méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation) :	72
3.3.2	Méthode directe de Lyapunov :	74
3.3.3	Extention de de la méthode directe de Lypunov :	76

3.3.4	Quelque conditions de Routh-Hurwitz pour les systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires :	78
3.4	Résolution analytique des EDFs :	80
3.4.1	EDFs unidimensionnelle :	80
3.4.2	EDFs multidimensionnelle :	84
3.5	Résolution numérique des EDFs :	86
3.5.1	Méthode de Grünwald-Leitnikov :	86
3.5.2	Méthode de Admas-Bashforh-Moulton :	89
3.6	Exemples des systèmes hyperchaotiques fractionnaires :	91
3.6.1	Système issue de modèle financier :	91
3.6.2	Système issue de modèle de chua :	94
3.7	Conclusion :	96
4	Théorie de synchronisation :	97
4.1	Introduction :	97
4.2	Types de synchronisation :	98
4.2.1	Synchronisation de Phases	98
4.2.2	Synchronisation complète :	98
4.2.3	Anti-Synchronisation :	99
4.2.4	Synchronisation retardée :	99
4.2.5	Synchronisation projective :	99
4.2.6	Synchronisation FSHP	100
4.2.7	Synchronisation généralisée :	100
4.2.8	Synchronisation Q-S	101
4.3	Méthodes de synchronisation :	101
4.3.1	Méthode du contrôleur actif :	101
4.3.2	Méthode du Backstepping : "Retour en arrière"	102
4.4	Conclusion :	104
5	Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire :	105
5.1	Introduction :	105
5.2	Base théorique :	106
5.2.1	Système Maître et Esclave :	107
5.2.2	Résultat principal :	107
5.3	Exemples illustrative	108
5.3.1	Exemple 1	108
5.3.2	Exemple 2	112
5.4	Conclusion :	116

Introduction général :

La théorie du chaos a toujours suscité l'intérêt des chercheurs scientifiques car elle a un large spectre d'applications, comme la communication sécurisée [1, 2], la cryptographie [3, 4], la théorie des circuits et la modélisation de phénomènes multidisciplinaires en physique [5], chimie [6], médecine [7] et économique [8]. Cela est dû au fait que les systèmes chaotiques présentent une évolution périodique, bornée, à long terme et une dépendance sensible aux conditions initiales pour certaines gammes de paramètres.

Au cours des dernières décennies, il a été observé que de nombreux phénomènes du monde réel ne peuvent pas être modélisés par des équations différentielles ordinaires ou partielles via les dérivées et intégrales classiques. En fait, ces problèmes font suite à l'apparition du calcul fractionnaire (dérivées fractionnaires et intégrales), destiné à traiter les problèmes pour lesquels le calcul classique était insuffisant. L'utilisation du calcul fractionnaire s'est développée grâce aux progrès des méthodes numériques de résolution des systèmes d'ordre fractionnaire et de leurs implémentations [9, 10], la théorie et les applications des équations différentielles avec des dérivés fractionnaires sont devenues l'un des sujets les plus étudiés en mathématiques appliquées. Le large potentiel d'application des équations différentielles fractionnaires dans de nombreux domaines de la science a été souligné par un grand nombre d'articles, y compris la bio-ingénierie [11], l'électromagnétique [12, 13] et le cryptage d'images [14], et de livres sur le sujet [15, 16, 17].

Les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire avec plus de paramètres offrent des degrés de liberté et de flexibilité supplémentaires, ce qui les rend plus adaptés à de nombreuses applications par rapport à leurs homologues d'ordre entier.

La synchronisation ou le couplage de deux ou plusieurs systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire identiques ou différents est apparu fréquemment dans la littérature récente en raison de ses applications dans les systèmes biologiques et physiques, l'ingénierie structurelle, les modèles écologiques, la communication sécurisée et la cryptographie [18, 19]. La synchronisation chaotique représente un défi car les systèmes chaotiques sont sensibles aux conditions initiales, où deux trajectoires commençant à des conditions initiales légèrement différentes divergent exponentiellement l'une de l'autre dans l'évolution à long terme.

La synchronisation généralisée, dans laquelle la réponse de l'esclave pourrait

présenter une amplitude inférieure ou supérieure à la réponse du maître via une mise à l'échelle ou des transformations, a également été discutée avec des applications pour sécuriser la communication [20, 21]. Des recherches plus récentes axées sur le contrôle et la synchronisation dans le domaine d'ordre fractionnaire [22, 23, 24, 25, 26] ont introduit la synchronisation généralisée avec mise à l'échelle dynamique adaptée à la modulation chaotique.

Cette thèse a pour objet l'étude de la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire de différentes dimensions à temps continus. Nous allons décrire brièvement le contenu des chapitres qui le composent.

Le chapitre 1 nous définirons les différents outils nécessaires qui servent à l'étude des systèmes dynamiques et chaos

Le chapitre 2 est consacrée à la théorie du calcul fractionnaire, après un aperçu historique sur son développement, nous présentons la description de la dérivation fractionnaire, l'intégrale et leurs propriétés et nous présentons également leurs transformées de Laplace.

Nous abordons au **chapitre 3**, l'étude théorique des systèmes dynamiques fractionnaires tel que la stabilité, la résolution analytique et numérique des équations différentielles fractionnaires; Ensuite, nous appliquons sur deux modèles.

Le chapitre 4 est concentré à la théorie de synchronisation, nous donnons quelque type et méthodes de synchronisation.

Le chapitre 5 est consacré à quelque application potentielle de synchronisation généralisé des systèmes chaotiques fractionnaires de différentes dimensions et nous proposons un nouveau schéma de contrôle complexe pour atteindre la GS entre deux systèmes chaotiques fractionnaires généraux $n - D$ et $m - D$

Chapitre 1

Théorie du chaos :

1.1 Introduction :

Les systèmes chaotiques ont reçu une attention renouvelée au cours des dernières décennies. De tels systèmes non linéaires peuvent se produire dans divers systèmes naturels et artificiels et sont particulièrement sensibles aux conditions initiales. Les comportements chaotiques ont été observés et étudiés dans différents domaines de la science et de l'ingénierie.

Dans ce chapitre nous présentons les définitions nécessaires qui permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques, puis nous abordons une notion importante qui est la stabilité dans le domaine temporel de ces systèmes ainsi que les types de bifurcations qui permettent d'étudier les changements de la stabilité d'un flot. Ensuite nous décrivons les trois types de transitions d'un régime chaotique aussi nous traitons la caractérisation du chaos le plus connu. Finalement, nous donnons quelques utilisations du chaos dans la nature.

1.2 Intermède historique :

Les premières questions concernant les systèmes dynamiques étaient liées à la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques.

L'une des principales questions qui a suscité la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.

Les travaux de Lagrange sur le sujet consistèrent à interpréter l'influence des corps autres que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux : ces travaux trouvent des échos dans le théorème dit de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser).

Les systèmes dynamiques sont développés et spécialisés au cours du 19^{ème} siècle. En effet, à la fin de ce siècle, le mathématicien, physicien et philosophe

français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps (soleil, terre, lune). Toujours au 19^{ème} siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales adjacentes ; lorsque cet écart évolue exponentiellement, on parle de sensibilité aux conditions initiales.

En 1963 ; le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode qui lui permettait de prédire les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il a constaté qu'une petite modification des données initiales pouvait radicalement changer ses résultats. Lorenz venait de démontrer le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront, à partir de 1975, appelés systèmes chaotiques. C'est donc dans les années soixante-dix que la théorie du chaos prend son envol. Évidemment, le travail des prédécesseurs de Lorenz était donc très important pour la compréhension du chaos, mais il faut souligner que ce qui permettra aux scientifiques une meilleure compréhension des systèmes chaotiques, c'est l'ordinateur. En effet, les systèmes régissant les comportements chaotiques sont forcément non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est généralement impossible.

1.3 Définitions basiques :

1.3.1 Système continue :

Définition 1 : On appelle système dynamique continu tout système d'équations différentielles du premier ordre défini par :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x(t), t, v) \quad (1.1)$$

avec : f un champ de vecteurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état et $v = (v_1, v_2, \dots, v_p) \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ vecteur des paramètres.

-Lorsque le champ de vecteurs f dépend explicitement du temps, on dit que le système dynamique est non autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome. Dans un système autonome, la trajectoire ne dépend pas du temps initial, alors que dans un système non autonome elle dépend du temps initial.

-Par un changement de variable approprié, on peut transformer un système non autonome avec $x \in \mathbb{R}^n$ en un système dynamique autonome avec $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 2 "Trajectoire" :

Soit x_0 une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution du système dynamique autonome. L'ensemble des points $\forall t > 0, x(t, x_0)$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point x_0 à l'instant initial.

Définition 3 : "Flôt"

Soit $x(x_0, t)$, $x_0 \in D$, une solution du système dynamique autonome avec condition initiale $x(0) = x_0$. On appelle flôt de ce système, l'application $\phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par : $\phi_t(x_0) = x(x_0, t)$

Définition 4 : "Espace des phase"

L'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension n nécessaire à la description du système à moment donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état.

Définition 5 : "Portrait de phase"

On appelle portrait de phase un graphe qui donne l'allure des trajectoires dans l'espace des phases.

Définition 6 "Système dissipatif"

Un système dissipatif est un système dont le volume de l'espace des phases diminue au cours du temps. Du fait de cette diminution du volume de l'espace des phases, un système dissipatif est généralement caractérisé par l'existence d'un attracteur. Un système non dissipatif est qualifié de conservatif ou hamiltonien

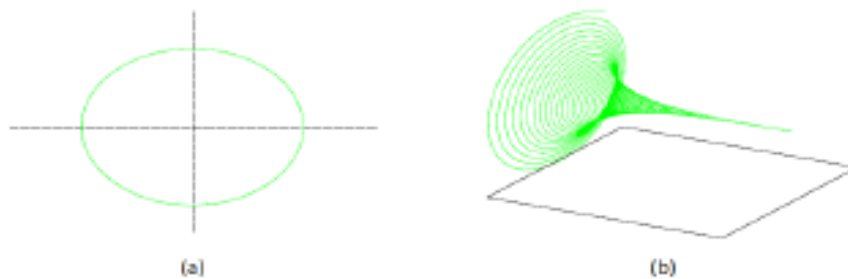


Figure1 : (a) Système conservatif (b) Système dissipatif

Définition 7 : "Equivalence topologique :

Les flôts $\phi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ pour deux système autonome différent sont dit topologiquement équivalents s'il existe une application bijective $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme tel que : $h(\phi(t, x_0)) = \psi(t, h(x_0))$

Définition 8 : "Attracteur" [27]

L'attracteur est la limite asymptotique des solutions partout de toutes les conditions initiales situées dans son bassin d'attraction.

Définition 9 : "*Bassin d'attraction*"[27]

Bassin d'attraction est l'ensemble des points tels que la trajectoire de phases qui en est issue tende vers un attracteur à temps élevé

1.3.2 Système discret :

Définition 10 : *On appelle système dynamique discret tout système d'équations algébriques récurrentes défini par :*

$$X_{K+1} = F(X_K, \mu) \quad (1.2)$$

où : F est la fonction matricielle de récurrence, $X_K \in U \subseteq R^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k et $v \in V \subseteq R^p$ le vecteur des paramètres et $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 11 : *La notion d'orbite en temps discret est équivalente à celle de trajectoire en temps continu.*

Contrairement aux systèmes en temps continu systèmes récurrents les plus simples, même unidimensionnels, peuvent produire des solutions chaotiques (L'application logistique, en est un célèbre exemple)

1.3.3 Solutions des systèmes dynamiques :

Définition 12 : "*Solutions d'équilibre*" : *Soit un système dynamique autonome, la solution d'équilibre x_e est définie par :*

$$\dot{x}_e = f(x_e) = 0 \quad (1.3)$$

Les points de l'espace d'état vérifiant cette relation sont appelés points singuliers.

Une solution d'équilibre correspond à un point fixe dans l'espace d'état. Ce point fixe n'est pas nécessairement stable. Lorsqu'il est stable, le point fixe est un attracteur.

Définition 13 : "*Solutions périodiques*" : *Soit $x(t, x_0)$ la solution d'un système dynamique autonome ou non. $x(t, x_0)$ est une solution périodique si et seulement si :*

$$\exists \tau > 0, \forall t \quad x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0)$$

Définition 14 : "*Solutions quasi - périodiques*" : *Soit : $x(t, x_0)$ une solution du système dynamique (1.1) et soit $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble fini de réels linéairement indépendants.*

On dit que $x(t, x_0)$ est une solution quasi périodique de (1.1) si elle est périodique pour chacune des périodes T_i de T . La solution $x(t, x_0)$ est également dite n -périodique.

Définition 15 : " *Solution Chaotique* " : Une solution chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une solution périodique ou quasi - périodique, ni une solution s'échappant vers un infini (c'est - à - dire on reste dans un borne) .

1.4 Stabilité :

La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires.

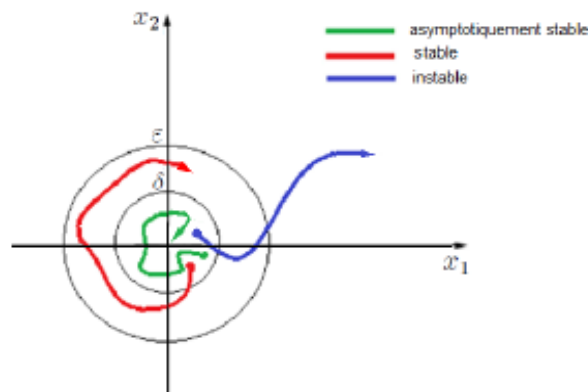


Figure2 : Différents types de stabilités de Lyapunov

1.4.1 Différents types de stabilité

Nous allons indiquer maintenant quels sont les différents sens possibles que l'on peut donner à la stabilité d'une solution.

Stabilité au sens de Lagrange

La solution $x(t)$ est stable au sens de Lagrange si elle est borné :

$$\exists L > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall t, \|x(t)\| \leq L$$

Stabilité au sens de Poincaré

La solution $x(t)$ de la condition initiale x_0 à $t = t_0$ est stable au sens de Poincaré si la trajectoire du flôt initié avec $x_0 + \delta x_0$ à $t = t_0$ reste dans un tube de rayon ϵ autour de la trajectoire de $x(t)$.

Stabilité au sens de Lyapunov

La solution $x(t)$ est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que toute solution $y(t)$ vérifiant $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ implique que $\forall t \geq t_0, \|y(t) - x(t)\| < \epsilon$.

Stabilité asymptotique

La solution $x(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si elle est stable au sens de Lyapunov et si de plus, $0 < \delta_0 < \delta$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Stabilité structurelle

On parle de stabilité structurelle si une petite perturbation des équations du système implique une topologie du flôt équivalente. Un système structurellement stable est également dit *robuste*.

1.4.2 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) :

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système (1.1) autour de l'équilibre x_e . Plus précisément, on examine les valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée à l'équilibre

Soit le système autonome suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

tel que : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Pour simplifier les notations, on suppose que $f(x_e) = 0$ et on s'intéresse au comportement autour de ce point d'équilibre.

On fait également l'hypothèse que f est différentiable en x_e .

Au voisinage du point x_e , le système (1.1) est proche du système linéaire (1.4) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Df(x_e) x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où : Df est la matrice Jacobienne de f

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Il s'agit de distinguer ces points fixes par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé (1.5) associé au système différentiel initial (1.4) en ce point. Pour cette raison on va supposer que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont définies par: $\lambda_j = \text{Re}(\lambda_j) + i\text{Im}(\lambda_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$

La solution $x(t)$ du système linéarisé s'écrit à partir d'une base des fonctions indépendantes:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n C_j e^{\lambda_j t} v^j$$

Où: v^j représente le vecteur propre associé au sens abilité à λ_j et $C_i \in \mathbb{R}$: dépend des conditions initiales.

un point fixe est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres λ_j ($i = 1, 2, \dots, n$) n'ont pas de partie réelle nulle. En revanche, s'il l'une des valeurs propres à une partie réelle nulle, le point fixe est dit non hyperbolique.

Donc les valeurs propres λ_j définissent l'état de stabilité. Et on va citer les natures de ces points fixes en étudiant la nature des λ_i :

- Si $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$; le point fixe est asymptotiquement stable. On dit que le point est un point attractif dit également puits.
- Si $\text{Re}(\lambda_j) > 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, le point fixe est instable. On dit que le point est un point répulsif dit encore source.
- Si il existe i et j tel que $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, et $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ le point fixe est non stable on dit que le point est un point selle ou col.
- Si il existe i tel que $\text{Re}(\lambda_i) = 0$, et $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\forall i \neq j$ le point fixe est stable (et si $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, $\forall i \neq j$ le point fixe est instable).
- Si $\text{Re}(\lambda_j) = 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$ le point fixe est stable. On dit que le point est un centre ou elliptique.

Dans le cas un et deux le point fixe s'appelle un noeud si $\text{Im}(\lambda_j) = 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$, et foyer s'il existe i tel que $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$

Enfin, un point fixe est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres λ_j ($i = 1, 2, \dots, n$) n'ont pas de partie réelle nulle. En revanche, s'il l'une des valeurs propres à une partie réelle nulle, le point fixe est dit non hyperbolique.

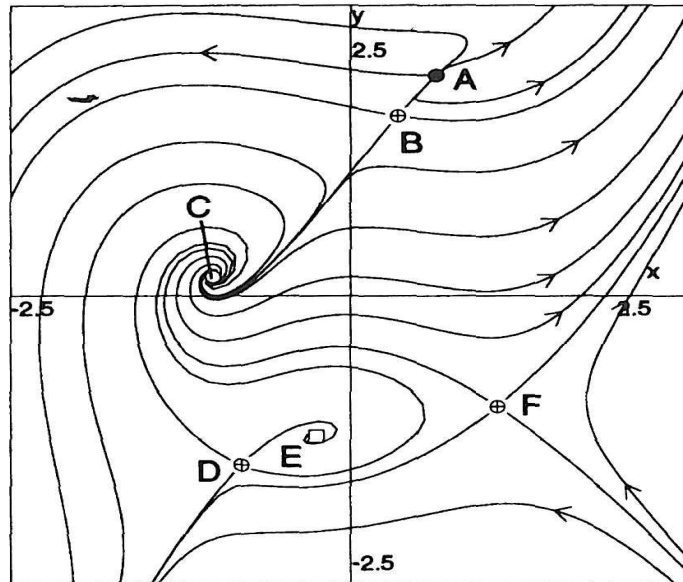


Figure 3 : A noeud répulsif-B col-C foyer répulsif-D
col-E foyer attractif-F col

1.4.3 Deuxième méthode de Lyapunov (méthode directe)

Comme nous venons de le voir, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser que très partiellement la stabilité des équilibres. De plus, il ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La deuxième méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en revanche, a une portée beaucoup plus générale. Elle repose sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui décroît le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction.

Définition 16 : (*Fonction définie positive*)

Une fonction scalaire $V(x)$ continûment différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région autour de l'origine si :

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(x) &> 0, \forall x \in \Omega \text{ tel que } x \neq 0 \end{aligned}$$

Si l'hypothèse(2) est remplacée par $V(x) \geq 0$ alors la fonction est dite définie semi - positive.

Définition 17 : (*Fonction quadratique définie positive*)

La fonction quadratique $V(x) = x^T H x$, où $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive, si toutes les valeurs propres de la matrice H sont strictement positives.

Définition 18 : (*Fonction de Lyapunov*)

Soit x_e un point fixe de (3). Soit $V : W \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable définie sur un voisinage W de x_e telle que $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_e$. Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$$

La fonction $V(x)$ est appelée fonction de Lyapunov

Théorème 19 . (*Lyapunov*)

- Si $\dot{V} = 0$ dans $W - \{x_e\}$ alors x_e est stable ;
- Si $\dot{V} < 0$ dans $W - \{x_e\}$ alors x_e est asymptotiquement stable ;
- Si $\dot{V} > 0$ dans $W - \{x_e\}$ alors x_e est instable

Ce théorème offre une condition de stabilité suffisante, mais ne guide pas l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure à l'existence d'une telle fonction. Une fonction de Lyapunov candidate est donc une fonction définie positive, dont la décroissance est testée autour du point d'équilibre afin de garantir la stabilité du système impliqué. L'étude des méthodes permettant de construire cette fonction pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies [28, 29, 30]. Les formes quadratiques sont généralement les plus utilisées pour prouver la stabilité par la méthode de Lyapunov ; en particulier les fonctions définies positives qui sont les premières intégrales du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique conservateur).

1.4.4 Stabilité des points fixes : théorème de Hurwitz :

La stabilité du point fixe est généralement étudiée en utilisant le théorème de Lyapunov 1899 [31] qui stipule que, si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système, évaluées en ce point sont strictement négatives, le point fixe est stable. Une autre méthode suggérée par Hurwitz 1893 [32] consiste à exprimer le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle comme : $a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$ où les coefficients a_i sont fonction des coordonnées du point fixe et des paramètres du système dynamique considéré. Les racines de ce polynôme ont des parties réelles négatives et tous les déterminants suivants sont positifs.

$$D_1 = a_1, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_n \end{vmatrix}$$

où : $a_i = 0, i > n$

On peut démontrer en dimensions deux, trois puis n que la “ positivité ” stricte de ces déterminants conduit à la “ négativité ” stricte des parties réelles des valeurs propres du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle. Par conséquent, les critères de stabilité de Lyapunov et Hurwitz sont strictement équivalents

1.5 Bifurcation :

On prend à nouveau en compte le système autonome (1.4) où la matrice jacobienne Df et ses valeurs propres associés λ_i dépendent du vecteur v regroupant l'ensemble des paramètres de contrôle. Alors qu'on fait évoluer lentement un ou plusieurs de ces paramètres, on suppose qu'un point fixe du système (point singulier) devient non hyperbolique à un certain point de l'espace de contrôle d'état. Alors, si de part et d'autre de ce point on observe un changement qualitatif, c'est que ce point est un point de bifurcation.

Si on démarre avec un ensemble de paramètres tels qu'on soit en présence d'un point fixe stable, la variation incrémentale d'un ou plusieurs paramètres peut faire perdre la stabilité de ce point fixe par le biais d'une des bifurcations suivantes :

- Bifurcation noeud-col (ou pli).
- Bifurcation fourche (sous-critique ou sur-critique).
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation de Hopf (sous-critique ou sur-critique).

Les trois premiers types de bifurcations correspondent à des bifurcations statiques où le point de bifurcation sépare des branches de points fixes. Les bifurcations de Hopf sont des bifurcations dynamiques où le point critique délimite dans l'espace de contrôle d'état des branches de points fixes et un cycle limite.

1.5.1 Bifurcations statiques

On considère les bifurcations statiques du système autonome (1.4) sous la variation d'un unique paramètre de contrôle : le scalaire v . Dans l'espace de contrôle d'état $x - \mu$, on observe une bifurcation statique d'un point fixe au point (x_c, μ_c) , si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $f(x_c, \mu_c) = 0$. (le point (x_c, μ_c) est un point fixe).
- Df a une valeur propre nulle et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de (x_c, μ_c) . (ce point fixe est non hyperbolique)

Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes, si on se trouve en présence d'une bifurcation statique, on distinguera entre autres la bifurcation noeud-col pour laquelle les branches de solutions se rencontrent au point de bifurcation avec la même tangente contrairement aux bifurcations fourche ou transcritique.

Bifurcation noeud col :

C'est la bifurcation liée à l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) = \mu + \alpha x^2(t)$$

Avec α et μ les paramètres de contrôle.

supposons que $\alpha < 0$ (on parle de Bifurcation sur critique). Pour un paramètre $\mu > 0$, il y a deux points d'équilibres, racine de $\mu + \alpha x^2(t) = 0$. si $\mu < 0$, il n'y a aucun point fixe.

Etudions la stabilité des points d'équilibres dans le cas où $\mu < 0$. Notons x_c l'un des deux points d'équilibres, on a donc $f(x_c) = 0$ on introduit une petite perturbation $u(t)$ ajouté au point fixe : $x(t) = x_c + u(t)$. Puis nous effectuons un développement de Taylor de f à l'ordre 1 au voisinage de x_c

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = f'(x_c)u(t) + O(u^2)$$

En posant $\lambda = f'(x_c)$, l'équation différentielle obtenue $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ s'intègre en $u(t) = u(0)e^{\lambda t}$.

l'étude de la stabilité est simple : si $\lambda > 0$ alors le points d'équilibre est instable et si $\lambda < 0$ alors le point stable. Ainsi la stabilité des points d'équilibre dépend de la pente de la fonction f des points considérés.

Toutes les informations peuvent être résumées sur le diagramme de bifurca-

tion dans le plan (x, μ)

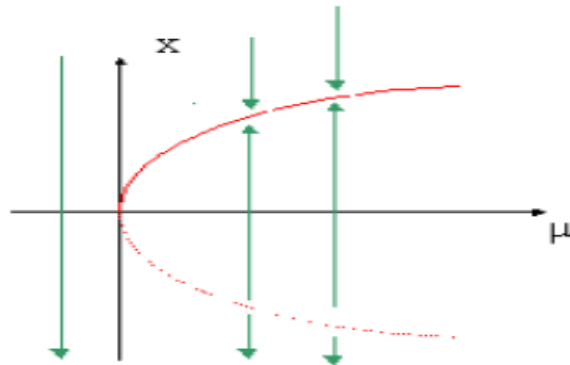


Figure 4 : Diagramme de bifurcation noeud col.

En pointillé, le point fixe est en trait plein il est instable.

supposons que nous ayons un potentiomètre permettant de faire varier le paramètre μ . Dans un premier temps, le système est placé sur une valeur μ positive. L'équilibre du système dynamique admet alors deux points d'équilibre : l'un est stable (attracteur), l'autre est instable. En faisant tendre μ vers 0 sans l'atteindre, on voit que les deux points fixes se rapprochent. Pour $\mu = 0$, ils fusionnent en un seul point fixe appelé semi-stable. Il y a donc perte du point attracteur, le système s'est déstabilisé. Alors quand μ devient strictement négatif, il y a disparition de tout point fixe.

si $\alpha > 0$ (on parle de bifurcation sous-critique); l'étude est symétrique.

Bifurcation transcritique :

La forme normale est le suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \alpha x^2$$

Avec α et μ les paramètres de contrôle

si $\alpha > 0$, il apparaît deux solutions semblent triviales $x = 0$ et celle $x = \mu/\alpha$. Il est facile de voir que la première est stable pour $\mu < 0$ alors que l'autre n'est pas. Cette situation s'inverse quand $\mu > 0$. Parfois, il dit qu'il y a eu un «échange de stabilité», mais c'est une expression souvent utilisée pour d'autres concepts

La solution qui apparaît pour $\mu < 0$, est appelée solution sous critique car le système a perdu sa stabilité avant le seuil d'instabilité linéaire, inversement la branche $x > 0$, est atteinte par une bifurcation supercritique, après le seuil

d'instabilité linéaire

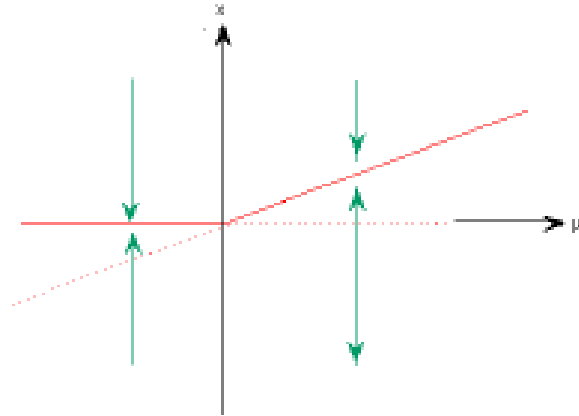


Figure 5 : Diagramme de bifurcation transcritique.

si $\alpha < 0$; l'étude est symétrique.

Bifurcation fourche :

C'est la bifurcation liée à l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) = \mu x + \alpha x^3(t)$$

Avec α et μ les paramètres de contrôle. on supposera $\alpha < 0$ (cas super-critique).

En appliquant la méthode utilisée pour la première bifurcation, nous présentons directement le diagramme de bifurcation dans le plan (x, μ)

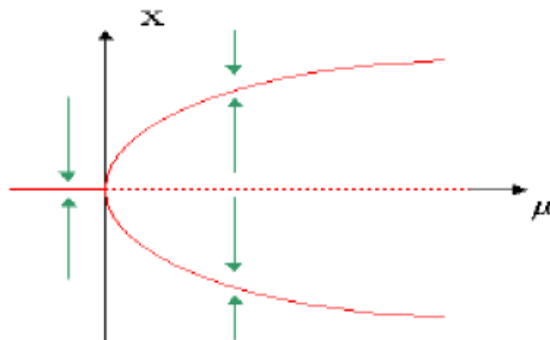


Figure 6 : Diagramme de bifurcation fourche.

On part d'un système où le paramètre μ est négatif le système possède alors un point d'équilibre stable ($x = 0$) attracteur. Lorsque nous faisons augmenter progressivement μ

jusqu'à la valeur 0, le système déstabilisé,

le point d'équilibre perd sa stabilité, il y a bifurcation. En augmentant encore μ , on voit alors apparaître deux points d'équilibre stables. Il y a une symétrie du centre 0 des solutions, si $x(t)$ est la solution du système alors $-x(t)$ est aussi un. Il y a un doublement du point d'équilibre

1.5.2 Bifurcations de Hopf

On considère les bifurcations de Hopf du système autonome (1.4) sous la variation d'un unique paramètre de contrôle : le scalaire μ . Dans l'espace de contrôle d'état $x - \mu$, on observe une bifurcation de Hopf au point (x_c, μ_c) , si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $f(x_c, \mu_c) = 0$. (le point (x_c, μ_c) est un point fixe);
et que sa matrice jacobienne possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées λ_1 et λ_2 : $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ telles que :
- pour une certaine valeur d'un paramètre $v = \mu_c$,

$$\alpha(\mu_c) = 0, \left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_c} \neq 0$$

- les $n - 2$ autres valeurs propres évaluées en v aient leur partie réelle strictement négative.

Si ces hypothèses sont satisfaites alors $((x_e(\mu_c); \mu_c)$ est un point de bifurcation (de Hopf) de l'état d'équilibre $x_e(\mu_c)$ vers un cycle limite. C'est pourquoi les bifurcations de Hopf sont classées dans les bifurcations dynamiques.

Et c'est la bifurcation liés à l'équation dans le plan complexe :

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t)) = (\mu + i\omega) z(t) - |z(t)|^2 z(t)$$

Pour étudier cette équation, nous écrivons la variable z dans l'image $z(t) = r(t)e^{i\theta}$, $r = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan(y/x)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\varpi y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \frac{dy}{dt} = \varpi x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{cases}$$

on a :

$$\begin{cases} r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \\ r^2 \frac{d\theta}{dt} = -y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

L'équation est exprimée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

La première équation n'est rien d'autre qu'une bifurcation fourche de paramètre de contrôle μ

Nous partons d'un système où le paramètre μ est négatif. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque $\mu = 0$, ce point d'équilibre perd sa stabilité. Puis lorsque $\mu > 0$, il se forme alors une trajectoire périodique stable ou cycle limite.

La bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire.

On part d'un système dans lequel le paramètre μ est négatif. Le système a un point fixe stable qui correspond ici à un point de puits : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque $\mu = 0$, ce point est instable. Ensuite, lorsque $\mu > 0$, une trajectoire périodique stable ou un cycle limite se forme.

La bifurcation de Hopf correspond à l'instabilité d'oscillation.

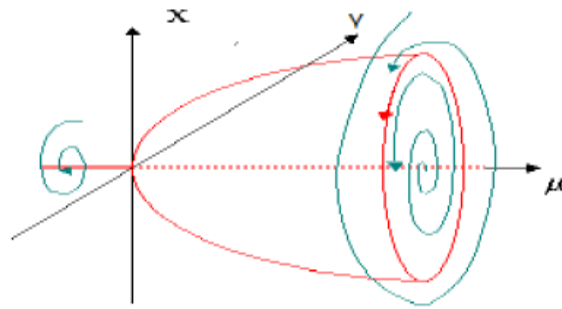


Figure 7 : Diagramme de bifurcation Hopf.

1.6 Transition vers le chaos :

1.6.1 Cascade sous-harmonique :

Egalement connue sous la nom de cascade sous-harmonique, la cascade de dédoublement de période est caractérisée par une succession de bifurcation du type dédoublement de période en faisant évoluer un paramètre de contrôle v . À chaque franchissement d'une bifurcation, on trouve un régime de période double de celle du régime précédent. Cette série de bifurcation peut alors conduire à une période arbitrairement grande avant d'atteindre un point d'accumulation où émerge une solution chaotique. Plus on s'approche du comportement chaotique, et plus l'intervalle de paramètre $v_{i+1} - v_i$ est faible où les v_i sont les points de bifurcation successifs. Le ratio de ces longueurs c'est-à-dire $(v_{i+1} - v_i) / (v_i - v_{i-1})$ converge vers la constante de Feigenbaum, soit environ 4.6692016...

Autrement dit :

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{v_{i+1} - v_i} \rightarrow 4.6692016\dots$$

En guise d'illustration nous avons tracé-ci-contre l'évolution de la solution de $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ en fonction du paramètre a . On observe bien dans ce cas une cascade sous harmonique qui conduit rapidement au chaos.

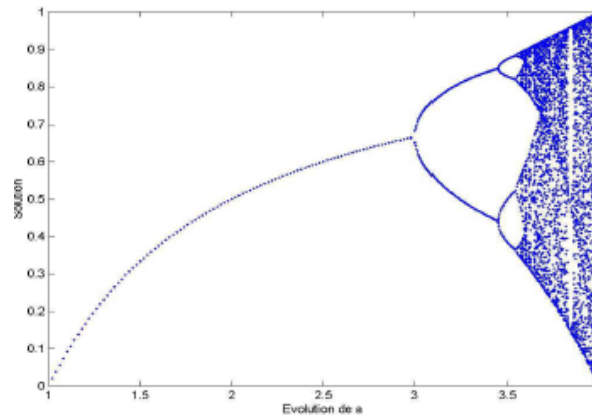


Figure 8 : Une cascade de bifurcations.

1.6.2 Intermittence :

une intermittence est une sorte de régime périodique (ou quasi-périodique) avec des "bouffées chaotique". Ce type de phénomène est particulièrement étudié en mécanique des fluides où un écoulement laminaire peut être interrompu par turbulences donnant lieu à une succession désordonnée laminaire peut être interrompu par des turbulences donnant lieu à une succession désordonnée de phases turbulentes et de phases de relaminarisation. soit un système dynamique où v désigne le paramètre de contrôle et qui possède un attracteur périodique pour v inférieur à une valeur critique v_c . Pour $v < v_c$, le système oscille de manière régulière et reste stable pour de faibles perturbations. En revanche si v devient légèrement supérieur à v_c , la réponse du système présente de longues phases avec des oscillations qui semblent régulières et proches du comportement obtenu avec $v < v_c$ (phase laminaire), mais ces oscillations sont perturbées de manière intermittente par des comportements chaotiques et cela à des intervalles irréguliers. En augmentant v les phases laminaires deviennent de plus en plus petites, difficiles à distinguer et peuvent éventuellement disparaître laissant place à un comportement complètement chaotique.

1.6.3 Scénario de Ruelle et Takens :

Ce scénario est en contraste avec le scénario proposé par Landau et Hopf, selon lequel un point fixe donnait naissance à un cycle limite par une bifurcation de Hopf surcritique, qui fait apparaître un régime quasi-périodique à deux fréquences par une deuxième bifurcation de Hopf et ainsi de suite jusqu'à l'obtention du chaos par une séquence infinie de bifurcation de Hopf. Le scénario de Ruelle et Takens montre au contraire que l'attracteur étrange peut apparaître dès l'apparition d'un régime quasi-périodique à trois fréquences.

1.7 Caractérisation du chaos :

1.7.1 Portrait de phase

On peut décrire avec précision le comportement du système dynamique en le projetant dans l'espace paramétrique des phases. Son évolution dynamique sera alors pleinement représentée, en traçant les courbes paramétriques dans l'espace des phases avec deux ou trois variables correspondant aux variables les plus intéressantes de l'espace des phases. On peut déduire les comportements suivants :

- En dimension 2, la trajectoire représentée dans l'espace de phase est le cycle limite.
- En dimension 3, les trajectoires représentent dans l'espace de phase sont des tores ou attracteurs quasi - périodiques
- Dans un espace de phase tridimensionnel, les trajectoires relativement irrégulières et complexes (nous parlons d'attractants étranges) représentent un comportement chaotique. Ce phénomène s'explique par les principes d'expansion, de compression et de pliage, qui sont devenus une caractéristique d'attractifs particuliers. L'attracteur désordonné a vraiment la propriété intéressante suivante : la trajectoire ne passe jamais par le même état. Cela signifie, entre autres, que ce chemin passe par un nombre infini d'états

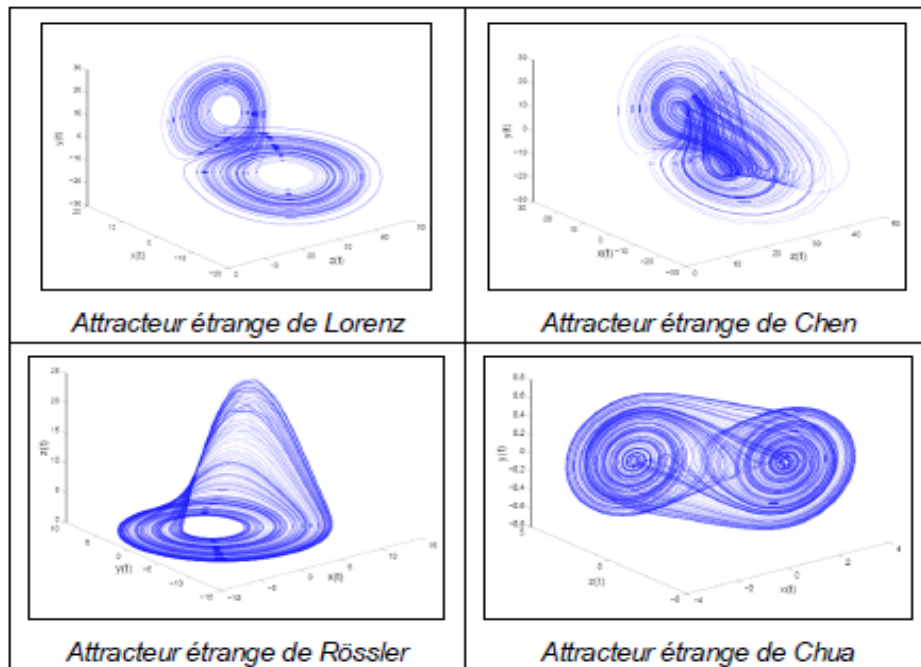


Figure 9 : Quelques attracteurs étranges

1.7.2 Sensibilité aux conditions initiales

Une autre caractéristique qui identifie un comportement chaotique est la sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales. Indépendamment de la proximité de deux états initiaux, les trajectoires résultantes divergent rapidement l'une de l'autre. Cependant, ils restent liés au même attracteur, donc confinés dans un espace limité. Il est notamment clair que, la moindre erreur ou la simple imprécision sur la condition initiale, interdit de décider à tout moment quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, par conséquent, de faire une prédiction autre que statistique sur l'avenir à long terme du système. Ainsi, bien que nous ayons affaire à des systèmes déterministes, il est impossible de prévoir leur comportement à long terme. Illustrons ce phénomène de SCI par une simulation numérique du système de Lorenz

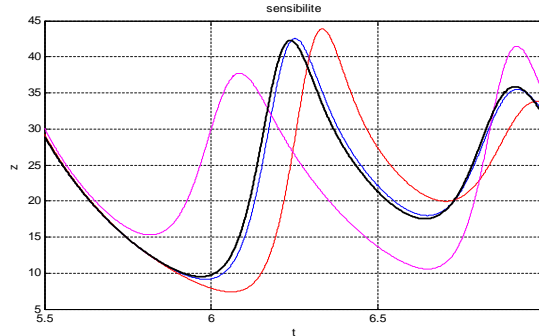


Figure 10 : Evolution de la coordonnée z pour quatre conditions initiales proches . .

1.7.3 Exposants de Lyapunov

Cas d'une application unidimensionnelle :

Soit l'application discrète

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Choisissons deux conditions initiales très proches. Soit x_0, \tilde{x}_0 et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues

soit les petites variations δx_0 de la condition initiale x_0 telle que :

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$$

δx_0 est supposé infinitésimal. Après n itérations, l'écart initial sera donc amplifié d'un facteur $\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right|$. Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1.

Puisque :

$$\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_{n-1}} \right| \left| \frac{\delta x_{n-1}}{\delta x_{n-2}} \right| \cdots \left| \frac{\delta x_2}{\delta x_1} \right| \left| \frac{\delta x_1}{\delta x_0} \right|$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = \ln \left(\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_{n-1}} \right| \left| \frac{\delta x_{n-1}}{\delta x_{n-2}} \right| \cdots \left| \frac{\delta x_2}{\delta x_1} \right| \left| \frac{\delta x_1}{\delta x_0} \right| \right)$$

En calculant d'abord la moyenne puis en faisant tendre vers l'infini, on obtient :

$$\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{\delta x_k}{\delta x_{k-1}} \right|$$

La distance entre deux trajectoires après une itération est donnée par :

$$|\delta x_1| = |\tilde{x}_1 - x_1| = |f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0)| = |f'(x_0)| |\delta x_0|$$

où : f' désigne la dérivée de f .

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta x_1}{\delta x_0} \right| &= |f'(x_0)| \\ \left| \frac{\delta x_2}{\delta x_0} \right| &= |f'(x_1)| |f'(x_0)| \\ &\vdots \\ \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| &= |f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \dots |f'(x_0)| \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})|$$

Finalement :

$$\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})|$$

Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif, donc $\ln \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| > 0$ par conséquence : $\left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| > 1$

L'écart infinitésimal du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si l'exposant de Lyapunov est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

Il existe une formation équivalente dans le cas des systèmes continus σ se présente comme la moyenne temporelle du taux local de divergence $\ln \left(|f'(x)| \right)$

Cas d'une application multi-dimensionnelle :

Considérons maintenant l'application F définie par :

$$X_{k+1} = F(X_k)$$

Le vecteur des n distances composante par composante entre les deux trajectoires après une itération est donné par :

$$\delta X_1 = J_0 \delta X_0$$

Où : J_0 désigne la matrice jacobienne de F , évoluée en X_0
 Après k itérations, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta X_k &= (J_{k-1} J_{k-2} \dots J_1 J_0) \delta X_0 \\ \delta X_k &= \left(\prod_{j=0}^{k-1} J_{k-j-1} \right) \delta X_0 \end{aligned}$$

Notons $\Lambda_i^{(k)}$, $i = (1, \dots, n)$ les valeur propres de ce produit à k itérations, on définit les exposants de lypunov σ_i , $i = (1, \dots, n)$ de la mqnière suivante :

$$\sigma_i = \frac{1}{k} \ln \left| \Lambda_i^{(k)} \right|$$

Dans les systèmes continus [33] les exposants de Lyapunov σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) selon qu'il est positif ou négatif, en expansant ou en contractant le flôt selon les directions propres. Leurs signes distinguent la signature de Lyapunov, ils mesurent les taux exponentiels de deux trajectoires convergeant au début pour que en moyenne, un volume initiale se développe selon la loi du type :

$$V = V_0 \exp((\sigma_1 + \sigma_2 + \dots \sigma_n)t) = V_0 \exp\left(\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i t\right)$$

on a :

1. $\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i = 0$ le système est conservatif,
2. $\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i < 0$ le système est dissipatif :

Dans un système conservatif ou dissipatif nous pouvons trouver un attracteur chaotique en ayant au moins un exposant de lypunov positif, et nous ne pouvons pas avoir un attracteur chaotique en moins de deux dimensions.

3. $\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_i > 0$, nous ne pouvons pas trouver un attracteur chaotique

Ces exposants fournissent des informations directes sur la dynamique du système, et permettent donc de mesurer le chaos. Par exemple, pour le système de trois dimensions , la seule possibilité d'un attracteur chaotique est ceci : $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$; avec une condition supplémentaire de stabilité du chaos : $\sum_{i=1}^{i=3} \sigma_i < 0$.

Vous pouvez avoir plusieurs exposants positifs pour un système de dimension supérieur à 3 ; c'est ainsi que pour un système du quatrième dimensions , nous avons trois possibilités, résumées sur le tableau suivant :

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	observation
+	0	-	-	$0 > \sigma_3 \geq \sigma_4$ (chaos)
+	+	0	-	$\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$ (hyperchaos)
+	0	0	-	Double Tore chaotique

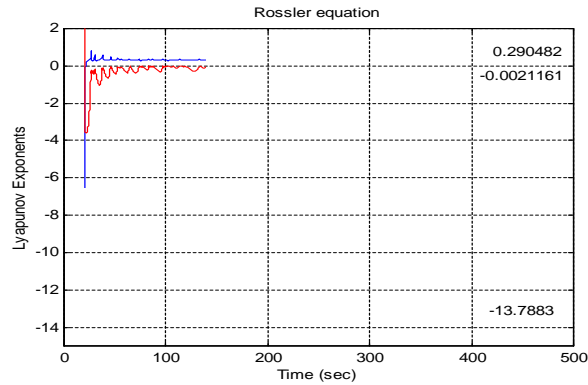


Figure 11 : Exposants de Lyapunov de Rössler

Dans [34] Wolf et Al. proposent un algorithme qui permet de calculer numériquement les exposants de Lyapunov pour un système dynamique. (voir figure 11)

1.7.4 Dimension de Lyapunov

Une autre méthode de classification du comportement asymptotique est la dimension de Lyapunov (DL). Si $\sigma_1 \dots \sigma_n$ sont les EL du système dynamique, classés dans l'ordre décroissant et j un entier tel que $\sigma_1 + \dots + \sigma_n \geq 0$, alors, pour les espaces de phase de dimension plus grande que 2, DL telle que proposée par Fredrickson et al. [34] sera définie comme suit :

$$DL = j + \frac{\sigma_1 + \dots + \sigma_j}{|\sigma_{j+1}|}$$

Une dimension non entière est considérée comme un critère d'existence d'un comportement chaotique. Les attracteurs chaotiques sont donc des fractales car ils possèdent une dimension fractionnaire.

1.7.5 Section et application de Poincaré

On appelle section de Poincaré du plan \wp l'intersection du plan \wp et de la trajectoire de l'attracteur dans l'espace des phases associé. La section Poincaré est un outil pour déterminer la présence du chaos. En effet, le chaos est caractérisé par une section de Poincaré sous la forme d'un nuage infini de points.

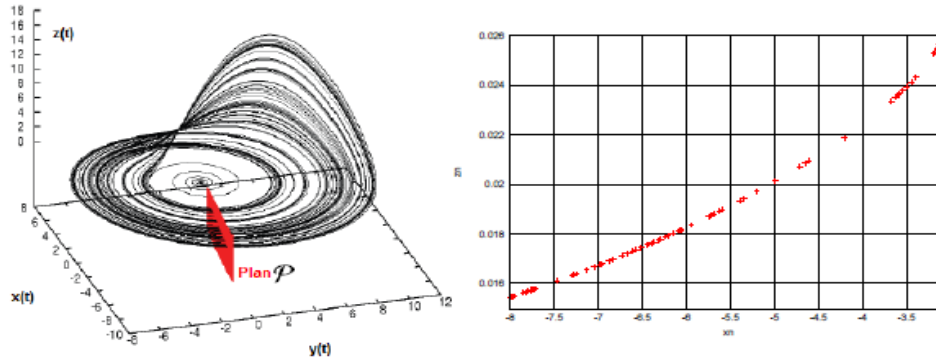


Figure 12 : Intersections de la trajectoire de l'attracteur de Rössler avec un plan φ

Un autre outil permettant de déterminer la présence du chaos est l'application de Poincaré (ou application du premier retour). Considérons un système dynamique de dimension n . Soit φ_t le flût de ce système. Soit x_0 le point où le flût φ_t intersecte la section de Poincaré et soit x un point du voisinage de x_0 , l'application de Poincaré p est définie par :

$$p(x) = \varphi_\tau(x)$$

où τ est le temps mis par le flût avec point initial x_0 pour retourner à P pour la première fois.

Et l'idée de Lorenz est venue de tracer une telle application en portant la valeur d'un maximum donnée en fonction de la valeur du maximum précédent, z_{k+1} en fonction z_k . Ces valeurs z_{max} sont les coordonnées z des points de la section de Poincaré réalisés en fonction de la surface d'intersection : $\dot{z} = xy - bz = 0$

La pente de la courbe $z_{k+1} = f(z_k)$ est bien partout supérieure à 1 en valeur absolue. Ceci indique qu'indépendamment du déterminisme inhérent à l'existence d'une relation bien définie entre z_{k+1} et z_k , la différence entre deux trajectoires voisines éloignées de δz est multipliée par la pente locale de la courbe. Cette amplification indéfinie des différences empêche la prévisibilité à long terme. Ainsi, quelle que soit la valeur initiale z_0 dans l'intervalle considéré, le comportement sera chaotique

Voici le graphe qui a convaincu Lorenz que dans le chaos de son système, il y avait de l'ordre. Idée qui s'est avérée par la suite très féconde.

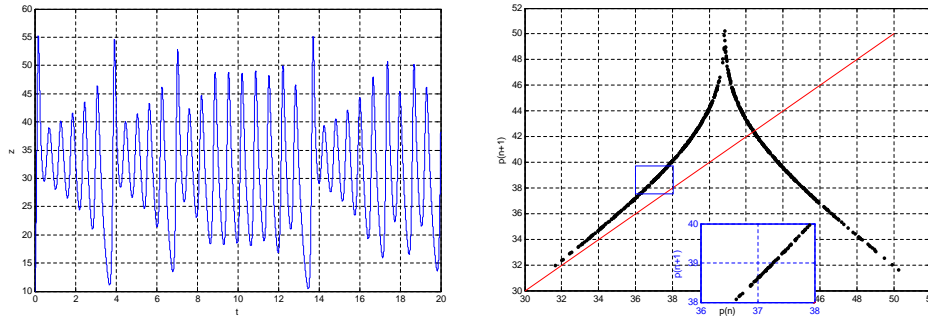


Figure 13 : Evolution de z en temps-Application de premier retour de système Lorenz

1.7.6 Diagramme de bifurcation :

Le diagramme de bifurcation résumé toute l'information sur la bifurcation et permet comprendre de ce fait comment évolue le système. C'est un outil efficace pour évaluer rapidement toutes les solutions possibles d'un système en fonction des variations d'un de ses paramètres.

La construction du diagramme de bifurcation d'un système autonome n'est pas très difficile, il s'agit d'un graphe dont le paramètre d'évolution du système dynamique est porté en abscisse, et dont les points d'une projection sur un axe d'une section de Poincaré associée à un plan φ et au paramètre en abscisse sont portés en ordonnées.

Puis le chaos est observé par rapport aux valeurs du paramètre d'évolution qui admettent un nombre infini de points en ordonnée.

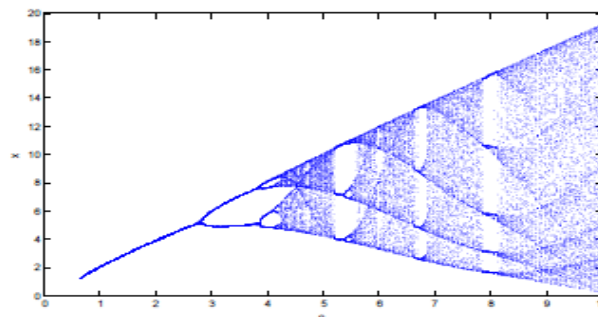


Figure 14 : Bifurcation du système chaotique de Rössler.

1.7.7 Représentation spectrale :

Le spectre du signal permet la caractérisation qualitative des solutions système dynamiques. En fait, à long terme, il est possible d'évaluer la complexité et fréquentielle du chaos. Pour cela, nous utilisons la transformée de Fourier numérique pour le signal. Cela donnera un spectre de fréquences qui forment un signal chaotique. Si ce spectre est continu, nous avons tendance à considérer le signal comme complètement non périodique. Le spectre du signal chaotique est vraiment très large.

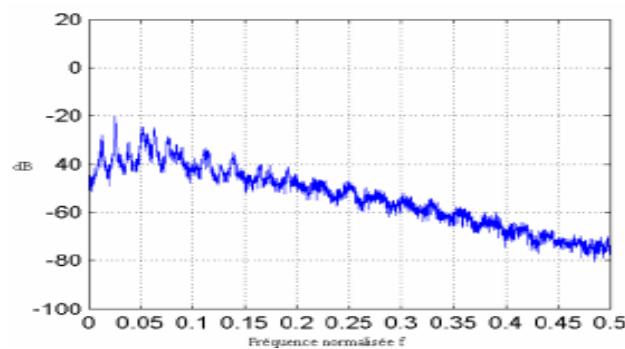


Figure 15 : Spectre du système chaotique de circuit de Colpitts

Le tableau ci-dessous résume de manière générale les différents cas.

Flot	Section de Poincaré	Dimension	Exposants (σ_i) de Lyapunov
Point	-	0	$\sigma_n \leq \dots \leq \sigma_1 < 0$
cycle	Un ou plus de points	1	$\sigma_1 = 0, \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_2 < 0$
tore	Une ou plus de cycle	2	$\sigma_2 = \sigma_1 = 0, \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_3 < 0$
K-tore	Un ou plus de K-tore	K	$\sigma_n = \dots = \sigma_K = 0, \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_{K+1} < 0$
Chaotique	Nuage de points	Fractal	$\sigma_1 > 0, \sum_{i=2}^n \sigma_i < 0$

1.8 Utilisation du chaos :

Pour plusieurs scientifiques, la théorie du chaos représente le premier pas vers l'unification des sciences. En effet, il s'agit d'une théorie dont les applications embrassent pratiquement toutes les sciences. Dans ce paragraphe nous présentons quelques applications pratiques du chaos.[35]

1.8.1 En communication :

L'image d'un modèle chaotique est structuré autour d'un squelette constitué d'un ensemble d'orbites périodiques instables (UPO), L'ensemble de ces UPO, dense dans l'attracteur, ainsi que les orbites transitant entre elles, forment l'attracteur chaotique . L'idée d'utilisations du chaos dans les sécurités communications à Multi-Utilisateurs sont souvent basées sur le contrôle et l'utilisation adéquate des (UPO), l'idée principale est de se servir du squelette d'un attracteur chaotique comme un réservoir d'ondes potentiels de communications. De cette façon, le nombre d'utilisateurs est pourvus chacun d'un code propre dans le même canal. L'intérêt des attracteurs multi-phis réside dans leur possibilité de permettre de générer des orbites plus courtes (par un chaos plus compliqué) et donc une transmission plus rapide des messages, ainsi qu'une meilleure sécurité dans les communications.

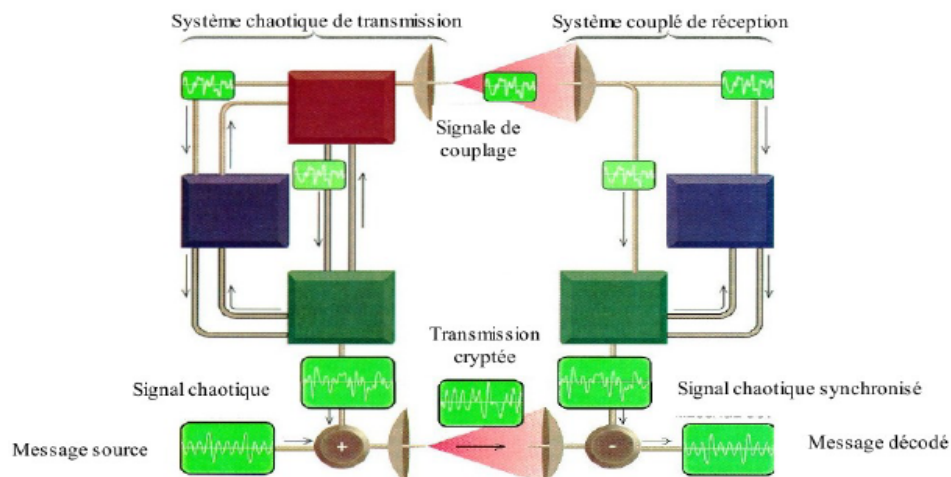


Figure 16 : Communication chaotique par le système de Pecora et Carroll

1.8.2 En biologie :

La théorie du chaos, en biologie, permet d'expliquer les différences de populations animales, et les oscillations cérébrales (électroencéphalogramme, c'est-à-dire un enregistrement graphique de l'activité électrique du cerveau au moyen d'électrodes placées sur le cuir chevelu d'un attracteur étrange

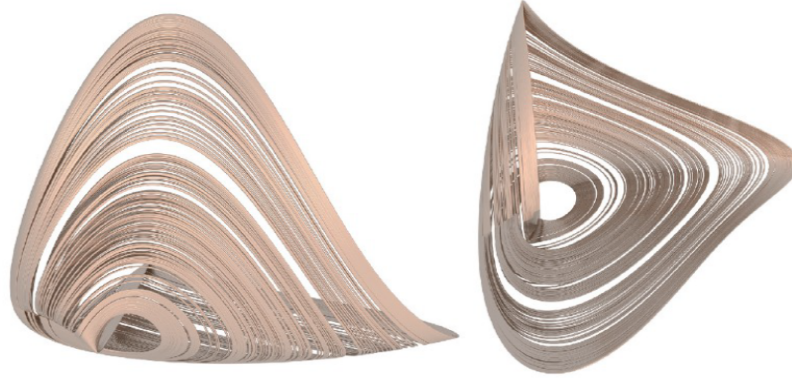


Figure 17 : Attracteur d'un model de cerveau (activité électrique)

Ainsi, les arythmies typiques de nombreuses maladies cardiaques s'expliquent également par la théorie du chaos. Dans un cœur normal, les impulsions électriques traversent les fibres musculaires de manière uniforme, forçant le ventricule cardiaque à se contracter et à pomper le sang. Une fois contractées, les fibres deviennent insensibles aux signaux électriques ; Parlez de la période réfractaire. Ainsi, des différences de durée de la période de résistance d'une région du ventricule à une autre seraient à l'origine d'une contractilité spastique à l'origine de la crise cardiaque.

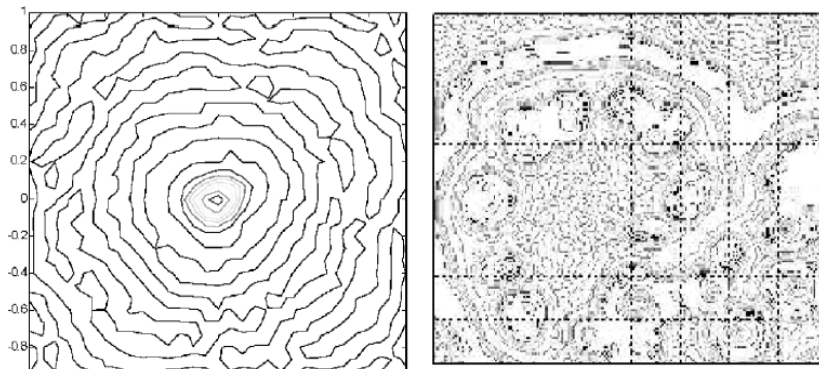


Figure 18 : L'espace de phase pour le modèle du cœur dans un cas régulier (à gauche) et dans cas chaotique (à droite)

1.8.3 En économie :

En économie, les mouvements commerciaux et les marchés financiers, ainsi que les cycles économiques, peuvent être expliqués en partie par la théorie du chaos, où les fractales ont un lien très étroit avec le hasard, et permettent donc la modélisation d'expériences aléatoires complexes, d'où l'utilisation en finance, modéliser les variations des cours boursiers.

1.8.4 En informatique :

En informatique, des méthodes de compression d'images ont été développées à partir de fractales. Les images synthétiques, au cinéma ou dans le domaine des jeux vidéo, sont de plus en plus réalistes, toujours grâce à des fractales. En effet, les objets fournis par la géométrie euclidienne sont peu susceptibles de représenter fidèlement le monde : voyons-nous souvent, dans la nature, des cercles ou des cubes parfaits ? Non, les formes de la nature répondent beaucoup plus facilement aux formes fractales.

1.8.5 En art :

Même dans le domaine de l'art, depuis les années 1980, la beauté des fractales a été exploitée et appréciée, et on a assisté à une prolifération d'expositions sur le thème de ces images fascinantes. Les images fractales ont un certain intérêt esthétique, mais on peut se demander si elles ont une autre utilité. Nous pouvons remarquer quelques fonctions remarquables des fractales dans différents domaines.

Les fractales sont des figures géométriques avec une propriété d'auto-similarité. Ainsi, nous observons des modèles similaires dans le dessin de la fractale quelle que soit l'échelle à laquelle nous la regardons. Donnons en exemple le fameux triangle de Sierpinski constitué d'un triangle équilatéral divisé en sous-triangles équilatéraux, eux-mêmes subdivisés en triangles équilatéraux, etc.

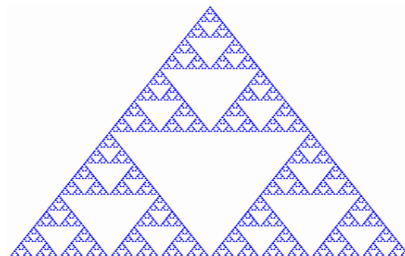


Figure 19 : Le triangle de Sierpinski, un exemple de fractale

1.9 Conclusion :

Ce chapitre est considéré comme un chapitre introductif, dans lequel on présente quelques éléments de base de l'analyse non-linéaire en rappelant des définitions utiles qui vont nous aider pour mieux comprendre ce qui suit et en introduisant quelques notions essentielles qui concerne la dynamique non-linéaire tels que les notions de stabilité et bifurcations, puis en distinguant trois types de scénarios vers le chaos et des caractéristiques donnant une idée pour l'étude du chaos et en définitive du chapitre par une présentation de quelques applications pratiques de la théorie du chaos

Chapitre 2

Calcul fractionnaire :

2.1 Introduction :

Le calcul fractionnel est une branche mathématique qui étudie les propriétés des dérivés et intégrales d'ordres non entiers (appelées dérivées et intégrales fractionnaires, brièvement différentiels) En particulier, cette discipline implique la notion et les méthodes de résolution d'équations différentielles impliquant des dérivées fractionnaires de la fonction inconnue (appelée équations différentielles fractionnaires). Le fait que le différentiel est un opérateur qui inclut à la fois des dérivés et intégrales d'ordre entier et en tant que cas particuliers, est la raison pour laquelle dans le calcul fractionnaire actuel devient très populaire et de nombreuses applications se présentent. Il existe de nombreuses versions de définitions pour les dérivés et intégrales fractionnaires . Dans ce chapitre, nous introduisons les histoires du calcul fractionnaire et nous mentionnons la définition de Grünwald-Letnikov et la définition formelle (Riemann-Liouville), sa forme modifiée (Caputo) et ses propriétés. ensuite nous présentons la technique de la transformée de Laplace de ses différentiels, et enfin nous donnons quelques exemples

2.2 Bref historique :

Le concept de calcul fractionnaire (CF) n'est pas nouveau et il est aussi ancien que le calcul lui-même (Ross, 1977a). L'histoire de CF remonte à plus de 300 ans. En 1695, Leibniz a posé une question à de l'Hôpital en échangeant une lettre : «La signification des dérivés peut-elle avec un ordre entier être généralisé en dérivé avec des ordres non entiers ? » Cette révolutionnaire question a suscité la curiosité de l'Hôpital et le 30 septembre 1695 il a répondu à Leibniz avec une autre question, "Et si la commande était de $\frac{1}{2}$? " Leibniz a répondu : «Ainsi, suit qui sera égal à $x\sqrt{dx} : x$ un paradoxe apparent, dont un jour utile les conséquences seront tirées. » De nos jours, de nombreux scientifiques considèrent le

30 septembre 1695 comme l'anniversaire du *FC* et de Gottfried Wilhelm Von Leibniz en tant que père du *CF* (Ross, 1977a).

Suite à cette discussion non conventionnelle, en 1730, Leonhard Euler mentionna *FC* quand il a étudié l'interpolation entre les ordres entiers d'une dérivée. Par conséquent, dès 1772, Lagrange a développé les exposants pour les opérateurs différentiels d'ordre entier (Lagrange, 1849) :

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y \quad (2.1)$$

Ce résultat peut être étendu à un ordre arbitraire. Cependant, les premières études systématiques de la CF ont été réalisées au début du 19th siècle. En 1812 (Laplace, 1820), Laplace définit une dérivée fractionnaire (*DF*) pour les fonctions au moyen d'une intégrale et il a été documenté pour la première fois dans un texte en 1819 (Lacroix, 1819).

Commencant par $y = x^m$ où m est un entier positif, Lacroix a développé le n th dérivé :

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n \quad (2.2)$$

En utilisant le symbole de Legendre Γ , pour la factorielle généralisée, il a écrit

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (2.3)$$

En remplaçant enfin $m = 1$ et $n = 1/2$, il a obtenu :

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}} \quad (2.4)$$

La définition suivante plus générale de l'opération fractionnaire a été présentée par J. B. J. Fourier en 1822 (Fourier, 1822). La définition de Fourier des opérations fractionnaires peut être obtenue à partir d'une représentation intégrale de f :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[p(x-\alpha) + \frac{n\pi}{2}] dp \quad (2.5)$$

En utilisant la notation actuelle, l'équation finale devient :

$$\frac{d^i}{dx^i} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} p^i \cos[p(x-\alpha) + \frac{i\pi}{2}] dp \quad (2.6)$$

À partir de l'équation ci-dessus, Fourier a déclaré : «Le nombre i qui apparaît dans ce qui précède l'équation peut être considérée comme n'importe quelle quantité, positive ou négative. » Cependant, les deux méthodes de généralisation de l'ordre arbitraire de Lacroix et Fourier n'a fourni aucun indice pour les applications.

Il a fallu attendre 1823 pour que les opérations fractionnaires soient utilisées dans toutes les applications. Abel fut le premier à appliquer CF pour résoudre une équation intégrale dans la formulation de la problème de tautochrone (Abel, 1826 ; 1881). L'exemple suivant décrit la tautochrone problème et sa solution brièvement.

Exemple 20 : (*problème Tautochrone*) : *Le problème consiste à déterminer la forme de la courbe dans le plan (x, y) de sorte que le temps nécessaire pour qu'un objet glisse vers le bas*

la courbe à son point le plus bas sous gravité uniforme est indépendante de sa position initiale (x_0, y_0) sur la courbe.

Si la particule glisse sans frottement, alors du principe de conservation de énergie on peut affirmer que la perte d'énergie potentielle lors de la descente de la particule est égal au gain de l'énergie cinétique de la particule. Il peut être écrit mathématiquement :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y_0 - y) \quad (2.7)$$

où m est la masse de la particule, s est la longueur de l'arc de la particule à partir du point de départ le long de la courbe et correspond à l'accélération gravitationnelle. Maintenant l'équation (2.7) devient :

$$\frac{ds}{\sqrt{(y_0 - y)}} = \sqrt{2g}dt \quad (2.8)$$

L'intégration (2.8) du point $t = 0$ de départ au temps $t = T$ donne :

$$\sqrt{2g}T = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-1/2} ds \quad (2.9)$$

Dans ce problème, le temps de la dispositif (considérer K) pour atteindre son point le plus bas est constant. Indiquant la longueur de l'arc s en fonction de la hauteur y , nous obtenons $s = F(y)$. Prendre le premier ordre dérivé de s , $ds = \dot{F}(y)dy$ changer les variables $y_0 \rightarrow x, y \rightarrow t$ et dénoter $\dot{F} = \sqrt{2g}f$ l'équation intégrale tautochrone devient :

$$k = \int_0^x (x - t)^{-1/2} f(t) dt \quad (2.10)$$

où la fonction f doit être déterminée. Diviser l'équation ci-dessus par $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x - t)^{-1/2} f(t) dt \quad (2.11)$$

Et puis en prenant $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ des deux côtés de l'équation (2.11), l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}} f(x) = f(x) \quad (2.12)$$

Enfin, la solution du problème de la tautochrone est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} K \quad (2.13)$$

qui était la réalisation notable d'Abel dans le *CF*. La première étude majeure de la *CF* a été réalisée par Joseph Liouville qui a développé deux différentes définitions des *DF* en 1832. Liouville (1832) dans sa première définition, supposait que la dérivée arbitraire d'une fonction peut être développée dans la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{a_n x} \quad (2.14)$$

est :

$$D^v f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a_n^v e^{a_n x} \quad (2.15)$$

où v est un dérivé d'ordre arbitraire qui peut être n'importe quel nombre rationnel, irrationnel ou complexe. Cette définition est restreinte dans les choix de v pour lesquels la série (2.14) converge.

Conscient de cette restriction, Liouville (1832) présente sa deuxième définition qui n'impose pas une telle restriction à l'art v . Cependant, dans sa deuxième définition, il est une restriction sur le type de fonction pour laquelle elle s'applique. Liouville a développé le définition d'ordre arbitraire s pour les fonctions de type $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$:

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(a + \alpha)}{\Gamma(a)} x^{-a-\alpha} \quad (2.16)$$

Bien que ses deux définitions comportent certaines restrictions, Liouville (1834) a fourni un nombre d'applications dans des problèmes géométriques, physiques et mécaniques

De plus, Liouville a fait un travail remarquable sur les fonctions complémentaires. Il (1834) a déclaré que l'équation différentielle ordinaire $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ J'ai la solution complémentaire

$y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$. donc $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ (u est arbitraire) devrait avoir un solution correspondante. Plus tard, Riemann a utilisé des fonctions complémentaires et a créé un

impact significatif sur le développement de *CF*.

Après Liouville, G. F. Bernhard Riemann a développé une théorie différente de l'intégration. Il a utilisé une généralisation d'une série de Taylor et en a déduit

la définition :

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_C (x-t)^{-1/2} f(t) dt + \Psi(x) \quad (2.17)$$

En raison de l'ambiguïté de la limite inférieure C de l'intégration, Riemann a introduit le fonction complémentaire $\Psi(x)$ Substituant $c = 0$ et sans le complémentaire la fonction $\Psi(x)$, l'équation (2.17) est appelée l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Puisque ni Riemann ni Liouville n'ont résolu le problème des fonction complémentaire, un certain nombre de mathématiciens célèbres ont axé leurs travaux sur résoudre ce problème. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, comme point de départ, N.Y. Sonin (1869) ont commencé à se différencier en ordre arbitraire. Plus tard, A. V. Letnikov (1872) prolongé l'idée donnée par Sonin. Ils ont tous deux utilisé une méthode intégrale de contour rapproché. En utilisant Formule intégrale de Cauchy pour les dérivées d'ordre entier.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (2.18)$$

Ils ont généralisé l'ordre fractionnaire en remplaçant la factorielle par la fonction gamma d'Euler $n! = \Gamma(n+1)$. Par conséquent, au lieu d'un circuit fermé, H. Laurent (1884) a utilisé un contour donné en circuit ouvert (boucle de Laurent) a développé la définition actuelle du Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

$${}^c D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_C (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.19)$$

Par la méthode standard des intégrales de contour. J. H. Davis (1924) a introduit pour la première fois la notation ${}^c D_x^{-\alpha} f(x)$ en tant qu'intégrale fractionnaire et remplacer α au lieu de $-\alpha$ en tant que DFs . Cependant, le changement de l'intégrale fractionnaire aux DFs n'est pas précis et les problèmes proviennent de intégrale $\int_C (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$, qui est divergente en général. Par suite analytique il peut être montré que :

$$\begin{aligned} {}^c D_x^{-\alpha} f(x) &= {}^c D_x^{n-\beta} f(x) = {}^c D_x^{nc} D_x^{-\beta} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_C (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

qui est maintenant connu sous le nom de dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville ($DFRLs$) (Ross, 1977a).

Où n est le plus petit entier supérieur à α et $0 < \beta = n - \alpha < 1$. ${}^c D_x^n$ est le opérateur de différenciation ordinaire de $\frac{d^n}{dx^n}$

Grünwald (1867) et Letnikov (1868) ont proposé une autre définition populaire des DF qui est fréquemment utilisé aujourd'hui. En utilisant l'idée de Liouville, pour utiliser la limite d'un quotient de différence en utilisant des différences

d'ordre fractionnaire, Grünwald et Letnikov ont obtenu :

$${}^{GL}D_x^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\alpha f(x)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh)}{h^\alpha} \quad (2.21)$$

qui est la définition des DF maintenant appelés dérivé fractionnaire de Grünwald – Letnikov (GL). Dans Eq. (2.21), t et α sont la limite supérieure et inférieure de la différenciation. $\binom{\alpha}{j}$ est le coefficient binomial généralisé. Sous certaines conditions, la définition GL est identique à la définition RL . Maintenant, la question peut se poser de savoir si la définition différente de les dérivés fractionnaires (RL et GL) sont identiques ou différentes puisque le concept de l'origine est la même. Cependant, la définition RL convient à la solution analytique et au la définition GL convient au calcul numérique.

À la fin du XIXe siècle, Oliver Heaviside (1892) montra à quel point les équations différentielles linéaires peuvent être résolues en utilisant des opérateurs généralisés. Il a dénoté l'opérateur $\frac{d}{dx}$ par la lettre p et dans plusieurs applications, il a utilisé une puissance arbitraire de p , principalement $p^{1/2}$. Aujourd'hui, sa collection d'œuvres porte le nom de calcul opérationnel Heaviside et sa méthode est utile dans la théorie de la transmission des courants électriques dans les câbles.

Au début du XXe siècle, CF était déjà devenue un domaine mathématique. De nombreux mathématiciens célèbres ont contribué au développement de CF , dont H. Weyl, Marchaud, Hardy, Littlewood, Watanabe, M. Riesz, B. S. Nagy, Erdèyi, Kober et M. Caputo. Outre les définitions RL et GL , au siècle dernier, plusieurs des définitions des DFs et de l'intégrale de fraction ont été proposées (Weilbeer, 2005), parmi dont le dérivé de Caputo a souvent été adopté dans des recherches récentes. Pour une fonction avec dérivée continue, dérivée de Caputo d'ordre α est définie comme (Caputo1967)

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\int_C^x (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{d^n}{dx^n} f(\tau) d\tau \right) \quad (2.22)$$

Un dérivé fractionnaire de Caputo (DFC) coïncide avec le dérivé fractionnaire RL ($DFRL$) dans le même ensemble de conditions initiales homogènes. DFC est plus populaire dans l'application

car les équations différentielles fractionnaires peuvent contenir les conditions initiales sous de telles formes

Comme $f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0)$ pour $DFRL$, cependant, il est nécessaire de spécifier les DF de la fonction au point initial (Podlubny, 1999 ; Almeida et Torres, 2011) CF et ses applications ont connu une croissance rapide au cours des dernières décennies. Par conséquent, la première conférence qui a uniquement contribué à la théorie et aux applications de la CF s'est tenue à

New Haven en 1974 (Ross, 1977b). Plusieurs livres ont été publiés dans le domaine de la CF dans le deux dernières décennies (Kilbas et al., 2006 ; Miller

et Ross, 1993 ; Minardi, 2009 ; Oldham et Spanier, 1974 ; Pidlubny, 1999 ; Samko et al.,1993). La revue «Fractional Calculus & Applied Analysis » concerne uniquement les sujets sur la théorie de la CF et ses applications (Weilbeer, 2005). D'une simple question de l'Hôpital à Leibniz en 1695, CF est devenu un sujet de recherche intéressant pour de nombreux chercheurs. Il a des application dans de nombreux domaines scientifiques et techniques.(voir [36])

2.3 Fonctions utiles :

Dans cette section, nous concentrons sur l'ensemble des fonctions que nous utiliserons en théorie fractionnaire.

2.3.1 Fonction Gama :

L'une des principales fonctions du calcul fractionnaire est la fonction gamma : La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, t > 0$$

- Cette intégral est convergence lorsque $\text{Re}(z) > 0$.
- $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < \text{Re}(z) \leq 1$
- $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- Un résultat important liée à cette fonction est le suivant :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^p}{p(p+1) \dots (p+n)}, \text{Re}(z) > 0$$

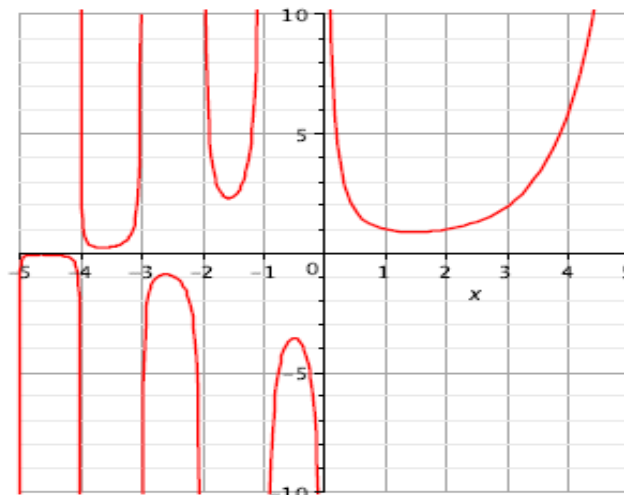


Figure 20 : Fonction de Gamma

2.3.2 Fonction Bêta :

Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

Soient z et w deux nombres réels tels que $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$. Alors la fonction bêta est la fonction à deux variables définie par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad t > 0$$

La relation entre ces deux fonctions est donnée dans la proposition suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

$$B(z, w) = B(w, z)$$

Grâce à la fonction Bêta, nous pouvons établir les deux relations importantes suivantes pour la fonction Gamma :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)}$$

$$\Gamma(z) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z)$$

2.3.3 Fonction Mittag-Leffler :

La fonction exponentielle $exp(z)$; joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 et désignée par la fonction suivante :

Soient α, β tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$. Alors on note par :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, z \in \mathbb{C}$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C}.$$

la fonction de Mittag-Leffler classique a deux paramètres et nous notons :

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

Lemme 21 Pour un entier positif $m, \lambda > 0$ et $\alpha > 0$, nous avons

$$\frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha, 1}(-\lambda t^{\alpha}) = -\lambda t^{\alpha-n} E_{\alpha, \alpha-n+1}(-\lambda t^{\alpha}), t > 0$$

et

$$\frac{d}{dt} (t E_{\alpha, 2}(-\lambda t^{\alpha})) = E_{\alpha, 1}(-\lambda t^{\alpha}), t > 0$$

Ainsi que

Théorème 22 Soient $0 < \alpha < 2, \beta$ est un réel arbitraire, et on suppose que μ est tel que :

$$\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \alpha\pi\}.$$

Alors il existe une constante $C = C(\alpha, \beta, \mu) > 0$ telle que :

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| = \frac{1}{1 + |z|}, \mu \leq \arg(z) \leq \pi$$

Nous donnons maintenant, la définition de la fonction de Mittag-Leffler généralisée

Définition 23 Soient $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ alors la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par.

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}^{\rho}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\rho)_n t^n}{\Gamma(\alpha n + \beta) n!}, t \in \mathbb{C}$$

$$(\rho)_n = \rho(\rho + 1)(\rho + 2) \dots (\rho + n - 1)$$

Remarque 24 . Notons que quand $\rho = 1$ nous avons :

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}^1(t) = E_{\alpha,\beta}(t)$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle

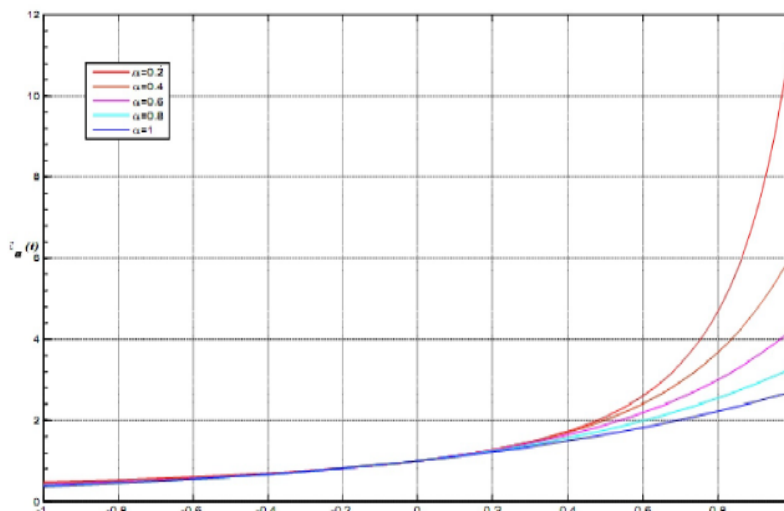


Figure 21 : Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre

Tout comme dans le cas des équations différentielles d'ordre entier, nous utilisons dans ce travail la transformée de Laplace afin de résoudre nos équations différentielles fractionnaires. C'est pour cela que nous donnons la définition suivante :

2.3.4 Transformée de Laplace :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. La transformée de Laplace de fonction est définie par :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = L[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, s \in \mathbb{C} \quad (2.23)$$

la fonction $f(t)$ est appelée fonction originale.

Définition 25 : Une fonction $f(t)$ est dite sectionnellement continue sur $[a; b]$; si elle est continue sauf en un nombre fini de points, et la discontinuité en ces points est de première espèce.

Définition 26 On dit que $f(t)$ est d'ordre exponentiel quand $t \rightarrow +\infty$ s'il existe des constantes positives M, b et t_0 telles que : $|f(t)| \leq Me^{bt}$ pour $t > t_0$: On dit alors que $f(t)$ est de l'ordre de e^{bt} quand $t \rightarrow +\infty$:

Théorème 27 Si $f(t)$ est sectionnellement continue sur chaque intervalle fini $[0; a]$; $a > 0$; et est de l'ordre de e^{bt} quand $t \rightarrow +\infty$; la transformée de Laplace existe pour $s > b$:

L'originale $f(t)$ peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace $F(s)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds; c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (2.24)$$

où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (2.24).

Le calcul direct de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (2.24) est "souvent compliqué", cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originale $f(t)$ qu'on cherche.

La transformée de Laplace de la convolution :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.25)$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$; qui sont égales à zéro pour $t < 0$; est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (2.26)$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

Une propriété utile dont on aura besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(t)$:

$$\begin{aligned} L\{f^{(n)}(t); s\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Qui peut être obtenue de la définition (2.23) par intégration par parties sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

$F(s)$	$L^{-1}(F(s)) = f(t)$
$\frac{1}{s^p}$	$\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$
$\frac{1}{(s+a)^p}$	$\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^p - a}$	$t^{p-1} E_{p,p}(at^p)$
$\frac{1}{s(s^p + a)}$	$E_p(-at^p)$
$\frac{a}{s(s^p + a)}$	$1 - E_p(-at^p)$
$\frac{1}{s^p(s-a)}$	$t^p E_{1,p+1}(at)$
$\frac{s^{p-q}}{s^p - a}$	$t^{q-1} E_{p,p}(at)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$

Dans ce tableau ,a et b \neq a, sont constantes réels , p, q > 0 arbitraires

2.4 Eléments de base du calcul fractionnaire :

2.4.1 Intégral fractionnaire :

Intégral fractionnaire de Riemann-Liouville :

Fonction définie sur $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, On considère l'intégrale

$${}_a J_t f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \forall t \in [a; b]$$

L'itération de $J^{(1)}$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} {}_a J_t^2 f(t) &= \int_a^t \left(\int_a^\xi f(\tau) d\tau \right) d\xi \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t d\xi \right) f(\tau) d\tau = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant J^n la nième itération de J , une récurrence directe

montre que :

$$\begin{aligned} {}_a J_t^n f(t) &= \int_a^t \int_a^{\tau_{n-1}} \cdots \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pour tout entier n Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann rendu compte que le second membre de (2.28) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière,

il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 28 : *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville : à gauche d'ordre $p > 0$ de f , est définie par :*

$$\forall t \in [a, b], {}_a J_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

Définition 29 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f , est définie par :*

$$\forall t \in [a, b], {}_t J_b^p f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(p)} \int_t^b (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

2.4.2 Dérivée fractionnaire :

Dérivée de Grünwald-Leitnikov :

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$ on a :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t) - f(t-h))$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f'(t) - f'(t-h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f'(t) - 2f'(t-h) + f'(t-2h)) \end{aligned}$$

et par recurrence cette formule peut être généralisée pour tout entier n

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (2.29)$$

où :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Il est possible d'étendre $\binom{n}{k}$ à $k > n$, en posant $\binom{n}{k} = 0$ La formule (2.29) devient alors :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh)$$

La formule (2.29) représente la dérivée d'ordre entier n .

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!$; $\forall n \in \mathbb{N}$; on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul.

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)\dots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier p par :

$$\begin{aligned} {}_a^{GL} D_t^p f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.30)$$

et :

$$\begin{aligned} {}_a^{GL} D_t^{-p} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

Les formules ((2.30) et (2.31) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre p et d'ordre $(-p)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f ; où f est une fonction continue

sur l'intervalle fermé $[a; t]$:

Si f est de classe C^m ; des intégrations par parties de((2.30) et (2.31) nous permet d'écrire :

$${}_a^{GL} D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

$${}^G L D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+p)} \int_a^t (t-\tau)^{m+p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

La formule (2.32) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t)$; ($k = 1, 2, \dots, m$) sont continues sur l'intervalle fermé $[a; t]$ et qu'est un entier vérifiant la condition $m > p$: La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante : $m - 1 < p < m$.

Dérivé de Riemann-Liouville :

Si $p > 0$, on note $[p]$ la partie entière de p et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
En s'inspirant de la relation classique :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a J_t$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \circ_a J_t^{-1} \\ \frac{d^3}{dt^3} &= \frac{d}{dt} \circ_a J_t^{-2} \\ &\vdots \\ \frac{d^n}{dt^n} &= \frac{d}{dt} \circ_a J_t^{1-n} \end{aligned}$$

On peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq p < 1$ par :

$$\frac{d^p}{dt^p} = \frac{d}{dt} \circ_a J_t^{1-p}$$

Plus généralement, si $p > 0$ et si $n = [p] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^p}{dt^p} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a J_t^{n-p} \quad (2.34)$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 30 : La dérivée d'ordre fractionnaire $p > 0$ d'une fonction $f(t)$ dite de Riemann-Liouville à gauche est donnée par :

$$\forall t \in [a; b], n - 1 < p < n, n \in \mathbb{N}^*$$

$${}^{RL} D_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a J_t^{n-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau \quad (2.35)$$

Définition 31 : La dérivée d'ordre fractionnaire $p > 0$ d'une fonction $f(t)$ dite de Riemann-Liouville à droite est donnée par :

$$\forall t \in [a; b], n - 1 < p < n, n \in \mathbb{N}^*$$

$${}^{RL}D_b^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a J_t^{n-p} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau \quad (2.36)$$

Dérivées de de Caputo :

Par ailleurs, si l'on se replace sur $[a, b]$, l'interversion des compositions dans le membre de droite de (2.34) semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire :

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo à gauche est définie par :

$$\frac{d^p}{dt^p} = {}_a J_t^{n-p} \circ \frac{d^n}{dt^n} \quad (2.37)$$

La définition donnée par (2.37) est appelée dérivée de Caputo.

Définition 32 La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo à gauche est définie par :

$$\forall t \in [a; b], n - 1 < p < n, n \in \mathbb{N}^*$$

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a J_t^{n-p} \circ \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau \quad (2.38)$$

Définition 33 La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo à droite est définie par :

$$\forall t \in [a; b], n - 1 < p < n, n \in \mathbb{N}^*$$

$${}_t^c D_b^p f(t) = {}_a J_t^{n-p} \circ \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau \quad (2.39)$$

2.5 Propriétés de base des dérivés fractionnaires :

2.5.1 Linéarité :

La dérivée et l'intégral fractionnaires sont des opérateurs linéaires.

$${}_a D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t)$$

$${}_a J_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a J_t^p f(t) + \mu {}_a J_t^p g(t)$$

Preuve. Si on utilise l'expression de la dérivés du Grünwald-Letnikov.on a :

$$\begin{aligned} {}_a^{GL} D_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} (\lambda f(t-kh) + \mu g(t-kh)) \\ &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh) \\ &\quad + \mu \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} g(t-kh) \\ &= \lambda {}_a^{GL} D_t^p f(t) + \mu {}_a^{GL} D_t^p g(t) \end{aligned}$$

Pour l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville : ■

2.5.2 Règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire :

– Si f est continue dans $[a; b]$, g admet $(n+1)$ dérivée continue dans $[a; b]$, alors la règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire du produit $f(t)g(t)$ est donnée par :

$${}_a^{GL} D_t^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^k(t) {}_a^{GL} D_t^{p-k} (g(t)) - R_n^p(t), n \geq p+1$$

où :

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(t) \int_{\tau}^t g^{(n+1)}(x) (t-x)^{-p-1} dx$$

Avec :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$$

Sauf si $f(t)$ et $g(t)$ avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a, b]$ on a :

$${}_a^{GL} D_t^p (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} f^k(t) {}_a^{GL} D_t^{p-k} (g(t))$$

2.5.3 Intégration par partie :

Théorème 34 soit : $0 < p < 1, a < t < b$; Alors :

$$\int_a^t {}_a^{RL} D_t^p f(\tau) g(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) {}_{\tau}^{RL} D_t^p g(\tau) d\tau$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_a^t {}^{RL}D_t^p f(\tau)g(\tau)d\tau &= \int_a^t \left[\frac{1}{\Gamma(1-p)} \frac{d}{d\tau} \int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi \right] g(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \left[\frac{d}{d\tau} \int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi \right] g(\tau)d\tau \\
&= \frac{g(\tau)}{\Gamma(1-p)} \int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - \int_a^t \left[\int_a^\tau \frac{(\tau-\xi)^{-p}}{\Gamma(1-p)} f(\xi)d\xi \right] \dot{g}(\tau)d\tau \\
&= \frac{g(t)}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi - \frac{g(a)}{\Gamma(1-p)} \int_a^a (a-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \left[\int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi \right] \dot{g}(\tau)d\tau \\
&= \frac{g(t)}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi - \int_a^t \int_\xi^t \frac{(\tau-\xi)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau f(\xi)d\xi \\
&= \frac{g(t)}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\xi)^{-p} f(\xi)d\xi + \int_a^t {}^C D_t^p g(\xi) f(\xi)d\xi \\
&= \int_a^t \frac{g(t)(t-\xi)^{-p}}{\Gamma(1-p)} f(\xi)d\xi + \int_a^t \left[{}^{RL}D_t^p g(\xi) - \frac{g(t)(t-\xi)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \right] f(\xi)d\xi \\
&= \int_a^t {}^{RL}D_t^p g(\xi) f(\xi)d\xi \\
&= \int_a^t {}^{RL}D_t^p g(\tau) f(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

■

Théorème 35 : soit : $0 < p < 1, a < t < b$

$$\int_a^t {}^C D_t^p f(\tau)g(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau) {}^C D_t^p g(\tau)d\tau + g(t) {}_a J_t^{1-p} f(t) - g(a) {}_a J_t^{1-p} f(a)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_a^t {}^C D_t^p f(\tau) g(\tau) d\tau &= \int_a^t \left[{}^{RL} D_t^p f(\tau) - \frac{f(a) (\tau - a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \right] g(\tau) d\tau \\
&= \int_a^t {}^{RL} D_t^p f(\tau) g(\tau) d\tau - \frac{f(a)}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (\tau - a)^{-p} g(\tau) d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau) {}^{RL} D_t^p g(\tau) d\tau - f(a) {}_a J_t^{1-p} g(a) \\
&= \int_a^t \left[{}^C D_t^p g(\tau) + \frac{g(t) (t - \tau)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \right] f(\tau) d\tau - f(a) {}_a J_t^{1-p} g(a) \\
&= \int_a^t {}^C D_t^p g(\tau) f(\tau) d\tau + \frac{g(t)}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p} f(\tau) d\tau - f(a) {}_a J_t^{1-p} g(a) \\
&= \int_a^t {}^C D_t^p g(\tau) f(\tau) d\tau + g(t) {}_a J_t^{1-p} f(t) - f(a) {}_a J_t^{1-p} g(a)
\end{aligned}$$

■

2.5.4 Composition :

Intégration fractionnaire d'une intégrale fractionnaire :

- Pour $f \in C([a; b])$ l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe.

$${}_a J_t^p [{}_a J_t^q f(t)] = {}_a J_t^{p+q} f(t), a \in \mathbb{R}, p > 0, q > 0$$

Preuve. : on a :

$$\begin{aligned}
{}_a J_t^p [{}_a J_t^q f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} [{}_a J_t^q f(t)] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p) \Gamma(q)} \int_a^t \int_a^\xi (t - \xi)^{p-1} (\xi - \tau)^{q-1} d\xi d\tau
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$${}_a J_t^p [{}_a J_t^q f(t)] = \frac{1}{\Gamma(p) \Gamma(q)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t - \xi)^{p-1} (\xi - \tau)^{q-1} d\xi d\tau$$

Le changement de variables $\xi = \tau + (t - \tau)\mu$; nous donne :

$$\begin{aligned}
{}_a J_t^p [{}_a J_t^q f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\tau) [(t - \tau)^{p+q-1} \int_0^1 (1 - \mu)^{p-1} \mu^{q-1} d\mu] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\tau) [(t - \tau)^{p+q-1} B(p, q)] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t f(\tau) [(t - \tau)^{p+q-1} d\tau \\
&= {}_a J_t^{p+q} f(t), a \in \mathbb{R}, p > 0, q > 0
\end{aligned}$$

■

Différenciation fractionnaire d'une intégrale fractionnaire :

– Pour $p > 0, t > 0$ et $f \in C([a; b])$:

$${}^RL D_t^p [{}_a J_t^p f(t)] = f$$

qui signifie l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire du même ordre.

– en général on a :

$${}^RL D_t^p [{}_a J_t^q f(t)] = {}_a J_t^{q-p} f(t), q > p > 0$$

Preuve. :

Pour $p = n \geq 1; n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^RL D_t^n [{}_a J_t^n f(t)] &= \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = f(t)
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $n - 1 \leq p < n$ et utilisons la règle de composition des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. on a donc :

$${}_a J_t^n f(t) = {}_a J_t^{n-p} f(t) ({}_a J_t^p f(t))$$

D'où :

$$\begin{aligned}
{}^RL D_t^n [{}_a J_t^n f(t)] &= \frac{d^n}{dt^n} \{ {}_a J_t^{n-p} f(t) ({}_a J_t^p f(t)) \} \\
&= \frac{d^n}{dt^n} {}_a J_t^n f(t) = f(t)
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^p [{}_aJ_t^q f(t)] &= {}^{RL}D_t^p [{}_aJ_t^p ({}_aJ_t^{-p+q} f(t))] \\ &= {}_aJ_t^{q-p} f(t) \end{aligned}$$

Donc :

$${}^{RL}D_t^p [{}_aJ_t^q f(t)] = {}_aJ_t^{q-p} f(t), \quad q > p > 0$$

■

Intégration fractionnaire et différenciation d'un dérivé fractionnaire :

– soit $p > 0, n = [p] + 1$ et f est intégrable, alors :

$${}_aJ_t^p [{}^{RL}D_t^p f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \quad a \in \mathbb{R}$$

– soit $p > 0, q > 0, n = [p] + 1, m = [q] + 1$ et f est intégrable, alors :

$${}_aJ_t^p [D_t^q f(t)] = {}^{RL}D_t^{q-p} f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(1+p-k)} {}_aD_t^{q-k} f(a)$$

Comme la dérivation et l'intégration d'ordre entier, la dérivation et l'intégration fractionnaires ne commutent pas en général.

– Soit $n \in \mathbb{N}, p > 0$ et $n = [p] + 1$, alors :

$$\frac{d^n}{dt^n} {}^{RL}D_t^p f(t) = D_t^{p+n} f(t)$$

– Soit $n \in \mathbb{N}, p > 0$ et $n = [p] + 1$, alors :

$${}^{RL}D_t^p \frac{d^n}{dt^n} f(t) = {}^{RL}D_t^{p+n} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k+1-p-n)} f^{(k)}(a)$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivation d'ordre entier ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $i = 0, 1, 2; \dots, n-1$

– Soit $p > 0, q > 0, n = [p] + 1, m = [q] + 1$, alors :

$${}_aD_t^p {}_aD_t^q f = {}^{RL}D_t^{p+q} f + \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} {}^{RL}D_t^{q-k} f(a)$$

– Soit $p > 0, q > 0, n = [p] + 1, m = [q] + 1$, alors :

$${}_aD_t^q {}_aD_t^p f = {}^{RL}D_t^{p+q} f + \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(1-q-k)} {}^{RL}D_t^{p-k} f(a)$$

On déduit que les deux opérateurs de dérivations fractionnaire ne commutent que si $p = q$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément :

$${}^{RL}D_t^{p-k} f(a) = {}^{RL}D_t^{q-k} f(a) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

2.5.5 Relation entre les dérivées :

– Soient $p \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n = [p] + 1$ si ${}^{RL}D_t^p, {}^C D_t^p$ existent, alors

$${}^C D_t^p = {}^{RL}D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} f^{(k)}(a) \quad (2.40)$$

et :

$${}^C D_t^p = {}^{RL}D_t^p \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-p}}{k!} f^{(k)}(a) \right)$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$ on a :

$${}^C D_t^p = {}^{RL}D_t^p$$

– Si $0 < p < 1$

$${}^{RL}D_t^p = {}^C D_t^p + \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(-p+1)} f(a)$$

et

$${}^C D_t^p = {}^{RL}D_t^p (f(t) - f(a))$$

– Si $0 < p < 1$, f est continue sur $[a, b]$, alors :

$$[{}^C D_t^p [{}_a J_t^p f(t)]] = f(t)$$

– Si $0 < p < 1$, $f \in C^m[a, b]$, alors :

$${}_a J_t^p [{}_a D_t^p f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Pour la preuve (voir [17])

2.5.6 Exemples :

– L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction : $(t-a)^\alpha$ où $\alpha > -1$:

$${}_a J_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-a)^{p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables : $\xi = \frac{t-a}{t-a}$:

$$\begin{aligned} {}_a J_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{(t-a)^{p+\alpha}}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-\xi)^{p-1} \xi^\alpha ds \\ &= \frac{(t-a)^{p+\alpha}}{\Gamma(p)} B(p, \alpha+1) \\ &= \frac{(t-a)^{p+\alpha}}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)} \end{aligned}$$

ie

$${}_a J_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)} (t-a)^{p+\alpha}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre p d'une constante est donnée par :

$${}_a J_t^p C = \frac{C}{\Gamma(p+1)} (t-a)^p$$

– La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction : $(t-a)^\alpha$ où $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} {}^{RL} D_t^p (t-a)^\alpha &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n [{}_a J_t^{n-p} (t-a)^\alpha] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p+\alpha+1)} (t-a)^{n-p+\alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p+\alpha+1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{n-p+\alpha} \end{aligned}$$

on sait que :

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{n-p+\alpha} = (n-p+\alpha)(n-p+\alpha-1)\dots(-p+\alpha+1)(t-a)^{-p+\alpha}$$

Alors :

$$\begin{aligned} {}^{RL} D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)(n-p+\alpha)(n-p+\alpha-1)\dots(-p+\alpha+1)(t-a)^{-p+\alpha}}{\Gamma(n-p+\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)(n-p+\alpha)(n-p+\alpha-1)\dots(-p+\alpha+1)(t-a)^{-p+\alpha}}{(n-p+\alpha)(n-p+\alpha+1)\dots(-p+\alpha+1)\Gamma(-p+\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)} (t-a)^{-p+\alpha} \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre p d'une constante est donnée par :

on prend $\alpha = 0$,

$${}^R D_t^p 1 = \frac{1}{\Gamma(-p+1)} (t-a)^{-p}$$

ie :

$${}^R D_t^p C = \frac{C}{\Gamma(-p+1)} (t-a)^{-p}$$

– La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction : $(t-a)^\alpha$ où $\alpha > n-1$, $n = [p] + 1$:

$${}^c D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} \frac{d^n}{d\tau^n} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

on a :

$$\frac{d^n}{d\tau^n} (\tau-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n}$$

Donc :

$${}^c D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau$$

En utilisant le changement de variable $\xi = \frac{\tau-a}{t-a}$ on trouve :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-\xi)^{n-p-1} \xi^{\alpha-n} d\xi \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (\tau-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre p d'une constante est égal zéro (car $\frac{d^n C}{d\tau^n} = 0$).

et de même la fractionnaire au sens de Gründwald-leitnikov d'ordre :

$${}^G D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)} (t-a)^{-p+\alpha}$$

Et :

$${}^G D_t^p C = \frac{C}{\Gamma(-p+1)} (t-a)^{-p}$$

Avec : ($p < 0$ et $\alpha > -1$) ou $n = [p] + 1$ et $\alpha > m$

2.6 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires :

2.6.1 Transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov :

Supposons que f admet une transformée de Laplace $F(s)$; alors, d'après la formule (2.32) avec $a = 0$ on a Pour $0 \leq p < 1$;

$$\begin{aligned} {}_0^{GL}D_t^p f(t) &= \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \left[\frac{\Gamma(1-p)f(0)}{s^{1-p}} + \frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}} (sF(s) - f(0)) \right] \\ L \{ {}_0^{GL}D_t^p f(t); s \} &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}} (sF(s) - f(0)) = s^p F(s) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dans les applications, il faut savoir que la formule (2.41) a un sens dans le cas classique seulement pour $0 < p < 1$; mais pour $p > 1$ elle a lieu au sens des distributions.(voir [17])

2.6.2 Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville :

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{p-1}$ et $f(t)$:

$${}_a^{RL}J_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} * f(t) \quad (2.42)$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{p-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L \{ t^{p-1}; s \} = \Gamma(p)s^{-p} \quad (2.43)$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Grünwald-Letnikov.

$${}_0^{RL}J_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, n-1 \leq p < 1$$

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Grünwald-Letnikov.

$$L \left\{ {}_0^{RL} J_t^p f(t); s \right\} = s^{-p} F(s)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$; posons :

$$g(t) = {}_0^{RL} J_t^{(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, n-1 \leq p < 1$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} L \{g(t); s\} &= \frac{t^{n-p-1}}{\Gamma(n-p)} * f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \left[\frac{\Gamma(n-p)}{s^{n-p}} F(s) \right] \\ &= s^{p-n} F(s) \end{aligned}$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à :

$$L \left\{ \frac{d^n g(t)}{dt^n}; s \right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \quad (2.44)$$

où :

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s) \quad (2.45)$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0^{RL} J_t^{(n-p)} f(t) = {}_0^{RL} D_t^{p-k-1} f(t) \quad (2.46)$$

Par substitution de (2.45) et (2.46) dans (2.44), nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,

$$L \left\{ {}_0^{RL} D_t^p f(t); s \right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}_0^{RL} \left[D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}, n-1 \leq p < n \quad (2.47)$$

2.6.3 Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo :

Soient : $f \in C^\infty[a, +\infty[, n-1 \leq p < n, a \leq 0$
pour $a = 0$

$$\begin{aligned}
L({}_0^c D_t^p f(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^{+\infty} \int_\tau^{+\infty} e^{-st} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) dt d\tau \\
&\stackrel{u=t-\tau}{=} \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} u^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) du d\tau \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^{+\infty} e^{-su} u^{n-p-1} \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau \right) \\
&= L\left(\frac{t^{n-p-1}}{\Gamma(n-p)}\right) L(f^{(n)}(t)) \\
&= s^{p-n} L(f^{(n)}(t))
\end{aligned}$$

Puisque :

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < p \leq n$$

Alors :

$$L({}_0^c D_t^p f(t)) = s^{p-n} \left[s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right]$$

$$L({}_0^c D_t^p f(t)) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0)$$

pour $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
L({}_a^c D_t^p f(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^0 (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] dt \\
&= s^{p-n} L(f^{(n)}(t)) + \int_a^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(t-\tau)^{n-p-1}}{\Gamma(n-p)} dt \right] f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= s^{p-n} L(f^{(n)}(t)) + s^{p-n} \int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Par intégration par partie n fois :

$$\int_a^0 e^{-s\tau} f^{(n)}(\tau) d\tau = s^n \int_a^0 e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + [s^{n-1} f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)] - e^{-as} [s^{n-1} f(a) + \dots + f^{(n-1)}(a)]$$

On obtient finalement :

$$L({}_a^c D_t^p f(t)) = s^p L(f^{(n)}(t)) - e^{-as} [s^{p-1} f(a) + s^{p-2} f'(a) + \dots + s^{p-n} f^{(n-1)}(a)]$$

2.7 Domaines d'applications :

2.7.1 Thermique :

Diffusion et équation de la chaleur

L'exemple le plus simple de système fractionnaire est l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En opérant un bon choix de la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$. A partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une dérivation d'ordre $\frac{3}{2}$. Cet exemple a été traité dans [17] et repris dans [37], [38]. On rappelle que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x), t > 0, -\infty < x < 0 \quad (2.48)$$

où t est une variable scalaire libre symbolisant le temps, x une variable libre scalaire ou vectorielle, représentant l'espace et c une constante positive. Nous nous intéressons ici à l'équation de la chaleur à une dimension spatiale; où la variable libre x est scalaire. Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$v(0, x) = 0 \text{ pour } x < 0 \quad (2.49)$$

$$v(t, 0) = u(t) \text{ pour } x = 0 \quad (2.50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(0, x) = 0 \text{ pour } t > 0 \quad (2.51)$$

Nous supposons que u est une fonction de type exponentiel avec variation bornée presque partout (ceci garanti l'existence de la transformée de Laplace de v et la validité de la formule intégrale de la transformée inverse). Ainsi, le problème peut être résolu par passage dans le plan opérationnel. En utilisant la transformée de Laplace nous obtenons

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(s, x) = \frac{s}{c} \hat{v}(s, x) \text{ pour } x > 0 \quad (2.52)$$

$$\hat{v}(s, 0) = \hat{v}(s) \quad (2.53)$$

La solution formelle de (2.52) est :

$$\hat{v}(s, x) = C_1 \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + C_2 \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \quad (2.54)$$

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites $\hat{v}(s, 0) = \hat{u}(s)$, on obtient :

$$\hat{v}(s, x) = \hat{u}(s) \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \quad (2.55)$$

Pour $x > 0$

$$\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) = L \left\{ \frac{x}{2\sqrt{c\pi}} t^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right) \right\} \quad (2.56)$$

soit :

$$v(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{c\pi}} \int_0^t \tau^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4c\tau}\right) u(t - \tau) d\tau \quad (2.57)$$

D'une part, on vérifie que (2.57) est bien une solution de l'équation (2.48), d'une autre part, à partir de (2.55), on déduit que :

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(s, x) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \hat{v}(s, x)$$

et en particulier :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(s, 0) = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s)$$

Si nous définissons comme variable de sortie :

$$y(t) \hat{=} \sqrt{c} \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0)$$

nous obtenons le transfert suivant :

Ce qui permet d'établir le constat suivant :

$$\hat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s)$$

l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée u et la sortie y est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$

2.7.2 Electricité :

Piles à combustibles

Une pile à combustible produit l'énergie électrique grâce à l'oxydation sur l'anode d'un combustible (hydrogène) couplée à la réduction sur la cathode d'un oxydant (oxygène) Lewandowski (2007). Son principe de fonctionnement repose sur des phénomènes physico-chimiques de nature diffusive (diffusion des espèces gazeuses au niveau des électrodes notamment), ce qui invite à utiliser la modélisation d'ordre fractionnaire à l'instar des machines tournantes.

L'impédance de Warburg décrite en (2.58) est approximée par une impédance (2.59) d'ordre fractionnaire (ici égal à $\frac{1}{2}$), faisant apparaître une dépendance en racine carrée de la fréquence Racewicz (2005).

$$Z_W(\omega) = A_k \frac{\tanh(\sqrt{j\omega \cdot \tau_k})}{\sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \quad (2.58)$$

avec $\tau_k = \frac{\delta^2}{D^{eff}}$

Alors son approximation d'ordre fractionnaire donnée comme :

$$Z_W^{\frac{1}{2}}(\omega) = \frac{A_k}{1 + \sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \quad (2.59)$$

Supercapacité :

Le modèle classique du super-condensateur est présenté sur la figure ci-dessous

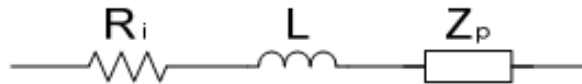


Figure 22 : Schémas équivalent du super-condensateur

Il est composé de trois éléments : une résistance interne R_i (qui modélise l'électrolyte et ses connections), une inductance L (qui modélise des connections et qui élimine des erreurs d'identification aux fréquences intermédiaires) et une impédance complexe Z_p modélisant la porosité des électrodes du supercondensateur [39].

$$Z_P(\omega) = \frac{\tau \coth(\sqrt{j\omega \cdot \tau_k})}{C \sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \quad (2.60)$$

Riu dans [40] propose une approximation de l'impédance Z_p par un système d'ordre $\frac{1}{2}$ décrit par (2.61). Cela permet d'obtenir une très bonne cohérence avec le modèle analytique, en identifiant un minimum de paramètres (4 au lieu d'environ 20 pour le modèle classique).

$$Z_p^{\frac{1}{2}}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + j\omega \cdot \tau_k}}{C_0 j\omega} \quad (2.61)$$

La modélisation d'ordre non entier a permis d'améliorer la précision de la représentation fréquentielle. Néanmoins, d'autres travaux présentent des modèles d'ordre fractionnaire de supercapacités non linéaires [41].

2.7.3 Automatique :

Régulateur CRONE d'Oustaloup

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup à la forme suivante

$$C_m(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m$$

où les réels $C_0, \omega_b > 0, \omega_h > 0$, et $m > 0$ sont des paramètres du régulateur, m étant non entier. Oustaloup [42] met en relief l'apport des contrôleurs fractionnaires dont CRONE constitue un cas particulier, mais aussi puissant quant à la robustesse du système aussi bien vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres, que vis-à-vis des non linéarités présentes dans la boucle de commande. Une étude comparative avec des régulateurs PID ou CRONE dans un procédé linéaire monovarié stationnaire du deuxième ordre commandé conformément au schéma fonctionnel de la figure suivante a été menée dans [43]

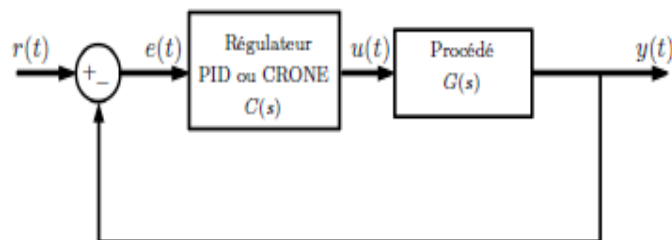


Figure 23 : Boucle de commande par régulateur PID

La fonction de transfert du procédé est donné par :

$$G(s) = \frac{K_0}{1 + 2\zeta_0 \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

où K_0 désigne la gain statique, ξ_0 et ω_0 désignent respectivement, le facteur d'amortissement et la pulsation propre non amortie. L'étude comparative d'un contrôleur de type PID, approximé par le régulateur avance-retard de phase donné par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = C_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

et d'un régulateur CRONE réalisé à partir de quatre zéros et de quatre pôles, caractérisé par la fonction de transfert suivante

$$C(s) = C_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_3}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_4}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_b}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_b}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_b}\right)}$$

L'approximation des opérateurs fractionnaires peut se faire est à l'aide d'une distribution récursive de pôles et de zéros comme dans notre cas, ou encore, d'une distribution de fréquences transitionnelles. Les performances obtenues sont intéressantes dans le cas de la commande CRONE puisqu'il ne s'agit pas seulement de maintenir la stabilité comme dans le cas de l'approche H_∞ (robustesse de la stabilité), mais encore mieux, de satisfaire des considérations de robustesse plus sévères : il s'agit de la robustesse du degré de stabilité et du coup, l'objectif est le maintien de la performance dynamique nominale fixée par le facteur d'amortissement nominal.

2.7.4 Viscoélasticité :

nous suivons l'exposition donnée par Podlubny dans [17]

La loi de Hooke stipule que, pour les solides idéaux, la contrainte ρ est proportionnelle à la déformation ϵ donc

$$\rho(t) = E\epsilon(t)$$

et pour les fluides newtoniens idéaux, la contrainte est proportionnelle au taux de changement d'extension, donc

$$\rho(t) = \eta \frac{d\epsilon(t)}{dt}$$

où E et α sont des constantes.

Podubny note que la contrainte est proportionnelle au dérivé zéro de la déformation pour les solides et à la première dérivée de la déformation pour les fluides, et montre que la contrainte intermédiaire peut être proportionnelle à une dérivée de contrainte

$$\rho(t) = ED^\alpha \epsilon(t)$$

où E et α sont des constantes.

2.7.5 Vibrations amorties viscoélastiques

dans l'industrie aérospatiale, pour arrêter les mouvements indésirables dans les aubes de ventilateur de turbine à gaz, un amortissement viscoélastique est appliqué. Hartley et Lorenzo [44] illustrent comment le calcul fractionnaire peut être utilisé pour modéliser

La figure montre un système dynamique amorti par ressort-mas-visco. la fonction requise ne nécessite aucune initialisation donc les équations décrivant. figure sont donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = k_1 D^{q_1} (x_0 - x_{m_1}) \\ F_1 = k_1 (x_{m_1} - x_i) \\ F_2 = -k_2 D^{q_2} (x_0 - x_{m_2}) \\ F_2 = k_3 D^{q_3} (x_{m_2} - x_i) \\ F_1 + F_2 = m_2 D^2 x_0 \end{array} \right.$$

Où :

m =masse

F =force

x =déplacements

k =coefficients d'amortissement

les valeurs de q peuvent varier entre 0 et 1 représentant un continuum d'un ressort de rigidité infinie à un dashpot. pour toute masse et force données, le déplacement peut être contrôlé en manipulant les valeurs q

ce qui précède est un seul terme vectoriel (EDF)

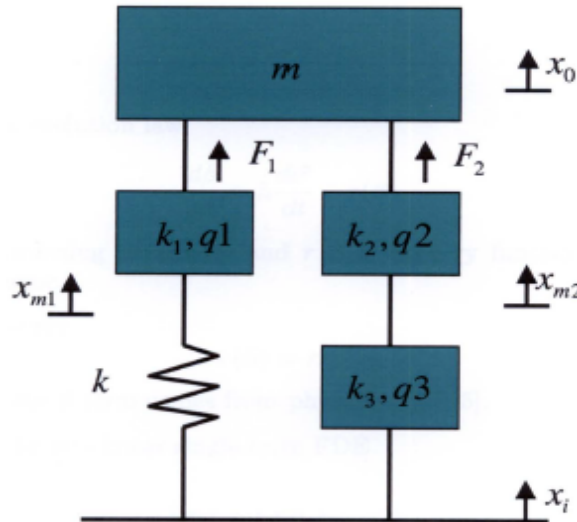


Figure 24 : vibrations amorties viscoélastiques

2.7.6 Viscoplasticité :

la viscoplasticité (A.Freed, communication informelle, 2004) est utilisé comme modèle pour la plasticité dépendante du taux ceci est important pour le calcul de plasticité transitoire (à grande vitesse). La viscoplasticité influence les contraintes via les déformations plastiques

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

$$\frac{d\varepsilon^p}{dt} = [f(\sigma - \beta)](\sigma - \beta)$$

σ stress, ε souche, ε^p déformation plastique, E Module, β stress au dos (variable interne ou cachée)

Exemple de f :

$$f = a |\sigma - \beta|^n$$

où : a, n sont des constantes

β est régi par la loi d'évolution

$$\frac{d\beta}{dt} = h \frac{d\varepsilon^p}{dt} - r(\beta)$$

où h est un paramètre d'écrouissage et r est une fonction de récupération qui peut être thermique ou dynamique

Pour la récupération terminale

$$r(\beta) = r_0\beta^4$$

la puissance 4 du terme β vient de la physique $\in [3 - 5]$
il en résulte un terme unique non linéaire

$$D_*^\alpha \beta = hD_*^\alpha \varepsilon^p - r(\beta)$$

2.7.7 Équation de Bagley-Torvik

Le mouvement d'une plaque rigide, masse (M) et zone (s), reliées par un ressort sans masse de rigidité (k), immergé dans un fluide newtonien, a été initialement proposé par Bagley et Torvik [45]

Dans cette section nous suivons l'exposition de Podlubny [17]

Soit ρ la densité du fluide, μ la viscosité et $v(t, z)$ la vitesse transversale, qui est fonction du temps t et de la distance de la plaque, z le déplacement de la plaque y , est décrit par

$$MD^2y(t) = g(t) - Ky'(t) - 2S\sigma(t, 0)$$

Où :

$$\sigma(t, z) = \sqrt{\mu\rho}D^{1/2}v(s, z)$$

Donc :

$$AD^2y(t) + BD^{3/2}y(t) + Cy(t) = g(t), y(0) = y'(0) = 0$$

Où : $A = M, B = 2S\sqrt{\mu\rho}$, et $C = K$

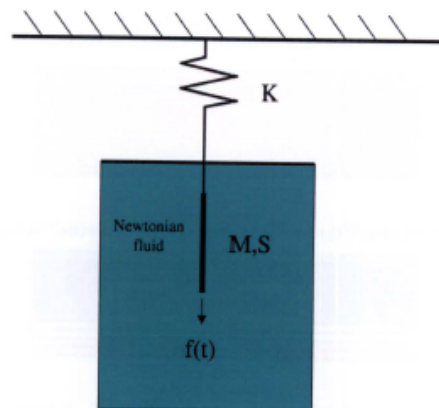


Figure 25 : Un immergé dans un fluide newtonien

2.8 Conclusion :

Ce chapitre nous a permis, premièrement de connaître l'histoire du calcul fractionnaire, deuxièmement nous a permis de mieux comprendre les notions de base du calcul fractionnaire telles que la dérivation, l'intégration et la transformée de Laplace qui sont utiles pour étudier les systèmes fractionnaire et finalement nous a permis de voir quelques applications dans différents domaines .

Chapitre 3

Systemes dynamiques chaotiques fractionnaires :

3.1 Introduction :

Les systemes dynamiques d'ordre fractionnaire fournissent de meilleurs modeles mathematiques pour certains systemes physiques et d'ingenierie reels. Ils ont de nombreux comportements dynamiques qui sont similaires aux systemes d'ordre entier, tels que le chaos, la bifurcation et l'attracteur. ils sont elargis en raison de leurs applications potentielles. Le but de ce chapitre est presenter les elements sur la theorie des EDFs, nous debutons par considerer la question d'existence et d'unicite de la solution d'un probleme de Cauchy (type de Caputo), puisque seront traiter les questions de resolution analytique des EDFs et l'etude de la stabilite et nous exposerons deux methodes numeriques pour la resolutions numeriques des EDFs et nous finissons par examiner des modeles de systemes chaotiques

3.2 Probleme de Cauchy :

Une EDF admet generalement une infinite de solutions. Pour choisir entre les differentes solutions celle qui decrit le probleme, il faut considerer d'autres donnees et d'autre conditions qui dependent de la valeur de la solution en un instant initiale t_0 notee $y(t_0)$. Cette condition est appelee la condition initiale.

Considerons le probleme de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}; k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Tel que : $p > 0, p \notin \mathbb{N}, n = [p] + 1, {}^c D_t^p$ designe l'operateur de derivation de Caputo. et $f : G \rightarrow \mathbb{R}$

3.2.1 Théorème d'existence et unicité :

Dans la théorie des équations différentielles fractionnaire les propriétés d'existence et d'unicité de la solution sont essentielles car dans la modélisation un système il faut qu'il admet une solution unique.

Pour pouvoir prédire l'état future du système à partir de son état actuel il faut que le problème admet une solution unique.

Un moyen qui permet d'assurer que le problème admet une unique solution c'est d'imposer la condition de Lipschitz sur le second membre $f(t, y)$.

Définition 36 : "Fonction Lipschitzienne" :

Soit une fonction définie par :

On dit que f est Lipschitzienne en y s'il existe un $L > 0$, tel que pour tout t :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, y) \mapsto f(t, y)$$

Théorème 37 : [46]

soient $y_0^{(k)}, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}, K > 0, h^* > 0$, définissons :

$$G = \left\{ (t, y) \in [0, h^*], \left| y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \right| \leq K \right\}$$

Et soit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue Lipschitzienne par rapport à y

Alors il existe une unique solution y du problème (3.1) tel que $y \in C[0, h^*]$.

La fonction $y \in C[0, h]$ est une solution du problème (3.1) si et seulement si est solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.2)$$

3.3 Stabilité des systèmes fractionnaires :

3.3.1 Méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation) :

On linéarise le système (3.1) autour du point d'équilibre qui peut s'écrire sous la forme :

$${}^c D_t^p y(t) = Ay(t) \quad (3.3)$$

telle que : $0 < p < 1$ et A est la matrice Jacobienne de f et puis on applique le théorème suivant :

Théorème 38 [47] :

Soit le système (3.3) :

Le système (3.3) est asymptotiquement stable, si et si seulement si, $|\arg(\lambda)| > p\frac{\pi}{2}$, pour tout :valeurs propres de la matrice A . Aussi, le vecteur d'état $y(t)$ tends vers 0 et vérifie la condition suivante : $\|y(t)\| < Nt^{-p}, t > 0, p > 0$

Le système (3.3) est stable, si et si seulement si, la condition $|\arg(\lambda)| \geq p\frac{\pi}{2}$ est vérifiée pour toute valeur propre de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfont à $|\arg(\lambda)| = p\frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique qui coincide avec leur multiplicité algébrique ($\lambda v = \lambda A$)

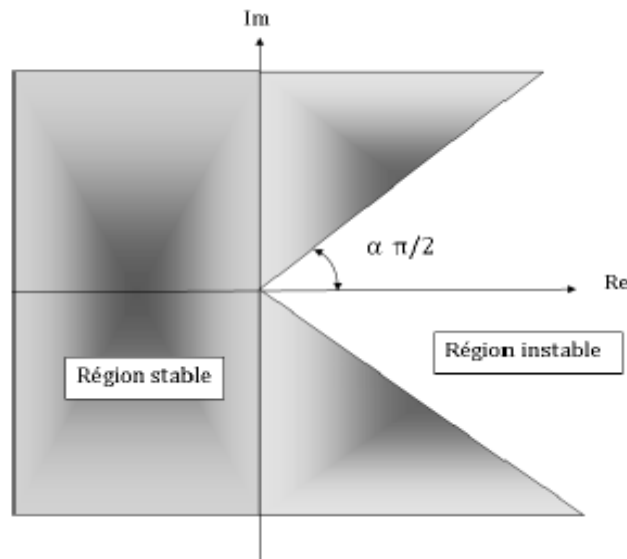


Figure 26 : Régions stable et instable.

Corollaire 39 :Supposons que $p_1 \neq p_2 \neq \dots p_n$ et tous les i sont des nombres rationnels entre 0 et 1 soit m le plus petit commun multiple des dénominateurs u_i de p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) où $p_i = \frac{v_i}{u_i}, v_i$ et $u_i \in \mathbb{Z}_+$ avec $i = 1; 2; \dots, n$ et en posant $\rho = \frac{1}{m}$; donc le système (3.3) est asymptotiquement stable si $|\arg(\lambda)| > \rho\frac{\pi}{2}$ pour toutes les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(\text{diag}([\lambda^{mp_1}, \dots, \lambda^{mp_n}] - A) = 0$$

Exemple 40 :

$$\begin{cases} {}^c D_t^{0.75} y_1 = -y_2 \\ {}^c D_t^{0.75} y_2 = y_1 \end{cases}$$

alors : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ les valeur propres de A sont : $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

on a : $arg(\lambda_1) = \frac{\pi}{2}, arg(\lambda_2) = \frac{3\pi}{2}$.
 il est clair que : $|arg(\lambda_{1,2})| > \frac{3\pi}{4 \cdot 2} = \frac{3\pi}{8}$
 Donc : le système est asymptotiquement stable

Exemple 41 :

$$\begin{cases} {}^c D_t^{0.2} y_1 = -y_2 \\ {}^c D_t^{0.5} y_2 = -y_1 \end{cases}$$

alors : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

on a : $p_1 = 0.2 = \frac{1}{5}, p_2 = 0.5 = \frac{1}{2}, m = PCM(2, 5) = 10$ (PCM =le plus petit commun mulitple)

$$\det (diag([\lambda^{mp_1}, \lambda^{mp_2}] - A) = 0$$

ie :

$$\det \left[\begin{pmatrix} [\lambda^{10 \times 0.2} + 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{10 \times 0.5} + 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Ses racines sont données comme suit:

$$\lambda_k = e^{i \frac{\pi(2k+1)}{2}}, k = 0, 1, \lambda_l = e^{i \frac{\pi(2l+1)}{5}}, l = 0, 1, 3, 4$$

Il est facile de vérifait que : $|arg(\lambda_{k,l})| > \frac{1}{10} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{20}$
 Donc : le système est asymptotiquement stable

3.3.2 Méthode directe de Lyapunov :

Théorème 42 [48] *La solution trivial du système (3.1) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction Lyapunov définie positive $V(y(t))$ telle que ${}^c D_t^p(V(y(t))) < 0$ pour $t > 0$.*

Lemme 43 [49] *Soit $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, avais des dérivées continues dans, H est une matrice définie positive ;alors $\forall t > 0$*

$${}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y^T(t) H y(t) \right) < y^T(t) H {}^c D_t^p y(t); \forall 0 < p < 1 \tag{3.4}$$

Preuve. :

on pose

$$f(t) = {}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y^T(t) H y(t) \right) - y^T(t) H {}^c D_t^p y(t) \tag{3.5}$$

et on montre que :

$$f(t) = {}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y^T(t) H y(t) \right) - y^T(t) H {}^c D_t^p y(t) < 0 \tag{3.6}$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (y^T(t)Hy(t)) &= \dot{y}^T(t)Hy(t) + y^T(t)H\dot{y}(t) \\ &= 2y^T(t)H\dot{y}(t) \end{aligned}$$

D'après la définition de Caputo :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{y^T(\tau)H\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^p} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1-p)} y^T(t)H \int_a^t \frac{\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^p} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{y^T(\tau)H\dot{y}(\tau) - y^T(t)H\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^p} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{[y^T(\tau) - y^T(t)]H\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^p} d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

On pose : $Y(\tau) = y(\tau) - y(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{Y^T(\tau)H\dot{Y}(\tau)}{(t-\tau)^p} d\tau \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{d[Y^T(\tau)HY(\tau)]}{(t-\tau)^p} d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

Car : $Y^T(\tau)H\dot{Y}(\tau) = \frac{1}{2}d[Y^T(\tau)HY(\tau)]$

On applique l'intégration par partie on trouve :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\Gamma(1-p)} \frac{Y^T(\tau)HY(\tau)}{(t-\tau)^p} \Big|_a^t - \frac{p}{2\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{Y^T(\tau)HY(\tau)}{(t-\tau)^{p+1}} d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2\Gamma(1-p)} \frac{Y^T(\tau)HY(\tau)}{(t-\tau)^p} \Big|_{t=\tau} - \frac{Y^T(a)HY(a)}{2\Gamma(1-p)(t-a)^p} - \frac{p}{2\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{Y^T(\tau)HY(\tau)}{(t-\tau)^{p+1}} d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vérifions le premier terme de l'équation (3.9), qui a une indétermination en $t = \tau$, alors on peut analyser la contrainte correspondante au moyen de la règle L'Hopital.

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{Y^T(\tau)HY(\tau)}{(t-\tau)^p} = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{2Y^T(\tau)H\dot{Y}(\tau)}{-p(t-\tau)^{p-1}} = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{2Y^T(\tau)H\dot{Y}(\tau)(t-\tau)^{1-p}}{-p} = 0 \quad (3.10)$$

La matrice H est définie positive donc :

$$\frac{Y^T(a)HY(a)}{2\Gamma(1-p)(t-a)^p} \geq 0 \quad (3.11)$$

$$\text{Et } \frac{p}{2\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{Y^T(\tau)HY(\tau)}{(t-\tau)^{p+1}} d\tau \geq 0$$

Alors : $f(t) < 0$ ■

Remarque 44 : Si la matrice définie positive est une matrice d'identité, c'est-à-dire $H= I$, la propriété (3.4) : $\forall t > 0$

$${}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y^T(t) y(t) \right) < y^T(t) {}^c D_t^p y(t); \forall 0 < p < 1$$

Exemple 45 :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} L {}^c D_t^p y_1 = -r(y_1) - y_2 + \bar{u} \\ C {}^c D_t^p y_2 = y_1 \end{cases}$$

Nous supposons que la fonction $r(y_1)$ est monotone croissante et passe par l'origine $r(0) = 0$.

Prenons comme fonction de Lyapunov, la fonction suivante :

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2} L y_1^2 + \frac{1}{2} C (y_2 - \bar{u})^2 \geq 0$$

Cette fonction est positive et minimum à l'équilibre $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (0; \bar{u}) : V(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0$.

D'après la remarque précédente, on a :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^p V(y_1, y_2) &= {}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} L y_1^2 + \frac{1}{2} C (y_2 - \bar{u})^2 \right) \\ &= L {}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y_1^2 \right) + C {}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} (y_2 - \bar{u})^2 \right) \\ &< L y_1 {}^c D_t^p (y_1) + C (y_2 - \bar{u}) {}^c D_t^p (y_2 - \bar{u}) \\ &= L y_1 \frac{1}{L} (-r(y_1) - y_2 + \bar{u}) + C (y_2 - \bar{u}) \frac{1}{C} (y_1) \\ &= -y_1 r(y_1) \leq 0 \end{aligned}$$

L'équilibre est donc stable

3.3.3 Extention de de la méthode directe de Lypunov :

Comme on le sait, il est difficile pour trouver une fonction candidate de Lyapunov appropriée pour prouver la stabilité des systèmes fractionnaires. Certains auteurs ont présenté des fonctions de Lyapunov pour prouver la stabilité de l'ordre fractionnaire systèmes .Cependant, on trouve que les fonctions de Lyapunov qui étaient proposés dans ces articles ne sont pas simples, et ils sont valables pour un système d'ordre fractionnaire avec caractéristiques spécifiques, dans les problème de mécanique , l'énergie est souvent un bon candidat. on va énoncer un théorème qui considéré comme une extention de la méthode directe de Lypunov au cas d'un système d'équation fractionnaire.

Considérons le système suivant :

$${}^c D_t^p y(t) = f(t, y(t)), 0 < p < 1 \quad (3.12)$$

Théorème 46 [50]

soit $y = 0$ un point d'équilibre du système() et $D \in \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine ; soit $V(t, y(t)) : [0, +\infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument dérivable et localement lipschituienne par rapport à y telle que :

$$\alpha_1 \|y\|^a \leq V(t, y(t)) \leq \alpha_2 \|y\|^{ab}$$

$${}^c D_t^q V(t, y(t)) \leq -\alpha_3 \|y\|^{ab}$$

où : $x \geq 0, y \in D, q \in]0, 1[, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ et b sont des constantes positives. Alors $y = 0$ est Mittag-Leffler stable

Définition 47 :[51]

Une fonction continue $\alpha : [0, t[\rightarrow [0, +\infty[$ est dit appartenir à la classe- K si elle est strictement croissant et $\alpha(0) = 0$.

Théorème 48 :[52]

soit $y = 0$ un point d'équilibre du système(3.12) et Supposons qu'il existe une fonction Lyapunov $V(t, y(t))$ et $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ sont des fonctions de classe- K satisfaisant :

$$\alpha_1 \|y\| \leq V(t, y(t)) \leq \alpha_2 \|y\|$$

$${}^c D_t^q V(t, y(t)) \leq -\alpha_3 \|y\|$$

où : $q \in]0, 1[$; Alors le point d'équilibre du système (3.12) est asymptotiquement stable.

Soit le système suivant :

$${}^c D_t^p |y(t)| = -|y(t)|$$

où : $p \in]0, 1[$. Nous choisissons la fonction Lipschitz $V(t, y(t)) = |y(t)|$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, a = 1, b = 1$, et $p = q$ Alors on a :

$$\alpha_1 \|y\| \leq V(t, y(t)) \leq \alpha_2 \|y\|$$

$${}^c D_t^p |y(t)| = -|y(t)| \leq -|y(t)|$$

Donc : le point d'équilibre $y = 0$ Mittag-Leffler stable.

Théorème 49 [53]

Soit le système suivant : ${}^c D_t^p y(t) = f(y(t))$

où : $p \in]0, 1[$ et soit $y = 0$ le point d'équilibre et $y(t) \in \mathbb{R}^n$. S'il existe une matrice définie positif H , qui satisfait :

$$y^T(t) H f(y(t)) \leq 0$$

alors l'origine du système (3.12) est asymptotiquement stable.

3.3.4 Quelques conditions de Routh-Hurwitz pour les systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires :

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} D_t^p y_1 = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ D_t^p y_2 = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ D_t^p y_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.13)$$

Où : D_t^p est la dérivée fractionnaire de Caputo et $0 \leq p < 1$. soit $\bar{E}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ est un point d'équilibre de (3.13) : alors \bar{E} est localement asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij}$ évaluée en point \bar{E} satisfait la condition de Matignon, et toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne J satisfait :

$$|\arg(\lambda_i)| > p \frac{\pi}{2}, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.14)$$

L'équation caractéristique de point d'équilibre \bar{E} est donnée par :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Le discriminant $D(P)$ est donnée par :

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} R(P, \dot{P})$$

Voir l'annexe

1. Pour : $n = 3$

L'équation caractéristique de point d'équilibre \bar{E} est donnée par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (3.15)$$

Dont le discriminant $D(P)$ est donnée par :

$$D(P) = 18a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 4a_3 a_1^3 - 4a_2^3 - 27a_3^2 \quad (3.16)$$

Proposition 50 :[54]

- (a) Si c_1, c_2, c_3 son les déterminants de Routh-Hurwitz définée comme le suivant :

$$c_1 = a_1, c_2 = a_1a_2 - a_3, c_3 = a_1a_2a_3 - a_3^2 \quad (3.17)$$

- (b) Quand $D(P) > 0$ la conduction Routh-Hurwitz sera équivalente à la conduction (3.14) par ; $c_1 > 0, c_2 > 0, a_3 > 0$

- (c) Quand $D(P) < 0$ on distingue trois cas suivant :

(i) $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ et $p < \frac{2}{3}$ donc la condition (3.14) est satisfaite

(ii) $a_1 < 0, a_2 < 0$ et $p > \frac{2}{3}$ alors tout les racines du $P(\lambda)$ vérifient : $|\arg(\lambda_i)| < p\frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2, 3$).

- (iii) Si $a_1 > 0, a_2 > 0$ et $a_1a_2 = a_3$ donc (3.14) est satisfaite pour tous $p \in [0,1]$

(iv) pour tout $n, a_n > 0$ est la condition nécessaire pour (3.14)

2. Pour : $n = 4$

L'équation cacatristique de point d'équilibre \bar{E} est donnée par :

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (3.18)$$

Dont le discriminant $D(P)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} D(P) = & -4a_3^3a_1^3 + a_2^2a_1^2a_3^2 + 18a_3^3a_2a_1 - 6a_1^2a_3^2a_4 - 4a_2^3a_1^2a_4 \\ & -80a_3a_2^2a_1a_4 + 144a_3^2a_2a_4 - 192a_3a_4^2a_1 + 144a_2a_1^2a_4^2 \\ & +18a_3a_2a_1^3a_4 - 27a_3^4 - 4a_2^3a_3^2 - 128a_4^2a_2^2 - 27a_1^4a_4^2 \\ & +256a_4^3 + 16a_2^4a_4 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Proposition 51 :[55]

- (i) Si c_1, c_2, c_3 son les déterminants de Routh-Hurwitz définée comme le suivant :

$$c_1 = a_1, c_2 = a_1a_2 - a_3, c_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2 \quad (3.20)$$

pour $p = 1$, le point d'équilibre de \bar{E} de système (3.13) est localement asymptotiquement stable si est seulement si :

$$c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 = 0, a_4 > 0 \quad (3.21)$$

de plus , les conditions de (3.21) sont des conditions suffisant pour le point d'équilibre de \bar{E} est localement asymptotiquement stable pour tout $0 \leq p < 1$

- (ii) Si $D(P) > 0, a_1 > 0, a_2 < 0$ et $p > \frac{2}{3}$ alors le point d'équilibre de \bar{E} est unstable
- (iii) Si $D(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$, et $p < 1/3$, le point d'équilibre de \bar{E} est localement asymptotiquement stable aussi si $D(P) < 0, a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 > 0$ donc le point d'équilibre de \bar{E} est unstable
- (iv) Si $D(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ et $a_2 = \frac{a_1 a_4}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}$ donc le point d'équilibre de \bar{E} est localement asymptotiquement stable pour tout $0 < p < 1$
- (v) $a_4 > 0$ est la condition nécessaire pour le point d'équilibre de \bar{E} est localement asymptotiquement stable

Pour la démonstration voir [55]

3.4 Résolution analytique des EDFs :

3.4.1 EDFs unidimensionnelle :

Théorème 52 : Soit $p > 0, n = [p] + 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ la solution du problème initiales

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = \lambda y(t) + q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.22)$$

où $q \in C[0, h]$, est sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} J^p q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t - \tau) \dot{u}_0(\tau) d\tau & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

où : $u_k(t) = J^p E_p(\lambda t^p), k = 1, 2, \dots, n - 1$

Preuve. Si $\lambda = 0$: donc le problème de (3.22) devient sous la forme

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

On a $E_p(0) = 1$, alors $u_k(t) = \frac{t^k}{k!}$ pour tout k

Donc d'après la relation (2.40)

$${}^c D_t^p y(t) = {}^{RL} D_t^p y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k - p + 1)} t^{k-p} = q(t)$$

Donc :

$${}^{RL}D_t^p y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-p+1)} t^{k-p} + q(t)$$

On sait que :

$${}_a J_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)} (t-a)^{p+\alpha}$$

On applique l'intégral de Riemann d'ordre p sur les deux cotés

$$\begin{aligned} {}_0 J_t^p {}^{RL}D_t^p y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-p+1)} {}_0 J_t^p t^{k-p} + {}_0 J_t^p q(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + {}_0 J_t^p q(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t), \text{ où } \tilde{y}(t) = {}_0 J_t^p q(t)$$

Si $\lambda \neq 0$: la preuve est divisée en deux parties. on va d'abord montrer que la fonction $u_k(t)$ est une solution de l'équation différentielle homogène : c-à-d : ${}^c D_t^p u_k(t) = \lambda u_k(t)$

puis on montre que la fonction $\tilde{y}(t)$ est une solution de l'équation différentielle non homogène avec les conditions initiales homogènes

on sait que :

$$e_p(t) = E_p(\lambda t^p) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{pj}}{\Gamma(pj+1)}$$

Donc :

$$u_k(t) = {}_0 J_t^p [e_p(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{pj+k}}{\Gamma(pj+1+k)}$$

Montrons que $u_k(t)$ est une solution de l'équation différentielle homogène :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_t^p u_k(t) &= {}^c D_t^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{pj+k}}{\Gamma(pj+1+k)} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j {}^c D_t^p t^{pj+k}}{\Gamma(pj+1+k)} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j [{}^c D_t^p t^{p(j-1)+k}]}{\Gamma(p(j-1)+1+k)} \\
 &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j [{}^c D_t^p t^{pj+k}]}{\Gamma(pj+1+k)} \\
 &= \lambda u_k(t)
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases}
 u_k^{(k)}(0) = {}^c D_t^k [{}_0 J_t^k e_p(0)] = e_p(0) = 1; & j = k \\
 u_k^{(j)}(0) = {}^c D_t^j [{}_0 J_t^k e_p(0)] = {}_0 J_t^{k-j} e_p(0) = 0, & j < k \\
 u_k^{(j)}(0) = {}^c D_t^j [{}_0 J_t^k e_p(0)] = {}^c D^{k-j} e_p(0) = 0, & j > k
 \end{cases}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) \dot{u}_0(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) e'_0(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e'_p(t-\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

Cet intégrale existe quelque soit t car (q est une fonction continue et $E'_p(t-\tau)$ intégrable); et est une fonction continue (par rapport à t) et $\tilde{y}(0) = 0$:

De plus, pour $p > 1$ (i.e. $n \geq 2$) d'après la règle standard de la différentiation d'une intégrale qui dépend d'un paramètre on a :

$${}^c D_t (\tilde{y}(t)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e''_p(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} q(t) e'_p(0)$$

tel que : $E'_p(0) = 0$

De la même manière :

$${}^c D_t^k (\tilde{y}(t)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e_p^{(k+1)}(t-\tau) d\tau, k = 0, 1, \dots, n-1$$

Donc : ${}^c D^k \tilde{y}(t) = 0$.

Alors \tilde{y} satisfait toutes les conditions initiales homogènes, et il reste à montrer que \tilde{y} résout l'équation différentielle non homogène.

Pour cela on écrit :

$$e'_p(u) = \frac{d}{du} e_p(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j u^{pj-1}}{\Gamma(pj)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e'_p(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (t-\tau)^{pj-1}}{\Gamma(pj)} d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(pj)} \int_0^t q(\tau) (t-\tau)^{pj-1} d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} [{}_0 J_t^{pj} q(t)] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} {}^c D^k \tilde{y}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1c} D_t^p [{}_0 J_t^{pj} q(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1c} D_t^p [{}_0 J_t^{pj-p} q(t)] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} [{}_0 J_t^{p(j-1)} q(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j [{}_0 J_t^{pj} q(t)] \\ &= q(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j [{}_0 J_t^{pj} q(t)] = q(t) + \lambda \tilde{y}(t) \end{aligned}$$

La permutation des symboles somme et différentiation puis somme et intégration est justifiée par le fait que la série définissant la fonction de Mittag-Leffler est convergente. ■

Exemple 53 :

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = 2y(t) - 1 \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, 1 < p < 2 \end{cases}$$

On a $\lambda = 2, q(t) = -1$, donc :

$$y(t) = \sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t)$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t - \tau) u'_0(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t u'_0(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} [u_0(\tau)]_0^t \\ &= -\frac{1}{2} [E_p(2t^p) - 1] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) &= y_0^{(0)} u_0(t) + y_0^{(1)} u_1(t) \\ &= y(0) E_p(2t^p) + y'(0)_0 J_t^1 E_p(2t^p) \\ &= y(0) E_p(2t^p) + y'(0) \int_0^t E_p(2t^p) d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la solution générale est :

$$y(t) = -\frac{1}{2} [E_p(2t^p) - 1]$$

3.4.2 EDFs multidimensionnelle :

On considère l'équation différentielle fractionnaire :

$${}^c D_t^p y(t) = Ay(t) + q(t) \tag{3.23}$$

Avec : $0 < p < 1, A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, q : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Pour résoudre ce problème on commence avec le problème homogène correspondant (ie ; $q(t) = 0$ pour tout $t \in [0, h]$). alors :

$${}^c D_t^p y(t) = Ay(t) \tag{3.24}$$

- Si A admet des valeurs propres simples
soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et v_1, v_2, \dots, v_n les vecteurs propres associés. Alors la solution générale de (3.24) est de la forme

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k E_p(\lambda_k t^p) \quad (3.25)$$

où $c_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$

- Si A admet des valeurs propres, par exemple λ de degré de multiplicité k donc on a deux possibilités le Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associé à est égale à k , la solution de (3.24) est de la forme (3.25). Où bien il existe m vecteurs propres linéairement indépendants associé à tel que ($m < k$), alors les autres ($k - m$) solutions qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y^{(i)} = u^{(j)} t^{(i-j)p} E_p^{(i-j)}(\lambda_k t^p), i = m, \dots, k$$

Tel que :

$$(A - \lambda I) u^{(i+1)} = u^{(i)}$$

Donc : $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ est la solution homogène de (3.24), alors la solution non homogène de (3.23) avec la condition initiale $y(0) = y^{(0)}$ est $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ tel que :

$$x_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(t - \tau) q_i(\tau) d\tau$$

Exemple 54 :

Considérons le problème suivant.

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = Ay(t) \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où : $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 3$ et leurs vecteurs propre sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ successivement :

Donc la solution générale s'écrit comme suit :

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} E_p(-2t^p) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_p(3t^p)$$

et comme : $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $C_1 = 2/5, C_2 = 8/5$

Donc :

$$y(t) = 2/5 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} E_p(-2t^p) + 8/5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_p(3t^p)$$

Exemple 55 :

Considérons le problème suivant.

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = Ay(t) \\ Y(0) = Y^{(0)} \end{cases}$$

$$\text{où : } y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

les vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, correspondant aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ (double), $\lambda_2 = 4$,

Donc :

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} E_p(t^p) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} E_p(4t^p) + Y^{(3)}$$

où :

$$y^{(3)}(t) = v_{(2)} t^p E_p'(t^p) + v_{(3)} E_p(t^p)$$

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} E_p(t^p) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} E_p(4t^p) + C_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t^p E_p'(t^p) + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} E_p(t^p) \right]$$

3.5 Résolution numérique des EDFs :

Les solutions analytiques de la plupart des EDFs ne peuvent généralement pas être obtenues. En conséquence, les techniques approximatives et numériques jouent un rôle important en identifiant le comportement des solutions de ces équations fractionnaires et en explorant leurs applications tout au long de notre travail, nous appliquons la méthode de Grünwald-Leitnikov.

3.5.1 Méthode de Grünwald-Leitnikov :

Dans cette partie et dans les suivantes, nous voulons développer des algorithmes numériques pour résoudre une équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo :

$${}^c D_t^p y(t) = f(t, y(t)), D_t^p y(0) = y_0^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

où : $p > 0$, $p \notin \mathbb{N}$ et $n = [p] + 1$. Nous nous intéressons à une solution $y(t)$ de l'équation (3.26) sur un intervalle fermé $[0, X]$ pour un certain $X > 0$.

Comme dans le cas classique, les méthodes numériques ne sont pas supposées donner une solution sur tout l'intervalle $[0, X]$, mais plutôt sur un ensemble de points de cet intervalle.

Supposons que les points t_0, t_1, \dots, t_N sont équidistants sur $[0, X]$ avec un pas $t_{k+1} - t_k = h$, $N = X/h$, $x_0 = 0$ et $t_N = X$. De plus on note y_m l'approximation de $y(x_m)$ et $f_m = f(t_m, y_m)$

la discrétisation du second membre de l'équation différentielle en question.

Commençons par une méthode basée sur la dérivée de Grünwald-Letnikov. Au lieu de considérer le problème aux conditions initiales (3.26) nous allons directement

résoudre un troisième type de problèmes donné par :

$${}^{GL}D_t^p y(t) = f(t, y(t)), y(0) = 0, 0 < p < 1 \quad (3.27)$$

Comme la condition initiale est homogène, alors le problème (3.27) est équivalent aux problèmes (3.26) pour $0 < p < 1$. L'avantage d'une telle formulation est que nous gagnons une discrétisation immédiate du problème, d'après la définition de la dérivée de Grünwald-Letnikov :

$${}^{GL}D_t^p y(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{p}{k} y(t - kh), p > 0$$

Sans la limite $h \rightarrow 0$ on a, ce qu'on appelle, l'opérateur de Grünwald-Letnikov fini

$${}^{GL}D_t^p y(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} y(t_m - kh), m = 1 \dots N$$

qui nous donne une version discrétisée de l'opérateur ${}^{GL}D_t^p$.

En utilisant les points de maillage t_0, t_1, \dots, t_N on obtient le problème discrétisé.

$$\frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{p}{k} y(t_m - kh) = f(t_m, y(t_m)), m = 1 \dots N$$

Si on pose $\varpi_k = (-1)^k \binom{p}{k}$, on peut alors résoudre ces équations une à une à chaque point t_m par :

$$y_m = h^p f(t_m, y(t_m)) - \sum_{k=0}^m \varpi_k y(t_m - kh), m = 1 \dots N \quad (3.28)$$

Cette formule calcule la solution numérique de l'équation différentielle fractionnaire(3.27) . Remarquons que la solution recherchée y_m apparaît dans les deux membres de l'équation (3.28),

mais à chaque étape la mième équation contient ym comme unique inconnue, car on aurait calculé t_1, t_2, \dots, t_{m-1} lors des précédentes étapes et y_0 n'est autre que la condition initiale. Dans le cas général où l'équation est non-linéaire on aura besoin d'utiliser la méthode du point fixe pour résoudre chaque équation individuellement.

Avant de généraliser au cas où les conditions initiales ne sont pas nécessairement homogènes, regardons de plus près les coefficients ϖ_k de la dérivée de Grünwald-Letnikov finie. Les coefficients ϖ_k peuvent être calculés d'une manière récursive (avec $\varpi_0 = 1$) par :

$$\begin{aligned} \varpi_k &= (-1)^k \binom{p}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p-k+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1+p}{k}\right) \varpi_{k-1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Les coefficients $k!$ peuvent aussi être considérés comme coefficient du développement en série de la fonction $\varpi(z) = (1-z)^p$.

On trouve finalement la formule :

$$y_m = h^p f(t_m, y(t_m)) - \sum_{k=0}^m \varpi_k y(t_m - kh) - \left(\frac{m^{-p}}{\Gamma(m-p)} - \sum_{k=0}^m \varpi_k\right) y_0, m = 1 \dots N \quad (3.30)$$

Avec une erreur de l'ordre de $O(h)$ Il est clair que les formules (3.30) et (3.28) sont identiques dans le cas où les conditions initiales sont homogènes.(pour plus de détails voir [56]).

Exemple 56 *l'algorithme de système de Lorenz par la méthode de GL*

Rappelons que le système de Lorenz est le suivant :

$$\begin{aligned} D_t^{p1} x &= \sigma(y - x) \\ D_t^{p2} y &= x(r - z) - y \\ D_t^{p3} z &= xy - \beta z \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varpi_k^{(p1)} &= \left(1 - \frac{1+p1}{k}\right) \varpi_{k-1}^{(p1)} \\ \varpi_k^{(p2)} &= \left(1 - \frac{1+p2}{k}\right) \varpi_{k-1}^{(p2)} \\ \varpi_k^{(p3)} &= \left(1 - \frac{1+p3}{k}\right) \varpi_{k-1}^{(p3)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_k &= [\sigma(y_{k-1} - x_{k-1})]h^{p1} - \sum_{j=1}^k \varpi_k^{(p1)} x_{k-j} \\ y_k &= [x_k(r - z_{k-1}) - y_{k-1}]h^{p1} - \sum_{j=1}^k \varpi_k^{(p1)} y_{k-j} \\ z_k &= [x_k y_k - \beta z_{k-1}]h^{p1} - \sum_{j=1}^k \varpi_k^{(p1)} z_{k-j} \end{aligned} \right.$$

3.5.2 Méthode de Adams-Bashforh-Moulton :

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton est une méthode numérique introduite par Diethelm et Freed, basée sur l'équation de Volterra (3.2). On suppose que y_j est l'approximation de $y(t_j)$ pour $j = 1; \dots; k$ dans l'intervalle $[0, T]$. Pour obtenir y_{k+1} on remplace l'intégrale dans l'équation de Volterra (3.2), en utilisant la formule de produit de quadrature des trapèzes où les noeuds t_j pour $j = 1; \dots; k + 1$ s'en prennent respectivement à la fonction $(t_{k+1} - \cdot)^{p-1}$

Premièrement on obtient l'approximation :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t - \tau)^{p-1} g(\tau) d\tau \simeq \int_0^{t_{k+1}} (t - \tau)^{p-1} \tilde{g}(\tau) d\tau$$

Où \tilde{g}_{k+1} est une interpolation de g (avec $g(t) = f(t; y(t))$),

$$\int_0^{t_{k+1}} (t - \tau)^{p-1} \tilde{g}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j)$$

Où :

$$a_{j,k+1} = \int_0^{t_{k+1}} (t - \tau)^{p-1} \phi_{j,k+1}(\tau) d\tau$$

et :

$$\phi_{j,k+1}(\tau) = \begin{cases} (\tau - t_{j-1}) / (t_j - t_{j-1}), & t_{j-1} < \tau < t_j \\ (t_{j+1} - \tau) / (t_j - t_{j-1}), & t_j < \tau < t_{j+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme $t_j = jh$ pour $j = 0, 1, \dots, N$, alors :

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^p}{p(p+1)} (k^{p+1} - (k-p)(k+1)^p) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^p}{p(p+1)} (k-j+2)^{p+1} + (k-j)^{p+1} - 2(k-j+2)^{p+1} & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \frac{h^p}{p(p+1)} & \text{si } j = k+1 \end{cases} \quad (3.31)$$

Donc, on obtient la formule du correcteur (la méthode d'Adams-Moulton fractionnaire à un pas ; $m = [p] + 1$)

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^j}{k!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^P) \right) \quad (3.32)$$

Où : $m = [p] + 1$, y_{k+1}^P est la formule du prédicateur.

Pour déterminer y_{k+1}^P on utilise la méthode d'Adams-Bashforth à un pas (de la même manière pour la formule de correction), mais on remplace l'intégrale par la règle de produit des rectangles.

$$\int_0^{t_{k+1}} (t - \tau)^{p-1} g(\tau) d\tau \simeq \sum_{k=0}^{k+1} b_{j,k+1} g(t_j)$$

où :

$$b_{j,k+1} = \frac{h^p}{p} (k+1-j)^p + (k-j)^p \quad (3.33)$$

$$y_{k+1}^P = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \right) \quad (3.34)$$

Finalement, les expressions (3.32) et (3.34) avec $a_{j;k+1}$ et $b_{j;k+1}$ qui sont calculées à partir de (3.31) et (3.34) respectivement forment la méthode d'Adams-Bashforth- Moulton fractionnaire.

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimée par :

$$\max_{K=0,1,\dots,N} |y(t_k) - y_h(t_k)| = O(h^\alpha) \text{ avec } \alpha = \min(2, 1+p)$$

Exemple 57 : l'algorithme de système de Lorenz par la méthode de ABM

$$\begin{cases} b_{1,j,k+1} = \frac{h^{p_1}}{p} (k+1-j)^{p_1} + (k-j)^{p_1} \\ b_{2,j,k+1} = \frac{h^{p_2}}{p} (k+1-j)^{p_2} + (k-j)^{p_2} \\ b_{3,j,k+1} = \frac{h^{p_3}}{p} (k+1-j)^{p_3} + (k-j)^{p_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1}^P = x_0 + \frac{1}{\Gamma(p_1)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} [\sigma(y_j - x_j)] \right) \\ y_{k+1}^P = y_0 + \frac{1}{\Gamma(p_2)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} [x_j(r - z_j) - y_j] \right) \\ z_{k+1}^P = z_0 + \frac{1}{\Gamma(p_3)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} [x_j y_j - \beta z_j] \right) \end{cases}$$

$$a_{1,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^{p_1}}{p_1(p_1+1)} (k^{p_1+1} - (k-p)(k+1)^{p_1}) & \text{si } j=0 \\ \frac{h^{p_1}}{p(p_1+1)} (k-j+2)^{p_1+1} + (k-j)^{p_1+1} - 2(k-j+2)^{p_1+1} & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

$$a_{2,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^{p_2}}{p_2(p_2+1)} (k^{p_2+1} - (k-p)(k+1)^{p_2}) & \text{si } j=0 \\ \frac{h^{p_2}}{p_2(p_2+1)} (k-j+2)^{p_2+1} + (k-j)^{p_2+1} - 2(k-j+2)^{p_2+1} & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

$$a_{3,j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^{p_3}}{p_3(p_3+1)} (k^{p_3+1} - (k-p)(k+1)^{p_3}) & \text{si } j=0 \\ \frac{h^{p_3}}{p_3(p_3+1)} (k-j+2)^{p_3+1} + (k-j)^{p_3+1} - 2(k-j+2)^{p_3+1} & \text{si } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + \frac{h^{p_1}}{\Gamma(p_1+2)} [\sigma(y_j^P - x_j^P)] + \frac{1}{\Gamma(p_1)} \left(\sum_{j=0}^k a_{1,j,k+1} [\sigma(y_j - x_j)] \right) \\ y_{k+1} = y_0 + \frac{h^{p_2}}{\Gamma(p_2+2)} [x_j^P (r - z_j^P) - y_j^P] + \frac{1}{\Gamma(p_2)} \left(\sum_{j=0}^k a_{2,j,k+1} [x_j (r - z_j) - y_j] \right) \\ z_{k+1} = z_0 + \frac{h^{p_3}}{\Gamma(p_3+2)} [x_j^P y_j^P - \beta z_j^P] + \frac{1}{\Gamma(p_3)} \left(\sum_{j=0}^k a_{3,j,k+1} [x_j y_j - \beta z_j] \right) \end{cases}$$

3.6 Exemples des systèmes hyperchaotiques fractionnaires :

3.6.1 Système issue de modèle financier :

Soient le système de financier suivant :

$$\begin{cases} D_t^p x = z - (y - a)x \\ D_t^p y = 1 - by - x^2 \\ D_t^p z = -x - cz \\ D_t^p w = x - dw \end{cases} \quad (3.35)$$

Tel que : $a = 1, b = 0.1, c = 1, d = 0.1$, et $p = 0.95$

On cherche les points d'équilibres :

$$\begin{cases} z - (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \\ x - dw = 0 \end{cases}$$

On trouve trois points d'équilibres sont :

$$E_0 = \left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right)$$

$$E_1 = \left(\sqrt{1 - bk}, k, -\frac{1}{c}\sqrt{1 - bk}, \frac{1}{d}\sqrt{1 - bk}\right)$$

$$E_2 = \left(-\sqrt{1 - bk}, k, \frac{1}{c}\sqrt{1 - bk}, -\frac{1}{d}\sqrt{1 - bk}\right)$$

Où : $k = a + \frac{1}{c}, k \leq \frac{1}{b}$

Si $k > \frac{1}{b}$ il existe un seul point d'équilibres E_0

La matrice Jacobienne est donner par :

$$J(x.y.z.w) = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 & 0 \\ -2x & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}$$

Et le polynome caratéristique est le suivant :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^4 + [a + b + c + d - y]\lambda^3 \\ &+ [ab + ac + ad + bc + bd + cd - (b + c + d)y + 2x^2 + 1]\lambda^2 \\ &+ [bcd + abc + abd + acd + b + d - (bc + bd + cd)y + 2(c + d)x^2]\lambda \\ &+ bd - abcd + bcdy + 2cdx^2 \end{aligned}$$

Pour les valeurs : $a = 1, b = 0.1, c = 1, d = 0.1$, les points fixes sont :

Points d'équilibres	Valeurs propres
$(0, 10, 0, 0)$	$\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = 8.8990, \lambda_3 = -8.8990, \lambda_4 = -0.1$
$(0.89443, 2, -0.89443, 8.9443)$	$\lambda_1 = -0.1, \lambda_{2,3} = 0.3304 \pm 1.4120i, \lambda_4 = -0.7609$
$(-0.89443, 2, 0.89443, -8.9443)$	$\lambda_1 = -0.1, \lambda_{2,3} = 0.3304 \pm 1.4120i, \lambda_4 = -0.7609$

Pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre, nous allons utiliser le théorème 36 (Matignon)

De plus, en utilisant les valeurs de paramètres mentionnées ci-dessus, on vérifie que :

(1) Pour le point fixe $E_0 = (0, 10, 0, 0)$, $|\arg(\lambda_2)| = 0 < p\frac{\pi}{2}$ pour tout $0 < p < 1$ donc E_0 est untable

(2) Pour les points fixes $E_1 = (0.89443, 2, -0.89443, 8.9443)$, $E_2 = (-0.89443, 2, 0.89443, -8.9443)$

$|\arg(\lambda_{1,4})| = \pi, |\arg(\lambda_{2,3})| = 1.3409$ alors, $\min_{1 \leq i \leq 4} |\arg(\lambda_{1,2})| = 1.3409$

Donc la valeur critique est :

$$p_c = \frac{2 \min_{1 \leq i \leq 4} |\arg(\lambda_{2,3})|}{\pi} = 0.8508$$

(i) Si $p < 0.8508$ donc E_1, E_2 sont asymptotiquement stable

(ii) Si $p > 0.8508$ donc E_1, E_2 sont unstable

Par conséquent, l'ordre fractionnaire ; le plus bas, dont le système d'ordre fractionnaire (3.35) montre le chaos est donné par l'inégalité $p > 0.85408$.

Ce système sera intégré numériquement pour montrer les hyperchaotique en utilisant une méthode efficace de résolution équations différentielles d'ordre fractionnaire, c'est-à-dire le schéma de Grünwald-Letnikov pour les valeurs : $a = 1, b = 0.1, c = 1, d = 0.1, p = 0.95$; et la condition initial $(x, y, z, x) = (0.2, -0.1, 0.1, 0.6)$.

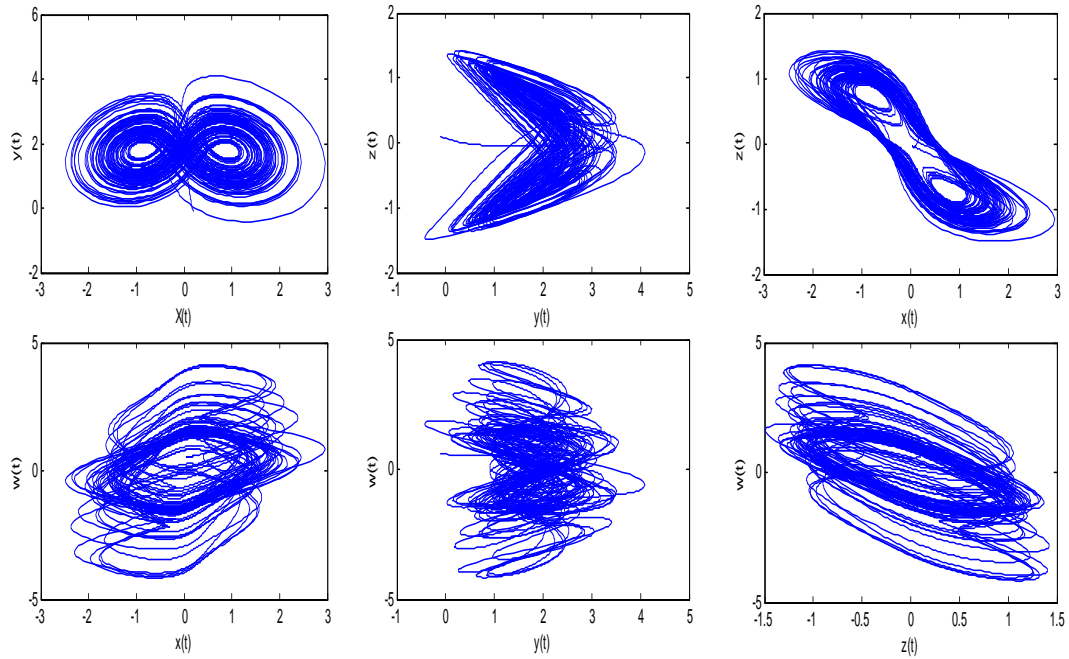


Figure 27 : 2-D Attrateurs chaotiques du système fractionnaire (3.35)

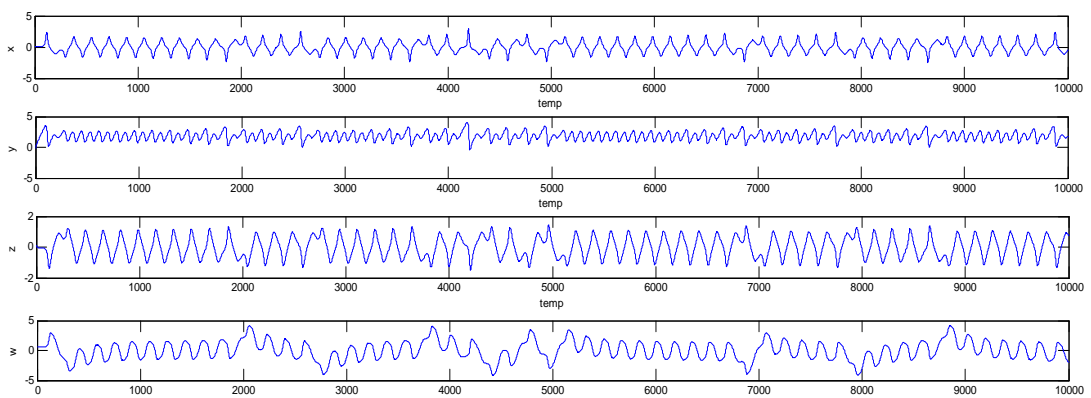


Figure 28 : Séries temporelles du système (3.35)

3.6.2 Système issue de modèle de chua :

Soient le système de Chua suivant :

$$\begin{cases} D_t^p x = \alpha(y - (1 - \varepsilon)x - W(w)x) \\ D_t^p y = x - y + z \\ D_t^p z = -\beta y - \gamma z \\ D_t^p w = x \end{cases} \quad (3.36)$$

Tel que : $\alpha = 10, \beta = 13, \gamma = 0.1, \varepsilon = 1.5, a = 0.3, b = 0.8, \text{ et } p = 0.97$

$$W(w) = \begin{cases} a \text{ si } |w| \leq 1 \\ b \text{ si } |w| > 1 \end{cases}$$

Les points d'équilibre de ce système sont déterminés en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha(y - (1 - \varepsilon)x - W(w)x) = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y - \gamma z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il existe un unique point d'équilibre de dans chacune des deux régions de \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(x, y, z, w) : |w| \leq 1\} \\ D_1 &= \{(x, y, z, w) : |w| > 1\} \end{aligned}$$

Ces deux points d'équilibres sont : $A = (0.0.0.a); B = (0.0.0.b)$

Dans chaque régions D_0, D_1 le système est linéaire.

La matrice Jacobienne est une matrice constante et dépendant de $\alpha, \beta, \varepsilon, \text{ et } u$, qui est égal à a dans D_0 , et b dans D_1 .

$$J(x.y.z.w) = \begin{pmatrix} \alpha(-1 + \varepsilon - u) & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^4 + [\gamma + \alpha(1 - \varepsilon + u) + 1]\lambda^3 + [\gamma + \beta - \alpha(-1 + \varepsilon - u)(\gamma + 1) + \alpha]\lambda^2 \\ &+ [\alpha\gamma - \alpha(-1 + \varepsilon - u)(\gamma + \beta)]\lambda \end{aligned}$$

Pour le point $A = (0.0.0.a)$ les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1.1647 + 2.6582i, \lambda_3 = -1.1647 - 2.6582i, \lambda_4 = 3.2294$$

Et sont vecteurs propres respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4020 - 0.2151i \\ -0.0701 + 0.1749i \\ -0.8555 \\ -0.1235 - 0.0971i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4020 + 0.2151i \\ -0.0701 - 0.1749i \\ -0.8555 \\ -0.1235 + 0.0971i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8634 \\ 0.1061 \\ -0.4145 \\ 0.2674 \end{pmatrix}$$

$|\arg(\lambda_{1.4})| = 0 < p\frac{\pi}{2}$ pour tout $0 < p < 1$ donc A est untable

Pour le point $B = (0.0.0.b)$ les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.2228 + 2.8941i, \lambda_3 = 0.2228 - 2.8941i, \lambda_4 = -4.5456$$

Et sont vecteurs propres respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.3323 - 0.2962i \\ -0.0214 - 0.1917i \\ 0.8609 \\ -0.1105 + 0.1063i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.3323 + 0.2962i \\ -0.0214 + 0.1917i \\ 0.8609 \\ -0.1105 - 0.1063i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8851 \\ -0.1368 \\ -0.4000 \\ -0.1947 \end{pmatrix}$$

$|\arg(\lambda_1)| = 0 < p\frac{\pi}{2}$ pour tout $0 < p < 1$ donc B est untable

Ce système sera intégré numériquement pour montrer les hyperchaotique pour les valeurs : $\alpha = 10, \beta = 13, \gamma = 0.1, \varepsilon = 1.5, a = 0.3, b = 0.8, et p = 0.97$; et la condition initial $(x, y, z, x) = [0.8, 0.50, 0.007, 0.6]$

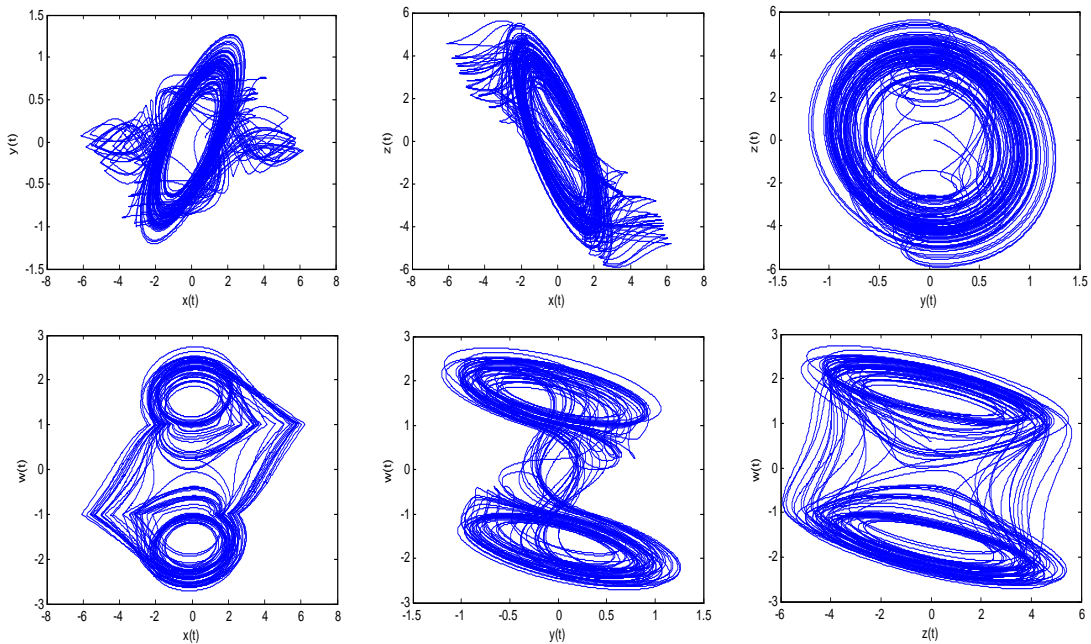


Figure 29 : 2-D Attrateurs chaotiques du système fractionnaire (3.36)

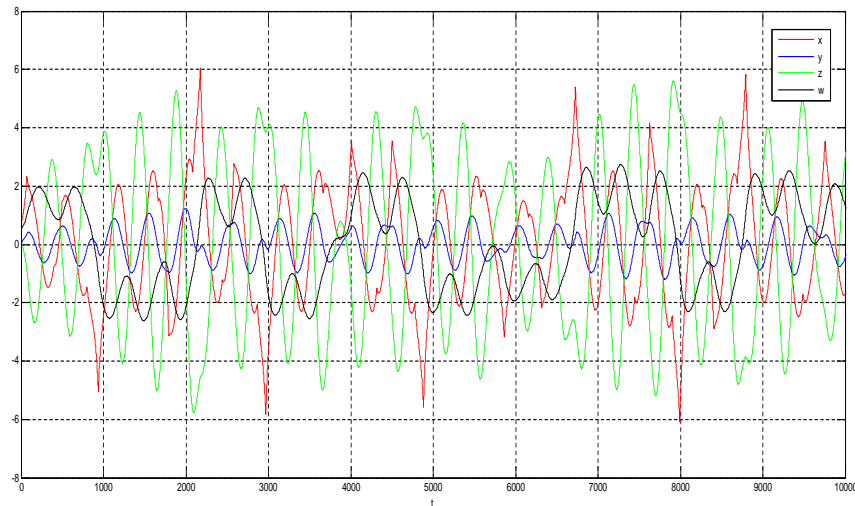


Figure 30 : Séries temporelles du système (3.36)

3.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons centré notre étude sur la théorie des équations différentielles fractionnaires (type de Caputo). Nous avons présenté quelques théories de base pour les études d'existence, unicité et stabilité, Nous avons donnée des méthodes pour la résolution analytique des équations différentielles fractionnaires et des schémas numériques ont pour la simulation numérique . Les résultats de stabilité ont été utilisés dans les études des modèles sélectionnés.

Chapitre 4

Théorie de synchronisation :

4.1 Introduction :

Les phénomènes de synchronisation ont fait l'objet de discussions dans divers domaines de recherche depuis le 17^{ème} siècle, lorsque la synchronisation de deux pendules horloges attachées à une poutre de support commune a été découverte pour la première fois par Christiaan Huygens en 1673 [57], la synchronisation des systèmes dynamique a trouvé son chemin vers de nombreuses applications en théorie et en pratique et plusieurs types de synchronisation ont été distingués.

Récemment, les chercheurs de la synchronisation se sont intéressés aux systèmes chaotiques et comme ces derniers sont caractérisés par une sensibilité aux conditions initiales, à première vue, parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques semble donc être surprenant, et on peut penser que le chaos est incontrôlable. Cependant, des recherches récentes ont montré que l'on pouvait synchroniser deux systèmes chaotiques en les couplant.

Dans la littérature, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés, en premier par Fujisaka et Yamada [58]. Par la suite, des concepts importants liés à la synchronisation chaotique ont été développés par Afraimovich et al. [59].

Le premier travail de recherche ayant suggéré une réponse à la question de synchronisation des systèmes chaotiques a été réalisé en 1990 par les chercheurs Pecora-Carroll [60], il été concentrés sur une configuration de type Maître/Esclave synonyme de couplage Unidirectionnel (seul le système Maître transmettant des informations ou des commandes de contrôle à l'Esclave responsable de la synchronisation). Ce type de synchronisation est dit synchronisation identique. Une généralisation du concept de couplage unidirectionnel a été proposée par Rulkov et al. [75], où deux systèmes sont synchronisé s'il existe une relation fonctionnelle reliant l'esclave au maître. Ils ont appelé ce type de synchronisation une synchronisation généralisée. Dès lors, nombreux types de synchronisation ont été proposés dans les systèmes chaotiques.

Dans ce chapitre, nous abordons largement les types de synchronisation utilisés et nous nous intéressons au type de synchronisation généralisé dans notre étude comme nous le verrons dans le prochain chapitre. Comme nous le savons, le contrôle de la synchronisation du chaos est très important pour les systèmes chaotiques. Certaines méthodes sont proposées pour contrôler les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, tels que le contrôleur actif et la le contrôleur de retour en arrière.

4.2 Types de synchronisation :

Puisqu'il existe de nombreuses applications et observations de synchronisation, divers types de synchronisation existent dans la littérature :

4.2.1 Synchronisation de Phases

La synchronisation de phase se produit lorsque les oscillateurs chaotiques couplés conservent leur différence de phase, tandis que leurs amplitudes délimitée restent non corrélés. Ce phénomène se produit même si les oscillateurs ne sont pas identiques. L'observation de la synchronisation de phase nécessite une définition précédente de la phase d'un oscillateur chaotique. Dans de nombreux cas pratiques, il est possible de trouver un plan dans l'espace de phase dans lequel la projection de la trajectoire de l'oscillateur suit une rotation autour d'un centre bien défini. Si tel est le cas, la phase est définie par l'angle $\phi(t)$, décrit par le segment reliant le centre de rotation et la projection du point de trajectoire sur le plan. Dans d'autres cas, il est toujours possible de définir une phase à l'aide de techniques fournies par la théorie du traitement du signal, telles que la transformée de Hilbert. Dans tous les cas, si $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ désignent les phases des deux oscillateurs couplés, la synchronisation de phase est donnée par la relation $n\phi_1(t) = m\phi_2(t)$ avec m et n des nombres entiers [61, 62, 63]

4.2.2 Synchronisation complète :

On considère un système chaotique maître représenté par :

$${}^c D_t^p X(t) = F(X(t))$$

${}^c D_t^p$ est la dérivée fractionnaire de Caputo.

Le système esclave représenté par la formule suivante :

$${}^c D_t^q Y(t) = G(Y(t)) + U$$

$X(t), Y(t)$ sont les vecteurs d'état du système maître et esclave respectivement.

Où $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1, U \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de contrôle à déterminer, l'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t)$$

telle que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

- Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.
- Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

On a une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés [64]

4.2.3 Anti-Synchronisation :

On dit que deux systèmes sont en anti-synchronisation, si le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue, mais avec signes opposés, et la somme de ces vecteurs d'état de deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [65]

Alors, l'erreur de l'anti-synchronisation est présentée par :

$$e(t) = Y(t) + X(t)$$

4.2.4 Synchronisation retardée :

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps [66]. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t + \tau)\| = 0 \text{ ou } \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \tau)\| = 0 \right) \forall x(0)$$

où : τ un retard positif très petit.

4.2.5 Synchronisation projective :

On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique esclave se synchronisent avec une constante multiple de l'état $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique maître, tels que [67] :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \alpha_i x_i(t)| = 0, \forall x(0), y(0), 1 \leq i \leq n$$

- Le cas où tous les $\alpha_i = 1$ représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les $\alpha_i = -1$ représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.2.6 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une synchronisation *FSHP* (en anglais full state hybrid projective synchronization), si chaque variable d'état $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique maître tel que :

$$\exists (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) \right| = 0, \forall x(0), y(0), 1 \leq i \leq n$$

La synchronisation *FSHP* est une généralisation de la synchronisation projective. [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]

4.2.7 Synchronisation généralisée :

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective pour synchroniser des systèmes chaotiques typiquement différents. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre deux systèmes chaotiques couplés. La synchronisation généralisée notée par *GS* (en anglais : Generalized Synchronization) est l'un des phénomènes fondamentaux, largement étudiés récemment, ayant une signification à la fois théorique et appliquée.

Parmi les premières publications sur cette méthode, on cite les travaux de Rulkov et al [75] et de Kocarev et Parlitz [76]. Yan et Li [77] ont introduit la synchronisation généralisée pour des systèmes chaotiques unifiés.

Récemment, cette méthode est étudiée pour les systèmes chaotiques de dimension arbitraire par un contrôle non linéaire [78].

Cependant, il n'existe que peu de résultats théoriques sur la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotiques de différentes dimensions,

Plus récemment, A. Ouannas et M. Al-sawalha [79] ont conçu deux schémas pour réaliser la synchronisation entre des systèmes chaotiques d'ordre entier de dimensions différentes, et A. Ouannas, O. Zehrou, Z. Laadjal [80] ont conçu deux schémas pour réaliser la synchronisation entre des systèmes chaotiques l'un d'ordre entier et l'autre d'ordre fractionnaire de dimensions différentes, alors ce type de recherche est juste en début.

On considère un système chaotique maître représenté par :

$${}^c D_t^p X(t) = F(X(t))$$

${}^c D_t^p$ est la dérivée fractionnaire de Caputo.

Le système esclave représenté par la formule suivante :

$${}^c D_t^q Y(t) = G(Y(t)) + U$$

où : $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état du système maître et esclave respectivement.

Où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1, U \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de contrôle à déterminer.

S'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave, avec les conditions initiales $X(0)$ et $Y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0$$

Alors, les systèmes maître-esclave se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction .

Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(k)) = HX(k)$ tel que $H = (H_{ij})_{m \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation *FSHP*. [81]

4.2.8 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

S'il existe deux fonctions $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave, avec les conditions initiales $X(0)$ et $Y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(Y(t)) - \phi(X(t))\| = 0$$

Alors, les systèmes maître-esclave se synchronisent . [82]

4.3 Méthodes de synchronisation :

4.3.1 Méthode du contrôleur actif :

La méthode du contrôleur actif est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques avec des dimensions différentes [83, 84] . Soit deux systèmes à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$${}^c D_t^q X(t) = F(X(t)) \quad (4.1)$$

et :

$${}^c D_t^q Y(t) = G(Y(t)) + U \quad (4.2)$$

Où : $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'état du système maître et esclave respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, 0 < q \leq 1, U \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de contrôle à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (4.3)$$

donc :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^q e(t) &= {}^c D_t^q Y(t) - {}^c D_t^q X(t) \\ &= F(X(t)) - G(Y(t)) + U \end{aligned}$$

Si on peut écrire la quantité $F(X(t)) - G(Y(t))$ de la façon suivante :

$$-F(X(t)) + G(Y(t)) = Ae(t) + H(X(t), Y(t)) \quad (4.4)$$

L'erreur peut être exprimée comme suit :

$${}^c D_t^q e(t) = Ae(t) + H(X(t), Y(t)) + U \quad (4.5)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^n$ est une matrice constante et H une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - H(X(t), Y(t)) \quad (4.6)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(t) \quad (4.7)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$${}^c D_t^q e(t) = (A - L) e(t) \quad (4.8)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) est transformé en problème de zero-stabilité du système (4.8). Le théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires.

4.3.2 Méthode du Backstepping : "Retour en arrière"

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire

[85][86][87]. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} D_t^p x_1 = f_1(x_1, x_2) \\ D_t^p x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ D_t^p x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4.9)$$

Et :

$$\begin{cases} D_t^p y_1 = f_1(y_1, y_2) \\ D_t^p y_2 = f_2(y_1, y_2, y_3) \\ \vdots \\ D_t^p y_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + u \end{cases} \quad (4.10)$$

Où f_1 est une fonction linéaire, f_i ($i = 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (4.9) et (4.10). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} D_t^p e_1 = D_t^p y_1 - D_t^p x_1 \\ D_t^p e_2 = D_t^p y_2 - D_t^p x_2 \\ \vdots \\ D_t^p e_n = D_t^p y_n - D_t^p x_n \end{cases}$$

Alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} D_t^p e_1 = g_1(e_1, e_2) \\ D_t^p e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3) \\ \vdots \\ D_t^p e_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u \end{cases} \quad (4.11)$$

Où : g_1 est une fonction linéaire et g_i ($i = 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i ($i = 1, 2, \dots, n$), vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (4.11) doit être décomposé en sous système : (e_1, e_2) , $(e_1, e_2, e_3); \dots, (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j)$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j, α_j représentent respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j . u_j et α_j sont calculés à chaque fois de tel sorte que $\dot{V}_j < 0$

Remarque 58 *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

4.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons consacré notre étude à présenter les principaux types de synchronisation et leurs méthodes d'étude.

Chapitre 5

Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire :

5.1 Introduction :

Récemment, avec le développement d'algorithmes d'ordre fractionnaire, la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire a reçu beaucoup d'attention essentiellement l'étude du chaos dans ces systèmes . Il est bien connu qu'on ne peut pas avoir de chaos avec moins de deux dimensions dans les systèmes continus d'ordre entier. Il a été montré que de nombreux systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire se comportent de manière chaotique avec un ordre total inférieur à trois [88, 89] . Similaire au système dynamique non linéaire d'ordre entier, les systèmes dynamiques non linéaires d'ordre fractionnaire peuvent également être synchronisés [90]

Récemment, une étude sur la synchronisation des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire chaotique a commencé à attirer de plus en plus l'attention de nombreux chercheurs. Jusqu'à présent, une grande variété de techniques fractionnelles ont été utilisées pour concevoir un contrôle de synchronisation dans des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire [91, 92, 93, 94, 95, 96]. Parmi ceux-ci la synchronisation généralisée (GS) est la méthode de synchronisation la plus efficace qui a été utilisée largement pour réaliser la synchronisation du chaos. La synchronisation généralisée implique l'établissement d'une relation fonctionnelle entre les systèmes maître et esclave. Il a reçu beaucoup d'attention pour son universalité ces dernières années. De nos jours, de nombreuses recherches sur la GS dans des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire ont été effectuées théoriquement et expérimentalement [97, 98, 99].

Ce chapitre est présenté une nouvelle méthode de contrôle pour étudier un nouveau schéma de synchronisation généralisé complexe entre des systèmes chao-

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 106

tiques fractionnaires arbitraires avec différentes dimensions. Utilisation de la transformée de Laplace et de l'approche fractionnaire basée sur Lyapunov, deux théorèmes sont prouvés, qui permettent la synchronisation entre les systèmes chaotique fractionnaire n-dimensionnelle et m-dimensionnelle à réaliser. La complexité du schéma proposé peut être utilisée pour renforcer la sécurité dans la communication et le cryptage [100].

5.2 Base théorique :

Dans cette section nous rappelons quelques définitions préliminaires et lemmes qui nous avons obtenus des deuxième et troisième chapitres pour faciliter l'étude de problème :

Définition 59 L'opérateur d'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $p > 0$ de la fonction $f(t)$ est défini comme :

$$J^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

.

Définition 60 La dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$ est définie par :

$$D_t^p f(t) = J^{m-p} \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-m+1}} d\tau, \quad (5.2)$$

pour $m-1 < p \leq m$, $m \in \mathbf{N}$, $t > 0$.

Définition 61 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$L({}_0^c D_t^p f(t)) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0), \quad p > 0, n-1 < p \leq n \quad (5.3)$$

En particulier, lorsque $0 < p \leq 1$

$$L({}_0^c D_t^p f(t)) = s^p F(s) - s^{p-1} f(0) \quad (5.4)$$

Définition 62 La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville satisfait la dérivée :

$$L\left\{{}_0^{GL} J_t^q f(t); s\right\} = s^{-q} F(s), \quad q > 0 \quad (5.5)$$

Lemme 63 [48] La solution triviale du système (3.1) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction Lyapunov définie positive $V(y(t))$ telle que :

$${}_a^c D_t^p (V(y(t))) < 0 \quad \text{pour } t > 0. \quad (5.6)$$

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 107

Lemme 64 [49] Soit $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, avais des dérivées continues dans, H est une matrice définie positive; alors :

$$\forall t > 0, {}_a^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y^T(t) y(t) \right) < y^T(t) {}_a^c D_t^p y(t); \forall 0 < p < 1 \quad (5.7)$$

Définition 65 Le système maître (5.9) et le système esclave (5.10) sont dits généralisés synchronisés, s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et une fonction différentiable donnée $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que l'erreur

$$e(t) = Y(t) - \phi(X(t)), \quad (5.8)$$

satisfait : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne

5.2.1 Système Maître et Esclave :

On considère le système chaotique fractionnaire maître représenté par :

$$D_t^p X(t) = F(X(t)) \quad (5.9)$$

Où : $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ est le vecteur d'état du système maître (5.9), D_t^p est la dérivé fractionnaire de caputo d'ordre p , $0 < p \leq 1$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On considère le système chaotique fractionnaire esclave :

$$D_t^q Y(t) = BY(t) + G(Y(t)) + U, \quad (5.10)$$

Où : $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ est le vecteur d'état du système esclave (5.10), D_t^q est la dérivé fractionnaire de caputo d'ordre q , $0 < q \leq 1$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction nonlinéaire et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un vecteur de contrôle à déterminer.

Le système d'erreur peut être écrit comme suit

$$D_t^p e(t) = D_t^p y(t) - D_t^p \phi(X(t)). \quad (5.11)$$

Nous supposons que $q < p$. Par conséquent, nous avons le résultat suivant.

5.2.2 Résultat principal :

Théorème 66 Le système maître (5.9) et le système esclave (5.10) sont globalement généralisées synchronisées par rapport à la fonction ϕ , sous la loi de contrôle suivante

$$U = -BY(t) - G(Y(t)) + J^{p-q} [(B - C)(Y(t) - \phi(X(t))) + D_t^p \phi(X(t))] \quad (5.12)$$

Où : $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est sélectionné tel que $B - C$ est une matrice définite négative .

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 108

Preuve. : En insérant la loi de contrôle décrite par Eq. (5.12) dans le système(5.10), on peut réécrire le système esclave comme suit

$$D_t^q Y(t) = J^{p-q} ((B - C)(Y(t) - \phi(X(t))) + D_t^p \phi(X(t))) \quad (5.13)$$

On applique la transformation de la Laplace à (5.13) et on remplace $\mathbf{F}(s) = \mathbf{L}(Y(t))$, on obtient

$$s^q \mathbf{F}(s) - s^{q-1} Y(0) = s^{q-p} \mathbf{L}((B - C)(Y(t) - \phi(X(t))) + D_t^p \phi(X(t))), \quad (5.14)$$

On multiplie les deux côtés de (5.14) par s^{p-q} et on applique la transformation inverse de la Laplace à le résultat, on obtient :

$$D_t^p Y(t) = (B - C)(Y(t) - \phi(X(t))) + D_t^p \phi(X(t)) \quad (5.15)$$

De Eqs.(5.15)–(5.12), on obtient le système dynamique d'erreur comme suit

$$D_t^p e(t) = (B - C)e(t) \quad (5.16)$$

On construit la fonction de Lyapunov sous la forme $V(e(t)) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t)$, puis on applique la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre p sur V . $D_t^p V(e(t)) = D_t^p (\frac{1}{2} e^T(t) e(t))$ et en utilisant le Lemme 64 on obtient :

$$D_t^p V(e(t)) \leq e^T(t) D_t^p e(t) = e^T(t) (B - C)e(t) < 0.$$

Ainsi, à partir du lemme 63, c'est la solution nulle du système d'erreur (5.16) est globalement asymptotiquement stable et donc des systèmes (5.9) et (5.10) sont globalement généralisées synchronisées. ■

5.3 Exemples illustrative

Dans cette section, afin de montrer l'efficacité de nos approches, deux exemples numériques sont considérés

5.3.1 Exemple 1

Dans cet exemple, nous supposons que le modèle de moteur synchrone à aimants permanents d'ordre fractionnaire (PMSM) [101] est le système maître et le nouveau système hyperchaotique d'ordre fractionnaire contrôlé, proposé par Wu et al. en [?], est le système esclave. Le système maître est décrit par :

$$\begin{aligned} D_t^p x_1 &= -x_1 + x_2 x_3, \\ D_t^p x_2 &= -x_2 - x_1 x_3 + a x_3, \\ D_t^p x_3 &= b(x_2 - x_3), \end{aligned} \quad (5.17)$$

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 109

Où : $(a, b) = (100, 10)$ et $p = 0.95$. Figure 31 présente l'attracteur chaotique et ses projections du système PMSM d'ordre fractionnaire (5.17).

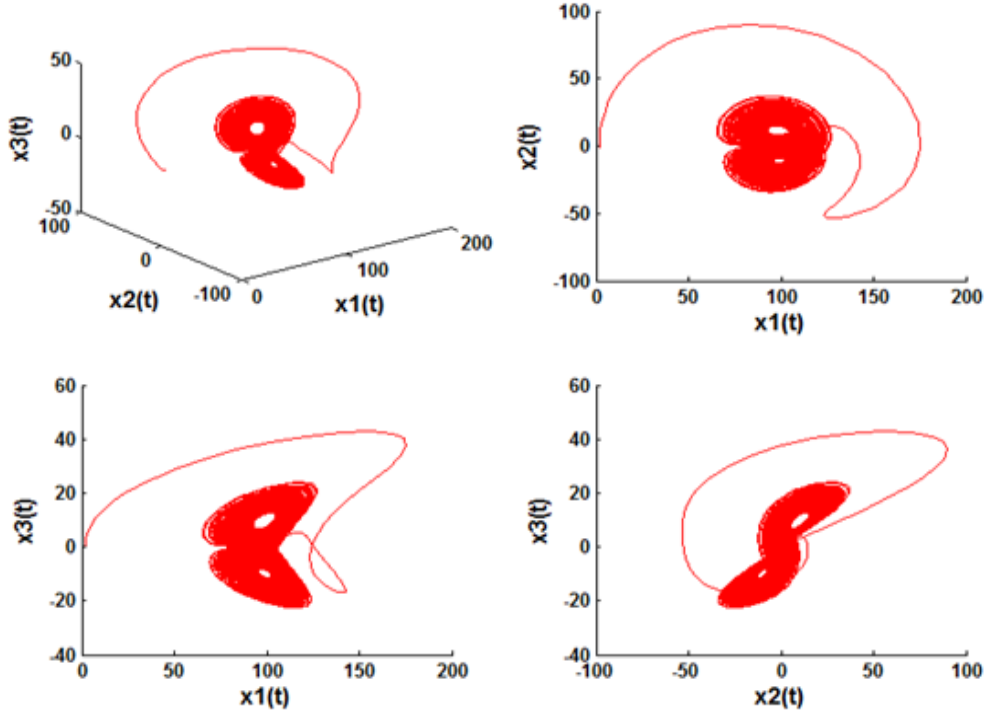


Figure 31 : Attracteurs Chaotique du système maître (5.17) où : $(a, b) = (100, 10)$ et $p = 0.95$.

Le système esclave est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
 D_t^q y_1 &= 10(y_2 - y_1) + u_1, \\
 D_t^q y_2 &= 28y_1 + y_2 - y_4 - y_1 y_3 + u_2, \\
 D_t^q y_3 &= y_1 y_2 - \frac{8}{3}y_3 + u_3, \\
 D_t^q y_4 &= 0.1y_2 y_3 + u_4,
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

où : $u_i, i = 1, 2, 3, 4$, sont des contrôleurs de système (5.18), quand $q = 0.94$, le système présente des comportements hyperchaotiques sans contrôle, comme le

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 110

montre la figure 32 .

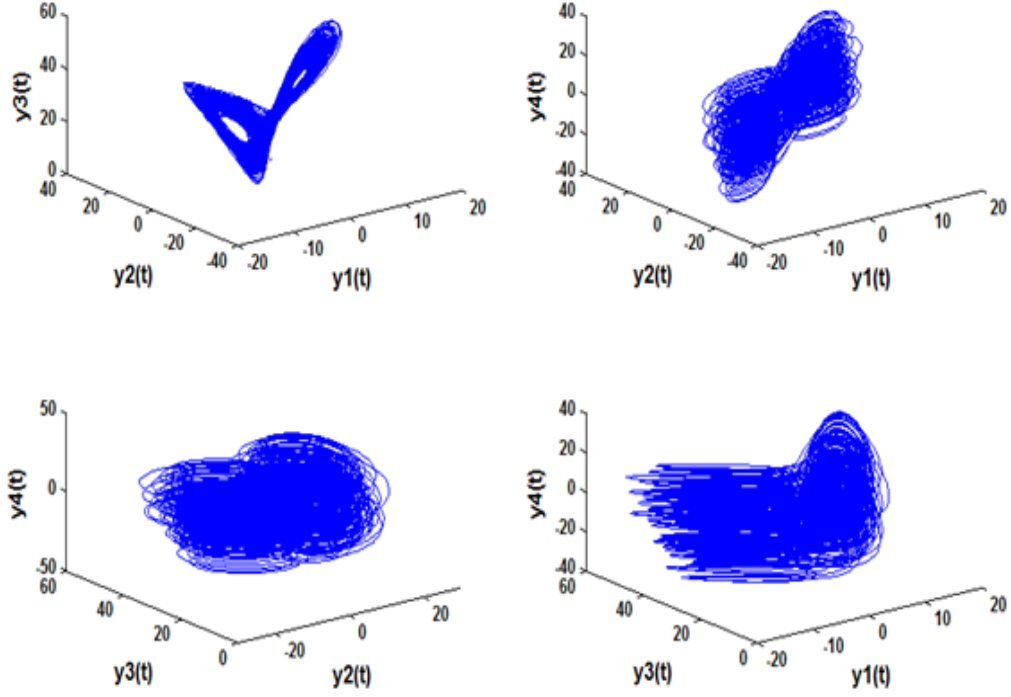


Figure 32 : Attracteurs du système esclave (5.18) où : $q = 0.94$ et $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$.

Dans ce cas, la matrice $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$ et la fonction non linéaire G du système esclave (5.18) sont donnés par :

$$B = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ -y_1 y_2 \\ 0.1 y_2 y_3 \end{pmatrix}.$$

Définir l'erreurs de GS entre le système maître(5.17) et le système esclave (5.18) par

$$(e_1, e_2, e_3, e_4)^T = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T - \phi(x_1, x_2, x_3), \quad (5.19)$$

où

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 111

En appliquant notre approche de GS, la matrice de gain de rétroaction C est choisie comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 28 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

Et les contrôleurs u_i , $i = 1, 2, 3, 4$, peut être connu comme

$$\begin{aligned} u_1 &= -10(y_2 - y_1) + J^{0.01} [-10e_1 + D_t^{0.95}x_1], \\ u_2 &= -28y_1 - y_2 + y_4 + y_1y_3 + J^{0.01} [-e_2 + D_t^{0.95}x_2], \\ u_3 &= \frac{8}{3}y_3 + y_1y_2 + J^{0.01} \left[-\frac{8}{3}e_3 + D_t^{0.95}x_3 \right], \\ u_4 &= -0.1y_2y_3 + J^{0.01} [-e_4 + D_t^{0.95}x_1x_2x_3]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Il est facile de savoir que $B - C$ est une matrice définie négative. Ensuite, selon le théorème 1, le système maître (5.17) et le système esclave (5.18) sont globalement généralisées synchronisées. Dans ce cas, le système d'erreur entre le système (5.17) et (5.18) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} D_t^{0.95}e_1 &= -10e_1, \\ D_t^{0.95}e_2 &= -e_2, \\ D_t^{0.95}e_3 &= -\frac{8}{3}e_3 \\ D_t^{0.95}e_4 &= -e_4. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aux fins de la simulation numérique, la méthode fractionnelle de Grünwald-Letnikov a été utilisée. Les valeurs initiales du système maître et des systèmes esclaves sont $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [2, -1, 1]$ et $[y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)] = [2, 3, 4, 6]$, respectivement, et les états initiaux du système d'erreur sont $[e_1(0), e_2(0), e_3(0), e_4(0)] = [0, 4, 3, 8]$. L'évolution des fonctions d'erreur, dans ce cas, est illustrée à la Figure

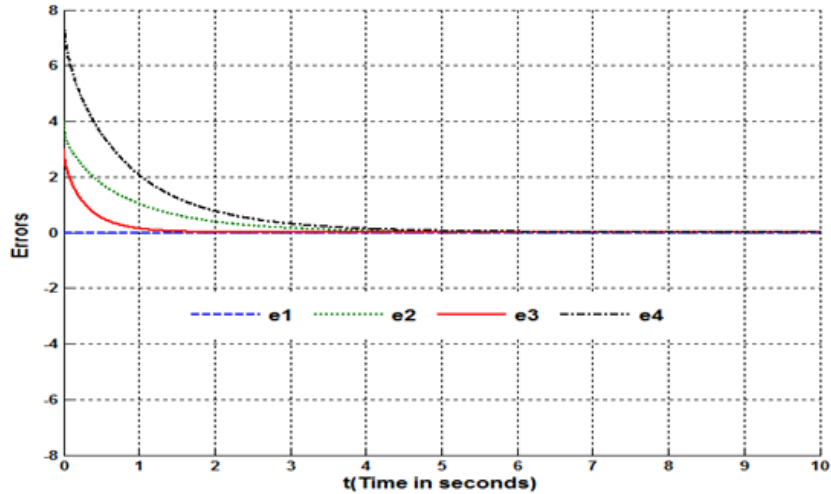


Figure 33 : Evolution temporelle des erreurs GS du système (5.23).

5.3.2 Exemple 2

Dans cet exemple, nous choisissons le système de Lorenz hyperchaotique d'ordre fractionnaire [103] en tant que maître et le système Liu d'ordre fractionnaire contrôlé, présenté dans [103], en tant que système esclave. Le système maître est défini comme :

$$\begin{aligned}
 D^p x_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\
 D^p y_2 &= cx_1 - x_2 - x_1 x_3, \\
 D^p y_3 &= x_1 x_2 - bx_3, \\
 D^p y_4 &= -x_2 x_3 + dx_4.
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

Le système de Lorenz hyperchaotique d'ordre fractionnaire (5.24) présente des comportements hyperchaotiques lorsque $p = 0.98$ and $(a, b, c, d) = (10, \frac{8}{3}, 28, -1)$ [104].

Les attracteurs du système de Lorenz hyperchaotique d'ordre fractionnaire(5.24)

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 113

sont représentés sur la Figure 34.

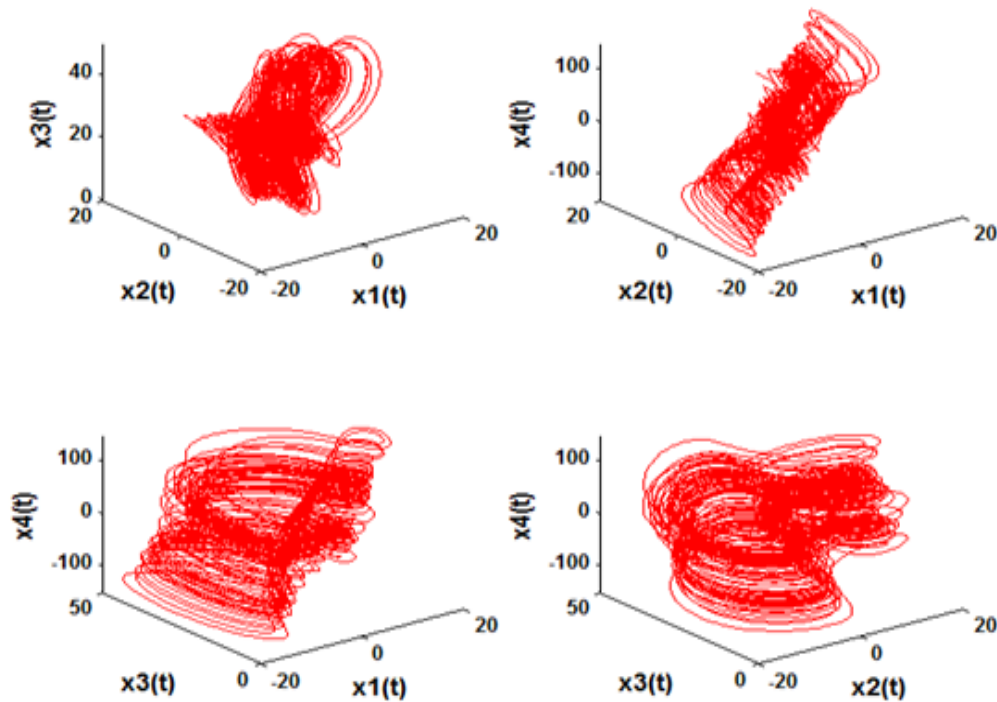


Figure 34 : Différent attracteurs du système maître (5.24) où : $p = 0.98$ and $(a, b, c, d) = (10, \frac{8}{3}, 28, -1)$.

Le système esclave est :

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= -y_1 - y_2^2 + u_1, \\ D^q y_2 &= 2.5y_2 - 4y_1y_3 + u_2, \\ D^q y_3 &= -5y_3 + 4y_1y_2 + u_3, \end{aligned} \quad (5.25)$$

Où u_i , $i = 1, 2, 3$, sont des contrôleurs. Le système (5.25), quand $q = 0.94$, présente

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 114

des comportements chaotiques sans contrôle, comme le montre la Figure 35 .

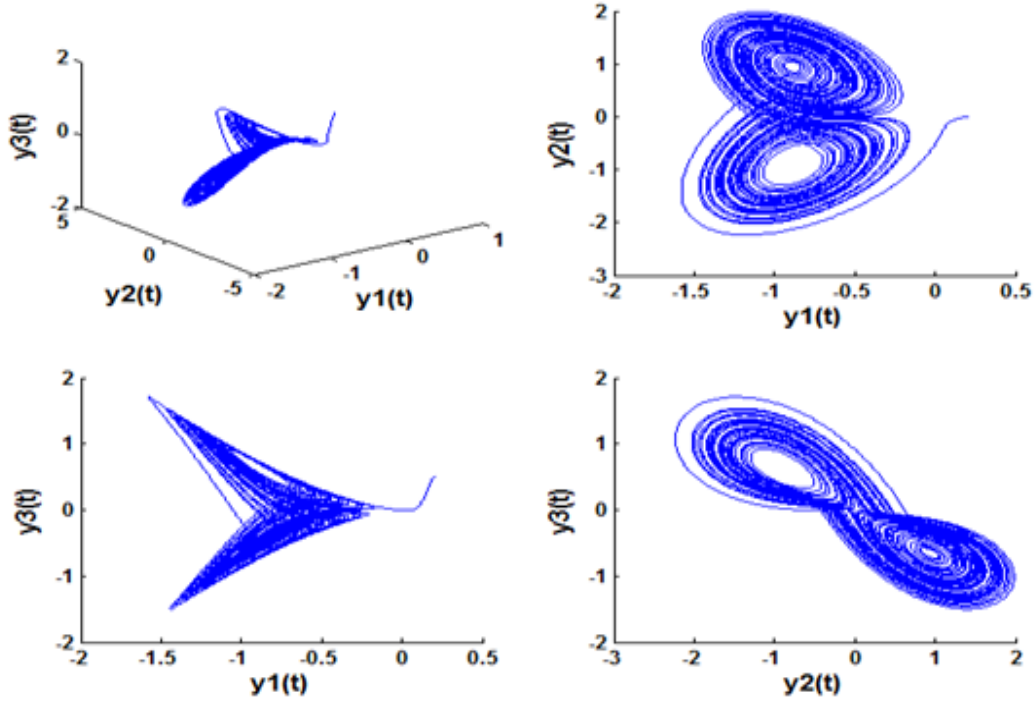


Figure 35 : Attracteurs du système esclave (5.25) où : $q = 0.94$ et $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$.

Comparer le système (5.25) avec système (5.10), on peut avoir avec système (5.10),

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -y_2^2 \\ -4y_1y_3 \\ 4y_1y_2 \end{pmatrix}.$$

Définissons maintenant les erreurs de GS entre le système maître (5.24) et le système esclave (5.25) par :

$$(e_1, e_2, e_3)^T = (y_1, y_2, y_3)^T - \phi(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (5.26)$$

où :

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

En utilisant notre schéma de contrôle GS de contrôle présenté dans la section

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 115

3, la matrice de constante de contrôle C est sélectionnée comme :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

et les contrôleurs u_i , $i = 1, 2, 3$, peuvent être construits comme :

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 + y_2^2 + J^{0.04} [-e_1 + D_t^{0.95} x_1], \\ u_2 &= -2.5y_2 + 4y_1y_3 + J^{0.04} [-2.5e_2 + D_t^{0.95} x_2], \\ u_3 &= 5y_3 - 4y_1y_2 + J^{0.04} [-5e_3 + D_t^{0.95} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)], \end{aligned} \quad (5.29)$$

Nous pouvons montrer que toutes les valeurs propres de $B - C$ est une matrice définie négative. Par conséquent, selon le théorème 1, les systèmes, (5.24) et (5.25) sont globalement généralisées synchronisées. Dans ce cas, le système d'erreur sera :

$$\begin{aligned} D^{0.98} e_1 &= -e_1, \\ D^{0.98} e_2 &= -2.5e_2, \\ D^{0.98} e_3 &= -5e_3. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Aux fins de la simulation numérique, la méthode d'intégration fractionnaire de Grünwald-Letnikov a été utilisée. Les valeurs initiales des systèmes maître et esclave son $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)] = [12, 22, 31, 4]$ et $[y_1(0), y_2(0), y_3(0)] = [0.2, 0, 0.5]$, respectivement, et les états initiaux du système d'erreur sont $[e_1(0), e_2(0), e_3(0)] = [-11.8, -22, -68.5]$. L'évolution des fonctions d'erreur, dans ce cas, est illustrée à la Figure 36.

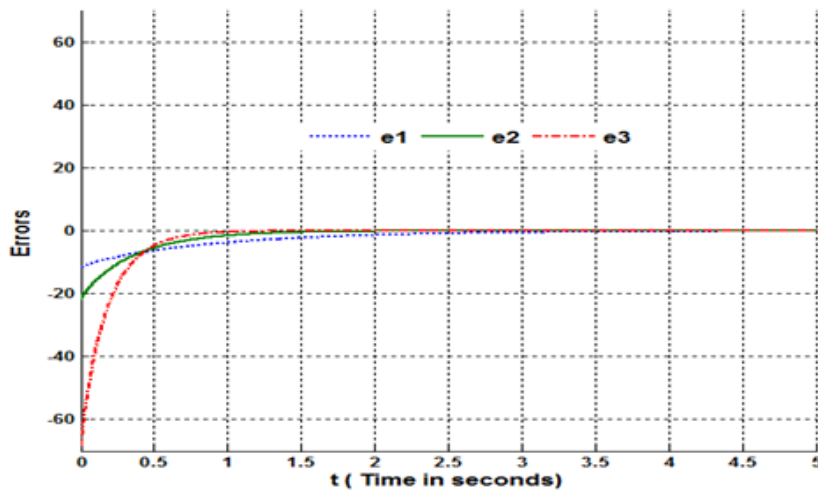


Figure 36 : Evolution temporelle des erreurs GS du système (5.30).

5.4 Conclusion :

Le problème de la synchronisation généralisée (*GS*) entre des systèmes chaotiques fractionnaires de différentes dimensions est étudié dans ce chapitre. Un nouveau schéma de contrôle complexe a été proposé pour atteindre la *GS* entre deux systèmes chaotiques fractionnaires généraux $n - D$ et $m - D$. Pour atteindre *GS*, le critère de synchronisation a été obtenu en contrôlant la partie linéaire du système esclave. En outre, des exemples numériques et des résultats de simulation montrent l'efficacité et la faisabilité du schéma proposé.

Conclusion générale et perspectives :

Cette étude s'inscrit l'étude sur la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotique d'ordre fractionnaire :

Nous avons introduit quelques notion de base des systèmes dynamiques chaotiques et nous avons exposé la théorie de la dérivation fractionnaires : différents types de dérivation fractionnaire (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo), transformation de Laplace, puis nous avons intéressé à la question d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire, et nous avons exposé les différents critères de stabilité et quelque-unes des méthodes d'analyse numériques utiles dans le cas d'un système non-linéaire, ensuite nous avons distingué les différents types et méthodes de synchronisation et finalement nous avons réalisé le problème de la synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques de dimensions différentes.

Nous pouvons notamment proposer les perspectives suivantes :

1. Il est bien connu que le chaos est étroitement lié aux communications sécurisées et au cryptage des données, nos travaux futurs se concentreront sur la création de nouveaux critères de synchronisation. C'est moins cher et très compliqué.
2. Modifier et appliquer les méthodes utilisées dans la synchronisation chaotique continue d'une manière efficace dans le cas de systèmes discrets.
3. L'application de la nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire pour le contrôle et à la synchronisation du chaos des systèmes fractionnaires

Annexe A :

Programme en Matlab.

```
function [T, Y] = FOLorenz (parameters, orders, TSim, Y0)
% Numerical Solution of the Fractional-Order Lorenz's System
%  $D^{q_1} x(t) = \sigma (y(t) - x(t))$ 
%  $D^{q_2} y(t) = x(t)(r(t)) - y(t)$ 
%  $D^{q_3} z(t) = x(t)y(t) - \beta z(t)$ 
% function [T, Y] = FOLorenz(parameters, orders, TSim, Y0)
% Input : parameters - model parameters [sigma, rho, beta]
% orders - derivatives orders [q1, q2, q3]
% TSim - simulation time (0–TSim) in sec
% Y0 - initial conditions [Y0(1), Y0(2), Y0(3)]
% Output : T - simulation time (0 : Tstep : TSim)
% Y - solution of the system (x = Y(1), y = Y(2), z = Y(3))
% time step :
h = 0.005;
% number of calculated mesh points :
n=round(TSim/h);
% orders of derivatives, respectively :
q1 =orders(1); q2 =orders(2); q3 =orders(3);
% constants of Lorenz's system :
sigma =parameters(1); rho =parameters(2); beta =parameters(3);
% binomial coefficients calculation :
cp1 = 1; cp2 = 1; cp3 = 1;
for j=1 :n
c1(j) = (1 - (1 + q1)/j) * cp1;
c2(j) = (1 - (1 + q2)/j) * cp2;
c3(j) = (1 - (1 + q3)/j) * cp3;
cp1 = c1(j); cp2 = c2(j); cp3 = c3(j);
end
% initial conditions setting :
x(1) = Y0(1); y(1) = Y0(2); z(1) = Y0(3);
% calculation of phase portraits /numerical solution/ :
```

5. Nouveaux schémas de synchronisation chaotique fractionnaire : 119

```
for i = 2 : n
    x(i) = (sigma * (y(i - 1) - x(i - 1))) * h^q1 - memo(x, c1, i);
    y(i) = (x(i) * (rho - z(i - 1)) - y(i - 1)) * h^q2 - memo(y, c2, i);
    z(i) = (x(i) * y(i) - beta * z(i - 1)) * h^q3 - memo(z, c3, i);
end
for j = 1 : n
    Y(j, 1) = x(j);
    Y(j, 2) = y(j);
    Y(j, 3) = z(j);
end
T = h : h : TSim;
% figure
plot 3(y(:, 1), y(:, 2), y(:, 3), 'k');
x label ('x(t)'); y label ('y(t)'); zlabel ('z(t)'); grid;
% function
function [yo] = memo(r, c, k)
    temp = 0;
    for j = 1 : k - 1
        temp = temp + c(j) * r(k - j);
    end
    yo = temp;
```

Annexe B :

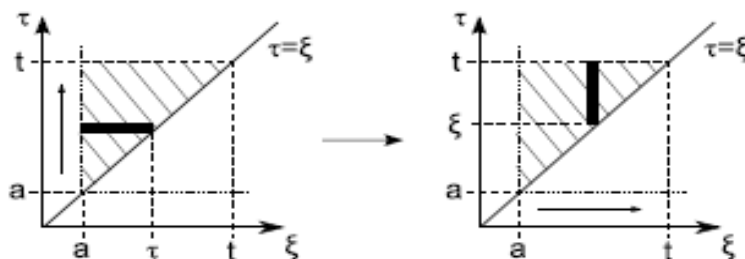
Changement d'ordre d'intégration :

Le changement d'ordre d'intégration est une astuce que nous utiliserons par ex. pendant le calcul de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. Nous soulignons que ce processus ne impose toute nouvelle condition pour la fonction intégrée, ce n'est qu'une vue différente au zone sur laquelle nous intégrons.

Il existe des versions plus générales connues (par exemple le théorème de Fubini), mais pour nous le cas de les zones triangulaires sont suffisantes. La formule suivante est valable pour toutes les fonctions $f(t, \tau, \xi)$ intégrable.

$$\int_a^t \int_a^\tau f(t, \tau, \xi) d\xi d\tau = \int_a^t \int_\xi^t f(t, \tau, \xi) d\tau d\xi$$

L'idée géométrique de cette formule deviendra claire à partir de la figure :



Formule du rectangle à gauche

La formule du rectangle à gauche est obtenue en remplaçant f par une constante égale à sa valeur en la borne gauche de l'intervalle $[a, b]$, ce qui donne :

$$I(f)_{[a,b]} = (b - a)f(a)$$

Formule du trapèze :

La formule du trapèze est obtenue en remplaçant f par le segment qui relie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ ce qui donne ;

$$I(f)_{[a,b]} = \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b))$$

Règle de la différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre :

La règle de la différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre dans le cas unidimensionnel pour les fonctions continûment différentiable

$\alpha : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; \beta : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a; b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + \frac{d\beta(x)}{dx} f(x, \beta(x)) - \frac{d\alpha(x)}{dx} f(x, \alpha(x))$$

Discriminant :

Le discriminant $D(P)$ du polynôme :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

est défini par :

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} R(P, \dot{P})$$

Où : \dot{P} est la dérivée de P est le résultat de $(2n-1)(2n-1)$ de $P(\lambda)$ et sa dérivée $\dot{P}(\lambda)$ donnée par :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 \dots & \dots & a_n & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_1 \\ n & n(n-1)a_1 & \dots & a_{n-1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & n & n(n-1)a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n & \dots & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Bibliographie

- [1] D. R. Frey, "*Chaotic digital encoding : an approach to secure communication* " IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, vol. 40, no. 10, pp. 660–666, 1993.
- [2] F. Lau and C. K. Tse, "*Chaos-Based Digital Communication Systems*", Springer, Berlin, Germany, 2003
- [3] L. Kocarev and S. Lian, "*Chaos-Based Cryptography : Theory, Algorithms and Applications*", vol. 354, Springer, Berlin, Germany, 2011.
- [4] W. S. Sayed, A. G. Radwan, and H. A. H. Fahmy, "*Design of a generalized bidirectional tent map suitable for encryption applications*", in Proceedings of the 11th International Computer Engineering Conference (ICENCO '15), pp. 207–211, IEEE, Cairo, Egypt, December 2015.
- [5] R. Roy, Jr, T. W. Murphy, T. D. Maier, Z. Gills, E. R. Hunt, "*Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system. Physical Review Letters*" 68 (9) (1992) 1259–1262.
- [6] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere, and K. Showalter, "*Controlling chaos in the Belousov Zhabotinsky reaction*". Nature 361 (6409) (1993) 240–243.
- [7] A. Garfinkel, J. N. Weiss, W. L. Ditto, and M. L. Spano, "*Chaos control of cardiac arrhythmias. Trends in Cardiovascular Medicine* " (2) (1995) 76–80.
- [8] J. Ding, and H. X. Yao, "*Chaos control of a kind of non-linear finance system*". Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition) 25 (6) (2004) 500–504.
- [9] R. Gorenflo and F. "Mainardi, *Fractional Calculus*", Springer, Berlin, Germany, 1997.
- [10] R. Caponetto, "*Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*", vol. 72, World Scientific, 2010
- [11] R. L. Magin, "*Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Redding*", 2006.
- [12] A. G. Radwan, A. Shamim, and K. N. Salama, "*Theory of fractional order elements based impedance matching networks*", IEEE Microwave and Wireless Components Letters, vol. 21, no. 3, pp. 120–122, 2011.

- [13] A. Shamim, A. G. Radwan, and K. N. Salama, "*Fractional smith chart theory*", IEEE Microwave and Wireless Components Letters, vol. 21, no. 3, pp. 117–119, 2011.
- [14] A. G. Radwan, S. K. Abd-El-Hafiz, and S. H. Abdelhaleem, "*Image encryption in the fractional-order domain*", in Proceedings of the 1st International Conference on Engineering and Technology (ICET '12), 6, 1 pages, October 2012.
- [15] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, "*Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*", Gordon and Breach, 1993.
- [16] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo "*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*", volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [17] I. Podlubny "*Fractional Differential Equations*", Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [18] M.-C. Ho and Y.-C. Hung, "*Synchronization of two different systems by using generalized active control*", Physics Letters A, vol. 301, no. 5-6, pp. 424–428, 2002
- [19] M. Srivastava, S. P. Ansari, S. K. Agrawal, S. Das, and A.Y. Leung, "*Anti-synchronization between identical and nonidentical fractional-order chaotic systems using active control method*", Nonlinear Dynamics. An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems, vol. 76, no. 2, pp. 905–914, 2014.
- [20] S. S. Yang and C. K. Duan, "*Generalized synchronization in chaotic systems*", Chaos, Solitons & Fractals, vol. 9, no. 10, pp.1703–1707, 1998.
- [21] M. Juan and W. Xingyuan, "*Generalized synchronization via nonlinear control*", Chaos, vol. 18, no. 2, Article ID023108, 2008.
- [22] A. Ouannas, Z. Odibat, "*Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete-time*", Nonlinear Dynamics, Vol. 81 (1), 765-771, 2015.
- [23] A. Ouannas, "*A new generalized-type of synchronization for discrete chaotic dynamical systems*", Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol. 10 (6), pp. 061019-5, 2015
- [24] A. Ouannas, "*On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems*", International Journal of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2 (1), pp 1–11, 2016
- [25] A. Ouannas, A. Gasri, K.S Ojo, V.T Pham. "*Co-existence of Generalized Synchronization and Inverse Generalized Synchronization Between Chaotic and Hyperchaotic Dynamical Systems*". Nonlinear Analysis : Modeling and control, 23 (4), 583, 2018.

- [26] A. Ouannas, M.M, Al-sawalha, "On $\Lambda - \varphi$ generalized synchronization of chaotic dynamical systems in continuous-time", The European Physical Journal Special Topics, Vol. 225 (1), pp. 187-196, 2016.
- [27] P. Bergé, Y. Pomeau, and C.Vidal : "L'ordre dans le chaos", Collection Enseignement des Sciences, Hermann édition (1988).
- [28] K. H. Khalil "Nonlinear Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River", NJ, (2001)
- [29] T. Yoshizawa "Stability Theory by Liapuno's Second Method", The Mathematical Society of Japan, 1966. Rivers, pp. 622 - 623, 1996
- [30] M. Hurley "Lyapunov functions and attractors in arbitrary metric spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 126. MR 1458880 (98I :58147), pp. 245 - 256, 1998
- [31] A.M.Lyapunov "The general problem of the stability of motion", Thèse, St Petersburg, (1899), reproduite dans "Problème général de la stabilité de mouvement," Ann. Fac. Sci., Toulouse 9, 203-474, (1907), reproduit dans Ann. Math.Stud., N° 12, (1949)
- [32] A.Hurwitz, Über die "Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt", Math. Ann., 41, 403-442, (1893)
- [33] A.H.Nayfeh, B.Balachadran, "Applied Nonlinear Dynamic-Analytical.computational and Experimental Methods" Wiley.interscience NY 1985
- [34] A.Wolf, J.B.Swift, H.L.Swinney and J.A.Vastano : "Determining Lyapunov Exponents from a Time series" , Physica.vol16, pp.285-317-1985
- [35] E.Zeraoulia "Etude de quelques types de systèmes chaotiques " Généralisation d'un modèle issu du modèle de chen", Thèse, constantine, fevrier, (2006).
- [36] O.Ldham, B.Keith , Jerome Spanier "The Fractional Calculus". London : Academic Press c1974. 225 p.
- [37] R. Hotzel "Contribution à la Théorie Structurale et à la Commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires". PHD thesis, Université de Paris XI, Orsay, France, 1998.
- [38] N. Mrani "Contribution à l'Étude des Systèmes Fractionnaires" Théorie et Applications. PHD thesis, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc.
- [39] R.L.Bagley, P.J.Torvik "On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior", Journal of Rheology, Vol. 30, pp. 133-155, 1986.
- [40] I.Petras , IPodlubny ,P.O. Leary, L.Dorcak , B.M.Vinagre "Analogue Realization of Fractional Order Controller" , Fakulta Berg , TU Kosice, 2002.

- [41] M.Aoun, R.Malti, F. Levron, A.Oustaloup "Numerical Simulations of Fractional Systems", An Overview of Existing Methods and Improvements. Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 117–131, 2004
- [42] A.Oustaloup. La Commande CRONE. Hermes, Paris, 1991.
- [43] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurtis, "Synchronization - A Universal Concept in Nonlinear Science. Springer, 2002
- [44] C.F. Lorenzo, T.T.Hartley "Initialisation in the generalised fractional calculus", Technical report, NASA/TM-1998-208415, 1998
- [45] R.L Bagley and P.J.Torvik "On the appearance of the fractional derivative in the behaviour of real materials". J.AM Mech 51 :298, 1984
- [46] M. Weilbeer "Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background", Thèse de Doctorat, Carl-Friderich-Gauss Facultat für Mathematik und Informatik, der Technischen Universität Braunschweig (2005).
- [47] D. Matignon "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", MQCS-SMC Proceeding July.Lille France, 1996, pp.963-9681
- [48] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks", Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 19(12)(2014)4105–4121.
- [49] N. Aguila-Camacho, M. Duarte-Mermoud, J. Gallegos "Lyapunov functions for fractional order systems", Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 19(9)(2014)2951–2957
- [50] Y. LI, Y.Q. Chen, I. Podlubny, "Stability of fractional order nonlinear dynamic systems, Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability". Computers and Mathematics with Applications (2009).
- [51] J.Slotine, W.Li "Applied Nonlinear Control". Prentice Hall, New York (1999).
- [52] Y.Li, Y Chen, I. Podlubny, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag Leffler stability". Comput. Math. Appl. 59, 1810-1821 (2010)
- [53] Li.Tianzeng, Yu.Wang, and C. Zhao "Synchronization of fractional chaotic systems based on a simple Lyapunov function"
- [54] E. Ahmed, A.M.A. El-Sayed, A.A.Hala. El Saka, "On some Routh. Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. Phys Lett A. 358; pp. 1004, (2006).
- [55] A.E. Matouk, Phys. Lett. A 373 2166. (2009)

- [56] M. Weilbeer *"Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background"*. Thèse de Doctorat, Carl-Friderich-Gauss Facultat für Mathematik und Informatik, der Technischen Universität Braunschweig (2005).
- [57] C. Huguenii, *Horoloquim Oscilatorium*. 1673.
- [58] H. Fujisaka, T. Yamada. *"Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems"*, *Prog. Theor. Phys.*, vol. 69, pp. 32-90, 1983.
- [59] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, M. N. Rabinovich. *"Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems"*, *Radiophys. and Quantum Electronics*, vol.29(9), pp. 795-803, 1986.
- [60] L. M. Pecora, T. L. Carroll *"Synchronization in chaotic systems"*, *Phys. Rev. Lett.* 64; 821; (1990)
- [61] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, (1996), *"Phase Synchronization of Chaotic Oscillators"*, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76 (11), pp. 1804-1807.
- [62] G. V. Osipov, A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, *"Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators"*, *Phys. Rev. E*, Vol. 55 (3), pp. 2353-2361. (1996)
- [63] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, *"Phase Synchronization of Chaotic Oscillators by External Driving"*, *Physica D*, Vol. 104, pp. 219-238. (1997)
- [64] J. Lu, *"Generalized (complete, lag, anticipated) synchronization of discrete-time chaotic systems"*, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 13 (9), pp. 1851-1859. (2008)
- [65] M. Adeli, H. Zarabadipour, *"Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms"*, *International Journal of Electronic Signals and Systems*, pp 143-147. (2011)
- [66] M. Diao, Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z, *"Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders"*, *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu.*, Vol. 11 (7), pp. 503-508. (2010)
- [67] B. Xin, Z. Wu, *"Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control"*, *Entropy*, Vol. 17, pp. 2677-2687. (2015),
- [68] M. Mu, Z. Xu, R. Zhang *"Full state hybrid projective synchronization in continuous time chaotic (hyperchaotic) systems"*. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 13 :456-464 (2008)
- [69] Q. Zhang, J. Lu *"Full state hybrid lag projective synchronization in chaotic (hyperchaotic) systems"*. *Phys Lett A* 372 (9) :1416-1421 (2008)
- [70] M. Hua, Z. Xua, R. Zhang, A. Hua *"Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyperchaotic) systems"*. *Phys Lett A* 361(3) :231-237 (2007)

- [71] M.Hua , Z.Xua , R.Zhang , A.Hua "Adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic systems with the same and different order". Phys Lett A 365(4) :315–327
- [72] Y-D.Chu ,Y-X Chang , J-G Zhang , X-F Li , X-L An "Full state hybrid projective synchronization in hyperchaotic systems. Chaos Solitons Fractals " 42(3) :1502–1510(2009)
- [73] X-Y.Wang , J.Song "Adaptive full state hybrid projective synchronization in the unified chaotic system". Mod Phys Lett B 23 :1913–1921 (2009)
- [74] X-Y.Wang , L-B.Zhu "Adaptive full state hybrid projective synchronization of unified chaotic systems with unknown parameters". Int J Mod Phys B 25 :4661–4666 (2011)
- [75] N. F. Rulkov, K. M. Sushchik, L. S. Tsimring , H. D. I. Abarbanel. "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems", Phys. Rev. E, vol. 51, pp. 980-994, 1995.
- [76] L. Kocarev, U. Parlitz "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems", Phys. Rev. Lett., vol. 76, pp. 1816-1819, 1996.
- [77] J. Yan, C. Li "Generalized projective synchronization of a unified chaotic system, Chaos", Solutions and Fractals, vol. 26, pp. 1119-1124, 2005.
- [78] X. He, C. Li, J. Huang, L. Xiao, "Generalized synchronization of arbitrary"
- [79] A. Ouannas, M.M, Al-sawalha, "Synchronization between different dimensional chaotic systems using two scaling matrices", Optik -International Journal for Light and Electron Optics, Vol.127, pp. 959–963, 2016.
- [80] A. Ouannas, O. zehrou. Z. Laadjal. "Nonlinear Methods To Control Synchronization Between Fractional-Order and Integer-Order Chaotic Systems". Nonlinear Studies. Vol. 25, No. 1, pp. 1-13, 2018
- [81] G.Grassi, D.A.Miller "Dead-beat full state hybrid projective synchronization for chaotic maps using a scalar synchronizing signal", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat., Vol. 17 (4), pp. 1824–1830 (2012)
- [82] Hu.Manfeng , Z.A.Xu, "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems", Nonlinear Analysis, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099.2008
- [83] T.Hadi ,GH.Erjaee "Phase and anti-phase synchronization of fractional order chaotic systems via active control". Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 16(10) :4079-4088 (2011)
- [84] B.Sachin, DG Varsha "Synchrnization of different fractional order chaotic systems using" ,active control. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 15 :3536-3546 (2010)
- [85] S.Chen, J.Lu "Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control", Chaos Solutions Fractals, Vol. 14, pp. 643–647. (2002)

- [86] X.Tan, J. Zhang, Y. Yang "Synchronizing chaotic systems using backstepping design, *Chaos Solitons Fractals*", Vol. 16, pp. 37–45.(2003)
- [87] S.Bowong, F.M. Kakmen "Synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping approach", *Chaos Solutions Fractals*, Vol. 21, pp. 999–1011.(2004)
- [88] Donato Cafagna, Giuseppe Grassi "Fractional-order systems without equilibria : The first example of hyperchaos and its application to synchronization" *Chin. Phys. B* 2015, Vol. 24 Issue (8) : 080502
- [89] A.M.A. El-Sayed, H.M. Nour, A. Elsaid, A.E. Matouk, A. Elsonbaty "Dynamical behaviors, circuit realization, chaos control, and synchronization of a new fractional order hyperchaotic system *Applied Mathematical Modelling* " Volume 40, Issues 5–6, Pages 3516–3534 March 2016
- [90] AT.Azar and S.Vaidyanathan , A.Ouannas "Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems. *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 688, Springer-Verlag, Germany. ISBN 978-3-319-50248-9.(2017)
- [91] A. Ouannas, M.M. Al-sawalha and T. Ziar, "Fractional Chaos Synchronization Schemes for Different Dimensional systems with Non-Identical Fractional-Orders via Two Scaling Matrices", *Optik* 127, no. 20, 8410–8418, 2016.
- [92] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan "A new fractional hybrid Chaos synchronization. *International Journal of Modelling, Identification and Control*".
- [93] A. Ouannas, A. T. Azar, S. Vaidyanathan "A robust method for new fractional hybrid chaos synchronization", *Mathe. Meth. App. Sci.*, Vol. 40 (5) (2017), pp. 1804-1812.
- [94] A. Ouannas, Z. Odibat and T. Hayat "Fractional analysis of co-existence of some types of chaos synchronization", *Chaos, Solitons & Fractals* 105, 215-223, 2017.
- [95] A. Ouannas, S. Abdelmalek and S.Bendoukha "Coexistence of some chaos synchronization types in fractional-order differential equations" , *Electronic Journal of Differential Equations* (128), 1-15, 2017.
- [96] A. Ouannas, G. Grassi, T. Ziar, Z. Odibat, "On a Function Projective Synchronization Scheme between non-identical Fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems with different dimensions and orders". *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*. 136 (2017) 513–523.
- [97] XJ.Wu , DR.Lai , HT.Lu HT "Generalized synchronization of the fractional-order chaos in weighted complex dynamical networks with non-identical nodes". *Nonlinear Dyn* 69 :667–683(2012)
- [98] H.Liang , Z.Wang , Yue Z, Lu R "Generalized synchronization and control for incommensurate fractional unified chaotic system and applications in secure communication". *Kybernetika* (2012) 48 :190–205

- [99] Martínez-Guerra. R, Mata- JL.Machuca "Fractional generalized synchronization in a class of nonlinear fractional order systems". *Nonlinear Dyn* 77 :1237-1244 (2014)
- [100] Z .Chougui , A. Ouannas, "A new generalized synchronization scheme to control fractional chaotic dynamical systems with different dimensions and orders"
- [101] W.Xue,Y. Li , S.Cang , H.Jia , Z.Wang "Chaotic behavior and circuit implementation of a fractional-order permanent magnet synchronous motor model". *J Franklin Inst* 352 :2887-2898 (2015)
- [102] X.Wu , H.Wang , H.Lu "Modified generalized projective synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system and its application to secure communication". *Nonlinear Anal : Real World Appl* 13 (2012) 1441–1450
- [103] TZ.Li ,Y Wang , MK.Luo "Control of fractional chaotic and hyperchaotic systems based on a fractional order controller" *Chin Phys B* 23 :080501-11(2014)
- [104] Z.Wang , X.Huang , Y-X.Li , XN.Song "A new image encryption algorithm based on the fractional-order hyperchaotic Lorenz system". *Chin Phys B* 22 010504-7(2013)
- [105] A. Ouannas. "A new Q-S synchronization scheme for discrete chaotic systems". *Far East Journal of Applied Mathematics*, Vol. 84 (2), pp. 89-94, 2013.
- [106] A. Ouannas. "Co-existence of Complete Synchronization and Anti-Synchronization in a Class of Discrete Rational Chaotic Systems". *Far East Journal of Dynamical Systems*, Vol. 23 (1-2), pp. 41-48, 2013.
- [107] A. Ouannas. "On full state hybrid projective synchronization of general discrete chaotic systems. *Journal of Nonlinear Dynamic*", Vol. 2014, Article ID 983293, pp. 1-6, 2014.
- [108] A. Ouannas. "Synchronization and inverse synchronization of different dimensional discrete chaotic systems via scaling matrix". *International Journal of Chaos, Control, Modelling and Simulation*, Vol. 3 (4), pp. 1-12, 2014.
- [109] 5-A. Ouannas, E.E. Mahmoud. "Inverse matrix projective synchronization for discrete chaotic systems with different dimensions". *Journal of Computational Intelligence and Electronic Systems*, Vol. 3 (3), pp. 188-192, 2014.
- [110] A. Ouannas, M.M, Al-Sawalha, "A new approach to synchronize different dimensional chaotic maps using two scaling matrices", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 15 (4), pp. 400-408, 2015.
- [111] A. Ouannas, R. Abu-Saris, "On Matrix Projective Synchronization and Inverse Matrix Projective Synchronization for Different and Identical Dimensional Discrete-Time Chaotic Systems", *Journal of Chaos*, Vol. 2015, Article ID 4912520, pp. 1-7, 2015.

- [112] A. Ouannas, R. Abu-Saris. "A Robust Control Method for Q-S Synchronization between Different Dimensional Integer-Order and Fractional-Order Chaotic Systems", Journal of Control Science and Engineering, Vol. 2015, Article ID 703753, pp. 1-7.
- [113] A. Ouannas, X.Wang, V.T Pham, G. Grassi, T. Ziar, A. Karouma. "New Type of Chaos Synchronization in discrete-time systems : the F-M synchronization". Open Physics, 16 (1), 174-182, 2018.
- [114] A. Ouannas, G. Grassi, "Inverse Full State Hybrid Projective Synchronization for Chaotic Maps with Different Dimensions", Chinese Physics B, Vol. 25 (9), pp. 090503-6, 2016.
- [115] A. Ouannas, "Co-existence of various synchronization-types in hyperchaotic maps, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*", Vol. 16 (3), pp. 312–321, 2016.
- [116] A. Ouannas, M.M. Al-sawalha, T. Ziar, "Fractional chaos synchronization schemes for different dimensional systems with non-identical fractional-orders via two scaling matrices", *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, Vol. 127 (20), pp. 8410–8418, 2016.
- [117] A. Ouannas, G. Grassi, "A new approach to study co-existence of some synchronization types between chaotic maps with different dimensions", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 86 (2), pp. 1319–1328, 2016.
- [118] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan, "A robust method for New fractional hybrid chaos synchronization", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, Vol. 40, pp. 1804-1812.
- [119] A. Ouannas, Z. Odibat, N. Shawagfeh, "A new Q–S synchronization result for discrete chaotic systems, *Differential Equations and Dynamical Systems*", pp 1-10, DOI 10.1007/s12591-016-0278-x.
- [120] A. Ouannas, A. Karouma, "Different generalized synchronization schemes between integer-order and fractional-order chaotic systems with different dimensions", *Differential Equations and Dynamical Systems*, pp. 1-13, DOI 10.1007/s12591-016-0317-7.
- [121] A. Ouannas, A.T. Azar, R. Abu-Saris, "A new type of hybrid synchronization between arbitrary hyperchaotic maps", *International journal of Learning Machine and Cybernetic*, pp. 1-8, Doi : 10.1007/s13042-016-0566-3.
- [122] A. Ouannas, Z. Odibat, N. Shawagfeh, "Universal chaos synchronization control laws for general quadratic discrete systems". *Applied mathematical modeling* Vol.45. pp.636-641 doi : 10.1016/j.apm.2017.01.012.
- [123] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan, "A new fractional hybrid Chaos synchronization". *Int. J. Modelling, Identification and Control*, Vol. 27, No. 4, 2017

- [124] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan, "New hybrid synchronization schemes based on coexistence of various types of synchronization between master-slave hyperchaotic systems", *International Journal of Computer Applications in Technology*. Vol. 55, n 2 pp. 112–120. 2017
- [125] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan, "On A Simple Approach for Q-S Synchronization of Chaotic Dynamical Systems in Continuous-Time. *International Journal of Computing Science and Mathematics*". Vol. 8 , n (1), pp. 20–27.
- [126] A. Ouannas, G. Grassi, T. Ziar, Z. Odibat, "On a Function Projective Synchronization Scheme between non-identical Fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems with different"
- [127] A. Ouannas, G. Grassi, "Inverse Full State Hybrid Projective Synchronization for Chaotic Maps with Different Dimensions", *Chinese Physics B*, Vol. 25 (9), pp. 090503-6, 2016.
- [128] A. Ouannas, "Co-existence of various synchronization-types in hyper chaotic maps", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 16 (3), pp. 312-321, 2016.
- [129] A. Ouannas, G. Grassi, "A new approach to study co-existence of some synchronization types between chaotic maps with different dimensions", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 86 (2), pp. 1319–1328, 2016.
- [130] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan, "A robust method for New fractional hybrid chaos synchronization", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, Vol. 40, pp. 1804–1812.
- [131] A. Ouannas, A.T. Azar, T. Ziar. "On Inverse Full State Hybrid Function Projective Synchronization For Continuous-time Chaotic Dynamical Systems with Arbitrary Dimensions". *Differential Equations and Dynamical Systems*. pp. 1-14. DOI 10.1007/s12591-017-0362
- [132] A. Ouannas, S. Abdelmalek, S. Bendoukha. "Coexistence of some chaos synchronization types in fractional-order differential equations". *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2017 (2017) no. 128, pp. 1-15.
- [133] A. Ouannas, X.Wang, V.T Pham, T Ziar. Dynamic "Analysis of Complex Synchronization Scheme between Integer-Order and Fractional-Order Chaotic Systems with Different Dimensions. *Complexity*". Vol. 2017, Article ID 4948392, 12 pages
- [134] A. Ouannas, Z. Odibat. "Fractional Analysis of Co-existence of Some Types of Chaos Synchronization. *Chaos*", *Solution and Fractal*. Vol. 105, 2017, p. 215-223
- [135] VT. Pham, A. Ouannas, C Volos, T Kapitaniak, "A simple fractional-order chaotic system without equilibrium and its synchronization". *I. J. Electronics and Communication*. 2018. 86, 67-79.

- [136] A. Ouannas, X. Wang, VT. Pham, G. Grassi, T. Ziar. "*Co-existence of some synchronization types between non-identical commensurate and incommensurate fractional-order chaotic systems with different dimensions*". Advances in Difference Equations. (2018) 2018 :21 <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1485-2>
- [137] X. Wang, A. Ouannas, VT Pham, HR Abdo Imohammadid. "*A fractional-order form of a system with stable equilibria and its synchronization*". Advances in Difference Equations. (2018) 2018 :20 <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1479>
- [138] A. Ouannas, X.Wang, V.T Pham, G. Grassi, T. Ziar, A. Karouma. "*New Type of Chaos Synchronization in discrete-time systems*" : the F-M synchronization. Open Physics, 16 (1), 174-182, 2018.
- [139] A. Ouannas, A. Gasri, K.S Ojo, V.T Pham. "*Co-existence of Generalized Synchronization and Inverse Generalized Synchronization Between Chaotic and Hyperchaotic Dynamical Systems*". Nonlinear Analysis : Modeling and control, 23 (4), 583, 2018.
- [140] G.Grassi, A. Ouannas and V.T. Pham. "*A General Unified Approach to Chaos Synchronization in Continuous-time Systems (with or without equilibrium points) as well as in Discrete-time Systems*". Archive of Control Sciences, 28, 2018.
- [141] A. Ouannas, L. Djouini, O. Zehrou. "*On Generalized Discrete Hybrid Chaos Synchronization*". Journal of Applied Nonlinear Dynamics, 8 (3), 435-445, 2018.
- [142] S. Boudiar, A.Ouannas, S. Bendoukha, Zaraï, Abderrahmane. "*Coexistence of Some Types of Chaos Synchronization between Non-Identical and Different Dimensional Systems*". Nonlinear Dynamics and System Theory, 18 (3) :253-258, 2019.
- [143] A.Ouannas, G. Grassi, V.T Pham, T. Ziar. "*Co-existence of function-based hybrid synchronization types between non-identical fractional-order chaotic systems*". Advances in Difference Equations, (1), 1-16, 2018.
- [144] A. Ouannas, S. Bendoukha. "*Generalized and inverse generalized synchronization of fractional-order discrete-time chaotic systems with non-identical dimensions*". Advances in Differences Equations, (1), 1-14, 2018.
- [145] A Ouannas, AA Khennaoui, G Grassi, S Bendoukha. Q-S Chaos "*Synchronization of Different Dimensional Systems*". Discrete Dynamics in nature and social, 2018.
- [146] A Ouannas, N Debbouche, X Wang, VT Pham, O Zehrou. "*Secure Multiple-Input Multiple-Output Communications Based on F–M Synchronization of Fractional-Order Chaotic Systems with Non-Identical Dimensions and Orders*". Applied Sciences 8 (10), 1746, 2018.

- [147] A. Ouannas, A. T. Azar, T. Ziar. "Continuous-Time Chaotic (Hyperchaotic) Systems : F-M Synchronization". International Journal of Automation and Control. 13(2) :226, 2019.
- [148] A Ouannas, AA Khennaoui, O Zehrou, S Bendoukha, G Grassi, VT Pham . "Synchronisation of integer-order and fractional-order discrete-time chaotic systems". Pramana 92 (4), 52, 2019.
- [149] Adel Ouannas, S Bendoukha, A Karouma, S Abdelmalek. "A General Method to Study the Co-Existence of Different Hybrid Synchronizations in Fractional-Order Chaotic Systems". International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 20 (3-4), 351-359, 2019.
- [150] A Ouannas, Z Odibat, G Grassi, X Wang, VT Pham, M Abdelli, A Alsaedi. "Synchronization Control in Reaction-Diffusion Systems : Application to Lengyel-Epstein System. Complexity" 2019, 1-8.
- [151] L. Jouini, A. Ouannas. "Increased and Reduced Synchronization between Discrete-time Chaotic and Hyperchaotic Systems". Nonlinear Dynamics and System Theory, 19(2) :313–318, 2019.
- [152] A. Ouannas, S. Bendoukha, C. Volos, A Karouma. "Synchronization of Commensurate and Incommensurate Fractional Hyperchaotic Rabinovich Systems via Linear and Nonlinear Control Law". International Journal of Control, Automation and Systems, 17 (9), 2211-2219, 2019.
- [153] A Ouannas, X Wang, VT Pham, G Grassi, V Van Huynh, "Synchronization results for a class of fractional-order spatiotemporal partial differential systems based on fractional Lyapunov approach". Boundary Value Problems 2019 (1), 1-12.
- [154] A Ouannas, S Bendoukha, AA Khennaoui, G Grassi, X Wang, VT Pham. "Chaos synchronization of fractional-order discrete-time systems with different dimensions using two scaling matrices". Open Physics 17 (1), 942-949, 2019.
- [155] F Mesdoui, A Ouannas, N Shawagfeh, G Grassi, VT Pham. "Synchronization Methods for the Degn-Harrison Reaction-Diffusion Systems". IEEE Access 8, 91829-91836, 2020.
- [156] A. Ouannas. , X.Wang, V.T Pham, T Ziar. "On Fractional $\Lambda - \varphi$ Generalized Chaos Synchronization". Automatika, 61 (4), 554-563, 2020.
- [157] Mesdoui Fatiha, Nabil Shawagfeh, Adel Ouannas. "Global synchronization of fractional-order and integer-order N component reaction diffusion systems : Application to biochemical models. Mathematical methos in Applied sciences", <https://doi.org/10.1002/mma.6807>, 2020.
- [158] A Ouannas, AT Azar, T Ziar. "Fractional inverse full state hybrid projective synchronisation". International Journal of Advanced Intelligence Paradigms 17 (3-4), 279-298, 2020.

-
- [159] I Talbi, Adel Ouannas, A-A Khennaoui, A Berkane, I M. Batiha, G.Grassi and V-T Pham. "*Different dimensional fractional-order discrete chaotic systems based on the Caputo h-difference discrete operator : dynamics, control, and synchronization*". Advances in Difference Equations (2020) 2020 :624
- [160] Adel Ouannas, Abdulrahman Karouma, Giuseppe Grassi, van su Long. "*A novel secure communications scheme based on chaotic modulation, recursive encryption and chaotic masking*". December 2020AEJ - Alexandria Engineering
- [161] I Talb, Adel Ouannas, Giuseppe Grassi, Dumitru Baleanu. "*Fractional Grassi-Miller Map based on the Caputo h-Difference Operator : Linear Methods for Chaos Control and Synchronization. Discrete Dynamics in Nature and Society*", 2020