République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Tebessi –TEBESSA-

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de mathématique et informatique

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat LMD

En : MATHEMATIQUES

Option : MATHEMATIQUES APPLIQUÉES

Par : **MESLOUB Ahlem**

Intitulée :

Contributions aux problèmes d'évolution non linéaires

Devant le jury :

MESSAOUDENE Hadia	MCA	Université de Tébessa	Présidente
MESLOUB Fatiha	MCA	Université de Tébessa	Rapporteuse
ZARAI Abderrahmane	Professeur	Université de Tébessa	Co-Rapporteur
DEGAICHIA Hakima	MCA	Université de Tébessa	Examinatrice
GASRI Ahlem	MCA	Université de Tébessa	Examinatrice
ZITOUNI Saleh	MCA	Université de Souk Ahras	Examinateur
ARDJOUNI Abdelwahe	Professeur	Université de Souk Ahras	Examinateur

Date de soutenance : 25 /11/2021


بسم الله الرحمن الرحيم

قال الله تعالى:

{ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ } .(المجادلة. 11)

{شَهِدَ اللّهُ أَنَّهُ لاَ إِلَـهَ إِلاَّ هُوَ وَالْمَلاَئِكَةُ وَأُوْلُواْ الْعِلْمِ قَآئِمَاً بِالْقِسْطِ}.(ال عمران.18)

صدق الله العظيم.

وقال رسول الله صلى الله عليه وسلم:

{مَنْ سَلَكَ طَرِيقاً يَطْلُبُ فِيهِ عِلْماً سَلَكَ اللَّهُ بِهِ طَرِيقاً إِلَى الْجَنَّةِ ، وَ إِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا لِطَالِبِ الْعِلْمِ رِضًا بِهِ ، وَ إِنَّهُ يَسْتَغْفِرُ لِطَالِبِ الْعِلْمِ مَنْ فِي السَّمَاءِ وَ مَنْ فِي الْأَرْضِ حَتَّى الْحُوتِ فِي الْبَحْرِ ، وَ فَضْلُ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ كَفَضْلِ الْقَمَرِ عَلَى سَائِرِ النُّجُومِ لَيْلَةَ الْبَدْرِ، وَ إِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الْأَنْبِيَاءِ ، إِنَّ الْأَنْبِيَاءَ لَمْ يُوَرِّثُوا دِينَاراً وَ لَا دِرْهَماً وَ لَكِنْ وَرَّثُوا الْعِلْمَ ، فَمَنْ أَخَذَ مِنْهُ أَخَذَ بِحَظٍ وَافِرٍ}.

صدق رسول الله.

Dédicaces

Après le nom de Dieu

Je dédié mon mémoire à mes cher parent merci pour

Votre patience ce qui m'a poussées vers le succès,

Vous êtes toujours les plus important

Dans ma vie.

Je dédié aussi ce mémoire

À toute famille sans exception, surtout mes frères et mes sœurs qui ont été toujours présent pour moi.

À tous ceux qu'il ma enseignés durant mon étude je suis particulièrement ma encadrant

Dr. MESLOUB Fatiha

A tous ceux qui sont chères proches de mon cœur, et a tous ceux qui m'aiment et qui aurait voulu partager ma joie.

Remerciements

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein du Laboratoire de Mathématiques, Informatiques et systèmes, Département de Mathématiques et informatiques, Université de Tébessa.

Je remercie avant tout ALLAH pour toute la volonté et la force qu'il ma donné pour finir cette thèse, il a été et sera toujours à côté de moi pour réussir à terminer n'importe quel travail.

Je souhaite remercier très chaleureusement mes encadreurs pour leur implication dans mon travail. Je commence par mon directeur de thèse Mme : **MESLOUB Fatiha** maitre de conférences à l'université de Tébessa. Qui a fait tout sa possible pour m'orienter et m'a guidé a fin de réaliser cette tèse avec compétence pour tout les conseils précieux qu'elle m'a prodigué, également

M : **ZERAI Abderrahmane,**

professeur à l'université de Tébessa., Co- rapporteur, Qui m'a fait l'honneur d'assurer la direction de ce travail, et pour son soutien et encouragement toutes ces années.

Je souhaite également remercier les membres du jury pour avoir acceptés avec gentilles d'examiner mon travail. En commençant par le président Mme: **MESSAOUDENE Hadia,** maitre de conférences à l'université de Tébessa, Mme : **GASRI Ahlem,** maitre de conférences à l'université de Tébessaet et Mme : **DEGAICHIA Hakima,** maitre

de conférences à l'université de Tébessaet aussi, puis je tiens également à remercie les invités, M: **AISSOUI Adel,** professeur à l'université d'El Oued, M: **ZITOUNI Saleh,** maitre de conférences à l'université de Souk Ahras et M: **ARDJOUNI Abd elouaheb,** maitre de conférences à l'université de Souk Ahras.

Enfin un grand merci aussi profond que sincère à tous ceux qui ont vraiment m'aidé en particulier ma famille et mes chers amis

MERAH Ahlem, HAMRI Douaa et ATMANIYA Islah.

.

Abstract

In the study of the propagation of acoustic waves, it should be noted that the Moore-Gibson-Thompson equation is one of the equations of nonlinear acoustics describing acoustic wave propagation in gases and liquids. The behavior of acoustic waves depends strongly on the medium property related to dispersion, dissipation, and nonlinear effects. It arises from modeling high-frequency ultrasound (HFU) waves. In this work, we have studied the solvability of the nonlocal mixed boundary value problem for the fourth order of the Moore-Gibson-Thompson equation. Galerkin's method was the main used tool for proving the solvability of the given nonlocal problem.

Keywords: Moore - Gibson - Thompson equations, Faedo-Galerkin method, integral conditions.

Résumé

Dans l'étude de la propagation des ondes acoustiques, il faut noter que l'équation de Moore-Gibson-Thompson est l'une des équations de l'acoustique non linéaire décrivant la propagation des ondes acoustiques dans les gaz et les liquides. Le comportement des ondes acoustiques dépend fortement de la propriété du milieu liée à la dispersion, à la dissipation et aux effets non linéaires. Il résulte de la modélisation des ondes ultrasonores à haute fréquence (HFU). Dans ce travail, nous avons étudié la solvabilité du problème des valeurs aux limites mixtes non locales pour le quatrième ordre de l'équation de Moore-Gibson-Thompson. La méthode de Galerkin était le principal outil utilisé pour prouver la solvabilité du problème non local donné.

Mots clés : les équations de Moore - Gibson –Thompson, la méthode de Faedo-Galerkin, les conditions intégrales.

ملخص

في دراسة انتشار الموجات الصوتية ، تجدر الإشارة إلى أن معادلة مور-جيبسون-تومسون هي إحدى معادلات الصوتيات اللاخطية التي تصف انتشار الموجات الصوتية في الغازات والسوائل. يعتمد سلوك الموجات الصوتية بشدة على خاصية الوسط المتعلقة بالتشتت و التبدد والتأثيرات غير الخطية. ينشأ من نمذجة الموجات فوق الصوتية عالية التردد . في هذا العمل ، درسنا قابلية حل مسالة ذات قيم حدية مختلطة وغير محلية لمعادلة من الرتبة الرابعة من صنف معادلة مور-جيبسون-تومسون. حيث كانت طريقة قاليركين هي الأداة الرئيسية المستخدمة لإثبات قابلية حل المسالة غير كلاسيكية.

الكلمات المفتاحية : معادلة مور-جيبسون-تومسون، طريقة فايدو-قاليركين، شروط تكاملية.

Table des matières

Notations

E	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	La norme.
$(.,.)$	Le produit scalaire.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$.
$\xrightarrow{f}$	La convergence forte.
$\rightharpoonup$	La convergence faible
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables u sur Ω vérifiant $\int_\Omega \|u\|^p \, dx < \infty$.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
H	Un espace de Hilbert.
$W_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$, où $\|k\| \leq l$.
$\mathring{W}_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in W_m^l(\Omega)$ à suport compact dans Ω.
$C(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions continues.
$\|\cdot\|_{m,\Omega}^{(l)}$	La norme dans l'espace $W_m^l(\Omega)$.
$\partial\Omega$	La frontière.
$\dfrac{d}{dx}$	La dérivée partielle par-rapport à x.
$\frac{\partial^{\|k\|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$	La dérivée généralisée.
Δu	L'opérateur Laplacien.
∇u	Le gradient de u.

Introduction générale

Des recherches sur la propagation non linéaire du son dans une situation d'ondes de forte amplitude ont montré une littérature sur des modèles différentiels partiels physiquement bien fondés [1, 2, 13, 16]. Ce domaine de recherche toujours très actif est porté par un large éventail d'applications telles que l'utilisation médicale et industrielle des ultrasons de haute intensité en lithotritie, thermothérapie et nettoyage par ultrasons. Les modèles classiques d'acoustique non linéaire sont l'équation de Kuznetsov, l'équation de Westervelt et l'équation KZK (Kokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov). Pour une analyse mathématique de l'existence et de l'unicité de plusieurs types de problèmes de valeurs aux limites initiales pour ces EDP non linéaires du second ordre dans le temps, nous nous référons [9, 10, 11]. En se concentrant sur l'étude de la propagation des ondes acoustiques, il convient de noter que l'équation MGT est l'une des équations de l'acoustique non linéaire qui décrit la propagation des ondes acoustiques dans les gaz et les liquides. Le comportement des ondes acoustiques dépend fortement de la propriété du milieu liée à la dispersion, à la dissipation et aux effets non linéaires. Il résulte de la modélisation des ondes ultrasonores à haute fréquence (HFU) [8, 26]. La dérivation de l'équation, basée sur la mécanique du continuum et des fluides, prend en compte la viscosité et la conductivité thermique ainsi que l'effet du rayonnement de chaleur sur la propagation du son. Ce modèle est réalisé par l'équation hyperbolique du troisième ordre

$$\tau u_{ttt} + u_{tt} - c^2 \Delta u - b \Delta u_t = 0,$$

la fonction inconnue $u = u(x,t)$ désigne la vitesse acoustique scalaire, c désigne la vitesse du son et τ désigne la relaxation thermique. Par ailleurs, le coefficient $b = \beta c^2$ est lié à la diffusion du son avec $\beta \in (0, \tau]$. [33] Chen et all ont étudié le résultat de l'explosion pour l'équation semi-linéaire de Moore - Gibson -Thompson avec non-linéarité de type dérivé dans le cas conservateur défini comme suit

$$\beta u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t = |u_t|^p, x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Ce travail est lié aux travaux suivants [12, 29]. Maintenant, lorsque nous parlons de l'équation (MGT) avec terme mémoire, nous avons I. Lasieka et all dans [14] ont étudié la décroissance exponentielle de l'énergie du troisième ordre temporellement de l'équation de Moore-Gibson-Thompson avec un terme de mémoire comme suit

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} - c^2 Au - bAu_t - \int\limits_0^t g(t-s)Aw\,(s)\,ds = 0,$$

où τ, α, b, c^2 sont des paramètres physiques et A est un opérateur auto-adjoint positif sur un espace de Hilbert H. Le terme de convolution $\int_0^t g(t-s)Aw\,(s)\,ds$ reflète les effets mémoire des matériaux dus à la viscoélasticité. Dans [?] I. Lasieka et X. Wang ont étudié la décroisasse générale de la solution du même problème ci-dessus. L'équation de Moore-Gibson-Thompson avec condition non locale est un nouveau problème posé. L'existence et l'unicité de la solution généralisée sont établies par l'utilisation de la méthode Galerkin. Trop de phénomènes physiques sont modélisés par des problèmes de valeurs aux limites initiales pour des équations différentielles partielles d'évolutions du second ordre, équations $(a = 0)$ avec des contraintes non locales telles que des conditions aux limites intégrales, où les données ne peuvent pas être mesurées directement sur la frontière, mais la valeur moyenne de la solution sur le domaine est connue, ce problème peut être rencontré dans de nombreux domaines scientifiques et de nombreux modèles d'ingénierie, les travaux précédents [5, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31]. S Mesloub et all dans [25] ont appliqué la méthode de Galerkin sur un problème non local mixte de dimension supérieure pour une équation de Boussinesq. Tandis que S. Boulaaras et all ont étudié l'équation de Moore-Gibson-Thompson avec condition intégrale dans [4]. Motivés par ces résultats, nous améliorons l'existence et l'unicité par la méthode de Galerkin de l'équation du quatrième ordre de Moore - Gibson - Thompson Type avec condition intégrale, ce problème a été cité par les travaux de F. Dell'Oro et V. Pata dans [6]. Nous définissons le problème comme suit

$$\begin{cases} u_{tttt} + \alpha u_{ttt} + \beta u_{tt} - \varrho \Delta u - \delta \Delta u_t - \gamma \Delta u_{tt} = 0, \\ u(x,0) = u_0\,(x)\,,\ u_t(x,0) = u_1\,(x)\,,\ u_{tt}(x,0) = u_2\,(x)\,, u_{ttt}(x,0) = u_3\,(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \int_0^t \int_\Omega u\,(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Le but de cette thèse est de considérer le problème de valeurs aux limites mixtes non locales pour l'équation de Moore-Gibson-Thompson (MGT) pour tout $(x;t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, où $0 < T < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné avec un frontière régulière $\partial\Omega$. Et prouver l'existence et l'unicité de la solution au problème posé. Nous divisons cette thèse comme suit : Dans le premier chapitre quelques définitions et espaces appropriés ont été donnés. Ensuite, Dans le deuxième chapitre nous avons défini la modélisation physique et le contexte historique des équations de Moore-Gibson-Thompson et ses applications. Enfin au troisième chapitre est par l'utilisons de la méthode de Galerkin nous avons prouvé l'existence, et nous démontrons l'unicité avec la méthode classique.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notion de la théorie des espaces fonctionnel et quelques inégalités et lemmes importante dans la suite.

1.1 Les espaces fonctionnelles

1.1.1 Espace de Banach

Dans tout ce chapitre $\mathbb{k}$ est le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble des éléments, x, y, z sont des éléments de X et α, β sont des éléments dans le corps $\mathbb{k}$. On suppose que chaque paire des éléments (x, y) peut être combiné par un opération nommée addition pour donner un autre élément z dénoté $z = x + y$. On suppose aussi que chaque nombre réel α et chaque élément x peut être combiné par une opération notée multiplication pour donner un autre élément y dénoté par $y = \alpha x$. L'ensemble X avec ces deux opérations est nommé un espace vectorielle si les axiomes suivants sont satisfaits*

a) $x + y = y + x$,

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

c) Il y a dans X un élément unique, dénoté par 0 est nommé l'élément neutre tel que $x + 0 = x$ pour chaque x.

d) Pour chaque $x \in X$ correspond un élément unique, dénoté par $-x$ tel que $x + (-x) = 0$,

e) Les deux opérations addition et multiplication donne

1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

2)$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

3)$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

4)$1.x = x$,
5)$0.x = 0$.

Définition 1.1.2 *Un espace vectoriel E est dit espace normé si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|$ (norme de u) vérifiant les axiomes*
a) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ *si et seulement si* $u = 0$.
b) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{k}$.
c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(Inégalité triangulaire)*.

Définition 1.1.3 *Dans un espace normé $(E, \|.\|)$, on introduit la métrique (distance entre u et v) par*

$$d(u, v) = \|u - v\|. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.4 *La convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vers u dans la norme de E (convergence forte) est définie par*

$$\|u_n - u\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{1.2}$$

est noté comme suit

$$u_n \overset{f}{\to} u.$$

Définition 1.1.5 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite suite de Cauchy si*

$$\begin{aligned} \|u_p - u_q\|_E &\to 0 \text{ quand } p, q \to \infty, \\ &\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tel que } p > N_\varepsilon \text{ et } \forall q > N_\varepsilon \Longrightarrow \|u_p - u_q\| \end{aligned} \tag{1.3}$$

Définition 1.1.6 *On dit qu'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach s'il est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite convergente dans E.*

Exemple 1.1.1 *On définir l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ par*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ u \in \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{ mesurable } / \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \\ \text{avec } 1 &\leq p < \infty. \end{aligned} \tag{1.4}$$

lorsque $p = +\infty$ on dit que f est essentiellement bornée ou encore que $f \in L^\infty(\Omega)$ si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q $|f| \leq C$ p.p..sur Ω. La norme dans $L^p(\Omega)$ donnée par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ avec } 1 \leq p < +\infty, \tag{1.5}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C \in \mathbb{R}_+; |u| \leq C \ \ p.p..\}. \tag{1.6}$$

1.1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.1.7 *On appelle un produit scalaire sur E et on note $(.,.)$, tout forme sésquilinéaire, hermitienne, définie positive définir de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$, c'est-à-dire*
(1) Linéarité à gauche : $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.
(2) Hermitienne : $\forall x, y \in E, (x, y) = \overline{(y, x)}$.
(3) Définie positive : $\forall x \in E - \{0\}, (x, x) > 0$ et $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Naturellement si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Corollaire 1.1.1 *On peut définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad \forall x \in E \ . \tag{1.7}$$

Définition 1.1.8 *On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire.*

Proposition 1.1.1 *Pour chaque u et v d'un espace préhilbertien H, on a l'inégalité de Cauchy (Cauchy-Bunyakovski)*

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H \, . \tag{1.8}$$

Théorème 1.1.1 *Pour qu'un espace normé E soit préhilbertien il faut et il suffit que sa norme satisfasse à l'identité du parallélogramme c'est-à-dire*

$$\|x + y\|_E^2 + \|x - y\|_E^2 = 2\left(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2\right), \quad \forall x, y \in E. \tag{1.9}$$

Définition 1.1.9 *Un espace de Hilbert $(H, (.,.))$ est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire. Plus naturellement on conclut du théorème ci-dessus un espace de Hilbert est un espace de Banach sa norme satisfait l'identité du parallélogramme.*

Exemple 1.1.2 *Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\ (u, v)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega uv \ dx. \end{aligned} \tag{1.10}$$

On peut considérer comme sous espaces dans $L^p(\Omega)$ les espaces
a) $C^\infty(\Omega)$.
b) L'ensemble de tous les polynômes.
c) $C_0^\infty(\Omega)$.

Définition 1.1.10 *Soit M un sous ensemble d'un espace préhilbertien H, on appelle complémentaire orthogonal de M et on note par $M^{\perp}$ l'ensemble*

$$M^{\perp} = \{x \in H;\ \forall a \in M\ (a, x)_H = 0\}. \tag{1.11}$$

Définition 1.1.11 *Soit H un espace préhilbertien, on dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si*

$$\forall i; j \in I,\ i \neq j; (x_i, x_j)_H = 0, \tag{1.12}$$

et on dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale ou orthonormée si

$$\forall i; j \in I: \quad (x_i, x_j)_H = \delta_{ij} = \begin{cases} 1;\ i \neq j \\ 0;\ i = j \end{cases}. \tag{1.13}$$

Définition 1.1.12 *Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert H, est dite totale ou complète si : $\{x_i;\ i \in I\}^{\perp} = 0$. Une famille orthonormée totale est appelée base orthonormée de H ou base hilbertienne ou système fondamental.de H.*

Définition 1.1.13 *Un espace de Hilbert H est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans H.*

Théorème 1.1.2 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Définition 1.1.14 *En plus de la convergence forte dans H on considère aussi la convergence faible ou converge au sens de produit scalaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, on dit qu'elle converge faiblement vers u si :*

$$(u_n - u, v)_H \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ pour tout } v \in H, \tag{1.14}$$

et on note par

$$u_n \to u$$

Proposition 1.1.2 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au norme vers u, alors elle converge faiblement vers u, l'inverse n'est pas vrai au général. Cependant si $u_n \to u$ et $\|u_n\| \to \|u\|$, alors dans ce cas $u_n \xrightarrow{f} u$.*

1.1.3 Espace de Sobolev

Dérivées généralisées.

On sait que pour deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ indéfiniment différentiables dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, c'est l'une d'elle par exemple $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, on à l'égalité

$$\int_{\Omega} \left\{ u \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{|k|} v \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\} dx = 0 \text{ où } k = (k_1, \ldots, k_n) \tag{1.15}$$

avec $|k| = k_1 + \cdots + k_n$,

que l'obtient à l'aide de $|k|$ intégration par parties.

Définition 1.1.15 *On appelle dérivée généralisée* $\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$ *d'une fonction* $u(x)$ *intégrable dans tout* $\overline{\Omega'} \subset \Omega$*, la fonction* $W_{k_1...k_n}$ *si pour tout* $v \in C_0^\infty(\Omega)$*, on à l'égalité*

$$\int\limits_\Omega \left(u.\frac{\partial^{|k|}v}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} + (-1)^{|k|}vW_{k_1.k_2..k_n} \right) dx = 0, \tag{1.16}$$

la fonction $W_{k_1\cdots k_n}$ *sera notée par*

$$\frac{\partial^{|k|}u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}. \tag{1.17}$$

Cette notion de dérivée généralisée est une extension de la dérivée classique les D.G conservent beaucoup (mais pas toutes) de propriétés des D.G (somme, produit, ordre,...) par exemple l'extension des dérivées d'ordre inférieurs à k. Cependant si $u(x)$ à des dérivées généralisées d'ordre inférieur à $|k|$ de sous type $|k| = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$ et si $\int\limits_\Omega |u|^p \, dx < \infty$ $(p > 1)$ (existe). Alors dans ce cas u à toute ζ dérivées généralisées d'ordre inférieures à $|k|$ appartient à $L^p(\Omega)$.

Définition 1.1.16 $W_m^l(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de tous les fonction* $u \in L^m(\Omega)$ *ayant des dérivées généralisées jusqu'à l'ordre* l *(inclus) dans* $L^m(\Omega)$*.Si on muni* $W_m^l(\Omega)$ *de la norme suivante*

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,\Omega}^{(l)} &= \|u\|_{W_m^l(\Omega)} \\ &= \left(\int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{l} \sum_{|k|} \left| \frac{\partial^{|k|}u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} \right|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

on obtient un espace de Banach.

Définition 1.1.17 $W_0^{l,m}(\Omega)$ *est le sous espace de* $W_m^l(\Omega)$ *constitués de toutes les fonctions* $u \in W_m^l(\Omega)$ *et en support compact dans* Ω*. L'espace* $W_0^{1,p}(I)$ *est muni de la norme induite par* $W^{1,p}(I)$*.*

Définition 1.1.18 *On note l'espace* $W_2^1(\Omega)$ *par* $H^1(\Omega)$ *et* $W_0^{1,2}$ *par* $H_0^1(\Omega)$*,* $H^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega)$ *sont des espaces de Hilbert muni de produit scalaire défini par*

$$\begin{aligned} (u,v)_{2,\Omega}^{(1)} &= (u,v)_{W_2^1(\Omega)} \\ &= \int\limits_\Omega (uv + u_x v_x)\, dx \\ &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u_x,v_x)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Où

$$\begin{aligned} u_x v_x &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i}, \\ v_x^2 &= \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2, \\ u_x^2 &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2. \end{aligned} \tag{1.20}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ joue un rôle très important pour la résolution des problèmes aux limites des E.D.P de second ordre de tous types.

Remarque 1.1 $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ *et* $v \in H^1(\Omega)$ *on a alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \; dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx, \; i = \overline{1, n}. \tag{1.21}$$

Remarque 1.2 *On prouve que si* $v \in W_2^1(\Omega)$, *alors* $u \in W_1^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} u &\in W_1^1(\Omega) \Longrightarrow u \in L^1(\Omega) \;\; \text{et} \;\; \frac{\partial u}{\partial x} \in L^1(\Omega). \\ \int_\Omega |u| \, dx &= \int_\Omega v^2 dx \\ &< \infty \Longrightarrow u \in L^1(\Omega). \\ \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx &= \int_\Omega \left| 2\frac{\partial v}{\partial x} v \right| dx \\ &\leq \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 \, dx \\ &< +\infty \Longrightarrow u \in L^1(\Omega), \;\; \text{alors} \; u \in W_1^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} &= \int\limits_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \\
&\le 2c\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right||v| + \frac{1}{2}v^2\right)dx \\
&\le 2c\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}v^2 + \frac{1}{2}v^2\right)dx \\
&\le \int\limits_{\Omega}\left(c\varepsilon^2\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \left(\frac{c}{\varepsilon^2}+c\right)v^2\right)dx \\
&\le \int\limits_{\Omega}\left(c\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + c_\varepsilon v^2\right)dx \\
&\le k\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \left\|v^2\right\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\right) \\
&= k\left\|v^2\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

1.2 Quelques inégalités et quelques lemmes importants

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$
\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right| \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.24}
$$

vraie pour toute forme quadratique non négative $a_{ij}\xi_i\xi_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}$, et pour $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$ sont les réels arbitraires. a_{ij} sont en général des fonctions.

Inégalité de Cauchy

$$
\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \tag{1.25}
$$

Inégalité de Cauchy avec ε.

Soit ε un nombre réel strictement positif, alors

$$
\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2. \tag{1.26}
$$

Inégalité de Young.

Soient p et q des nombres réels strictement positifs liés par la relation

$$
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.27}
$$

alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{1.28}$$

Inégalité de Young avec ε.
Soit ε un nombre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon) |b|^q, \tag{1.29}$$

où p et q sont reliés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.30}$$

et $C(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{-q/p}$.
Inégalité intégrale de Hölder.

$$\forall (f,g) \in L^p(Q) \times L^q(Q) : \int\limits_Q |fg| \leq \left(\int\limits_Q |f|^p \right)^{1/p} \left(\int\limits_Q |g|^q \right)^{1/q}, \tag{1.31}$$

où p et q sont toujours reliés par la relation : $1/p + 1/q = 1$.
Inégalité Trace

$$\int\limits_{\partial\Omega} |u|\, d\sigma \leq c \int\limits_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + |u| \right) dx, \tag{1.32}$$

elle est vraie $\forall u \in W_1^1(\Omega)$ et $\partial\Omega$ (régulière). Si on pose $u = v^2$ où $v \in W_2^1(\Omega)$, alors $u \in W_1^1(\Omega)$ et on obtient

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \leq c_1 \int\limits_{\Omega} \left\{ |v| \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| + v^2 \right\} dx \leq \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + c_\varepsilon v^2 \right) dx. \tag{1.33}$$

Inégalité de Poincaré
Supposant que $\Omega \underset{borné}{\subset} \mathbb{R}^n$, on remarque que $\forall u \in W_0^{l,m}(\Omega)$, on à l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} u^2 dx &\leq C_\Omega^2 \int\limits_{\Omega} u_x^2 dx. \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_\Omega^2 \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Lemme de Gronwell
Si les $h_i(t)$, $i = 1,2,3$, sont des fonctions non négatives sur l'intervalle $[0,T]$, $h_1(t), h_2(t)$ sont intégrables et $h_3(t)$ est non décroissante, alors de l'inégalité

$$\int\limits_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq h_3(t) + c \int\limits_0^\tau h_2(t)dt, \tag{1.35}$$

il s'ensuit que

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq e^{c\tau} h_3(t). \tag{1.36}$$

L'intégral paramétrique (formule de Leibniz).
Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \tag{1.37}$$

telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$et soient α et β deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.Alors, “L'intégral paramétrique” (généralisée) F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy, \tag{1.38}$$

est dérivable

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} f(x, \beta(x)) - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} f(x, \alpha(x)). \tag{1.39}$$

Remarque 1.3 *Pour une fonction f qui ne dépend que de la seconde variable, on retrouve bien le théorème fondamental de l'analyse en posant*

$$\alpha(x) = \alpha, \beta(x) = \beta.$$

Formule de Green On suppose que Ω est un domaine borné de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$, et $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Les suivants sont appelés formules de Green

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial v} dS = \int_{\Omega} (v \triangle u + \nabla v \nabla u)\, dx, \tag{1.40}$$

$$\int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial v}{\partial v}) dS = \int_{\Omega} (v \triangle u - u \triangle v) dx. \tag{1.41}$$

où dS désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$. En effet, les formules de Green (1.40) et (1.41) tiennent plus généralement pour $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, à condition que les intégrales sur Ω et $\partial\Omega$ converge.

Cas spéciaux

1) Si on prend $v = 1$dans (1.41), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} dS = \int_{\Omega} \triangle u\ dx. \tag{1.42}$$

2) Si on prend $u = v$ dans (1.41), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial v} dS = \int_{\Omega} \left(u \triangle u + |\nabla u|^2\right) dx. \tag{1.43}$$

Chapitre 2

La méthode de Faedo-Galerkin et les équations de Moore - Gibson - Thompson

Dans la première section de ce chapitre nous expliquons la méthode de Faedo-Galerkin, et son objectif et dans la deuxième section nous sommes intéressés à la modélisation physique et le contexte historique des équations de Moore - Gibson - Thompson.

2.1 La méthode de Faedo-Galerkin

Dans cette section nous donnons le schéma de Faedo-Galerkin, et pour cela nous indiquons la définition suivante

2.1.1 Approximation de Faedo-Galerkin

Définition 2.1.1 *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes*

$$V_n \subset V, \dim V_n < \infty, \tag{2.1}$$

$$V_n \to V \text{ quand } n \to \infty. \tag{2.2}$$

Au sens suivant : il existe $\bigcup_{i=1}^{n} V_n$ sous-espace dense dans V , tel que pour tout $u \in V_n$ on peut trouver une suite $\{u_n\}_{\in\mathbb{N}^*}$ vérifiée : pour tout n, $u_n \in V_n$ et $u_n \to u$ dans V lorsque $n \to \infty$. L'espace V_n s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre n.

2.1.2 Le schéma de la méthode de Faedo-Galerkin

Soit P le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence de la solution dans un espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable V et u la solution du problème P. Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_n de V il convient de définir un problème approché P_n dans l'espace de dimension finie V_n ayant une unique solution u_n.
Le déroulement de l'étude est alors comme suivant

1. On définit la solution u_n du problème P_n.
2. On établit des estimations sur u_n "estimation a priori " pour montrer que u_n est uniformément bornée.
3. Par l'utilisation des résultats que u_n est uniformément bornée, il est possible d'extraire de $\{u_n\}_{\in \mathbb{N}^*}$ une sous suite $\{u'_n\}_{\in \mathbb{N}^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape 2. Soit alors u la limite obtenue.
4. On montre que u est la solution du problème P, donc elle est la solution cherchée d'après l'unicité.
5. Résultats des convergences fortes.

Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de la solution, ce procédé revient à approcher $u_n(x,t)$ comme combinaison linéaire de fonctions des bases $Z_i(t)$ telle que

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) Z_i(x) \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{2.3}$$

Où les $C_i(t)$ sont alors solutions d'un système de $n-$équations différentielles linéaires.

2.2 Les équations de Moore - Gibson - Thompson

En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Elles sont nommées d'après deux physiciens Claude Navier et George Stokes. Dans ce travail, nous sommes intéressés à l'une des équations de Navier-Stokes, qui est l'équation de Moore-Gibson-Thompson.

2.2.1 La modélisation physique

L'équation (MGT) est l'une des équations de l'acoustique non linéaire décrivant la propagation des ondes acoustiques dans les gaz et les liquides, résulte de la modélisation des ondes ultrasonores à haute fréquence (HFU). Une équation (MGT) linéaire est le prélude aux équations non linéaires. Les modèles classiques d'acoustique non linéaire incluent l'équation de Kuznetsov, l'équation de Westervelt et l'équation (KZK). Ce domaine de recherche est très actif en raison d'un large éventail d'applications telles que l'utilisation médicale et industrielle de haute intensité échographie en lithotritie, thermothérapie, nettoyage par ultrasons, etc. Une étude approfondie des linéarisés modèles est un bon point de départ pour mieux comprendre les modèles non linéaires. Ce qui est spécifique aux équations (MGT) est le fait que la conductivité thermique est décrite par la loi de Maxwell - Catatneo - plutôt que par une loi de Fourier standard. La loi de Maxwell Cattaneo tient compte de la vitesse finie de propagation du transfert de chaleur, éliminant ainsi le paradoxe de vitesse infinie associé aux lois de Fourier. Ce phénomène est connu comme le paradoxe de la conduction thermique. En introduisant la loi de flux de Maxwell Cattaneo, avec un petit paramètre de relaxation $\tau > 0$ (temps de relaxation intrinsèque du flux de chaleur), le flux de chaleur se propage dans le milieu au cours du temps sous forme de vague. Ce phénomène est également appelé second son. La valeur de ce paramètre (relativement faible) dépend des paramètres physiques du fluide ou du gaz.

2.2.2 Le contexte historique

Nous mentionnerons maintenant les articles les plus importants publiés dans ce domaine.

Les études dans ce domaine ont commencé en 1851, lorsque P. Stokes a publié l'article suivant "An examination of the possible effect of the radiation of heat on the propagation of sound", où il a montré que le comportement des ondes acoustiques dépend fortement de la propriété du milieu liée à la dispersion et aux effets non linéaires. La dérivation de l'équation - basée sur la mécanique du continuum et des fluides - prend en compte la viscosité et la conductivité thermique ainsi que l'effet du rayonnement de chaleur sur la propagation du son. à partir de 1960, après l'article du F. Moore et W. Gibson intitulé par "Propagation of weak disturbances in a gas subject to relaxing effects", l'équation de Moore - Gibson - Thompson (MGT) a retenu beaucoup d'attention, le modèle dans cet article est réalisé à travers le troisième ordre d'équation différentielle partielle hyperbolique

$$\tau u_{ttt} + u_{tt} - c^2 \Delta u - b \Delta u_t = 0, \tag{2.4}$$

dans le sens physique des ondes acoustiques, la fonction inconnue $u = u(x,t)$ désigne une vitesse acoustique scalaire, c désigne la vitesse du son et τ désigne la relaxation thermique. Par ailleurs, le coefficient $b = \beta c^2$ est lié à la diffusivité du son avec $\tau \in (0, \beta]$. En particulier, il y a une transition d'un modèle linéaire qui peut être décrit avec un semi-groupe fortement continu exponentiellement stable dans le cas $0 < \tau < \beta$ au cas limite $\beta = \tau$, où la stabilité exponentielle d'un semigroupe est perdue et il conserve d'une énergie définie convenable, pour cette raison, nous appellerons le cas limite $\beta = \tau$ le cas conservateur. Il existe de nombreux ouvrages liés à l'équation, Nous mentionnons un article intitulé "Global solvability of Moore–Gibson–Thompson equation with memory arising in nonlinear acoustics" de Irena Lasiecka qui a étudié en 2016 la solvabilité globale de l'équation de Moore – Gibson – Thompson avec terme mémoire apparaissant en acoustique non linéaire

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} - c^2 Tu - bTu_t = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{B}{2A}\right)u^2\right). \tag{2.5}$$

Le système correspondant est constitué d'équations de mouvement (conservation de l'impulsion) pour le variable v qui désigne la viscosité des particules fluides, l'équation de continuité (conservation de la masse) reliant la densité du milieu à la vitesse du fluide, gaz et la conservation de l'énergie (équation d'entropie-première loi de la thermodynamique). Avec des conditions du Dirichlet homogènes prescrites à la limite d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 3$, ici $b > 0$ désigne un paramètre de diffusivité, c^2 la vitesse du son et α représente le frottement. Les paramètres positifs A, B représentent des interactions non linéaires, T est un opérateur auto-adjoint positif. Nous mentionnerons maintenant deux articles très important ils sont "Moore–Gibson–Thompson equation with memory, part I : exponential decay of energy" et "Moore–Gibson–Thompson equation with memory, partII : General decay of energy", en $2015 - 2016$ Irena Lasiecka, Xiaojun Wang ont étudié la décroissance exponentielle de l'énergie et la décroissance générale de l'énergie de l'équation de Moore – Gibson – Thompson avec un terme mémoire définit comme suit :

$$\beta u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t - \int_0^t g(t-s)w(s)ds = 0. \tag{2.6}$$

Ce modèle apparaît dans les applications ultrasonores à haute fréquence tenant compte du flux thermique et des temps de relaxation moléculaire. Selon la thermodynamique irréversible étendue revisitée, la relaxation du flux thermique conduit à la dérivée du troisième ordre dans le temps tandis que la relaxation moléculaire conduit à des effets non locaux régis par des termes de mémoire. Le modèle résultant est de type hyperbolique avec des effets visqueux. Nous classons d'abord la mémoire en trois types, ensuite, nous étudions comment un terme de mémoire cré un mécanisme d'amortissement et comment la mémoire provoque une décroissance d'énergie même dans les cas où le système sans mémoire d'origine est instable. Puis nous indiquons l'article de Wenhui Chen et Alessandro Palmieri "Nonexistence of global solutions for the semilinear Moore – Gibson – Thompson equation in the conservative case", dans ce travail, les auteurs ont étudié l'existence locale et l'explosion de la solution énergétique dans le cas sous-critique du problème semi-linéaire de Cauchy associé à l'équation (MGT) suivante :

$$\begin{cases} \beta u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t = |u|^p, & x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ (u, u_t, u_{tt})(0, x) = (u_0, u_1, u_2), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Enfin, nous présentons l'article le plus important pour notre travail "On a Fourth-Order Equation of Moore–Gibson–Thompson Type" de Filippo Dell'Oro et Vittorino Pata en 2017, ils ont étudié l'existence locale pour une version abstraite de l'équation du quatrième ordre avec la méthode de semi-groupe et ils ont prouvé la stabilité exponentielle du problème suivant

$$u_{tttt} + \alpha u_{ttt} + \beta u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} - \delta \Delta u_t - \varrho \Delta u = 0. \tag{2.8}$$

Soumis à la condition aux limites de Dirichlet homogène est analysé, avec $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varrho$ des paramètres strictement positifs. Les deux auteurs ont également montré comment trouver l'équation du quatrième ordre de Moore - Gibson - Thompson et c'est ce que nous expliquerons dans la suite

Motivation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné avec une frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. On considère pour tout $t > 0$ l'équation de Moore – Gibson – Thompson avec mémoire traitée en [3, 7, 13]

$$\partial_{ttt} u + a \partial_{tt} u - b \Delta \partial_t u - c \Delta u + \int_0^t g(s) \Delta u(t-s) ds = 0, \tag{2.9}$$

dans le variable inconnu $u = u(x,t) \ : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ soumis à la condition aux limites de Dirichlet homogène

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \ .$$

Ici a, b, c sont des constantes strictement positives respectant la contrainte structurelle

$$\mu := b - \frac{c}{a} \geq 0,$$

soit $g \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$ est une fonction non croissante convexe absolument continue sur $\mathbb{R}^+$ de la masse totale

$$\int_0^\infty g(s) ds < c, \tag{2.10}$$

satisfaisant pour certains $\ell > 0$ la relation

$$g'(s) + \ell g(s) \leq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \tag{2.11}$$

L'équation est complétée par les conditions initiales assignées au temps $t = 0$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad u_{tt}(x,0) = w_0(x).$$

Où $u_0, v_0, w_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ données prescrites.

– Lorsque $g \equiv 0$, le modèle se résume à l'équation MGT apparaissant en acoustique

$$u_{ttt} + au_{tt} - b\Delta u_t - c\Delta u = 0, \tag{2.12}$$

prise en compte des seconds effets sonores et de la relaxation thermique associée les fluides visqueux. Les propriétés asymptotiques des solutions de (2.12) ont été étudiées par plusieurs auteurs. Résumer le plus tôt littérature, une telle équation génère un semi groupe sur l'espace naturel des énergies faibles qui est exponentiellement stable si et seulement si $\mu > 0$, alors que l'énergie est conservée quand $\mu > 0$. Il convient de mentionner que le semi groupe existe aussi si $\mu < 0$, mais dans ce cas, l'énergie explose lorsque le temps passe à l'infini.

Lorsque $g \not\equiv 0$, le terme mémoire introduit une dissipation supplémentaire. Par conséquent, comme prévu, pour $\mu > 0$, l'énergie $Q(t)$ associée à (2.9) et définie comme

$$\begin{aligned} Q(t) \quad &= \quad \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \partial_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_{tt} u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \int_0^t g'(s)\, \|\nabla(u(t) - u(t-s))\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds, \end{aligned}$$

décroît exponentiellement jusqu'à zéro également, c'est-à-dire

$$Q(t) \leq CQ(0)e^{-\omega t},$$

pour certains $\omega > 0$ et $C \geq 1$. Néanmoins, comme le mécanisme de dissipation de (2.9) est plus fort que celui de (2.12), on pourrait penser que la stabilité exponentielle de se produit également dans le cas $\mu = 0$. Au contraire, comme indiqué dans l'article récent, lorsque $\mu = 0$. la contribution de la mémoire est capable de conduire le système à zéro, c'est-à-dire que pour chaque énergie initiale fixe $Q(0)$, il est toujours vrai que

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0,$$

mais la décroissance n'est pas exponentielle

L'équation du quatrième ordre

Du point de vue physique, le cas le plus pertinent en relation avec (2.10) est celui du noyau exponentiel (négatif)

$$g(s) = de^{-\ell s},$$

où les constantes strictement positives d, ℓ remplissent la relation

$$\frac{d}{\ell} < c$$

conformément à (2.10) – (2.11). Dans cette situation, l'équation (2.9) se lit

$$u_{ttt} + au_{tt} - b\Delta u_t - c\Delta u + d\int_0^t e^{-\ell s}\Delta u(t-s)ds = 0. \tag{2.13}$$

Puis, en prenant la somme

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[u_{ttt} + au_{tt} - b\Delta u_t - c\Delta u + d\int_0^t e^{-\ell s}\Delta u(t-s)ds\right] \\ &+\ell\left[u_{ttt} + au_{tt} - b\Delta u_t - c\Delta u + d\int_0^t e^{-\ell s}\Delta u(t-s)ds\right], \end{aligned}$$

on obtient

$$u_{tttt} + (a+\ell)u_{ttt} + a\ell u_{tt} - b\Delta u_{tt} - (c+b\ell)\Delta u_t - (c\ell - d)\Delta u = 0. \tag{2.14}$$

Motivés par la discussion ci-dessus, nous considérons de manière plus générale le problème de la valeur aux limites

$$\begin{cases} u_{tttt} + \alpha u_{ttt} + \beta u_{tt} - \gamma\Delta u_{tt} - \delta\Delta u_t - \varrho\Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

pour certains paramètres

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varrho > 0,$$

comme nous le verrons, le problème (2.15) est bien posé dans l'espace naturel des énergies faibles

$$H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

pour tout choix des paramètres structurels positifs.

Chapitre 3

Méthode de Galerkin pour l'équation de Moore - Gibson - Thompson du quatrième ordre avec des conditions intégrales

L'objectif de ce chapitre est d'étudier un problème a valeurs aux limites mixtes non locales pour l'équation de Moore - Gibson - Thompson avec condition intégrale. Pour montrer l'existence de la solution nous avons appliqué la méthode de Faedo-Galerkin.

3.1 Position du problème

On définit le problème suivant des valeurs aux limites mixtes non locales pour l'équation de Moore - Gibson - Thompson avec la condition intégrale.

$$\begin{cases} u_{tttt} + \alpha u_{ttt} + \beta u_{tt} - \varrho \Delta u - \delta \Delta u_t - \gamma \Delta u_{tt} = 0, \\ u(x,0) = u_0\left(x\right), \ u_t(x,0) = u_1\left(x\right), \ u_{tt}(x,0) = u_2\left(x\right), u_{ttt}(x,0) = u_3\left(x\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \displaystyle\int_0^t \int_\Omega u\left(\xi, \tau\right) d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

pour tout $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné avec une frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. Laisser $V\left(Q_T\right)$ et $W\left(Q_T\right)$ être des espaces définis respectivement par

$$V\left(Q_T\right) = \left\{u \in W_2^1\left(Q_T\right) : u_t \in W_2^1\left(Q_T\right) : u_{tt} \in W_2^1\left(Q_T\right)\right\},$$

et

$$W\left(Q_T\right) = \left\{u \in V\left(Q_T\right) : u\left(x,T\right) = 0\right\}.$$

Considérez l'équation

$$\begin{aligned}&(u_{tttt},v)_{L^2(Q_T)}+\alpha(u_{ttt},v)_{L^2(Q_T)}+\beta(u_{tt},v)_{L^2(Q_T)}\\&-\varrho(\Delta u,v)_{L^2(Q_T)}-\delta(\Delta u_t,v)_{L^2(Q_T)}-\gamma(\Delta u_{tt},v)_{L^2(Q_T)}\\&=0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

où $(.,.)_{L^2(Q_T)}$ représente le produit scalaire en $L^2(Q_T)$, u est supposé être une solution de (3.1) et $v \in W(Q_T)$, évaluation du produit scalaire en (3.2) et l'utilisation de la condition aux limites dans (3.1) on trouve

$$\begin{aligned}(u_{tttt},v)_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T\int_\Omega u_{tttt}(x,t)v(x,t)dxdt\\&= -\int_0^T\int_\Omega u_{ttt}(x,t)v_t(x,t)dxdt+\int_\Omega u_{ttt}(x,T)v(x,T)dx-\int_\Omega u_{ttt}(x,0)v(x,0)dx\\&= -(u_{ttt},v_t)_{L^2(Q_T)}-(u_3(x),v(x,0))_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(u_{ttt},v)_{L^2(Q_T)} &= \alpha\int_0^T\int_\Omega u_{ttt}(x,t)v(x,t)dxdt\\&= -\alpha\int_0^T\int_\Omega u_{tt}(x,t)v_t(x,t)dxdt+\alpha\int_\Omega u_{tt}(x,T)v(x,T)dx-\alpha\int_\Omega u_{tt}(x,0)v(x,0)dx\\&= -\alpha(u_{tt},v_t)_{L^2(Q_T)}-\alpha(u_2(x),v(x,0))_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(u_{tt},v)_{L^2(Q_T)} &= \beta\int_0^T\int_\Omega u_{tt}(x,t)v(x,t)dxdt\\&= -\beta\int_0^T\int_\Omega u_t(x,t)v_t(x,t)dxdt+\beta\int_\Omega u_t(x,T)v(x,T)dx-\beta\int_\Omega u_t(x,0)v(x,0)dx\\&= -\beta(u_t,v_t)_{L^2(Q_T)}-\beta(u_1(x),v(x,0))_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\varrho(\Delta u,v)_{L^2(Q_T)} &= -\varrho\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)v(x,t)dxdt\\&= \varrho\int_0^T\int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x,t)dxdt-\varrho\int_0^T\int_{\partial\Omega} v(x,t)\frac{\partial u}{\partial\eta}(x,t)ds_xdt\\&= \varrho(\nabla u,\nabla v)_{L^2(Q_T)}-\varrho\int_0^T\int_{\partial\Omega} v\left(\int_0^t\int_\Omega u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)ds_xdt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\delta(\Delta u_t, v)_{L^2(Q_T)} &= -\delta\int_0^T\int_\Omega \Delta u_t(x,t)v(x,t)dxdt \\
&= \delta\int_0^T\int_\Omega \nabla u_t(x,t)\nabla v(x,t)dxdt - \delta\int_0^T\int_{\partial\Omega} v(x,t)\frac{\partial u_t}{\partial\eta}(x,t)ds_xdt \\
&= \delta(\nabla u_t, \nabla v)_{L^2(Q_T)} - \delta\int_0^T\int_{\partial\Omega} v\left(\int_0^t\int_\Omega u_\tau(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)ds_xdt \\
&= \delta(\nabla u_t, \nabla v)_{L^2(Q_T)} - \delta\int_0^T\int_{\partial\Omega} v\int_\Omega u(\xi,t)\,d\xi ds_xdt \\
&\quad +\delta\int_0^T\int_{\partial\Omega} v\int_\Omega u_0(\xi)\,d\xi ds_xdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma(\Delta u_{tt}, v)_{L^2(Q_T)} &= -\gamma\int_0^T\int_\Omega \Delta u_{tt}(x,t)v(x,t)dxdt \\
&= \gamma\int_0^T\int_\Omega \Delta u_t(x,t)v_t(x,t)dxdt - \gamma\int_\Omega \Delta u_t(x,T)v(x,T)dx \\
&\quad +\gamma\int_\Omega \Delta u_1(x)v(x,T)dx \\
&= -\gamma\int_0^T\int_\Omega \nabla u_t(x,t)\nabla v_t(x,t)dxdt \\
&\quad -\gamma\int_0^T\int_{\partial\Omega} v_t(x,t)\frac{\partial u_t}{\partial\eta}ds_xdt + \gamma\left(\Delta u_1, v(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \delta(\nabla u_t, \nabla v_t)_{L^2(Q_T)} \\
&\quad -\delta\int_0^T\int_{\partial\Omega} v_t\left(\int_0^t\int_\Omega u_\tau(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)ds_xdt + \gamma\left(\Delta u_1, v(x,0)\right)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

mène à

$$
\begin{aligned}
& -(u_{ttt}, v_t)_{L^2(Q_T)} - \alpha(u_{tt}, v_t)_{L^2(Q_T)} - \beta(u_t, v_t)_{L^2(Q_T)} + \varrho(\nabla u, \nabla v)_{L^2(Q_T)} \\
& +\delta(\nabla u_t, \nabla v)_{L^2(Q_T)} - \gamma\left(\nabla u_t, \nabla v_t\right)_{L^2(Q_T)} \\
= \; & \varrho \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega u\left(\xi, \tau\right) d\xi d\tau \right) ds_x dt \\
& +\delta \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega u\left(\xi, t\right) d\xi ds_x dt \\
& -\delta \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega u_0(\xi) d\xi ds_x dt \\
& -\gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_0^t \int_\Omega u_\tau\left(\xi, \tau\right) d\xi d\tau \right) ds_x dt \\
& +(u_3\left(x\right), v(x,0))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u_2\left(x\right), v(x,0))_{L^2(\Omega)} + \beta(u_1\left(x\right), v(x,0))_{L^2(\Omega)} \\
& -\gamma\left(\Delta u_1, v(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Définition 3.1.1 *Une fonction $u \in V\left(Q_T\right)$ s'appelle une solution généralisée du problème (3.1) s'elle satisfaite l'équation (3.3) pour chaque $v \in W\left(Q_T\right)$.*

3.2 Existence de la solution

Dans cette section, nous prouverons l'existence d'une solution généralisée du problème posé

Théorème 3.2.1 *Si $u_0 \in W_2^1\left(\Omega\right),\; u_1 \in W_2^1\left(\Omega\right), u_2 \in W_2^1\left(\Omega\right)$ et $u_3 \in L^2\left(\Omega\right)$ alors il y a au moins une solution généralisée dans $V\left(Q_T\right)$ au problème (3.1).*

Preuve. Laisser $\{Z_k\left(x\right)\}_{k\geq 1}$ être un système fondamental de $W_2^1(\Omega)$, tel que $(Z_k, Z_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{k,l}$. Nous allons maintenant trouver une solution approximative du problème (3.1) sous la forme

$$
u^N\left(x,t\right) = \sum_{k=1}^N C_k\left(t\right) Z_k\left(x\right), \tag{3.4}
$$

où les constantes $C_k\left(t\right)$ sont définis par les conditions

$$
C_k\left(t\right) = (u^N\left(x,t\right), Z_k\left(x\right))_{L^2(\Omega)}, \qquad k = 1, ..., N, \tag{3.5}
$$

et peut être déterminé à partir des relations

$$\begin{aligned}
&(u^N_{tttt}, Z_l(x))_{L^2(\Omega)} + \alpha(u^N_{ttt}, Z_l(x))_{L^2(\Omega)} + \beta(u^N_{tt}, Z_l(x))_{L^2(\Omega)} \\
&+\varrho(\nabla u^N, \nabla Z_l(x))_{L^2(\Omega)} + \delta(\nabla u^N_t, \nabla Z_l(x))_{L^2(\Omega)} \\
&+\gamma\left(\nabla u^N_{tt}, \nabla Z_l(x)\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \;& \varrho \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \right) ds_x \\
&+\delta \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \left(\int_0^t \int_\Omega u^N_\tau(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \right) ds_x \\
&+\gamma \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \left(\int_0^t \int_\Omega u^N_{\tau\tau}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \right) ds_x,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

la substitution de (3.4) dans (3.6) donne pour $l = 1, ..., N$.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{k=1}^N C_k''''(t)\, Z_k(x)\, Z_l(x)\, dx + \alpha \int_\Omega \sum_{k=1}^N C_k'''(t)\, Z_k(x)\, Z_l(x)\, dx \\
&+\beta \int_\Omega \sum_{k=1}^N C_k''(t)\, Z_k(x)\, Z_l(x)\, dx + \varrho \int_\Omega \sum_{k=1}^N C_k(t)\, \nabla Z_k(x) . \nabla Z_l(x)\, dx \\
&+\delta \int_\Omega \sum_{k=1}^N C_k'(t)\, \nabla Z_k(x) . \nabla Z_l(x)\, dx + \gamma \int_\Omega \sum_{k=1}^N C_k''(t)\, \nabla Z_k(x) . \nabla Z_l(x)\, dx \\
= \;& \varrho \sum_{k=1}^N \int_0^t C_k(\tau) \left(\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau \\
&+\delta \sum_{k=1}^N \int_0^t C_k'(\tau) \left(\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau \\
&+\gamma \sum_{k=1}^N \int_0^t \left(C_k''(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_\Omega Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \{C_k^{''''}(t) Z_k(x) Z_l(x) + \alpha C_k^{'''}(t) Z_k(x) Z_l(x) \\
&+\beta C_k^{''}(t) Z_k(x) Z_l(x) + \varrho C_k(t) \nabla Z_k(x) . \nabla Z_l(x) \\
&+\delta C_k^{'}(t) \nabla Z_k(x) . \nabla Z_l(x) + \gamma C_k^{''}(t) \nabla Z_k . \nabla Z_l\} \, dx \\
= \;& \varrho \sum_{k=1}^{N} \int_0^t C_k(\tau) \left(\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau \\
&+\delta \sum_{k=1}^{N} \int_0^t C_k^{'}(\tau) \left(\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau \\
&+\gamma \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \left(C_k^{''}(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

De (3.7) il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} C_k^{''''}(t) \left(Z_k(x), Z_l(x)\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha C_k^{'''}(t) \left(Z_k(x), Z_l(x)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&+\beta C_k^{''}(t) \left(Z_k(x), Z_l(x)\right)_{L^2(\Omega)} + \varrho C_k(t) \left(\nabla Z_k, \nabla Z_l\right)_{L^2(\Omega)} \\
&+\delta C_k^{'}(t) \left(\nabla Z_k(x), \nabla Z_l(x)\right)_{L^2(\Omega)} + \gamma C_k^{''}(t) \left(\nabla Z_k(x), \nabla Z_l(x)\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \;& \varrho \sum_{k=1}^{N} \int_0^t C_k(\tau) \left(\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau \\
&+\delta \sum_{k=1}^{N} \int_0^t C_k^{'}(\tau) \left(\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds_x \right) d\tau \\
&+\gamma \sum_{k=1}^{N} \int_0^t \left(C_k^{''}(\tau) \int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds \right) d\tau, \qquad l = 1, ..., N. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Laisser

$$
(Z_k, Z_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}
$$

$$
(\nabla Z_k, \nabla Z_l)_{L^2(\Omega)} = \gamma_{kl},
$$

$$
\int_{\partial\Omega} Z_l(x) \int_{\Omega} Z_k(\xi) d\xi ds = \chi_{kl}.
$$

Alors (3.8) peut être écrit comme

$$\sum_{k=1}^{N} C_k''''(t)\,\delta_{kl} + \alpha C_k'''(t)\,\delta_{kl} + C_k''(t)\,(\beta\delta_{kl} + \gamma\gamma_{kl}) + \delta C_k'(t)\,\gamma_{kl}$$

$$+\varrho C_k(t)\,\gamma_{kl} - \int_0^t (\varrho C_k(\tau)\chi_{kl} + \delta C_k'(\tau)\chi_{kl} + \gamma C_k''(\tau)\chi_{kl})d\tau = 0. \tag{3.9}$$

Une différentiation par rapport à t donne

$$\sum_{k=1}^{N} C_k'''''(t)\,\delta_{kl} + \alpha C_k''''(t)\,\delta_{kl} + C_k'''(t)\,(\beta\delta_{kl} + \gamma\gamma_{kl}) + C_k''(t)\,(\delta\gamma_{kl} - \gamma\chi_{kl})\,,$$

$$+C_k'(t)\,(\varrho\gamma_{kl} - \delta\chi_{kl})\,\gamma_{kl} - \varrho C_k(t)\,\chi_{kl} = 0, \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} C_k''''(0)\,\delta_{kl} + \alpha C_k'''(0)\,\delta_{kl} + C_k''(0)\,(\beta\delta_{kl} + \gamma\gamma_{kl}) \\ \qquad + \delta C_k'(0)\,\gamma_{kl} + \varrho C_k(0)\,\gamma_{kl} = 0 \\ C_k(0) = (Z_k, u_0)_{L^2(\Omega)},\; C_k'(0) = (Z_k, u_1(x))_{L^2(\Omega)}, \\ C_k''(t) = (Z_k, u_2(x))_{L^2(\Omega)}, C_k'''(t) = (Z_k, u_3(x))_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{3.11}$$

On obtient un système d'équations différentielles d'ordre quatre par rapport à le variable t à coefficients constants et aux conditions initiales (3.11), par conséquent, nous obtenons un problème de Cauchy d'équations différentielles linéaires qui est résoluble de manière unique. Ainsi pour tout n il existe une fonction $u^N(x)$ satisfaisant (3.6). Maintenant, nous allons démontrer que la séquence u^N est bornée. Pour ce faire, nous multiplions chaque équation de (3.6) par la somme $C_k'(t)$ appropriée sur k de 1 à N puis intégrant l'égalité résultante par rapport à t sur $[0,\tau]$, avec $\tau \leq T$, donne

$$\begin{aligned} & \left(u_{tttt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \alpha\left(u_{ttt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \beta\left(u_{tt}^N, u_t^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ & +\varrho\left(\nabla u^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \delta\left(\nabla u_t^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ & +\gamma\left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_t^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\ = \; & \varrho\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt \\ & +\delta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u_t^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt \\ & +\gamma\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt, \end{aligned} \tag{3.12}$$

L'évaluation de chaque terme du côté gauche de l'équation (3.12), conduit à

$$\begin{aligned}\left(u_{tttt}^{N},u_{t}^{N}\right)_{L^{2}(Q_{\tau})} &= -\int_{0}^{\tau}\left(u_{ttt}^{N},u_{tt}^{N}\right)_{L^{2}(\Omega)}dt+\left(u_{\tau\tau\tau}^{N}\left(x,\tau\right),u_{\tau}^{N}\left(x,\tau\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}\\ &\quad -\left(u_{ttt}^{N}\left(x,0\right),u_{t}^{N}\left(x,0\right)\right)_{L^{2}(\Omega)} \qquad (3.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(u_{ttt}^{N},u_{t}^{N}\right)_{L^{2}(Q_{\tau})} &= \alpha\left(u_{\tau\tau}^{N}\left(x,\tau\right),u_{\tau}^{N}\left(x,\tau\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}-\left(u_{tt}^{N}\left(x,0\right),u_{t}^{N}\left(x,0\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}\\ &\quad -\alpha\int_{0}^{\tau}\left\|u_{tt}\left(x,t\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}dt, \qquad (3.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\left(u_{tt}^{N},u_{t}^{N}\right)_{L^{2}(Q_{\tau})} &= \beta\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}u_{tt}^{N}\left(x,t\right)u_{t}^{N}\left(x,t\right)dxdt\\ &= \frac{\beta}{2}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left(u_{t}^{N}\left(x,t\right)\right)^{2}dxdt\\ &= \frac{\beta}{2}\left\|u_{\tau}^{N}(x,\tau)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}-\frac{\beta}{2}\left\|u_{t}^{N}(x,0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}, \qquad (3.15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho\left(\nabla u^{N},\nabla u_{t}^{N}\right)_{L^{2}(Q_{\tau})} &= \varrho\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}\nabla u^{N}\left(x,t\right)\nabla u_{t}^{N}\left(x,t\right)dxdt\\ &= \frac{\varrho}{2}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left(\nabla u^{N}\left(x,t\right)\right)^{2}dxdt\\ &= \frac{\varrho}{2}\left\|\nabla u^{N}(x,\tau)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}-\frac{\varrho}{2}\left\|\nabla u^{N}(x,0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}, \qquad (3.16)\end{aligned}$$

$$\delta\left(\nabla u_{t}^{N},\nabla u_{t}^{N}\right)_{L^{2}(Q_{\tau})}=\delta\int_{0}^{\tau}\left\|\nabla u_{t}^{N}\left(x,t\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}dt, \qquad (3.17)$$

$$\begin{aligned}&\gamma\left(\nabla u_{tt}^{N},\nabla u_{t}^{N}\right)_{L^{2}(Q_{\tau})}\\ &= \gamma\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}\nabla u_{tt}^{N}\left(x,t\right)\nabla u_{t}^{N}\left(x,t\right)dxdt\\ &= \frac{\gamma}{2}\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left(\nabla u_{t}^{N}\left(x,t\right)\right)^{2}dxdt\\ &= \frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{\tau}^{N}(x,\tau)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}-\frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{t}^{N}(x,0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}, \qquad (3.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varrho \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
= \;& \varrho \int_{\partial\Omega} u^N(x,\tau) \int_0^\tau \int_\Omega u^N(\xi,t) \, d\xi dt ds_x \\
& -\varrho \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t) \, d\xi dt ds_x, \qquad (3.3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
= \;& \delta \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t) \, d\xi dt ds_x \\
& -\delta \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,0) d\xi dt ds_x \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t) \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta) \, d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
= \;& \gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t) \left(\int_\Omega u_t^N(\xi,t) \, d\xi \right) ds_x dt \\
& -\gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t) \left(\int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi \right) ds_x dt. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

En prenant en compte les égalités (3.13) $-$(3.20) dans (3.12) nous trouvons

$$
\begin{aligned}
&\left(u_{\tau\tau\tau}^{N}\left(x,\tau\right),u_{\tau}^{N}\left(x,\tau\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}+\alpha\left(u_{\tau\tau}^{N}\left(x,\tau\right),u_{\tau}^{N}\left(x,\tau\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}\\
&+\frac{\beta}{2}\left\|u_{\tau}^{N}(x,\tau)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\frac{\varrho}{2}\left\|\nabla u^{N}(x,\tau)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{\tau}^{N}(x,\tau)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\\
=\;&\left(u_{ttt}^{N}\left(x,0\right),u_{t}^{N}\left(x,0\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}+\alpha\left(u_{tt}^{N}(x,0),u_{t}^{N}(x,0)\right)_{L^{2}(\Omega)}+\frac{\beta}{2}\left\|u_{t}^{N}(x,0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\\
&+\frac{\varrho}{2}\left\|\nabla u^{N}(x,0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{t}^{N}(x,0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\int_{0}^{\tau}\left(u_{ttt}^{N},u_{tt}^{N}\right)_{L^{2}(\Omega)}dt\\
&+\alpha\int_{0}^{\tau}\left\|u_{tt}\left(x,t\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}dt-\delta\int_{0}^{\tau}\left\|\nabla u_{t}^{N}\left(x,t\right)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}dt+\\
&+\varrho\int_{\partial\Omega}u^{N}(x,\tau)\int_{0}^{\tau}\int_{\Omega}u^{N}\left(\xi,t\right)d\xi dtds_{x}\\
&-\varrho\int_{\partial\Omega}\int_{0}^{\tau}u^{N}\left(x,t\right)\int_{\Omega}u^{N}\left(\xi,t\right)d\xi dtds_{x}\\
&+\delta\int_{\partial\Omega}\int_{0}^{\tau}u_{t}^{N}\left(x,t\right)\int_{\Omega}u^{N}\left(\xi,t\right)d\xi dtds_{x}\\
&-\delta\int_{\partial\Omega}\int_{0}^{\tau}u_{t}^{N}\left(x,t\right)\int_{\Omega}u^{N}(\xi,0)d\xi dtds_{x}\\
&+\gamma\int_{0}^{\tau}\int_{\partial\Omega}u_{t}^{N}\left(x,t\right)\left(\int_{\Omega}u_{t}^{N}\left(\xi,t\right)d\xi\right)ds_{x}dt\\
&-\gamma\int_{0}^{\tau}\int_{\partial\Omega}u_{t}^{N}\left(x,t\right)\left(\int_{\Omega}u_{t}^{N}(\xi,0)d\xi\right)ds_{x}dt.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Maintenant, en multipliant chaque équation de (3.6) par $C_{k}''(t)$ approprié, on les additionne de 1 à N et on les intègre par rapport à t sur $[0,\tau]$, avec $\tau\leq T$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(u_{tttt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \alpha\left(u_{ttt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \beta\left(u_{tt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
&+\varrho\left(\nabla u^N, \nabla u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \delta\left(\nabla u_t^N, \nabla u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
&+\gamma\left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
= \;& \varrho\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_{tt}^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt \\
&+\delta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_{tt}^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u_t^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt \\
&+\gamma\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_{tt}^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt, \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement dans (3.12), on trouve

$$\begin{aligned}
\left(u_{tttt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \int_0^\tau\int_\Omega u_{tttt}^N u_{tt}^N dxdt \\
&-\int_0^\tau \left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \left(u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau), u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&-\left(u_{ttt}^N(x,0), u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\left(u_{ttt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \alpha\int_0^\tau\int_\Omega u_{ttt}^N u_{tt}^N dxdt \\
&= \frac{\alpha}{2}\int_0^\tau\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(u_{tt}^N\right)^2 dxdt \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha}{2}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\beta\left(u_{tt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} = \beta\int_0^\tau \left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \qquad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\varrho\left(\nabla u^N,\nabla u^N_{tt}\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \varrho\left(\nabla u^N(x,\tau),\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right)_{L^2(Q_\tau)}\\ &\quad-\varrho\left(\nabla u^N(x,0),\nabla u^N_t(x,0)\right)_{L^2(\Omega)}\\ &\quad-\varrho\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(\nabla u^N_t,\nabla u^N_{tt}\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \delta\int_0^\tau\int_\Omega \nabla u^N_t\nabla u^N_{tt}dxdt\\ &= \frac{\delta}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\frac{d}{dt}\left(\nabla u^N_t\right)^2dxdt\\ &= \frac{\delta}{2}\left\|\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{\delta}{2}\left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.27)\end{aligned}$$

$$\gamma\left(\nabla u^N_{tt},\nabla u^N_{tt}\right)_{L^2(Q_\tau)}=\gamma\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.28)$$

$$\begin{aligned}&\varrho\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}u^N_{tt}\left(\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_xdt\\ &= \varrho\int_{\partial\Omega}u^N_\tau(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dtds_x\\ &\quad-\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N_t(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dtds_x, \qquad (3.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\delta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}u^N_{tt}(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u^N_t(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_xdt\\ &= \delta\int_{\partial\Omega}u^N_\tau(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x\\ &\quad-\delta\int_{\partial\Omega}u^N_\tau(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,0)d\xi ds_x\\ &\quad-\delta\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N_t(x,t)\int_\Omega u^N_t(\xi,t)\,d\xi dtds \qquad (3.30)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\gamma\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_{tt}^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)ds_x dt \\
=\ &\gamma\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u_\tau^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x \\
&-\gamma\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u_t^N(\xi,0)d\xi ds_x \\
&-\gamma\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,t)\,d\xi dt ds,
\end{aligned}\tag{3.31}$$

Une substitution des égalités (3.23) − (3.31) dans (3.22) donne

$$\begin{aligned}
&\left(u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau),u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\frac{\delta}{2}\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varrho(\nabla u^N(x,\tau),\nabla u_\tau^N(x,\tau))_{L^2(\Omega)} \\
=\ &\int_0^\tau\left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt+\left(u_{ttt}^N(x,0),u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\alpha}{2}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\beta\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+\varrho(\nabla u^N(x,0),\nabla u_t^N(x,0))_{L^2(\Omega)}+\varrho\int_0^\tau\left\|\nabla u_t(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+\frac{\delta}{2}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\gamma\int_0^\tau\left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+\varrho\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
&-\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
&+\delta\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\delta \int\limits_{\partial\Omega} u_{\tau}^{N}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u^{N}(\xi,0) d\xi ds_x - \delta \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{0}^{\tau} u_t^N(x,t) \int\limits_{\Omega} u_t^N(\xi,t)\, d\xi dt ds_x \\
&+\gamma \int\limits_{\partial\Omega} u_{\tau}^{N}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u_{\tau}^{N}(\xi,\tau)\, d\xi ds_x - \gamma \int\limits_{\partial\Omega} u_{\tau}^{N}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u_t^N(\xi,0) d\xi ds_x \\
&-\gamma \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{0}^{\tau} u_t^N(x,t) \int\limits_{\Omega} u_{tt}^N(\xi,t)\, d\xi dt ds_x. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Maintenant, en multipliant chaque équation de (3.6) par $C_k'''(t)$, approprié, on les additionne de 1 à N et on les intègre par rapport à t sur $[0,\tau]$, avec $\tau \leq T$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left(u_{tttt}^N, u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \alpha\left(u_{ttt}^N, u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \beta\left(u_{tt}^N, u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
& +\varrho\left(\nabla u^N, \nabla u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} + \delta\left(\nabla u_t^N, \nabla u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
& +\gamma\left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} \\
= \; & \varrho \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} u_{ttt}^N(x,t) \left(\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} u^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
& +\delta \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} u_{ttt}^N(x,t) \left(\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} u_t^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
& +\gamma \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} u_{ttt}^N(x,t) \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_{tt}^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Avec le même raisonnement dans (3.12), on trouve

$$
\begin{aligned}
\left(u_{tttt}^N, u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} u_{tttt}^N u_{ttt}^N dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} \frac{d}{dt}\left(u_{ttt}^N\right)^2 dx dt \\
&= \frac{1}{2}\left\|u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

$$
\alpha\left(u_{ttt}^N, u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} = \alpha \int\limits_0^\tau \left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (3.35)
$$

$$\begin{aligned}
\beta\left(u_{tt}^N, u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \beta\int_0^\tau\int_\Omega u_{ttt}^N u_{tt}^N dxdt \\
&= \frac{\beta}{2}\int_0^\tau\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(u_{tt}^N\right)^2 dxdt \\
&= \frac{\beta}{2}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta}{2}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varrho\left(\nabla u^N, \nabla u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \varrho\left(\nabla u^N(x,\tau), \nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad -\varrho\left(\nabla u^N(x,0), \nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad -\varrho\int_0^\tau \left(\nabla u_t^N, \nabla u_{tt}^N\right)_{L^2(\Omega)} dt, \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\left(\nabla u_t^N, \nabla u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\delta\int_0^\tau \left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \delta\left(\nabla u_\tau^N(x,\tau), \nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad -\delta\left(\nabla u_t^N(x,0), \nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

$$\gamma\left(\nabla u_{tt}^N, \nabla u_{ttt}^N\right)_{L^2(Q_\tau)} = \frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
&\varrho\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_{ttt}^N\left(\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\eta)d\xi d\eta\right) ds_x dt \\
&= \varrho\int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\, d\xi dt ds_x \\
&\quad -\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_{tt}^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\, d\xi dt ds_x, \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_{ttt}^N(x,t) \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
= \;& \delta \int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \int_\Omega u^N(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
& -\delta \int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \int_\Omega u^N(\xi,0) d\xi ds_x \\
& -\delta \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_{tt}^N(x,t) \int_\Omega u_t^N(\xi,t)\, d\xi dt ds,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

et

$$\begin{aligned}
&\gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_{ttt}^N(x,t) \left(\int_0^t \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,\eta) d\xi d\eta \right) ds_x dt \\
= \;& \gamma \int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \int_\Omega u_\tau^N(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
& -\gamma \int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi ds_x \\
& -\gamma \int_{\partial\Omega} \int_0^\tau u_{tt}^N(x,t) \int_\Omega u_{tt}^N(\xi,t)\, d\xi dt ds,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Une substitution des égalités (3.34) − (3.42) dans (3.33) donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\| u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \left\| u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\varrho \left(\nabla u^N(x,\tau), \nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&+\delta \left(\nabla u_\tau^N(x,\tau), \nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \right)_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2} \left\| \nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
= \;& \frac{1}{2} \left\| u_{ttt}^N(x,0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \int_0^\tau \left\| u_{ttt}^N(x,t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&-\frac{\beta}{2} \left\| u_{tt}^N(x,0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varrho \int_0^\tau \left(\nabla u_t^N, \nabla u_{tt}^N \right)_{L^2(\Omega)} dt
\end{aligned}$$

$$+\varrho\left(\nabla u^N(x,0),\nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$+\delta\int_0^\tau\left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt+\delta\left(\nabla u_t^N(x,0),\nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$-\frac{\gamma}{2}\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varrho\int_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x$$
$$-\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_{tt}^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x$$
$$+\delta\int_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x$$
$$-\delta\int_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,0)d\xi ds_x$$
$$-\delta\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_{tt}^N(x,t)\int_\Omega u_t^N(\xi,t)\,d\xi dt ds\gamma$$
$$+\int_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_\Omega u_\tau^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x$$
$$-\gamma\int_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_\Omega u_t^N(\xi,0)d\xi ds_x$$
$$-\gamma\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_{tt}^N(x,t)\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,t)\,d\xi dt ds. \tag{3.43}$$

En multipliant (3.21) par λ_1, (3.32) par λ_2, et (3.43) par λ_3, on obtient

$$\lambda_1\left(u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau),u_\tau^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}+\lambda_1\alpha\left(u_{\tau\tau}^N(x,\tau),u_\tau^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\lambda_1\beta}{2}\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+(\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2})\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+\lambda_2\left(u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau),u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}+(\frac{\lambda_2\alpha}{2}+\frac{\lambda_3\beta}{2})\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+\lambda_2\varrho(\nabla u^N(x,\tau),\nabla u_\tau^N(x,\tau))_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_3}{2}\left\|u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\lambda_3\varrho\left(\nabla u^N(x,\tau),\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}$$
$$+\lambda_3\delta\left(\nabla u_\tau^N(x,\tau),\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \lambda_1 \left(u_{ttt}^N(x,0), u_t^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} + \lambda_1\alpha\left(u_{tt}^N(x,0), u_t^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_1\beta}{2}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \frac{\lambda_1\varrho}{2}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\lambda_1\gamma}{2} + \frac{\lambda_2\delta}{2}\right)\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_1\int_0^\tau \left(u_{ttt}^N, u_{tt}^N\right)_{L^2(\Omega)} dt \\
& + (\lambda_1\alpha - \lambda_2\beta)\int_0^\tau \left\|u_{tt}(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + (\lambda_2\varrho - \lambda_1\delta)\int_0^\tau \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
& + (\lambda_2 - \lambda_3\alpha)\int_0^\tau \left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \lambda_2\left(u_{ttt}^N(x,0), u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& + \left(\frac{\lambda_2\alpha}{2} - \frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_2\varrho(\nabla u^N(x,0), \nabla u_t^N(x,0))_{L^2(\Omega)} \\
& + (\lambda_3\delta - \lambda_2\gamma)\int_0^\tau \left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\lambda_3}{2}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \lambda_3\varrho\left(\nabla u^N(x,0), \nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} + \lambda_3\varrho\int_0^\tau \left(\nabla u_t^N, \nabla u_{tt}^N\right)_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \lambda_3\delta\left(\nabla u_t^N(x,0), \nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda_3\gamma}{2}\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \lambda_1\varrho\int_{\partial\Omega} u^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x - \lambda_1\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
& + (\lambda_1\delta - \lambda_2\varrho)\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x - \lambda_1\delta\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,0) d\xi dt ds_x \\
& + (\lambda_1\gamma - \lambda_2\delta)\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t)\left(\int_\Omega u_t^N(\xi,t)\,d\xi\right) ds_x dt \\
& - \lambda_1\gamma\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t)\left(\int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi\right) ds_x dt + \lambda_2\varrho\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
& + \lambda_2\delta\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x - \lambda_2\delta\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u^N(\xi,0) d\xi ds_x \\
& + \lambda_2\gamma\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u_\tau^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x - \lambda_2\gamma\int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi ds_x \\
& - \lambda_2\gamma\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t)\int_\Omega u_{tt}^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x + \lambda_3\varrho\int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-\lambda_3\varrho\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^{\tau}u_{tt}^N(x,t)\int\limits_{\Omega}u^N(\xi,t)\,d\xi dtds_x+\lambda_3\delta\int\limits_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int\limits_{\Omega}u^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x\\
&-\lambda_3\delta\int\limits_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int\limits_{\Omega}u^N(\xi,0)d\xi ds_x-\lambda_3\delta\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^{\tau}u_{tt}^N(x,t)\int\limits_{\Omega}u_t^N(\xi,t)\,d\xi dtds\\
&+\lambda_3\gamma\int\limits_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int\limits_{\Omega}u_{\tau}^N(\xi,\tau)\,d\xi ds_x-\lambda_3\gamma\int\limits_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int\limits_{\Omega}u_t^N(\xi,0)d\xi ds_x\\
&-\lambda_3\gamma\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^{\tau}u_{tt}^N(x,t)\int\limits_{\Omega}u_{tt}^N(\xi,t)\,d\xi dtds. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy et de l'inégalité de trace, nous pouvons estimer tout les termes de la partie droite de (3.44) comme suivant

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\varrho\int\limits_{\partial\Omega}u^N(x,\tau)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}u^N(\xi,t)\,d\xi dtds_x\\
\le\;&\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}\int\limits_{\partial\Omega}\left(u^N(x,\tau)\right)^2ds_x+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon_1\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}u^N(\xi,t)\,d\xi dt\right)^2ds_x\\
\le\;&\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}\left(\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon_1\left|\partial\Omega\right|\left(\int\limits_0^{\tau}1^2dt\right)\left(\int\limits_0^{\tau}\left(\int\limits_{\Omega}u^N(\xi,t)\,d\xi\right)^2dt\right)\\
\le\;&\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}\left(\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon_1\left|\partial\Omega\right|T\left(\int\limits_{\Omega}1^2d\xi\right)\left(\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\left(u^N(\xi,t)\right)^2d\xi dt\right)\\
\le\;&\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}\left(\varepsilon\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\
&+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon_1T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\int\limits_0^{\tau}\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt, \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_1\varrho\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau u^N(x,t)\int\limits_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x\\
\leq\ & \frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon\int\limits_0^\tau \left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left(l(\varepsilon)+|\Omega|\,|\partial\Omega|\right)\int\limits_0^\tau \left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1\delta-\lambda_2\varrho)\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau u_t^N(x,t)\int\limits_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x\\
\leq\ & \frac{(\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho)}{2}\left(\varepsilon\int\limits_0^\tau \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+l(\varepsilon)\int\limits_0^\tau \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right)\\
&+\frac{(\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho)}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\int\limits_0^\tau \left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_1\delta\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau u_t^N(x,t)\int\limits_\Omega u^N(\xi,0)d\xi dt ds_x\\
\leq\ & \frac{\lambda_1\delta}{2}\left(\varepsilon\int\limits_0^\tau \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+l(\varepsilon)\int\limits_0^\tau \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right)\\
&+\frac{\lambda_1\delta}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_2\varrho\int\limits_{\partial\Omega}u_\tau^N(x,\tau)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x\\
\leq\ & \frac{\lambda_2\varrho}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_2}\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_2|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T\int\limits_0^\tau \left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_2\delta \int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau) \int_{\Omega} u^N(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
\leq\; & \frac{\lambda_2\delta}{2\varepsilon_3}\left(\varepsilon \left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
& + \frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_3 |\Omega|\,|\partial\Omega| \left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_2\delta \int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau) \int_{\Omega} u^N(\xi,0) d\xi ds_x \\
\leq\; & \frac{\lambda_2\delta}{2\varepsilon_4}\left(\varepsilon \left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
& + \frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4 |\Omega|\,|\partial\Omega| \left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1\gamma - \lambda_2\delta) \int_{\partial\Omega}\int_0^\tau u_t^N(x,t) \int_{\Omega} u_t^N(\xi,t)\, d\xi dt ds_x \\
\leq\; & \frac{(\lambda_1\gamma + \lambda_2\delta)}{2}\varepsilon \int_0^\tau \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \frac{(\lambda_1\gamma + \lambda_2\delta)}{2}\left(l(\varepsilon) + |\Omega|\,|\partial\Omega|\right) \int_0^\tau \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1\gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^N(x,t) \left(\int_\Omega u_t^N(\xi,0) d\xi\right) ds_x dt \\
\leq\; & \frac{\lambda_1\gamma}{2}\left(\varepsilon \int_0^\tau \left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + l(\varepsilon) \int_0^\tau \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt\right) \\
& + \frac{\lambda_1\gamma}{2} |\Omega|\,|\partial\Omega|\, T \left\|u_t^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_2\gamma \int_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau) \int_{\Omega} u_\tau^N(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
\leq\; & \frac{\lambda_2\gamma}{2\varepsilon_5}\left(\varepsilon \left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
& + \frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_5 |\Omega|\,|\partial\Omega| \left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_2\gamma\int\limits_{\partial\Omega} u_\tau^N(x,\tau)\int\limits_{\Omega} u_t^N(\xi,0)d\xi ds_x \\
\leq\ & \frac{\lambda_2\gamma}{2\varepsilon_6}\left(\varepsilon\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+l(\varepsilon)\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\
&+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_2\gamma\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau u_t^N(x,t)\int\limits_{\Omega} u_{tt}^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
\leq\ & \frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon\int\limits_0^\tau\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+\frac{\lambda_2\gamma}{2}l(\varepsilon)\int\limits_0^\tau\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\int\limits_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_3\varrho\int\limits_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
\leq\ & \frac{\lambda_3\varrho}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_7}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\
&+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\varepsilon_7\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right| T\int\limits_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_3\varrho\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^\tau u_{tt}^N(x,t)\int\limits_{\Omega} u^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
\leq\ & \frac{\lambda_3\varrho}{2}\left(\varepsilon\int\limits_0^\tau\left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt+l(\varepsilon)\int\limits_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right) \\
&+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\int\limits_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} & \lambda_3\delta \int\limits_{\partial\Omega} u^N_{\tau\tau}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u^N(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\ \leq \; & \frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_8}\left(\varepsilon \left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ & + \frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_8 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right| \left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_3\delta \int\limits_{\partial\Omega} u^N_{\tau\tau}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u^N(\xi,0) d\xi ds_x \\ \leq \; & \frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_9}\left(\varepsilon \left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ & + \frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9 \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right| \left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_3\delta \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_0^{\tau} u^N_{tt}(x,t) \int\limits_{\Omega} u^N_t(\xi,t)\, d\xi dt ds_x \\ \leq \; & \frac{\lambda_3\delta}{2}\left(\varepsilon \int\limits_0^{\tau} \left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + l(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt\right) \\ & + \frac{\lambda_3\delta}{2} \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right| \int\limits_0^{\tau} \left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_3\gamma \int\limits_{\partial\Omega} u^N_{\tau\tau}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u^N_{\tau}(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\ \leq \; & \frac{\lambda_3\gamma}{2\varepsilon_{10}}\left(\varepsilon \left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ & + \frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{10} \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right| \left\|u^N_{\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} & -\lambda_3\gamma \int\limits_{\partial\Omega} u^N_{\tau\tau}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} u^N_t(\xi,0) d\xi ds_x \\ \leq \; & \frac{\lambda_3\gamma}{2\varepsilon_{11}}\left(\varepsilon \left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ & + \frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11} \left|\Omega\right| \left|\partial\Omega\right| \left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
&-\lambda_3\gamma \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_0^\tau u_{tt}^N(x,t) \int\limits_\Omega u_{tt}^N(\xi,t)\,d\xi dt ds_x \\
\leq\ & \frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon \int\limits_0^\tau \left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\left(l(\varepsilon)+|\Omega|\,|\partial\Omega|\right)\int\limits_0^\tau \left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_1}{2}\left\|u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\lambda_1}{2}\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \lambda_1\left(u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau),u_\tau^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_2}{2}\left\|u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\lambda_2}{2}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \lambda_2\left(u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau),u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_1\alpha}{2}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\lambda_1\alpha}{2}\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \lambda_1\alpha\left(u_{\tau\tau}^N(x,\tau),u_\tau^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_2\varrho\varepsilon_{12}}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{12}}\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \lambda_2\varrho\left(\nabla u^N(x,\tau),\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_2\varrho\varepsilon_{13}}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \lambda_3\varrho\left(\nabla u^N(x,\tau),\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_3\delta\varepsilon_{14}}{2}\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{\lambda_3\delta\varepsilon_{14}}{2}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \lambda_3\delta\left(\nabla u_\tau^N(x,\tau),\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\left(u_{ttt}^N(x,0),u_t^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \frac{\lambda_1}{2}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_1}{2}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\alpha\left(u_{tt}^N(x,0),u_t^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \frac{\lambda_1\alpha}{2}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_1\alpha}{2}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_2\left(u_{ttt}^N(x,0),u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \frac{\lambda_2}{2}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_2}{2}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_2\varrho\left(\nabla u^N(x,0),\nabla u_t^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \frac{\lambda_2}{2}\varrho\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_2}{2}\varrho\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_3\varrho\left(\nabla u^N(x,0),\nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \frac{\lambda_3}{2}\varrho\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_3}{2}\varrho\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_3\delta\left(\nabla u_t^N(x,0),\nabla u_{tt}^N(x,0)\right)_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \frac{\lambda_3}{2}\delta\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_3}{2}\delta\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\lambda_1\int_0^\tau\left(u_{ttt}^N,u_{tt}^N\right)_{L^2(\Omega)}dt\leq\frac{\lambda_1}{2}\int_0^\tau\left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\frac{\lambda_1}{2}\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt, \tag{3.77}$$

$$\lambda_3\varrho\int_0^\tau\left(\nabla u_t^N,\nabla u_{tt}^N\right)_{L^2(\Omega)}dt\leq\frac{\lambda_3\varrho}{2}\int_0^\tau\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt, \tag{3.78}$$

Par combinaison (3.45) $-$ (3.78) nous trouvons

$$\begin{aligned} 0\ \leq\ & \left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_3\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_8\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & +\left\{\frac{\lambda_1\delta}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|T+\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & +\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_3}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_4}+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\left(\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_5}+\varepsilon_5\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_6}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{10}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}-\frac{\lambda_1\beta}{2}\Big\}\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_8}\right.\\
&+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_{11}}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}-\frac{\lambda_2\alpha}{2}-\left.\frac{\lambda_3\beta}{2}\right\}\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|T+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\right\}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}-\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\right\}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_3}{2}\right\}\left\|u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2}\right\}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}\varepsilon+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_{12}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_{13}-\frac{\lambda_1\varrho}{2}\right\}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\right\}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_4}+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_5}\right.\\
&+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_6}+\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{12}}+\frac{\lambda_3\delta\varepsilon_{14}}{2}-\frac{\lambda_1\gamma}{2}-\left.\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}-\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}}+\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}+\frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}}-\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon_1T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left(l(\varepsilon)+\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)+\left(\frac{\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho}{2}\right)\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right.\\
&+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_2T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\varepsilon_7T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\left.\frac{\lambda_3\varrho}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\int_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt\\
&+\left\{\left(\frac{\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho}{2}\right)l(\varepsilon)+\frac{\lambda_1\delta}{2}l(\varepsilon)+\left(\frac{\lambda_1\gamma+\lambda_2\delta}{2}\right)\left(l(\varepsilon)+\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)\right.\\
&+\frac{\lambda_1\gamma}{2}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_2\gamma}{2}l(\varepsilon)+\left.\frac{\lambda_3\delta}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\int_0^\tau\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\left\{\frac{\lambda_2\gamma}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\varrho}{2}l(\varepsilon)\right.\\
&+\frac{\lambda_3\delta}{2}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\left(l(\varepsilon)+\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)+\frac{\lambda_1}{2}+\left.\left(\lambda_1\alpha-\lambda_2\beta\right)\right\}\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt\\
&+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2-\lambda_3\alpha\right\}\int_0^\tau\left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt\\
&+\left\{\left(\frac{\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho}{2}\right)\varepsilon+\frac{\lambda_1\delta}{2}\varepsilon+\left(\frac{\lambda_1\gamma+\lambda_2\delta}{2}\right)\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\right.\\
&+\left.\left(\lambda_2\varrho-\lambda_1\delta\right)\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\left\{\frac{\lambda_2\gamma}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\lambda_3\varrho}{2}+(\lambda_3\delta-\lambda_2\gamma)\Bigg\}\int\limits_0^\tau \left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \tag{3.79}$$

On pose

$$m_1=\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_3\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_8\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|, \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{\lambda_2\varrho}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_3}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_4}+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\left(\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_5}+\varepsilon_5\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)\\ &\quad +\frac{\lambda_2\gamma}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_6}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{10}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_1}{2}, \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$m_3=\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{l(\varepsilon)}{\varepsilon_{11}}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}, \tag{3.82}$$

$$m_4=\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}\varepsilon+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_{12}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_{13}, \tag{3.83}$$

$$m_5=\frac{\lambda_2\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_4}+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_5}+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_6}+\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{12}}+\frac{\lambda_3\delta\varepsilon_{14}}{2}. \tag{3.84}$$

Par l'utilisation du (3.80) – (3.84) dans (3.79)

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_1\beta}{2}\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}+\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &+\left\{\frac{\lambda_3}{2}-\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\right\}\left\|u_{\tau\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &+\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &-\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}}-\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}+\frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ \leq\ & m_1\left\|u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+m_2\left\|u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+m_3\left\|u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+m_4\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &+m_5\left\|\nabla u_\tau^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_1\delta}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|T+\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|T+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\right\}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &+\left\{\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}-\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\right\}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2}\right\}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$$+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\right\}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}-\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\gamma_1\int_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\gamma_2\int_0^\tau\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt$$
$$+\gamma_3\int_0^\tau\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\gamma_4\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\gamma_5\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt$$
$$+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2-\lambda_3\alpha\right\}\int_0^\tau\left\|u^N_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt. \tag{3.85}$$

Combiner les inégalités (3.86) − (3.80) et l'égalité (3.85) et les inégalités suivantes

$$m_1\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_1\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_1\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_1\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.86}$$

$$m_2\left\|u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_2\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_2\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_2\left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.87}$$

$$m_3\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_3\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_3\left\|u^N_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_3\left\|u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.88}$$

$$m_4\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_4\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_4\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_4\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.89}$$

$$m_5\left\|\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_5\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_5\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_5\left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.90}$$

on a

$$\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\left\|u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}+\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\left\{\frac{\lambda_3}{2}-\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\right\}\left\|u^N_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}}-\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}+\frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & m_1\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_1\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_1\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +m_2\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_2\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_2\left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +m_3\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_3\left\|u^N_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_3\left\|u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +m_4\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_4\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_4\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +m_5\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_5\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_5\left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\{\frac{\lambda_1\delta}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T+\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9|\Omega|\,|\partial\Omega|\right\}\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& \left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11}|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\right\}\left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\{\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}-\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\right\}\left\|u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2}\right\}\left\|u^N_{ttt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\right\}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}-\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\gamma_1\int_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\gamma_2\int_0^\tau\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt \\
& +\gamma_3\int_0^\tau\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\gamma_4\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\gamma_5\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt \\
& +\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2-\lambda_3\alpha\right\}\int_0^\tau\left\|u^N_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& \frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\left\|u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}+\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\{\frac{\lambda_3}{2}-\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\right\}\left\|u^N_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$-\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}}-\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}+\frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u_{\tau\tau}^N(x,\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq m_1\int_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_1\int_0^\tau\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_1\left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+m_2\int_0^\tau\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_2\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_2\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+m_3\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_3\int_0^\tau\left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_3\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+m_4\int_0^\tau\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_4\int_0^\tau\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_4\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+m_5\int_0^\tau\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_5\int_0^\tau\left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+m_5\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+\left\{\frac{\lambda_1\delta}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T+\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9|\Omega|\,|\partial\Omega|\right\}\left\|u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11}|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\right\}\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+\left\{\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}-\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\right\}\left\|u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2}\right\}\left\|u_{ttt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\right\}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u_t^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}-\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u_{tt}^N(x,0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_1\int_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\gamma_2\int_0^\tau\left\|u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt$$

$$+\gamma_3\int_0^\tau\left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\gamma_4\int_0^\tau\left\|\nabla u_t^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\gamma_5\int_0^\tau\left\|\nabla u_{tt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt$$

$$+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2-\lambda_3\alpha\right\}\int_0^\tau\left\|u_{ttt}^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2dt, \tag{3.92}$$

et à partir de là, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}l(\varepsilon)\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_1\beta}{2}\left\|u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}+\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\lambda_3}{2}-\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\right\}\left\|u^N_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&-\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}}-\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}+\frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\;&\left\{\frac{\lambda_1\delta}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T+\frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9|\Omega|\,|\partial\Omega|+m_1\right\}\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\left\{\frac{\lambda_1\gamma}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11}|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\frac{\lambda_1\beta}{2}+m_2\right\}\left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_1\alpha}{2}+\left(\frac{\lambda_2\alpha}{2}-\frac{\lambda_3\beta}{2}\right)+m_3\right\}\left\|u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2}\right\}\left\|u^N_{ttt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}+\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\varrho}{2}+m_4\right\}\left\|\nabla u^N(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\lambda_2\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}+\frac{\lambda_1\gamma}{2}+\frac{\lambda_2\delta}{2}+m_5\right\}\left\|\nabla u^N_t(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\lambda_3\varrho}{2}+\frac{\lambda_3\delta}{2}-\frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\left\|\nabla u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma_1+m_1)\int_0^\tau\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+(\gamma_2+m_1+m_2)\int_0^\tau\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+(\gamma_3+m_2+m_3)\int_0^\tau\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\left\{\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2-\lambda_3\alpha+m_3\right\}\int_0^\tau\left\|u^N_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon+m_4\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt+(\gamma_5+m_5)\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+(\gamma_4+m_4+m_5)\int_0^\tau\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \;=\;& \frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon_1T|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_1\varrho}{2}\left(l(\varepsilon)+|\Omega|\,|\partial\Omega|\right)+\left(\frac{\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho}{2}\right)|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_2\varrho}{2}\varepsilon_2T|\Omega|\,|\partial\Omega|\\
&+\frac{\lambda_3\varrho}{2}\varepsilon_7T|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\varrho}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|, \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho}{2}\right) l(\varepsilon)+\frac{\lambda_1\delta}{2}l(\varepsilon)+\left(\frac{\lambda_1\gamma+\lambda_2\delta}{2}\right)(l(\varepsilon)+|\Omega|\,|\partial\Omega|)+\frac{\lambda_1\gamma}{2}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_2\gamma}{2}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_3\delta}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|, \tag{3.95}$$

$$\gamma_3 = \frac{\lambda_2\gamma}{2}|\Omega|\,|\partial\Omega|+\frac{\lambda_3\varrho}{2}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_3\delta}{2}l(\varepsilon)+\frac{\lambda_3\gamma}{2}(l(\varepsilon)+|\Omega|\,|\partial\Omega|)+\frac{\lambda_1}{2}+(\lambda_1\alpha-\lambda_2\beta), \tag{3.96}$$

$$\gamma_4 = \left(\frac{\lambda_1\delta+\lambda_2\varrho}{2}\right)\varepsilon+\frac{\lambda_1\delta}{2}\varepsilon+\left(\frac{\lambda_1\gamma+\lambda_2\delta}{2}\right)\varepsilon+\frac{\lambda_1\gamma}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_3\varrho}{2}+(\lambda_2\varrho-\lambda_1\delta), \tag{3.97}$$

$$\gamma_5 = \frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon+\frac{\lambda_3\varrho}{2}+(\lambda_3\delta-\lambda_2\gamma). \tag{3.98}$$

En choisissant $\varepsilon_7,\ \varepsilon_8,\ \varepsilon_9,\ \varepsilon_{10},\ \varepsilon_{11},\ \varepsilon_{13}$ et ε_{14} suffisamment grands

$$\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8}+\frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}}+\frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}}+\frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}}+\frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}}<\frac{\lambda_3\gamma}{2}, \tag{3.99}$$

la relation (3.93) se réduit à

$$\begin{aligned}
&\Big\{\left\|u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\|u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}\\
\leq\ & D\int_0^\tau\Big\{\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\|\nabla u^N_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla u^N_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|u^N_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}\,dt\\
&+D\Big\{\left\|u^N(x,0)\right\|^2_{W^1_2(\Omega)}+\left\|u^N_t(x,0)\right\|^2_{W^1_2(\Omega)}\\
&+\left\|u^N_{tt}(x,0)\right\|^2_{W^1_2(\Omega)}+\left\|u^N_{ttt}(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big\},
\end{aligned} \tag{3.100}$$

où

$$D := \frac{\begin{array}{c}\max\left\{\frac{\lambda_1\delta}{2}|\Omega||\partial\Omega|T + \frac{\lambda_2\delta}{2}\varepsilon_4|\Omega||\partial\Omega| + \frac{\lambda_3\delta}{2}\varepsilon_9|\Omega||\partial\Omega| + m_1, \frac{\lambda_1\gamma}{2}|\Omega||\partial\Omega|T + \frac{\lambda_2\gamma}{2}\varepsilon_6|\Omega||\partial\Omega|\right.\\ +\frac{\lambda_3\gamma}{2}\varepsilon_{11}|\Omega||\partial\Omega| + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1\alpha}{2} + \frac{\lambda_1\beta}{2} + m_2, \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1\alpha}{2} + \frac{\lambda_2\alpha}{2} - \frac{\lambda_3\beta}{2} + m_3, \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{2}\\ \frac{\lambda_1\varrho}{2} + \frac{\lambda_2\varrho}{2} + \frac{\lambda_3\varrho}{2} + m_4, \frac{\lambda_2\varrho}{2} + \frac{\lambda_3\delta}{2} + \frac{\lambda_1\gamma}{2} + \frac{\lambda_2\delta}{2} + m_5, \frac{\lambda_3\varrho}{2} + \frac{\lambda_3\delta}{2} - \frac{\lambda_3\gamma}{2},\\ \gamma_1 + m_1, \gamma_2 + m_1 + m_2, \gamma_3 + m_2 + m_3, \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \lambda_3\alpha + m_3,\\ \left.\frac{\lambda_1\varrho}{2}\varepsilon + m_4, \gamma_4 + m_4 + m_5, \gamma_5 + m_5\right\}\end{array}}{\begin{array}{c}\min\left\{\frac{\lambda_1\varrho}{2\varepsilon_1}l(\varepsilon), \frac{\lambda_1\beta}{2}, \frac{\lambda_2\alpha}{2} + \frac{\lambda_3\beta}{2},\right.\\ \frac{\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1\varrho}{2}, \frac{\lambda_1\gamma}{2} + \frac{\lambda_2\delta}{2},\\ \left., -\frac{\lambda_3\varrho}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_7} - \frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_8} - \frac{\lambda_3\delta}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_9} - \frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{10}} - \frac{\lambda_3\gamma}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}} - \frac{\lambda_2\varrho}{2\varepsilon_{13}} - \frac{\lambda_3\delta}{2\varepsilon_{14}} - \frac{\lambda_3\gamma}{2}\right\}\end{array}}. \tag{3.101}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (3.100) puis intégrer de 0 à τ semble que

$$\begin{aligned} & \left\|u^N(x,t)\right\|^2_{W_2^1(Q_\tau)} + \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{W_2^1(Q_\tau)} + \left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|^2_{W_2^1(Q_\tau)} \\ \leq\ & De^{DT}\left\{\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1(x)\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u_2(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_3(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \end{aligned} \tag{3.102}$$

On déduit de (3.102) que

$$\left\|u^N(x,t)\right\|^2_{w_2^1(Q_\tau)} + \left\|u_t^N(x,t)\right\|^2_{w_2^1(Q_\tau)} + \left\|u_{tt}^N(x,t)\right\|^2_{w_2^1(Q_\tau)} \leq A. \tag{3.103}$$

Donc la suite $\left\{u^N\right\}_{N\geq 1}$ est bornée en $V(Q_T)$, et on peut extraire une sous-suite, pour laquelle on utilise la même notation qui converge faiblement dans $V(Q_T)$ à une fonction $u(x,t)$. Nous devons montrer que $u(x,t)$ est une solution généralisée de (3.1), puisque $u^N(x,t) \to u(x,t)$ dans $L^2(Q_T)$ et $u^N(x,0) \to \zeta(x)$ dans $L^2(\Omega)$, alors $u(x,0) = \zeta(x)$.

Maintenant, pour prouver que (3.6) valide, nous multiplions chacune des relations (3.6) par une fonction $p_l(t) \in W_2^1(0,T)$, $p_l(T) = 0$, puis ajoutez la resultat obtenu des égalités allant de $l = 1$ à $l = N$, et intégrer par rapport à t sur $(0,T)$. Si on laisse $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_k(t) Z_k(x)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} & -(u_{ttt}^N, \eta_t^N)_{L^2(Q_T)} - \alpha(u_{tt}^N, \eta_t^N)_{L^2(Q_T)} - \beta(u_t^N, \eta_t^N)_{L^2(Q_T)} \\ & +\varrho(\nabla u^N, \nabla\eta^N)_{L^2(Q_T)} + \delta(\nabla u_t^N, \nabla\eta^N)_{L^2(Q_T)} - \gamma\left(\nabla u_t^N, \nabla\eta_t^N\right)_{L^2(Q_T)} \\ =\ & \varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta^N(x,t)\left(\int_0^t\int_\Omega u^N(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)dtds_x + \delta\int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi dtds_x \\ & -\delta\int_{\partial\Omega}\int_0^T \eta^N(x,t)\int_\Omega u^N(\xi,0)d\xi dtds_x - \gamma\int_0^T\int_{\partial\Omega}\eta_t^N\left(\int_\Omega u^N(\xi,t)\,d\xi\right)ds_xdt \\ & +\gamma\int_0^T\int_{\partial\Omega}\eta_t^N\left(\int_\Omega u^N(\xi,0)\,d\xi\right)ds_xdt - \gamma\left(\Delta u_t^N(x,0), \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} \\ & +\left(u_{ttt}^N(x,0), \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha\left(u_{tt}^N(x,0), \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)} + \beta\left(u_{tt}^N(x,0), \eta^N(0)\right)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.104}$$

pour tout η^N de la forme $\sum_{k=1}^{N} p_l(t)\, Z_k(x)$. Depuis

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\left(u^N(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\right) d\xi d\tau \leq \sqrt{T\,|\Omega|}\, \left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)}, \tag{3.105}$$

$$\int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega \left(u_t^N(\xi,t) - u_t(\xi,t)\right) d\xi dt \leq \sqrt{|\Omega|} \left(\int_0^T (\eta^N(x,t))^2 dt\right)^{1/2} \left\|u_t^N - u_t\right\|_{L^2(Q_T)}, \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega (u\left(^N(\xi,0) - u(\xi,0)\right) d\xi dt \\ \leq \quad & \sqrt{|\Omega|} \left(\int_0^T (\eta^N(x,t))^2 dt\right)^{1/2} \left\|u^N(x,0) - u(x,0)\right\|_{L^2(Q_T)}, \end{aligned} \tag{3.107}$$

et

$$\left\|u^N - u\right\|_{L^2(Q_T)} \to 0, \text{ as } N \to \infty, \tag{3.108}$$

donc nous avons

$$\begin{aligned} & \varrho \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_0^t \int_\Omega u^N(\xi,\tau)\, d\xi d\tau dt ds_x \\ \to \quad & \varrho \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \int_0^t \int_\Omega u(\xi,\tau)\, d\xi d\tau dt ds_x, \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,t)\, d\xi dt ds_x \\ \to \quad & \delta \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \int_\Omega u(\xi,t)\, d\xi dt ds_x, \end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned} & -\delta \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta^N(x,t) \int_\Omega u^N(\xi,0) d\xi dt ds \\ \to \quad & -\delta \int_{\partial\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \int_\Omega u(\xi,0) d\xi dt ds, \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\begin{aligned} & -\gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta_t^N \left(\int_\Omega u^N(\xi,t)\, d\xi\right) ds_x dt \\ \to \quad & -\gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta_t \left(\int_\Omega u(\xi,t)\, d\xi\right) ds_x dt, \end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta_t^N \left(\int_\Omega u^N (\xi, 0)\, d\xi \right) ds_x dt$$
$$\to \gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta_t \left(\int_\Omega u (\xi, 0)\, d\xi \right) ds_x dt. \tag{3.113}$$

Ainsi, la fonction limite u satisfaite (3.6) pour tout $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t) Z_k(x)$. On note $\mathbb{Q}_N$ la totalité de toutes les fonctions de la forme $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} p_l(t) Z_k(x)$, avec $p_l(t) \in W_2^1(0,T), p_l(t) = 0$. Mais $\cup_{l=1}^{N} \mathbb{Q}_N$ est dense dans $W(Q_T)$, alors la relation (3.6) est vraie pour tout $u \in W(Q_T)$. Ainsi nous avons montré que la fonction $u(x,t)$ est une solution généralisée du problème (3.1) en $V(Q_T)$. ■

3.3 Unicité de la solution

Théorème 3.3.1 *Le problème (3.1) ne peut pas avoir plus d'une solution généralisée dans $V(Q_T)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions généralisées différentes $u_1 \in V(Q_T)$ et $u_2 \in V(Q_T)$

pour le problème (3.1). Alors la différence $U = u_1 - u_2$ résout

$$\begin{cases} U_{tttt} + \alpha U_{ttt} + \beta U_{tt} - \varrho \Delta U - \delta \Delta U_t - \gamma \Delta U_{tt} = 0, \\ U(x,0) = U_t(x,0) = U_{tt}(x,0) = U_{ttt}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega U(\xi, \tau)\, d\xi d\tau, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.114}$$

Et (3.5) donne

$$\begin{aligned} &-(U_{ttt}, v_t)_{L^2(Q_T)} - \alpha(U_{tt}, v_t)_{L^2(Q_T)} - \beta(U_t, v_t)_{L^2(Q_T)} + \varrho(\nabla U, \nabla v)_{L^2(Q_T)} \\ &+\delta(\nabla U_t, \nabla v)_{L^2(Q_T)} - \gamma(\nabla U_t, \nabla v_t)_{L^2(Q_T)} \\ = \; &\varrho \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v \left(\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u(\xi, \tau)\, d\xi d\tau \right) ds_x dt + \delta \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v \int\limits_\Omega u(\xi, t)\, d\xi ds_x dt \\ &-\gamma \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v_t \left(\int\limits_\Omega u_\tau(\xi, t)\, d\xi dt \right) ds_x dt. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Considérez la fonction

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau U(x,s) ds, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{3.115}$$

Il est évident que $v \in W(Q_T)$ et $v_t(x,t) = -U(x,t)$ pour tout $t \in [0,\tau]$. L'intégration par partie dans le côté gauche de (3.5) donne

$$-(U_{ttt}, v_t)_{L^2(Q_T)} = (U_{\tau\tau}(x,\tau), U(x,\tau))_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.4}$$

$$-\alpha(U_{tt}, v_t)_{L^2(Q_T)} = \alpha(U_\tau(x,\tau), U(x,\tau))_{L^2(\Omega)} - \alpha\int_0^\tau \|U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \tag{3.116}$$

$$-\beta(U_t, v_t)_{L^2(Q_T)} = \frac{\beta}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.117}$$

$$\varrho(\nabla U, \nabla v)_{L^2(Q_T)} = \frac{\varrho}{2}\|\nabla v(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.118}$$

$$\delta(\nabla U_t, \nabla v)_{L^2(Q_T)} = \delta\int_0^\tau \|\nabla v_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \tag{3.119}$$

$$-\gamma(\nabla U_t, \nabla v_t)_{L^2(Q_T)} = \frac{\gamma}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.120}$$

Nous remplaçons (**??**) – (3.120) dans (**??**) on obtient

$$\begin{aligned}
& (U_{\tau\tau}(x,\tau), U(x,\tau))_{L^2(\Omega)} + \alpha(U_\tau(x,\tau), U(x,\tau))_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \frac{\varrho}{2}\|\nabla v(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \alpha\int_0^\tau \|U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt - \delta\int_0^\tau \|\nabla v_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \varrho\int_0^T\int_{\partial\Omega} v\left(\int_0^t\int_\Omega U(\xi,\tau)\, d\xi d\tau\right) ds_x dt \\
& + \delta\int_0^T\int_{\partial\Omega} v\int_\Omega U(\xi,t)\, d\xi ds_x dt - \gamma\int_0^T\int_{\partial\Omega} v_t\left(\int_\Omega U(\xi,t)\, d\xi\right) ds dt.
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Maintenant depuis

$$v^2(x,t) = \left(\int_t^\tau U(x,s)ds\right)^2 \le \tau\int_0^\tau U^2(x,s)ds,$$

ensuite

$$\|v\|^2_{L^2(Q_\tau)} \leq \tau^2 \|U\|^2_{L^2(Q_\tau)} \leq T^2 \|U\|^2_{L^2(Q_\tau)} . \tag{3.122}$$

En utilisant l'inégalité de trace, le côté droit de (3.121) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} & \varrho \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_0^t \int_\Omega U(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \right) ds_x dt \\ \leq\ & \frac{\varrho}{2} T^2 \{ l(\varepsilon) + |\Omega| |\partial\Omega| \} \int_0^\tau \|U(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ & + \frac{\varrho}{2}\varepsilon \int_0^\tau \|\nabla v(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega U(\xi,t)\, d\xi ds_x dt \\ \leq\ & \frac{\delta}{2} \left\{ T^2 l(\varepsilon) + |\Omega| |\partial\Omega| \right\} \int_0^\tau \|U(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ & + \frac{\delta}{2}\varepsilon \int_0^\tau \|\nabla v(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \tag{3.124}$$

et

$$\begin{aligned} & -\gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_t \left(\int_\Omega U(\xi,t)\, d\xi \right) ds dt \\ =\ & \gamma \int_0^T \int_{\partial\Omega} v \left(\int_\Omega U_t(\xi,t)\, d\xi \right) ds dt \\ =\ & \gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} v \left(\int_\Omega U_t(\xi,t)\, d\xi \right) ds dt \\ \leq\ & \frac{\gamma |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \|U_t\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{\eta^2}{2}\varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(Q_\tau)} \\ & + \frac{\gamma}{2} l(\varepsilon) T^2 \|U\|^2_{L^2(Q_\tau)} . \end{aligned} \tag{3.125}$$

En combinant les relations (3.123)− (3.125) et (3.121) on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left(U_{\tau\tau}(x,\tau), U(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha\left(U_\tau(x,\tau), U(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& + \frac{\beta}{2}\left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varrho}{2}\left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \frac{\gamma}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|U_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq \; & \left\{\frac{\varrho}{2}T^2\left(l(\varepsilon) + |\Omega|\,|\partial\Omega|\right) + \frac{\delta}{2}\left(T^2 l(\varepsilon) + |\Omega|\,|\partial\Omega|\right)\right. \\
& \left. + \frac{\gamma}{2}l(\varepsilon)T^2\right\} \int_0^\tau \left\|U(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \left\|U_{tt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \left(\alpha + \frac{\gamma\,|\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\right)\int_0^\tau \left\|U_t(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \left(\frac{\varrho+\delta+\gamma}{2}\right)\varepsilon\int_0^\tau \left\|\nabla v(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt. \qquad (3.126)
\end{aligned}
$$

Ensuite, en multipliant l'équation différentielle de (3.114) par U_{ttt} et en intégrant sur $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& (U_{tttt}, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} + \alpha(U_{ttt}, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} + \beta(U_{tt}, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} \\
& -\varrho(\Delta U, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} - \delta(\Delta U_t, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} - \gamma(\Delta U_t, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} \\
= \; & 0. \qquad (3.127)
\end{aligned}
$$

L'intégration par parties dans (3.127) donne

$$
(U_{tttt}, U_{ttt})_{L^2(Q_\tau)} = \frac{1}{2}\left\|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.128)
$$

$$
\alpha\left(U_{ttt}, U_{ttt}\right)_{L^2(Q_\tau)} = \alpha\int_0^\tau \left\|U_{ttt}(x,t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \qquad (3.129)
$$

$$
\beta\left(U_{tt}, U_{ttt}\right)_{L^2(Q_\tau)} = \frac{\beta}{2}\left\|U_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.130)
$$

$$
\begin{aligned}
-\varrho\left(\Delta U, U_{ttt}\right)_{L^2(Q_\tau)} = \; & \varrho\left(\nabla U(x,\tau), \nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} - \frac{\varrho}{2}\left\|\nabla U_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& -\varrho\int_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau)\left(\int_0^\tau\int_\Omega U(\xi,\eta)d\xi d\eta\right) ds_x \\
& +\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau U_{tt}(x,t)\int_\Omega U(\xi,t)\,d\xi dt ds_x, \qquad (3.131)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
-\delta\left(\Delta U_t, U_{ttt}\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \delta\left(\nabla U_\tau(x,\tau), \nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} - \delta\int_0^\tau \left\|\nabla U_{tt}(x,)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\quad -\delta\int_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau)\int_\Omega U\left(\xi,\tau\right) d\xi ds_x \\
&\quad +\delta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} U_{tt}\left(x,t\right)\int_\Omega U_t\left(\xi,t\right) d\xi ds_x dt, \qquad (3.132)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\gamma\left(\Delta U_{tt}, U_{ttt}\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \frac{\gamma}{2}\left\|\nabla U_{\tau\tau}\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad -\gamma\int_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}\left(x,\tau\right)\int_\Omega U_\tau\left(\xi,\tau\right) d\xi ds_x \\
&\quad +\gamma\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} U_{tt}\left(x,t\right)\int_\Omega U_{tt}\left(\xi,t\right) d\xi ds_x dt. \qquad (3.133)
\end{aligned}$$

Substitution (3.128) – (3.133) dans (3.127) on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\left\|U_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\varrho\left(\nabla U(x,\tau), \nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} + \delta\left(\nabla U_\tau(x,\tau), \nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\gamma}{2}\left\|\nabla U_{\tau\tau}\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\varrho}{2}\left\|\nabla U_\tau\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= &-\alpha\int_0^\tau \left\|U_{ttt}\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \delta\int_0^\tau \left\|\nabla U_{tt}(x,)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&+\varrho\int_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau)\left(\int_0^\tau\int_\Omega U(\xi,\eta) d\xi d\eta\right) ds_x \\
&-\varrho\int_{\partial\Omega}\int_0^\tau U_{tt}\left(x,t\right)\int_\Omega U\left(\xi,t\right) d\xi dt ds_x \\
&+\delta\int_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau)\int_\Omega U\left(\xi,\tau\right) d\xi ds_x \\
&-\delta\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} U_{tt}\left(x,t\right)\int_\Omega U_t\left(\xi,t\right) d\xi ds_x dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma \int\limits_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} U_{\tau}(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
&-\gamma \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\partial\Omega} U_{tt}(x,t) \int\limits_{\Omega} U_{tt}(\xi,t)\, d\xi ds_x dt. \qquad (3.134)
\end{aligned}
$$

Le côté droit de (3.134) peut être borné comme suit

$$
\begin{aligned}
&\varrho \int\limits_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau) \left(\int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} U(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right) ds_x \\
\leq\ & \frac{\varrho}{2\varepsilon_1'} \left(\varepsilon \left\| \nabla U_{\tau\tau}(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon) \left\| U_{\tau\tau}(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&+ \frac{\varrho}{2} \varepsilon_1' T \left| \partial\Omega \right| \left| \Omega \right| \int\limits_{0}^{\tau} \left\| U(x,t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \qquad (3.135)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\varrho \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{0}^{\tau} U_{tt}(x,t) \int\limits_{\Omega} U(\xi,t)\, d\xi dt ds_x \\
\leq\ & \frac{\varrho}{2} \int\limits_{0}^{\tau} \left\{ \varepsilon \left\| \nabla U_{tt}(x,t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon) \left\| U_{tt}(x,t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\} dt \\
&+ \frac{\varrho}{2} \left| \Omega \right| \left| \partial\Omega \right| \int\limits_{0}^{\tau} \left\| U(x,t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \qquad (3.136)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta \int\limits_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau) \int\limits_{\Omega} U(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
\leq\ & \frac{\delta}{2\varepsilon_2'} \left(\varepsilon \left\| \nabla U_{\tau\tau}(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon) \left\| U_{\tau\tau}(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&+ \frac{\delta}{2} \varepsilon_2' T \left| \Omega \right| \left| \partial\Omega \right| \left\| U(x,\tau) \right\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.137)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\delta \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_{tt}(x,t) \int_\Omega U_t(\xi,t)\, d\xi ds_x dt \\
\leq \quad & \frac{\delta}{2}\varepsilon \int_0^\tau \|\nabla U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{\delta}{2} l(\varepsilon) \int_0^\tau \|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \frac{\delta}{2} T |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \|U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \gamma \int_{\partial\Omega} U_{\tau\tau}(x,\tau) \int_\Omega U_\tau(\xi,\tau)\, d\xi ds_x \\
\leq \quad & \frac{\gamma}{2\varepsilon_3'} \left(\varepsilon \|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + l(\varepsilon) \|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
& + \frac{\gamma}{2} \varepsilon_3' T |\Omega| |\partial\Omega| \|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.138)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& -\gamma \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} U_{tt}(x,t) \int_\Omega U_{tt}(\xi,t)\, d\xi ds_x dt \\
\leq \quad & \frac{\gamma}{2} l(\varepsilon) \int_0^\tau \|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{\gamma}{2}\varepsilon \int_0^\tau \|\nabla U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& + \frac{\gamma}{2} T |\Omega| |\partial\Omega| \int_0^\tau \|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt. \qquad (3.139)
\end{aligned}
$$

Ainsi, en combinant les inégalités (3.135) $-$(3.139) et l'égalité (3.134) on obtient

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{\varrho}{2\varepsilon_1'} l(\varepsilon) - \frac{\delta}{2\varepsilon_2'} l(\varepsilon) - \frac{\delta}{2}\varepsilon(\varepsilon) \right\} \|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& - \frac{\gamma}{2} \varepsilon_3' T |\Omega| |\partial\Omega| \|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\delta}{2} \varepsilon_2' T |\Omega| |\partial\Omega| \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \left\{ \frac{\gamma}{2} - \frac{\varrho}{2\varepsilon_1'}\varepsilon - \frac{\delta}{2\varepsilon_2'}\varepsilon - \frac{\gamma}{2\varepsilon_3'}\varepsilon \right\} \|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\varrho}{2} \|\nabla U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\varrho\left(\nabla U(x,\tau),\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}+\delta\left(\nabla U_\tau(x,\tau),\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &+\left\{\frac{\varrho}{2}l(\varepsilon)+\frac{\delta}{2}l(\varepsilon)+\frac{\gamma}{2}l(\varepsilon)+\frac{\gamma}{2}T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\int_0^\tau\left\|U_{tt}\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\left\{\frac{\varrho}{2}\varepsilon_1'T\left|\partial\Omega\right|\left|\Omega\right|+\frac{\varrho}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\int_0^\tau\left\|U\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\frac{\delta}{2}T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\int_0^\tau\left\|U_t\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt-\alpha\int_0^\tau\left\|U_{ttt}\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\left\{\delta+\frac{\varrho}{2}\varepsilon+\frac{\delta}{2}\varepsilon+\frac{\gamma}{2}\varepsilon\right\}\int_0^\tau\left\|\nabla U_{tt}(x,)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt.
\end{aligned}
\tag{3.140}
$$

En ajoutant côte à côte (3.126) et (3.140), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2}\varepsilon_2'T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\left\|U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\varepsilon_3'T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\left\|U_\tau(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\beta}{2}-\frac{\varrho}{2\varepsilon_1'}l(\varepsilon)-l(\varepsilon)\frac{\delta}{2\varepsilon_2'}-\frac{\gamma}{2\varepsilon_3'}l(\varepsilon)\right\}\left\|U_{\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\left\|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\varrho}{2}\left\|\nabla v(x,0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+(U_{\tau\tau}(x,\tau),U(x,\tau))_{L^2(\Omega)}+\alpha\left(U_\tau(x,\tau),U(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}\\
&+\varrho\left(\nabla U(x,\tau),\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}+\delta\left(\nabla U_\tau(x,\tau),\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{\gamma}{2}\left\|\nabla U(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{\varrho}{2}\left\|\nabla U_\tau\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\{\frac{\gamma}{2}-\frac{\varrho}{2\varepsilon_1'}\varepsilon-\frac{\delta}{2\varepsilon_2'}-\frac{\gamma}{2\varepsilon_3'}\varepsilon\right\}\left\|\nabla U_{\tau\tau}\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\leq\ &\left\{\frac{\varrho}{2}\varepsilon_1'T\left|\partial\Omega\right|\left|\Omega\right|+\frac{\varrho}{2}\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|+\frac{\varrho}{2}T^2\left(l(\varepsilon)+\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)+\frac{\delta}{2}\left(T^2l(\varepsilon)+\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)\right.\\
&\left.+\frac{\gamma}{2}l(\varepsilon)T^2\right\}\int_0^\tau\left\|U\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt-\alpha\int_0^\tau\left\|U_{ttt}\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\left(\alpha+\frac{\gamma\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|}{2}+\frac{\delta}{2}T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right)\int_0^\tau\left\|U_t\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt\\
&+\left\{\frac{1}{2}+l(\varepsilon)\frac{\varrho}{2}+\frac{\delta}{2}l(\varepsilon)+\frac{\gamma}{2}l(\varepsilon)+\frac{\gamma}{2}T\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\right\}\int_0^\tau\left\|U_{tt}\left(x,t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}dt
\end{aligned}
$$

$$+\left\{\frac{\delta}{2}\varepsilon+\frac{\gamma}{2}\varepsilon+\varepsilon\frac{\varrho}{2}+\delta\right\}\int_0^\tau \|\nabla U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\left(\frac{\varrho+\delta+\gamma}{2}\right)\varepsilon\int_0^\tau \|\nabla v(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \tag{3.141}$$

Maintenant, pour traiter le dernier terme à droite de (3.141), nous définissons la fonction $\theta(x,t)$ par la relation

$$\theta(x,t) := \int_0^t U(x,s)ds.$$

Par conséquent, en utilisant (3.115), il s'ensuit que

$$v(x,t)=\theta(x,\tau)-\theta(x,t)\,,\ \nabla v(x,0)=\nabla\theta(x,\tau), \tag{3.3.31}$$

et

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|^2_{L^2(Q_\tau)} &= \|\nabla\theta(x,\tau)-\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq 2\left(\tau\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}\right).\end{aligned} \tag{3.142}$$

Et utilisez l'inégalité suivante

$$-\frac{\alpha}{2}\|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{\alpha}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\alpha(U_\tau(x,\tau),U(x,\tau))_{L^2(\Omega)}, \tag{3.143}$$

$$-\frac{1}{2}\|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq(U_{\tau\tau}(x,\tau),U(x,\tau))_{L^2(\Omega)}, \tag{3.144}$$

$$-\frac{\varrho}{2\varepsilon_4'}\|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{\varrho}{2}\varepsilon_4'\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\varrho\left(\nabla U(x,\tau),\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.145}$$

$$-\frac{\delta}{2\varepsilon_5'}\|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{\delta}{2}\varepsilon_5'\|\nabla U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\delta\left(\nabla U_\tau(x,\tau),\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\right)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.146}$$

$$m_1\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_1\|U(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_1\|U_t(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau),} \tag{3.147}$$

$$m_2\|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq m_2\|U_t(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}+m_2\|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}, \tag{3.148}$$

$$m_3 \|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq m_3 \|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)} + m_3 \|U_{ttt}(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}, \tag{3.149}$$

$$m_4 \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq m_4 \|\nabla U(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)} + m_4 \|\nabla U_t(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}, \tag{3.150}$$

$$m_5 \|\nabla U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq m_5 \|\nabla U_t(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)} + m_5 \|\nabla U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(Q_\tau)}. \tag{3.151}$$

Laisser

$$\begin{cases} m_1 := \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\varepsilon_2' T\,|\Omega|\,|\partial\Omega| + \frac{\alpha}{2}, \\ m_2 := 1 + \frac{\gamma}{2}\varepsilon_3' T\,|\Omega|\,|\partial\Omega| + \frac{\alpha}{2} \\ m_3 := \frac{\varrho}{2\varepsilon_1'} l(\varepsilon) + l(\varepsilon)\frac{\delta}{2\varepsilon_2'} + \frac{\gamma}{2\varepsilon_3'} l(\varepsilon) + \frac{1}{2}, \\ m_4 := \frac{\varrho}{2}\varepsilon_4', \\ m_5 := 1 + \frac{\varrho}{2} + \frac{\delta}{2\varepsilon_5'}, \end{cases} \tag{3.152}$$

en choisissant $\varepsilon_1',\ \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4'$ et ε_5' suffisamment grand

$$\frac{\varrho}{2\varepsilon_1'}\varepsilon + \frac{\delta}{2\varepsilon_2'} + \frac{\gamma}{2\varepsilon_3'}\varepsilon + \frac{\varrho}{2\varepsilon_4'} + \frac{\delta}{2\varepsilon_5'} < \frac{\gamma}{2}. \tag{3.153}$$

Puisque τ est arbitraire, nous animons que $\frac{\varrho}{2} - \tau\varepsilon\,(\varrho + \delta + \gamma) > 0$, donc l'inégalité (3.3.30) prend la forme

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{2}\|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{2}\|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2}\|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \left\{\frac{\varrho}{2} - \tau\varepsilon\,(\varrho + \delta + \gamma)\right\}\|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \left\{\frac{\gamma}{2} - \frac{\varrho}{2\varepsilon_1'}\varepsilon - \frac{\delta}{2\varepsilon_2'} - \frac{\gamma}{2\varepsilon_3'}\varepsilon - \frac{\varrho}{2\varepsilon_4'} - \frac{\delta}{2\varepsilon_5'}\right\}\|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \{\gamma_1' + m_1\}\int_0^\tau \|U(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + (\gamma_2' + m_1 + m_2)\int_0^\tau \|U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ & + \{\gamma_3' + m_2 + m_3\}\int_0^\tau \|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + (m_3 - \alpha)\int_0^\tau \|U_{ttt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ & + \varepsilon\,(\varrho + \delta + \gamma)\int_0^\tau \|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ & + m_4\int_0^\tau \|\nabla U(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + (m_4 + m_5)\int_0^\tau \|\nabla U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \end{aligned}$$

$$+\left\{\frac{\delta}{2}\varepsilon+\frac{\gamma}{2}\varepsilon+\varepsilon\frac{\varrho}{2}+\delta+m_5\right\}\int_0^\tau \|\nabla U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt,$$

où

$$\begin{cases}\gamma_1' := \frac{\varrho}{2}\varepsilon_1' T|\partial\Omega||\Omega| + \frac{\varrho}{2}|\Omega||\partial\Omega| + \frac{\varrho}{2}T^2(l(\varepsilon)+|\Omega||\partial\Omega|) \\ \qquad + \frac{\delta}{2}(T^2 l(\varepsilon)+|\Omega||\partial\Omega|) + \frac{\gamma}{2}l(\varepsilon)T^2 \\ \gamma_2' := \alpha + \frac{\gamma|\Omega||\partial\Omega|}{2} + \frac{\delta}{2}T|\Omega||\partial\Omega| \\ \gamma_3' := \frac{1}{2} + l(\varepsilon)\frac{\varrho}{2} + \frac{\delta}{2}l(\varepsilon) + \frac{\gamma}{2}l(\varepsilon) + \frac{\gamma}{2}T|\Omega||\partial\Omega|,\end{cases} \tag{3.154}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ & \|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & D\int_0^\tau \Big\{\|U(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|U_{ttt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U_t(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\nabla U_{tt}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big\}dt, \end{aligned} \tag{3.155}$$

où

$$D := \frac{\begin{array}{c}\max\{(\gamma_1'+m_1),(\gamma_2'+m_1+m_2)_4,\gamma_3'+m_2+m_3,m_3-\alpha,m_4 \\ ,m_4+m_5,\frac{\delta}{2}\varepsilon+\frac{\gamma}{2}\varepsilon+\varepsilon\frac{\varrho}{2}+\delta+m_5,\varepsilon(\varrho+\delta+\gamma)\}\end{array}}{\begin{array}{c}\min\left\{\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},,\frac{\gamma}{2},\left\{\frac{\gamma}{2}-\frac{\varrho}{2\varepsilon_1'}\varepsilon-\frac{\delta}{2\varepsilon_2'}-\frac{\gamma}{2\varepsilon_3'}\varepsilon-\frac{\varrho}{2\varepsilon_4'}-\frac{\delta}{2\varepsilon_5'}\right\},\right. \\ \left.,\left\{\frac{\varrho}{2}-\tau\varepsilon(\varrho+\delta+\gamma)\right\}\right\}\end{array}}. \tag{3.156}$$

De plus, en appliquant le lemme de Gronwall à (3.155), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} & \|U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|U_{\tau\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla U_\tau(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\nabla U_{\tau\tau}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & 0, \quad \forall\tau\in\left[0,\frac{\varrho}{2\varepsilon(\varrho+\delta+\gamma)}\right]. \end{aligned} \tag{3.157}$$

En procédant de la même manière pour les intervalles $\tau \in \left[\frac{(m-1)\varrho}{2\varepsilon(\varrho+\delta+\gamma)}, \frac{m\varrho}{2\varepsilon(\varrho+\delta+\gamma)}\right]$ pour couvrir l'intervalle entier $[0,T]$, et ainsi prouver que $U(x,\tau)=0$, pour tout τ dans $[0,T]$. Ainsi, l'unicité est prouvée. ■

Conclusion

L'étude de la propagation des ondes acoustiques doit nous faire remarquer que l'équation de Moore–Gibson–Thompson est une des équations de l'acoustique non linéaire décrivant la propagation des ondes acoustiques dans les gaz et les liquides. Le comportement des ondes acoustiques dépend fortement des propriétés du milieu liées à la dispersion, à la dissipation et aux effets non linéaires. Elle découle de la modélisation des ondes ultrasonores de haute fréquence (HFU). Dans ce travail, nous avons étudié la solvabilité du problème de valeur limite mixte non local pour le quatrième ordre de l'équation de Moore–Gibson–Thompson. La méthode de Galerkin a été le principal outil utilisé pour prouver la solvabilité du problème non local donné. Dans le prochain travail, nous allons essayer d'utiliser la même méthode avec les équations de Hall-MHD qui sont des équations différentielles partielles non linéaires qui se présentent en hydrodynamique et dans certaines applications physiques.

Bibliographie

[1] S. Adhikari, Structural Dynamic Analysis with Generalized Damping Models : Analysis ,Wiley-ISTE, 2013.

[2] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa and D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, Journal of Functional Analysis, 254 (2008), $1342 - 1372$.

[3] F. Alabau-Boussouira, A unified approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems, Journal of Differential Equations , 248(2010), $1473 - 1517$.

[4] S. Boulaaras, A.Zaraï and A.Draifia, Galerkin method for nonlocal mixed boundary value problem for the Moore-Gibson-Thompson equation with integral condition.$35A07$; $35D05$; $35G05$.

[5] YS. Choi , KY. Chan. A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. Nonlinear Anal.1992 ; $18 : 317 - 331$.

[6] F. Dell'Oro, V. Pata. On a Fourth-Order Equation of Moore–Gibson–Thompson Type. Milan J. Math. Vol. 77(2010) $127 - 150$. 2017 Springer International Publishing AG

[7] A. Guezane-Lakoud , J. Dabas , D. Bahuguna . Existence and uniqueness of generalized solutions to a telegraph equation with an integral boundary condition via Galerkin method. IJMMS. 2011.

[8] B. Kaltenbacher, Mathematics of nonlinear acoustics, Evolution Equations and Control Theory, 4(2015), $447 - 491$.

[9] B. Kaltenbacher and I. Lasiecka, Global existence and exponential decay rates for the Westervelt equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, vol 2, pp. $503 - 525$, 2009.

[10] B. Kaltenbacher and I. Lasiecka, An analysis of nonhomogeneous Kuznetsov's equation : Local and global well-posedness ; exponential decay, to appear (Editors Choice) Mathematische Nachrichten, 2011.

[11] B. Kaltenbacher and I. Lasiecka, Well-posedness of the Westervelt and the Kuznetsov equation with nonhomogeneous Neumann boundary conditions, to appear Proceedings of AIMS Conference in DResden, DCDS 2011.

[12] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka and R. Marchand, Wellposedness and exponential decay rates for the MooreGibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, Control Cybernet. 40(4) (2011), $971-988$.

[13] V. Kuznetsov, Equations of nonlinear acoustics, Sov. Phys. Acoust., vol. 16, pp. $467-A\c{S}470$, 1971.

[14] I Lasiecka and X Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I : exponential decay of energy. ZAMP. 2016

[15] I Lasiecka and X Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part II : general deacy of energy. J. DifferentialEquations. 2015.

[16] S. Makarov, M. Ochmann, Nonlinear and Thermoviscous Phenomena in Acoustics Part. II. Acta Acustica united with Acustica 83 (1997), $197-222$.

[17] A Mesloub, A Zarai, F Mesloub, B.-B. Cheri, and M. Abdalla. The Galerkin Method for Fourth-Order Equation of the Moore–Gibson–Thompson Type with Integral Condition. Advances in Mathematical Physics Volume 2021, Article ID 5532691, 17 pages.

[18] S. Mesloub, A. Bouziani. Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles.Bull Classe Sci Acad R Belg. 1998 ; $6:59-69$.

[19] S. Mesloub, A. Bouziani. Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator. J Appl Math Stoch Anal. 2002 ; $15(3):291-300$.

[20] S. Mesloub, S. Messaoudi. Global existence, decay, and blow up of solutions of a singular nonlocal viscoelastic problem.Acta ApplMath. 2010 ; $110:705-724$.

[21] S. Mesloub, S. Messaoudi. Non local mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations. Electron J Differ Equ. 2003 ; $2003(30):1-17$.

[22] S. Mesloub, N. Lekrine. On a nonlocal hyperbolic mixed problem.Acta Sci Math (Szeged). 2004 ; $70:65-75$.

[23] S. Mesloub. On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with non local conditions.Nonlinear Anal. 2008 ; $68:2594-2607$.

[24] S. Mesloub. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order parabolic equation.JMathAnalAppl. 2006 ; $316:189-209$.

[25] S. Mesloub, F. Mesloub. On the higher dimension Boussinesq equation with nonclassical condition. Math Methods Appl Sci.2011 ; $34(5):578-586$.

[26] F. Moore, W. Gibson, Propagation of weak disturbances in a gas subject to relaxing effects, Journal Aero/Space SCi., 27 (1960), $117-127$.

[27] L. Pulkina. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations.Electron J Differ Equ. 1999 ; $45:1-6$.

[28] L. Pulkina. On solvability in l2 of nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation.Differ Uravn. 2000 ; $36:316-318$.

[29] R. Racke, B. Said-Houari, Global well-posedness of the Cauchy problem for the Jordan-Moore-GibsonThompson equation, Konstanzer Schriften in Mathematik 38 (2019).

[30] P. Shi , M. Shillor.Design of Contact Patterns in One Dimensional Thermoelasticity, in Theoretical Aspects of Industrial Design. Philadelphia : SIAM ; 1992.

[31] P. Shi. Weak solution to an evolution problem with a non local constraint.SIAM J Math Anal. 1993 ; 24(1) : $46 - 58$.

[32] P. Stokes, An examination of the possible effect of the radiation of heat on the propagation of sound, Philosophical Magazine Series, 4 (1851), $305 - 317$.

[33] C. Wenhui, A. Palmieri, A blow – up result for the semilinear Moore – Gibson –Thompson equation with nonlinearity of derivative type in the conservative case. AIMS.2010.