République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

THÈSE
Pour l'obtention de diplôme de DOCTORAT LMD
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques appliquées

Thème

Sur le comportement asymptotique des solutions de certains problèmes d'évolution

Présentée Par :
Saker Meriem

Devant le jury composé de :

REBIAI Belgacem	Professeur	Université Larbi Tébessi	Président
Boumaza Nouri	MCA	Université Larbi Tébessi	Rapporteur
Hafdallah Abdelhak	MCA	Université Larbi Tébessi	Examinateur
Degaichia Hakima	MCA	Université Larbi Tébessi	Examinateur
Ardjouni Abdelouahab	Professeur	Université M.C. Messaadia	Examinateur
Bouzettouta Lamine	MCA	Université 20 Aôut 1955	Examinateur

Le : 23/10/202

Remerciements

Louange à ALLAH le tout puissant de m'avoir mis sur le bon chemin pour réaliser ma thèse.

A la femme qui m'a donné la confiance et le courage nécessaires pour poursuivre mes études « ma mère », à mon idole dans la vie qui a tout sacrifié pour mon succès « mon père ».

Je remercie profondément mon encadreur le Dr. Boumaza Nouri pour le temps précieux qu'il a consacré pour m'orienter pendant mon parcours doctoral, et de m'avoir apporté les outils nécessaires pour réaliser ma thèse dans de bonnes conditions.

J'aimerais bien exprimer ma profonde gratitude au Professeur Rebiai Belgacem d'avoir accepté de présider mon jury afin d'évaluer mon travail. Je vous suis sincèrement reconnaissante pour votre disponibilité.

Pour vous messieurs les membres du jury Dr. Bouzettouta Lamine, Pr. Ardjouni Abdelouaheb, Dr. Hafdallah Abdelhak et Dr. Degaichia Hakima mon profond respect et mes plus vifs remerciements pour l'intérêt que vous avez manifesté envers ma thèse et d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je resterai à jamais reconnaissante du soutien précieux apportés par les personnes chères de ma famille, notamment mes frères Hamza et Abderrahim, mes sœurs Imene et Meriem, mon beau-frère Fateh, ainsi que mes belles-sœurs Hadjer et Chahinez

A toutes les personnes qui m'ont apporté leurs aides et ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse, Je vous remercie infiniment.

"À mon père....

À mon oncle

Ibrahim
Paix à son âme"

Résumé

La présente thèse est consacrée à l’étude des différents problèmes des équations aux dérivées partielles d’évolutions de type viscoélastique avec différentes conditions aux limites (conditions aux limites non linéaires, conditions aux limites dynamiques, etc…). Nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique de la solution qui se manifeste par la stabilité et l’explosion en temps fini.

Nous commençons le premier chapitre de cette thèse en énonçant quelques notions préliminaires et outils indispensables pour la réalisation de ce travail.

Le deuxième chapitre est voué à l'étude de l'existence locale et globale de la solution, ainsi que le comportement asymptotique de la solution d’une équation viscoélastique de type Kirchhoff avec un terme de retard et un terme source. Nous prouvons l'existence locale de la solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, et aussi nous prouvons l'existence globale de la solution en utilisant la méthode de puits de potentiel. En utilisant la méthode des fonctionnelles de Lyapunov, nous démontrons la stabilité de la solution, tandis que l'explosion de la solution en temps fini est étudiée en utilisant la méthode de Georgiev-Todorova.

Le chapitre trois est destiné à la solvabilité de la solution et du comportement asymptotique d'une équation viscoélastique de type Kirchhoff avec des conditions aux limites non linéaires.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions une équation viscoélastique de type p-Laplacien avec des conditions aux limites dynamiques. Où nous démontrons que la solution globale existe ainsi que l’énergie associée au problème étudié décroit et que la solution s’explose en temps fini.

Le dernier chapitre, est réservé à l’étude d’une équation viscoélastique à des exposants variables, avec un terme p(x)-Laplacien. Pour la démonstration de la stabilité nous utilisons les inégalités de Komornik, par contre pour exprimer que la solution s’explose nous untilisons la méthode de Georgiev-Todorova.

Mots clés : Equation viscoélastique, conditions aux limites non-linéaires, conditions dynamiques, terme de retard, exposants variables, existence, décroissance de l’énergie, explosion.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of various problems of viscoelastic evolution partial differential equations with different boundary conditions (nonlinear boundary conditions, dynamic boundary conditions, etc.). We focus to the study of the asymptotic behavior of the solution, which is manifested by the stability and the blow-up of the solution at finite time.

We start the first chapter of this thesis by mention somes preliminary notions and the required tools for the realization of this work.

The second chapter is caring to study the local and global existence of the solution as well as the asymptotic behavior of a Kirchhoff-type viscoelastic equation with a delay term and a source term. We show the local existence of the solution by using the Faedo-Galerkin method, also we prove the global existence of the solution by employing the potential well method. Examining the Lyapunov functionals method, we demonstrate the stability of the solution, while the blow-up of the solution in finite time is studied by using the Georgiev-Todorova method.

Chapter three is intended for the solvability of the solution and the asymptotic behavior of a viscoelastic Kirchhoff-type equation with nonlinear boundary conditions.

In the fourth chapter, we study a viscoelastic equation of the p-Laplacian type with dynamic boundary conditions. Where, we demonstrate that the global solution exists as well as that the energy associated to the studied problem decreases , and the solution blows-up in finite time.

The last chapter, is concerned to the study of a viscoelastic equation with variable exponents and with a p(x)-Laplacian term. For the proof of the stability, we use the Komornik's inequalities, while to prove that the solution blows-up we use the Georgiev-Todorova method

Keywords : Viscoelastic equation, nonlinear boundary conditions, dynamic conditions, delay term, variable exponents, existence, energy decay, blow-up.

ملخص

هذه الأطروحة مخصصة لدراسة مسائل مختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية التطورية من نوع المعادلات اللزجة-المرنة بشروط حدية مختلفة (شروط حدية غير خطية، شروط حدية ديناميكية...)، حيث اهتممنا بدراسة السلوك التقاربي للحل المتمثل في الاستقرار و انفجار الحل في زمن منتهي.

نبدأ الفصل الأول لهذه الأطروحة بذكر بعض المفاهيم الأولية و الأدوات الأساسية لإنجاز هذا العمل.

الفصل الثاني مكرس لدراسة الوجود المحلي و الكلي للحل ، و كذا السلوك التقاربي للحل لمعادلة اللزوجة-المرونة من نوع كيرشوف بوجود مصطلح تأخير و قوى خارجية. نبرهن وجود الحل المحلي باستعمال طريقة فايدو غلاركين ، و أيضا نبرهن الوجود الكلي باستعمال طريقة بئر كمون الطاقة ، و باستعمال طريقة ليابونوف نبرهن استقرار الحل ، أما انفجار الحل في زمن منتهي ندرسه باستعمال طريقة جورجييف و تودوروفا.

الفصل الثالث موجه لدراسة وجود الحل و السلوك التقاربي لمعادلة اللزوجة-المرونة من نوع كيرشوف مع شروط حدية غير خطية .

في الفصل الرابع ، ندرس معادلة اللزوجة-المرونة من نوع p-Laplacien مع شروط حدية ديناميكية ، أبن نثبت أن الحل الكلي موجود و كذا الطاقة الخاصة بالمسألة المدروسة تتناقص و ان الحل ينفجر في زمن منتهي.

الفصل الأخير ، مخصص لدراسة معادلة اللزوجة-المرونة ذات أسس متغيرة مع حد p(x)-Laplacien . للبرهنة على الاستقرار نستخدم طريقة متراجحات كومورنيك، بينما لتبيين أن الحل ينفجر نستعمل طريقة جورجييف و تودوروفا.

الكلمات المفتاحية : معادلة اللزوجة-المرونة ، شروط حدية غير خطية، شروط ديناميكية ، حد التأخير، الأسس المتغيرة ، الوجود ، اضمحلال الطاقة ، الإنفجار.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Comme nous le savons, le développement de la technologie est dû essentiellement aux mathématiques, plus précisément aux équations aux dérivées partielles qui sont la clé qui nous permet de modéliser plusieurs phénomènes naturels et problèmes modernes de physique, mècanique, biologie et de technologie.

Cette théorie nous permet de relier les obstacles de la vie réelle aux sciences exactes et d'en trouver les solutions adéquates et de les améliorer, plus encore, cette théorie nous permet de faire des prévisions précises.

Vu le grand rôle joué par les EDPs dans les différentes sciences, l'intérêt de cette théorie est devenu important chez plusieurs auteurs qui l'ont enrechi ; parmis ces auteurs, nous citons Euler, Navier et Stokes pour les équations de la mécanique des fluides, Fourier pour l'équation de la chaleur, Maxwell pour les équations de l'éléctromagnétisme, Schrodinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien entendu Einstein pour les EDPs de la théorie de la relativité. Par contre le calcul pseudodifférentiel (L. Hormander 1970) et l'étude systématique des EDPs avec un bon arsenal mathématique n'ont vu le jour qu'avec l'apparition de la théorie des distribution (L.Schwartz 1950).

Parmis les problèmes connus dans la démarche des différents systèmes mécaniques sont les vibrations engendrées par les sollicitations dynamiques des composants qui peuvent conduire le système à la defaillance ; dans ce cas, ce qui est interessant c'est l'augmentation de sa durée de vie ou ce qu'on espère au moins, par diminution des vibrations et par évitement des avaries causées par ces vibrations, ceci, peut se traduire par la dissipation de l'énergie mécanique des vibrations en chaleur. Le comportement des matériaux viscoélastiques représenté à la fois par un comportement élastique qui conserve l'énergie après l'enlevement de la source de déformation et par un comportement visqueux qui dissipe l'énergie qui permet d'amortir les chocs et de filtrer les vibrations, c'est ce qui attire l'attention des scientifiques pour étudier ce type de problèmes.

Pour bien exprimer une équation viscoélastique, on établit l'équation suivante

$$h(u_t)u_{tt} - k(\Delta u) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \lambda_1\phi_1(u_t) = \lambda_2 f(u), \tag{0.1}$$

où g représente la fonction de relaxation ou ce qu'on appelle aussi le terme de mémoire.

On peut considérer le comportement viscoélastique comme un lien entre les structures du système, donc le développement d'un certain mécanisme est largement dû à la connaissance de l'effet des liaisons viscoélastiques sur les caractéristiques dynamiques des composants de ce mécanisme. Cela a permit aux scientifiques de définir plusieurs types d'équations viscoélastiques.

Pour $K(\Delta u) = M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u$, on parle d'une équation viscoélastique de type Kirchhoff, le physicien Gustav Kirchhoff [45] était le premier qui a introduit ce type d'équation en 1883 comme une généralisation de l'équation d'onde bien connue de d'Alembert, pour traiter les vibrations et les déformations d'une corde élastique en dimmension 1. Cette équation est donnée comme suit

$$\rho h u_{tt} + \tau u_t = \left\{ p_0 + \frac{Eh}{2L}\|\nabla u\|_2^2 \right\} \Delta u + f, \tag{0.2}$$

Les paramètres de l'équation ci dessus ont une signification physique donnée par : ρ désigne la masse volumique de la section transversale h, p_0 représente la tension axiale initiale, E représente le module d'élasticité (module de Young) du matériel obtenu en divisant la contrainte de traction δ par la déformation ϵ ($\delta = E\epsilon$) et L représente la longueur de la chaîne. Ce type de problème a été traité par de nombreux auteurs au cours de ces dernières décennies et de nombreux résultats ont été obtenus, voir [57, 75, 86, 96].

Au cours du 18^{ieme} siècle, le Laplacien $(\Delta(.))$ est apparu dans l'étude des filtrations des fluides à travers des milieux poreux dans des régimes laminaires, comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(-k(u)\nabla(\phi(u))) = 0, \tag{0.3}$$

où $-k(u)\nabla(\phi(u))$ représente la loi de Darki, u la teneur en humidité volumétrique, $K(u)$ désigne la conductivité hydraulique et $\phi(u)$ le potentiel.

Par contre, au début des années 1870, la modélisation mathématique de cette étude dans des régimes turbulents par le Laplacien est devenue insuffisante, cela a abouti à une contradiction avec la réalité. Ce problème a inspiré l'emergence du terme p-Laplacien en apportant des modifications à la loi de Darki, pour plus de détails voir [10]. Partant de ces résultats les scientifiques ont introduit l'équation viscoélastique (0.1) avec $K(\Delta u) = \Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ pour étudier les vibrations longitudinales non linéaires, cette équation régit le modèle de Kelvin-Voight (une barre pour $n = 1$, et une plaque pour $n = 2$).

On sait que les propriétés de nombreux corps sont affectées lorsque un champ éléctrique ou magnétique leur est appliqué de sorte qu'ils peuvent être capables d'absorber des chocs ou d'être appliqués à des vannes et d'autres applications, contribuent à l'amélioration du fonctionnement des systèmes. Parmi ces applications physiques on peut citer les modèles d'écoulements des fluides électro-rhéologiques ou des fluides dont la viscosité dépend de la température, les processus de filtration dans un milieu poreux, la viscoélasticité non linéaire et le traitement d'image etc. Consulter [80]. Mathématiquement, ce type de phénomène a été modélisé par des équations aux derivées partielles à exposants variables repprésenté par l'équation suivante

$$u_{tt} - \Delta_{p(x)} u - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \lambda_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} = \lambda_3 u|u|^{q(x)-2}. \tag{0.4}$$

L'étude de ce type de problèmes a donné de nombreux résultats, voir [55, 99, 81].

Le but principale de la modélisation mathématique des différents phénomènes est de trouver une solution et d'étudier son comportement. Dans chaque système étudié, il y a des termes qui le conduisent à la stabilité et des termes qui le conduisent à l'explosion. Le terme source qui représente la force exterieur appliquée est un facteur d'explosion, par contre les termes d'amortissements qu'ils soient faibles (u_t) ou qu'ils soient forts (Δu_t) stabilisent le système, ceci est une intéraction des termes d'amortissements et de terme source, il est donc nécessaire d'explorer le mécanisme du moment où les termes d'amortissements dominent le terme source, ou bien le terme source domine la dissipation, cette intéraction est représentée par l'équation suivante

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \lambda_1 u_t|u_t|^{p-2} = \lambda_3 u|u|^{q-2}, \tag{0.5}$$

si $q > p$ la solution s'explose, si $p \geq q$ alors la solution existe globalement.
Ainsi, parmi les termes résponsables de l'explosion des solutions il y a le terme de retard, ce dernier forme les problèmes avec retard représentés par l'équation suivante

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \lambda_1 u_t + \lambda_2 u_t(t-\tau) = \lambda_3 f(u). \tag{0.6}$$

C'est le cas où le fonctionnement d'un certain système ne dépend pas uniquement de son état présentiel mais aussi de son passé, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de mémoriser une partie de l'histoire de ce système pour connaitre son évolution. La plupart des phénomènes phusiques, chimiques et biologiques sont soumis à ce type de problèmes.
Comme l'étude des équations d'évolution non-linéaires a attiré l'attention de plusieurs mathématiciens, c'est pourquoi on s'interesse dans notre thèse à l'étude des différents problèmes viscoélastiques non-linéaires. Pour l'étude théorique de n'importe quel problème, la première question qu'il faut se poser est de savoir si la solution globale existe, ou au moins l'existence de la solution locale.
Pour démontrer l'existence de la solution globale on utilise la méthode de puits de potentiel, cette méthode consiste à démontrer que la solution demeure dans le puits de potentiel définit par

$$W = \{u \in W^{m,p} : J(u) < d\} \cup \{0\},$$

où J désigne l'énergie potentielle et d la profondeur du puits, si $d > 0$ alors la solution globale existe. Pour l'existence de la solution locale on utilise la méthode de compacité où on construit des solutions approchées en utilisant la méthode de Faedo Galerkin, puis on démontre l'existence de ces solutions approchées en utlisant un théorème d'existence de solution d'un système d'équations différentielles ordinaires, et finalement, on passe à la limite.

Une fois l'existence est démontrée on s'interesse au comportement asymptotique des solutions, pour étudier la stabilité on prouve que l'énergie des solutions décroit vers 0 lorsque le temps t tend vers l'infini et ceci en utilisant la fonctionnelle de Lyapunove. La décroissance de l'énergie est décrite par la relation suivante

$$E(t) \leq Ce^{-\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}.$$

Si $\xi(t) = a$, alors l'énergie décroit exponnentiellement, si $\xi(t) = a(1+t)^{-1}$, $a > 0$ la décroissance est polynomiale. Dans le cas des exposants variables, la construction de la fonctionnelle de Lyapunov devient difficile, donc on utilise la méthode des inégalités de Komornik pour obtenir les estimations suivantes

$$\begin{cases} E(t) \leq CE(0)/(1+t)^{1/r} & \text{si r>0,} \\ E(t) \leq CE(0)e^{-rt} & \text{si r=0.} \end{cases}$$

Pour l'étude de l'explosion en temps fini de la solution, on utilise la méthode de Georgiev et Todorova [35], en introduisant une fonctionnelle qui a les propriétés d'explosion.

Cette thèse contient cinq chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels des notions préliminaires, les consepts de base et les outils mathématiques utilisés tout au long de cette thèse.

Le deuxième chapitre est voué à l'étudie de l'existence locale et de l'existence globale de la solution d'une équation viscoélastique non linéaire de type Kirchhoff avec un terme de retard et un terme source, ensuite on étudie la stabilité de la solution ainsi que l'explosion en temps fini en posant $E(0) < 0$.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude d'une équation viscoélastique non-linéaire avec des conditions au bord non-linéaires, où on démontre l'existence de la solution globale, la stabilité pou $m \geq p$ et l'explosion en temps fini de la solution si $p > m$ et $\rho + 2 < p$ avec une énergie initiale négative.

Dans **le quatrième chapitre** on étudie l'existence de la solution globale d'une équation viscoélastique avec un terme $p - Laplacien$ et des conditons dynamiques, en outre, on étudie le comportement asymptotique de la solution.

Le dernier chapitre est sacrifié à l'étude d'un problème viscoélastique à exposants variables et un terme $p(x) - Laplacien$, on démontre que la solution globale existe en utilisant la méthode de puits de potentiel, pour démontrer la stabilité on utilise les inégalités de Komornik et l'explosion en temps fini en se servant de la méthode de Georgiev-Todorova.

On essaie de comprendre à travers ces études le rôle des termes d'amortissements dans la stabilité des systèmes, et de comprendre l'effet du terme source dans l'explosion, cette comprehension nous permet de faire un pas géant dans la stabilisation des différents systèmes et de les contrôler. Ce qui représente l'objectif principal des mathématiques dans l'amélioration et la recherche de diverses solutions. C'est ce qu'on vise à réaliser dans les jours à venir.

Chapitre 1

Préliminaires

""Obvious" is the most dangerous word in mathematics",

""Évident" est le mot le plus dangereux en mathématiques",

Eric T., Bell .

Le présent chapitre contient des principaux rappels de mathématiques qui nous permettent de poursuivre notre étude tout au long de cette thèse.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, et $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1. [30] Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, l'application $\|.\|$ à valeurs réelles définie sur E est dite une norme si pour tout $u, v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifie :

1/ $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$,

2/ $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,

3/ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Remarque 1.1. Soit E un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|$, E est dit espace vectoriel normé (où normé) et on le note par $(E, \|.\|)$.

Proposition 1.1. [30] Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, alors l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance sur E, appelée distance canonique associée à la norme.

Définition 1.2. (Equivalence des normes) [30] Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, on dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes positives α_1, α_2 telle que

$$\forall\ u \in E,\ \ \alpha_1\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \alpha_2\|u\|_1.$$

Proposition 1.2. [30] Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur E, alors :

$$u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_1 \Longleftrightarrow u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_2.$$

Définition 1.3. [30] Soit E un espace normé, et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ;\ \exists\ N > 0,\ \forall\ n, m \geq N :\ \ \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.4. Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace complet si toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace E converge vers un élément u de E.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.5. (Espace de Banach) [85] On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet pour la distance associée à la norme c'est-à-dire, dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.6. [14] Soit E un espace vectoriel normé, on appelle espace dual E' de E l'espace des formes linéaires continues sur E.

Proposition 1.3. [14] E' muni de la norme duale $\|.\|_{E'}$ définie par

$$\|f\|_{E'} = \sup\{|f(u)| : u \in E \ et\ \ \|u\| \leq 1\},$$

est un espace de Banach puisque $\mathbb{K}$ est complet. Lorsque $f \in E'$, la valeur de f en $u \in E$ est généralement notée $\langle f, u\rangle_{E,E'}$ au lieu de $f(u)$. On dit que $\langle ., .\rangle$ le produit scalaire dans la dualité (E', E).

Remarque 1.2. [14] A partir de E' on construit le bidual ou second dual $E'' = (E')'$, muni de la norme

$$\|\psi\| = sup\left\{|\langle\psi, f\rangle|,\ f \in E'\ et\ \ \|f\| \leq 1\right\}.$$

Définition 1.7. [85] **Convergence uniforme dans un espace de Banach.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de E. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u \in E$ lorsque $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$.

Définition 1.8. [85] **Convergence forte dans un espace de Banach.**
Soit E un espace de Banach, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge fortement** vers u dans E si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_E = 0.$$

Définition 1.9. [85] **Convergence faible dans un espace de Banach.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $u \in E$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans E lorsque $n \to \infty$, si

$$pour\ tout\ f \in E^{'}, \quad f(u_n) \to f(u),$$

où E' est l'espace dual de E.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.10. [30] Un espace de Hilbert H, est un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme associée

$$\|u\|_H^2 = \langle u, u\rangle.$$

Un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach.

Définition 1.11. **(Système orthogonal)** [30] Soit E un espace de Hilbert, la suite $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ est appelée système orthogonal si

$$\delta_{n,m} =< e_n, e_m >= \begin{cases} d & n = m \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Si $d = 1$, on dit que le système $(e_n)_{n\geq 1}$ est un système **Orthonormé**.

Définition 1.12. **(Base Hilbertienne)** [30] Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< ., . >$. On appelle base Hilbertienne de E une famille dénombrable $(e_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E orthonormée pour le produit scalaire et engendre un sous espace vectoriel dense dans E.

Définition 1.13. [102] On appelle E un espace séparable tout espace normé contient une partie dénombrable dense.

Theorem 1.1. *[102] Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Theorem 1.2. *[30] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert H, alors on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Theorem 1.3. *[30] Dans l'espace de Hilbert , toute suite convergente est bornée.*

1.1.4 Introduction aux distributions

On définit le gradient et le laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^\top \text{ et } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2,$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x).$$

On note par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour $k \geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.

$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont le support est compact et contenu dans Ω. Pour tout multi-entier $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, et on désigne par D^α la dérivée partielle

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Définition 1.14. On note par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact, autrement dit

$$C_0^\infty(\Omega) = \Big\{u \in C^\infty(\Omega);\ u(x) = 0\ \forall x \in \Omega \backslash K, ou\ K\ est\ un\ compact\Big\}.$$

Définition 1.15. [83] Une distribution T sur Ω est une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\Omega)$. Les distributions forment un espace vectoriel noté $D'(\Omega)$.

Une distribution T est donc une application de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ faisant correspondre à une fonction test φ un nombre complexe noté $\langle T, \varphi \rangle$, telle que

— Linéarité : $\forall\ \varphi_1,\ \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega), \forall\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

$\langle T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$.

— Continuité : Si $\varphi_k \to \varphi$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ alors $\langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{C}$.

où $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité.

Définition 1.16. [83] Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que

$$T_j \to T \text{ dans D'}(\Omega),$$

si

$$\lim_{j\to\infty} < T_j, \varphi >=< T, \varphi > \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Proposition 1.4. [83] Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et $T \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Supposons que

$$T_j \to T \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Alors,

$$T_j \to T \text{ dans } \mathrm{D}'(\Omega).$$

1.1.5 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.17. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace des classes des fonctions p^{ime} sommable sur Ω par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| u \|_{L^p} = \| u \|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Définition 1.18. Pour $p = \infty$, on définit l'espace des fonctions essentiellement bornées par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, u \text{ mesurable, } \exists\ c > 0, \text{ telle que } |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

muni de la norme sup-essentiel

$$\| u \|_{L^\infty} = \text{Supess}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf \{c;\ |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Remarque 1.3. L'espace L^2 muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u.v dx, \quad u.v \in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert.

Theorem 1.4. *[89] L^p muni de sa norme $\| u \|_p$, est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Theorem 1.5. *[84] L^p est un espace reflexif si et seulement si, $1 < p < \infty$, en outre il est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Espaces $L^p([0, T], X)$

Définition 1.19. Soit X un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$ et $[0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on note $L^p([0, T], X)$ l'espace des fonctions $f : [0, T] \to X$ mesurables qui vérifient

1. si $1 \leq p < \infty$: $\| f \|_{L^p([0,T],X)} = \left(\int_0^T \| f \|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
2. si $p = \infty$: $\| f \|_{L^\infty([0,T],X)} = \text{ess} \sup_{t \in [0,T]} \| f \|_X < \infty$.

Proposition 1.5. $L^p([0,T],X)$ muni de la norme $\| f \|_{L^p([0,T],X)}$, $1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach .

1.1.6 Espace de Sobolev

Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit [102] :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \text{ telle que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\},$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\| u \|_{W^{m,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^p} .$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.4. [102] Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{0 < |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \text{pour } u, v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.6. [102] On a

1. $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
2. si $m \geq m'$, $H^m(\Omega) \longrightarrow H^{m'}(\Omega)$ avec injection continue.
3. si $m = 0$ on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$,$n \geq 1$.

Définition 1.20. [102] Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on défnit l'espace de Sobolev $W^{1,p}$ par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ ; \ \text{telle que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall \ 1 \leq i \leq n \right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u dans la direction x_i au sens des distributions.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_p^p \right)^{1/p} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_{(L_p)^n}^p \right)^{1/p},$$

pou $p \neq \infty$, et

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour $p = \infty$.

Définition 1.21. [102] Dans le cas où $p = 2$, on note

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \ \text{telle que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall \ 1 \leq i \leq n \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_{(L_2)^n}^2 \right)^{1/2}.$$

Proposition 1.7. [36] L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pou tout $1 \leq p \leq \infty$, aussi l'espace $H^1(\Omega)$ muni de sa norme, est un espace de Hilbert séparable.

Lemme 1.1. [50] Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$, et $u_n(x), u(x)$ deux fonctions réelles dans $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ telle que u_n converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$. Ainsi, si $1 \leq p < +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge presque partout vers u, et si $p = +\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers u.

Lemme 1.2. [50] Supposons que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Soit $u_m(x)$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, $(1 \leq p < \infty)$ telle que u_m converge presque partout vers u. Alors, u est dans $L^p(\Omega)$ et u_m converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$.

Theorem 1.6. *(théorème de Rellikh Kondrachov)[36] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un ouvert borné régulier. Alors toute partie bornée de $H^1(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$.*
Dès lors, comme toute suite faiblement convergente est bornée, le théorème de Rellich implique que toute suite faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$ possède une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ (autrement dit, qui converge pour la topologie induite par la norme L^2 sur Ω).

1.2 Espaces de Lebesgue à exposants variables

1.2.1 Définitions et propriétés de base

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ avec une frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne-continue, puis, on introduit

Définition 1.22. [28] Soit Ω un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ avec $|\Omega| > 0$, on définit l'espace des fonctions exposants $p(.)$ par

$$\Pi(\Omega) = \Big\{ p : \Omega \longrightarrow [1, \infty] \ \textit{telle que} \ p(.) \ \textit{mesurable} \Big\}.$$

On pose

$$p^- = ess \inf_{x \in \Omega} p(x), \quad p^+ = ess \sup_{x \in \Omega} p(x).$$

On définit dans l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonctionelle

$$\Theta_{p(.)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < +\infty.$$

Définition 1.23. [28] On appelle un modulaire toute fonction Θ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Theta_{p(.)}(f) \geq 0$, pour toute f.
2. $\Theta_{p(.)}(f) = 0$, si et seulement si $f = 0$.
3. $\Theta_{p(.)}(f) = \Theta_{p(.)}(-f)$, pour toute f.
4. $\Theta_{p(.)}(f)$ est convexe.

Proposition 1.8. [28] Le modulaire $\Theta_{p(.)}(f)$ possède les propriétés suivantes :
(1) Si $|f(x)| \geq |g(x)|$ pour tout $x \in \Omega$ et si $\Theta_{p(.)}(f) < +\infty$, alors $\Theta_{p(.)}(f) \geq \Theta_{p(.)}(g)$, de plus l'inégalité est stricte si $|f(x)| \neq |g(x)|$.
(2) Si $0 < \Theta_{p(.)}(f) < +\infty$ alors la fonction $\lambda \mapsto \Theta_{p(.)}(f/\lambda)$ est continue et décroissante sur l'intervalle $[1, \infty)$.

On définit alors l'espace

Définition 1.24. [28] Soit $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ une fonction mesurable avec Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable $p(.)$ par

$$L^{p(.)}(\Omega) := \Big\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{mesurable sur} \ \Omega \ \textit{tel que} \ \exists \ \lambda > 0 : \Theta_{p(.)}(\lambda u) < \infty \Big\}.$$

Remarque 1.5. [25] Si $p(.)$ est borné, alors on a :

$$u \in L^{p(x)}(\Omega) \Longleftrightarrow \Theta_{p(.)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Définition 1.25. [28] L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est muni de la norme de Luxemburg suivante

$$\|u\|_{p(.)} := inf\left\{\lambda > 0 : \Theta_{p(.)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Remarque 1.6. Si $p(.) = constante$, les espaces $L^{p(x)}(\Omega)$ et $L^p(\Omega)$ coincident.

Proposition 1.9. [28] L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ muni de sa norme est un espace de Banach.

Définition 1.26. [28] Soient $p(.), p'(.) \in \Pi(\Omega)$ tel que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \;\; \forall \; x \in \Omega,$$

où $\dfrac{1}{\infty} := 0$. Alors, on appelle $p'(.)$ l'exposant conjugué de $p(.)$, et $L^{p'(.)}$ l'espace conjugué de $L^{p(.)}$.

Définition 1.27. [28] Soit $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ une fonction mesurable avec Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace de Sobolev à exposant variable $p(.)$ par

$$W_0^{1,p(.)}(\Omega) := \left\{u \in L^{p(.)}(\Omega) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(\Omega), \;\; u = 0 \; sur \; \partial\Omega\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} = \|u\|_{p(.)} + \|\nabla u\|_{p(.)}.$$

Lemme 1.3. (Inégalité d'injection de Sobolev [16]) Soit $p(x)$ satisfait 5.8, alors, il existe une constante c_* telle que

$$\|u\|_{p(.)} \leq c_* \|\nabla u\|_{p(.)} \;\; pourtout \;\; u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega). \tag{1.1}$$

1.3 Quelques Formules et inégalités utiles

Lemme 1.4. (Formule de Green). Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.5. (L'inégalité de Sobolev Poincarré ([2]) Soit la constante q avec $2 \leq q < \infty$ pour $n = 2$, ou $2 \leq q < \dfrac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 3$, alors, il existe une constante $c_* = c_*(\Omega, q)$ telle que

$$\|u\|_q \leq c_* \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\left| \int_\Omega uvdx \right| \leq \int_\Omega |uv|dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

i.e.

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Cauchy

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|ab| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2.$$

Inégalité de Cauchy avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2.$$

Inégalité de Young

Soient p, q deux nombres réels strictement positifs liés par la relation :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon)|b|^q,$$

où p et q sont strictement positifs liés par la relation $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{q}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.

Pour tout $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $|uv| \in L^1(\Omega)$, et pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note q le conjugué de p, alors on a l'inégalité

$$\left| \int_\Omega uv dx \right| \leq \int_\Omega |uv| dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

i.e.

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inégalité de Minkowski

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UNE ÉQUATION VISCOÉLASTIQUE DE TYPE KIRCHHOFF AVEC UN TERME DE RETARD ET UN TERME SOURCE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère l'équation viscoélastique de type Kirchhoff non-linéaire avec un terme de retard comme suit

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|_a^2)div[a(x)\nabla u] + \int_0^t g(t-s)div[a(x)\nabla u(s)]ds & \\ +\mu_1 u_t + \mu_2 u_t(t-\tau) = u|u|^{p-2} & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau) & \text{sur } \Omega \times (0,\tau), \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ avec une frontière $\partial\Omega$ assez régulière. $M(s)$ est une fonction positive de classe C^1, telle que $M(s) = m_0 + m_1 s^\gamma$,$\gamma > 0$, $m_0 > 0$, $m_1 \geq 0$, $s \geq 0$, μ_1 est une constante positive, μ_2 est un nombre réel, $\tau > 0$ represente le temps de retard, et g une fonction positive définie sur $[0, +\infty[$.

Pour le problème (2.1) avec M une constante et $\mu_1 = \mu_2 = 0$, il existe plusieurs résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique de la solution, voir [18, 17, 31, 50, 53, 58, 76, 79].

Si M est une fonction, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et $a = 1$ dans (2.1), on peut citer plusieurs travaux, voir [40, 43, 49, 57, 75, 86, 96, 97]. Wu et Tsai [95] ont considéré l'équation intégro-différentielle non linéaire suivante

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + h(u_t) = f(u), \tag{2.2}$$

où ils ont démontrer l'existence globale de la solution avec la décroissance exponentielle de l'énérgie. Wu ([90]) a prouvé que l'équation (2.2) admet une solution globale, de plus il a obtenu de nouveaux résultats concernant la décroissance de l'énérgie et l'explosion de la solution. Yang et Gong [98] ont étudié l'explosion de la solution de l'équation viscoélastique suivante

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \int_0^t h(t-s')\Delta u(s)ds + \alpha u_t = |u|^{p-2}u,$$

avec une énérgie initiale positive.

Si a est une fonction, Zennir et al. [101] ont considéré une classe d'équation dégénérée d'onde viscoélastique avec une densité

$$\rho(x)(|u_t|^{p-2}u_t)_t - M(\|\nabla_x u\|_2^2)div[a(x)\nabla_x u] + \int_0^t \mu(t-s)div[a(x)\nabla_x u(s)]ds = 0.$$

En utilisant les foncionnelles de Lyapunov, ils ont démontré que la solution décroit vers 0.

Boumaza et Gheraibia [12] ont considéré l'équation suivante

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - div[a(x)\nabla u] + \int_0^t g(t-s)div[a(x)\nabla u(s)]ds + u_t = |u|^{p-2}u.$$

Posant des hypothèses appropriées sur la fonction de relaxation g et la fonction M, ils ont étudié l'existence globale de la solution, la stabilité et l'explosion en temps fini de la solution avec une énérgie initiale négative.

Les effets du terme de retard apparaissent souvent dans de nombreux problèmes réels, où ils peuvent transformer le comportement stable d'un certain système à un comportement instable. Au cours de ces dernières années, beaucoup de résultats sont publiés concernant les équations d'évolution d'onde avec un terme de retard, voir [23, 24, 44, 54, 74].

Nicaise et Pignotti [73] ont considéré l'équation d'onde avec un terme de retard comme suit

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(t-\tau) = 0,$$

où ils ont étudié la stabilité de la solution de cette équation dans le cas $0 < \mu_2 < \mu_1$. Récemment, Wu [91] a prouvé l'explosion de la solution avec une énergie initiale positive et non-positive de l'équation suivante

$$|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(t-\tau) = b|u|^{p-2}u.$$

Pour l'équation viscoélastique de type Kirchhoff avec un retard. Daewook [22] a étudié le problème suivant

$$u_{tt} - M(x,t,\|\nabla u\|_2^2)\Delta u + \int_0^t h(t-s)div[a(x)\nabla u(s)]ds + |u|^m u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(t-\tau(t)) = 0.$$

Posant des conditions sur le terme de kirchhoff et la fonction de relaxation, l'auteur a obtenu un résultat de décroissance uniforme de l'énergie.

2.2 Notions préliminaires

Dans cette section, on décrit le cadre variationnel du problème (2.1) ansi que quelques lemmes préliminaires.

Soit $a \in C^1(\Omega)$ une fonction positive telle que

$$a(x) \geq a_1^2 > 0, \tag{2.3}$$

et

$$H_a := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx < +\infty \right\},$$

un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|\nabla u\|_a^2 = \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx. \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4), on obtient

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{1}{a_1^2}\|\nabla u\|_a^2. \tag{2.5}$$

Pour énoncer et prouver nos résultats, on a besoin des hypothèses suivantes :

(A_1) La fonction de relaxation g est de classe C^1, ansi pour tout $s \geq 0$, on a

$$g(s) \geq 0, \quad g'(s) \leq 0, \quad m_0 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0.$$

(A_2) Il existe une fonction positive, differenciable ζ telle que

$$g'(s) \leq -\zeta(s)g(s), \quad s > 0, \; g(0) > 0,$$

avec

$$\zeta'(t) \leq 0, \; et \; \int_0^{+\infty} \zeta(t)dt = +\infty.$$

(A_3) La constante p satisfait

$$p \geq 2\gamma + 2, \; si \; n = 1,2, \quad et \; 2\gamma + 2 \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}, \; si \; n \geq 3.$$

De plus, on suppose que la fonction g satisfait

$$\int_0^\infty g(s)ds < \frac{m_0(p-2)}{p-2+(1/2\eta)}. \tag{2.6}$$

Lemme 2.1. [101] Pour $u \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t g(t-s)div[a(x)\nabla u(s)]dsu_t(t)dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((g \circ \nabla u)(t) - \|\nabla u\|_a^2 \int_0^t g(s)ds\right) \\
&-\frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_a^2,
\end{aligned}$$

où

$$(g \circ \nabla u)(t) = \int_0^t g(t-s)\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|_a^2 ds.$$

2.3 Position du problème

Similaire à Nicaise et Pignotti [73], on introduit une nouvelle variable z définie par

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \quad x \in \Omega, \quad \rho \in (0.1), \quad t > 0,$$

ce qui donne

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \quad sur \;\; \Omega \times (0.1) \times (0,+\infty).$$

Ce qui nous permet de réécrire le problème (2.1) sous la forme suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - M(\|\nabla u\|_a^2) div[a(x)\nabla u] + \int_0^t g(t-s) div[a(x)\nabla u(s)]ds & \\ +\mu_1 u_t + \mu_2 z(1,t) = |u|^{p-2}u & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0 & \text{sur } (0,1) \times (0,+\infty), \\ z(0,t) = u_t(t) & \text{sur } (0,+\infty), \\ z(\rho,0) = f_0(-\rho\tau) & \text{sur } \Omega \times (0,1), \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Soit ξ une constante positive vérifie

$$\tau|\mu_2| \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - |\mu_2|). \tag{2.8}$$

Alors, l'énergie associée au problème (2.1) est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + \frac{m_1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t)$$

$$+\frac{\xi}{2}\int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho - \frac{1}{p}\|u\|_p^p. \tag{2.9}$$

Lemme 2.2. Soit u une solution du problème (2.1), alors

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - c_0(\|u_t\|_2^2 + \|z(1,t)\|_2^2). \tag{2.10}$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (2.7) par u_t et en l'integrant sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + \frac{m_1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{\xi}{2}\int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho - \frac{1}{p}\|u\|_p^p\right]\\
&= -\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \mu_1\|u_t\|_2^2 - \mu_2\int_\Omega z(1,t)u_t dx.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on estime le dernier terme de (2.11) comme suit

$$\left| -\mu_2\int_\Omega z(1,t)u_t dx\right| \leq \frac{|\mu_2|}{2}\|z(1,t)\|_2^2 + \frac{|\mu_2|}{2}\|u_t\|_2^2. \tag{2.12}$$

De même, en multipliant la deuxième équation de (2.7) par ξz et en l'integrant sur $\Omega\times(0.1)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{\tau}\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^1 |z(\rho,t)|^2 d\rho dx &= -\frac{\xi}{2\tau}\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}|z(\rho,t)|^2 d\rho dx\\
&= \frac{\xi}{2\tau}(\|u_t\|_2^2 - \|z(1,t)\|_2^2).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

En combinant (2.11), (2.12) et (2.13), on obtient

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - c_0(\|u_t\|_2^2 + \|z(1,t)\|_2^2),$$

où $c_0 = \min\left\{\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2}, \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2}\right\}$, une constante positive d'après (2.8). □

Ensuite, on définit la fonctionnelle

$$I(t) = I(u(t)) = \left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + \frac{m_1}{\gamma+1}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + (g\circ\nabla u)(t)$$

$$+\xi\int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho - \|u\|_p^p,$$

et l'energie potentielle

$$J(t) = \frac{1}{2}\left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + \frac{m_1}{2\gamma+2}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t)$$
$$+\frac{\xi}{2}\int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho - \frac{1}{p}\|u\|_p^p.$$

De ce qui précède, on obtient

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + J(t). \tag{2.14}$$

Lemme 2.3. Supposons que les conditions (A_1)–(A_3) soient vérifiées. Alors, pour tout $(u_0, u_1) \in H_a(\Omega) \times L^2(\Omega)$ telle que

$$I(0) > 0, \ \ et \ \ \beta = \frac{c_*^p}{la_1^p}\left(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} < 1, \tag{2.15}$$

on a

$$I(t) > 0, \ \ pour \ \ tout \ \ t > 0. \tag{2.16}$$

Démonstration. Comme $I(0) > 0$, alors grâce à la continuité de $u(t)$, il existe un temps $T^* < T$ tel que

$$I(t) \geq 0, \ \ \forall \ t \in [0, T^*).$$

Soit t_0 vérifie

$$\left\{I(t_0) = 0 \ \ et \ \ I(t) > 0, \ \ pour \ \ tout \ \ 0 \leq t_0 < T^*\right\}. \tag{2.17}$$

Alors, pour tout $t \in [0, T^*)$, on a

$$\begin{aligned}
J(t) &= \frac{p-2}{2p}\Big[(m_0 - \int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_a^2 + (g \circ \nabla u)(t) + \frac{m_1}{\gamma+1}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} \\
&+\xi\int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho\Big] + \frac{1}{p}I(t). \\
&\geq \frac{p-2}{2p}\Big[(m_0 - \int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_a^2 + (g \circ \nabla u)(t) + \frac{m_1}{\gamma+1}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} \\
&+\xi\int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho\Big].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Utilisant A_1, (2.10), (2.14) et (2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
l\|\nabla u\|_a^2 &\leq (m_0 - \int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_a^2 \leq \frac{2p}{p-2}J(t) \\
&\leq \frac{2p}{p-2}E(t) \leq \frac{2p}{p-2}E(0), \forall \ t \in [0, T^*).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

En exploitant le lemme (1.5), les relations (2.5),(2.15) et (2.19), on trouve

$$\begin{aligned} \|u(t_0)\|_p^p &\leq c_*^p \|\nabla u(t_0)\|_2^p \leq \frac{c_*^p}{a_1^p}\|\nabla u(t_0)\|_a^p \leq \frac{c_*^p}{la_1^p}\left(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} l\|\nabla u(t_0)\|_a^2 \\ &= \beta l \|\nabla u(t_0)\|_a^2 < \left(m_0 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t_0)\|_a^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut obtenir

$$I(t_0) > 0,$$

ce qui est en contradiction avec (2.17). Ainsi, $I(t) > 0$ sur $[0, T^*)$. □

Lemme 2.4. [58] Supposons que

$$p \leq 2\frac{n-1}{n-2},$$

alors, il existe une constante positive $C > 1$ dépendant seulement de Ω telle que

$$\|u\|_p^s \leq C(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p),$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega),\ 2 \leq s \leq p$.

Lemme 2.5. [52] Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t^n$, g_μ et g des fonctions de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \quad g_\mu \longrightarrow g \ \ p.p.\ dans\ \ Q.$$

Alors

$$g_\mu \rightharpoonup g \ \ faible\ \ dans\ \ L^q(Q).$$

2.4 Solvabilité de la solution

2.4.1 Existence locale

Theorem 2.1. *Soient $\mu_1 \geq |\mu_2|$, $u_0 \in H_a(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f_0 \in L^2(\Omega \times (0,1))$ et $T > 0$, alors il existe une unique solution faible u de (2.1) telle que :*

$$u \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_a(\Omega)),$$

$$u_t \in C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Démonstration. **Étape 01 : Construction des solutions approchées**
Soient $w_1, ..., w_m, ...$ une base hilbertienne de $V = H_a(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, et V_m le sous-espace de V engendré par les m premiers éléments de la base, et soient $\phi_1, ..., \phi_m, ...$ une base hilbertienne de $W = L^2(\Omega \times (0,1))$, et W_m le sous-espace de W engendré par les m premiers éléments de

la base. L'approximation de Faedo Galerkin consiste à trouver pour tout entier $m \geq 1$

$$t \mapsto u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x),$$

$$t \mapsto z_m(x,\rho,t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) \phi_i(x,\rho).$$

Vérifiant les formulations variationnelles suivantes

$$\begin{cases} u_m(t) \in V_m, \quad \forall t \in [0,T] \\ ((u_m(t))_{tt}, w_k) + M(\|\nabla u\|_a^2) A_k(t) - \displaystyle\int_0^t g(t-s) A_k(s) ds + \mu_1((u_m(t))_t, w_k) \\ +\mu_2(z(.,1), w_k) - (|u_m|^{p-2} u_m, w_k) = 0, \quad \forall k = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{2.20}$$

et

$$\begin{cases} z_m(t) \in W_m, \quad \forall t \in [0,T] \\ (\tau (z_m(t))_t + (z_m(t))_\rho, \phi_k) = 0, \quad \forall k = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{2.21}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} & u_m(0) = u_{0m}, \ \ u_{0m} = \textstyle\sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i \to u_0, \\ & (u_m)_t(0) = u_{1m}, \ \ u_{1m} = \textstyle\sum_{i=1}^m \beta_{im} w_i \to u_1, \\ & z_m(0) = z_{0m}, \ \ z_{0m} = \textstyle\sum_{i=1}^m \gamma_{im} \phi_i \to f_0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

où

$$\begin{aligned} ((u_m(t))_{tt}, w_k) &= \left(\left(\textstyle\sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(x) \right)_{tt}, w_k \right) \\ &= \left(\left(\textstyle\sum_{i=1}^m \dfrac{d^2 g_{im}}{dt^2}(t) w_i(x) \right), w_k \right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m (w_i, w_k) \dfrac{d^2 g_{im}}{dt^2}(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \int_\Omega a(x) \nabla u_m \nabla w_k dx \\ &= \int_\Omega a(x) \nabla \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(x) \right) \nabla w_k dx \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m g_{im}(t) \displaystyle\int_\Omega a(x) \nabla w_i(x) \nabla w_k dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)A_k(s)ds &= \int_0^t g(t-s)\int_\Omega a(x)\nabla u_m(s)\nabla w_k dx\\
&= \int_0^t g(t-s)\int_\Omega a(x)\nabla\left(\sum_{i=1}^m g_{im}(s)w_i(x)\right)\nabla w_k dx\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \displaystyle\int_0^t g(t-s)g_{im}(s)\int_\Omega a(x)\nabla w_i(x)\nabla w_k dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_1((u_m(t))_t, w_k) &= \mu_1\left(\left(\textstyle\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x)\right)_t, w_k\right)\\
&= \mu_1\left(\left(\textstyle\sum_{i=1}^m \dfrac{dg_{im}(t)}{dt}w_i(x)\right), w_k\right)\\
&= \mu_1 \textstyle\sum_{i=1}^m \dfrac{dg_{im}(t)}{dt}(w_i(x), w_k),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_2(z(.,1), w_k) &= \mu_2\left(\left(\textstyle\sum_{i=1}^m h_{im}(t)\phi_i(x,\rho)\right), w_k\right)\\
&= \mu_2 \textstyle\sum_{i=1}^m (\phi_i, w_k)h_{im}(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre.

$$\begin{cases}
\sum_{i=1}^m (w_i, w_k)\dfrac{\partial^2 g_{ik}}{\partial t^2}(t) + \mu_1 \displaystyle\sum_{i=1}^m (w_i, w_k)\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}(t) + M(\|\nabla u\|_a^2)\sum_{i=1}^m A_i(t)g_{ik}(t)\\
\sum_{i=1}^m \displaystyle\int_0^t g(t-s)A_i(s)g_{im}(s) + \mu_2\sum_{i=1}^m (\phi_i, w_k)h_{ik}(t) - (|u_m|^{p-2}u_m, w_k) = 0,\\
g_{ik}(0) = \alpha_{ik}, \quad (g_{ik})_t(0) = \beta_{ik}.
\end{cases} \tag{2.23}$$

Et

$$\begin{cases}
\tau \sum_{i=1}^m (\phi_i, \phi_k)\dfrac{\partial h_{ik}}{\partial t}(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^m ((\phi_i)_\rho, \phi_k)h_{ik}(t)\\
h_{ik}(0) = \gamma_{ik}.
\end{cases} \tag{2.24}$$

Grâce au théorème de Caratheodory des équations différentielles ordinaires, on peut conclure qu'il existe un t_m qui dépend uniquement de $|\alpha_{im}|, |\beta_{im}|$ et $|\gamma_{im}|$ tel que dans $[0, t_m]$, le problème (2.23)-(2.24) admet une solution locale unique $(g_m(t), h_m(t)) \in (C^2[0, t_m])^2$.

Étape 02 : Estimation a priori

En multipliant l'équation (2.20) par $(g_{km})_t(t)$, en sommant pour $k = 1, 2, ..., m$, et en intégrant la relation résultante sur $(0,t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\|(u_m)_t\|_2^2+\left(m_0-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u_m\|_a^2+\frac{m_1}{\gamma+1}\|\nabla u_m\|_a^{2\gamma+2}+(g\circ\nabla u_m)(t)\right]\\
&-\frac{1}{p}\|u_m\|_p^p+\mu_1\int_0^t\|(u_m)_t\|_2^2ds+\mu_2\int_0^t\int_\Omega z_m(.,1)(u_m)_tdxds+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla u_m\|_a^2\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t(g'\circ\nabla u_m)(t)\\
&=\frac{1}{2}\left[m_0\|\nabla u_0\|_a^2+\frac{m_1}{\gamma+1}\|\nabla u_0\|_a^{2\gamma+2}+\|u_1\|_2^2\right]-\frac{1}{p}\|u_0\|_p^p.
\end{aligned}\tag{2.25}$$

De même, soit $\xi\geq 0$. On multiplie l'équation (2.21) par $(\xi/\tau)(h_{km})$, puis on effectue la somme pour $k=1,2,...,m$, et en intégrant la relation obtenue sur $(0,t)\times(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi}{2}\int_\Omega\int_0^1(z_m)^2d\rho dx+\frac{\xi}{\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1(z_m)_\rho z_m d\rho dxds\\
&=\frac{\xi}{2}\|z_{m0}\|_{L^2(\Omega\times(0,1))}.
\end{aligned}\tag{2.26}$$

Notons qu'on peut réécrire le dernier terme à gauche de l'équation (2.26) comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1(z_m)_\rho z_m d\rho dxds &=\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial}{\partial\rho}(z_m)^2d\rho dxds\\
&=\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega(z_m^2(x,1,s)-z_m^2(x,0,s))dxds.
\end{aligned}\tag{2.27}$$

En sommant (2.25) et (2.26) en tenant compte de (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned}
&E_m(t)+\left(\mu_1-\frac{\xi}{2\tau}\right)\int_0^t\|(u_m)_t\|_2^2ds+\mu_2\int_0^t\int_\Omega z_m(.,1)(u_m)_tdxds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla u_m\|_a^2-\frac{1}{2}\int_0^t(g'\circ\nabla u_m)(t)+\frac{\xi}{2\tau}\int_0^t\int_\Omega z_m^2(x,1,s)dxds\\
&=E_m(0).
\end{aligned}$$

Supposons que $\mu_2<\mu_1$ et choisissons ξ de sorte que (2.8) soit satisfaite. En utilisant l'inégalité de Young, on trouve qu'il existe deux constantes positives c_4 et c_5 telle que :

$$\begin{aligned}
&E_m(t)+c_4\int_0^t\|(u_m)_t\|_2^2ds+c_5\int_0^t\|z_m(.,1)\|_2^2+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)\|\nabla u_m\|_a^2ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t(g'\circ\nabla u_m)(t)ds\\
&\leq E_m(0),
\end{aligned}\tag{2.28}$$

avec

$$c_4 = \mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}, \; c_5 = \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}.$$

En utilisant (A_1)-(A_3), et (2.22), on peut déduire qu'il existe une constante positive C indépendante de m telle que

$$E_m(t) \leq C.$$

Alors la solution $(g_m(t), h_m(t))$ peut être étendue sur l'intervalle $[0, T]$.
En outre, on a

$$C \geq E_m(t) = \frac{1}{2}\|(u_m)_t\|_2^2 + J_m(t) \geq \frac{1}{p}\|u_m\|_p^p,$$

par conséquent, lorsque $m \to +\infty$ dans (2.28), on constate que

$$\begin{cases} u_m \textbf{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T; H_a(\Omega) \cap L^p(\Omega)). \\ u_m \textbf{ demeure dans un ensemble borné de } L^2(0,T; H_a(\Omega)). \\ (u_m)_t \textbf{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \\ z_m \textbf{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T; L^2(\Omega \times (0,1))). \end{cases} \tag{2.29}$$

Étape 03 : Convergence et résultat d'existence

De manière similaire à [52], on déduit qu'on peut extraire des sous-suites convergentes $(u_{m_k})_k$, $(z_{m_k})_k$ et $((u_{m_k})_t)_k$ de (u_m), (z_m) et $(u_m)_t$ respectivement, et

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \;\; faible^* \;\; dans \;\; L^\infty(0,T; H_a(\Omega) \cap L^p(\Omega)),$$

$$(u_{m_k})_t \rightharpoonup u_t \;\; faible^* \;\; dans \;\; L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),$$

$$z_{m_k} \rightharpoonup z \;\; faible^* \;\; dans \;\; L^\infty(0,T; L^2(\Omega \times (0,1))).$$

En outre, il découle de (2.29) que u_{m_k} reste dans un ensemble borné de $L^2(0,T; H_a(\Omega))$ et $(u_{m_k})_t$ reste dans un ensemble borné de $L^2(0,T; L^2(\Omega))$, par conséquent $(u_m)_m$ est bornée dans $H^1(Q)$. De plus, on sait qu'en vertu du théorème de Rellich-Kondrachov, l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compacte. Et en tant qu'un résultat du théorème de Rellich, toute suite faiblement convergente dans $H^1(Q)$ a une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(Q)$. Ainsi,

$$u_{m_k} \to u \;\; dans \;\; L^2(Q). \tag{2.30}$$

D'autre part, en utilisant le lemme (1.1), on trouve qu'il existe une sous-suite de (u_{m_k}) encore notée (u_{m_k}), telle que

$$u_{m_k} \to u \;\; presque \;\; partout \;\; dans \;\; Q. \tag{2.31}$$

De plus, comme $|u_{m_k}|^{p-2}u_{m_k}$ reste dans un domaine borné de $L^\infty(0,T; L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega))$, on a

$$|u_{m_k}|^{p-2}u_{m_k} \rightharpoonup w \;\; faible^* \;\; dans \;\; L^\infty(0,T; L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)). \tag{2.32}$$

Maintenant, en suivant la même méthode que celle utilisée dans [52], on peut démontrer que $w = |u|^{p-2}u$ comme suit.
À partir de (2.31), on obtient :

$$|u_{m_k}|^{p-2}u_{m_k} \to |u|^{p-2}u \ \ p.p \ \ dans \ \ Q, \tag{2.33}$$

et d'après le lemme (2.5), on a

$$|u_{m_k}|^{p-2}u_{m_k} \rightharpoonup |u|^{p-2}u \ \ faible \ \ dans \ \ L^{\frac{p}{p-1}}(Q). \tag{2.34}$$

Grâce à l'unicité de la limite et la relation (2.34), cela nous permet de trouver que $w = |u|^{p-2}u$.
D'après (2.30), on a

$$u_{m_k}(0) \to u(0) \ \ dans \ \ L^2(Q).$$

De l'unicité de la limite et (2.22), on déduit que $u_0 = u(0)$. De la même manière on obtient $u_1 = u_t(0)$.
Ainsi, on peut prendre la limite dans (2.20) et (2.21), et en utilisant la propriété de la densité des espaces V_m et W_m, on en déduit que (2.1) a une solution locale. □

2.4.2 Existence Globale

Cette section est consacrée à la preuve de l'existence globale de la solution du problème (2.1), et ceci en utilisant la méthode de puits de potentiel, qui est basée sur le lemme (2.3). En utilisant le fait que

$$\lim_{t \to T*} \frac{c_*^p}{l a_1^p} \left(\frac{2p}{l(p-2)} E(u(t), u_t(t)) \right)^{\frac{p-2}{2}} \leq \beta < 1,$$

on peut étendre T^* à T, et obtenir le résultat suivant

Theorem 2.2. *Supposons que les conditions du lemme (2.3) soient vérifiées, alors la solution (2.1) est globale et bornée.*

Démonstration. Pour arriver à notre résultat, on doit démontrer que

$$\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_a^2$$

est bornée indépendemment du temps t.

En utilisant (2.9), (2.10), (2.14) et (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} E(0) \geq E(t) &= J(t) + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 \\ &\geq \frac{p-2}{2p}(l\|\nabla u\|_a^2) + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 \\ &\geq \min\left\{l\frac{p-2}{2p}, \frac{1}{2}\right\}\left(\|\nabla u\|_a^2 + \|u_t\|_2^2\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\|\nabla u\|_a^2 + \|u_t\|_2^2 \leq CE(0).$$

avec $C = \dfrac{1}{\min\left\{l\dfrac{p-2}{2p}, \dfrac{1}{2}\right\}}$. □

2.5 Stabilité de la solution

Dans cette section, on étudie la décroissance générale de l'énergie pour le problème (2.1). On définit la fonctionnelle $F(t)$ comme suit

$$F(t) := E(t) + \varepsilon_1\phi(t) + \varepsilon\psi(t), \tag{2.35}$$

où ε_1 et ε_2 sont deux constantes positives qui seront spécifiées ultérieurement, et

$$\phi(t) = \int_\Omega uu_t dx. \tag{2.36}$$

$$\psi(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \tag{2.37}$$

Le lemme suivant exprime la relation d'équivalence entre les deux fonctionnelles $F(t)$ et $E(t)$.

Lemme 2.6. Il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telle que

$$\beta_1 F(t) \leq E(t) \leq \beta_2 F(t). \tag{2.38}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |F(t) - E(t)| &= \left|\varepsilon_1\phi(t) - \varepsilon_2\psi(t)\right| \\ &\leq \varepsilon_1 \int_\Omega |u||u_t|dx + \varepsilon_2 \int_\Omega |u_t|\left|\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right|dx, \end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Holder, de Young et de Poincarré, on obtient

$$\begin{aligned}
|F(t)-E(t)| &\leq \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{\varepsilon_1}{2}\|u\|_2^2+\frac{\varepsilon_2(m_0-l)}{2}\int_0^t g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_2^2 ds \\
&\leq \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{\varepsilon_1 c_*^2}{2a_1^2}\|\nabla u\|_a^2+\frac{\varepsilon_2 c_*^2(m_0-l)}{a_1^2}(g\circ\nabla u)(t) \\
&\leq c(\varepsilon_1,\varepsilon_2)E(t).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

où $c(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=max\left\{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2},\frac{\varepsilon_1 c_*^2}{2a_1^2},\frac{\varepsilon_2 c_*^2(m_0-l)}{a_1^2}\right\}$, et donc, de (2.39) on peut obtenir (2.38) en choisissant ε_1 et ε_2 suffisamment petites. □

Lemme 2.7. La fonctionnelle $\phi(t)$ définie dans (2.36) vérifie

$$\phi'(t)\leq(1+\varepsilon)\|u_t\|_2^2-c_\varepsilon\|\nabla u\|_a^2-m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\frac{m_0-l}{4\varepsilon}(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\|z(1,t)\|_2^2+\|u\|_p^p.$$

Démonstration. En dérivant (2.36) par rapport à t et en se servant de l'équation (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \|u_t\|_2^2-m_0\|\nabla u\|_a^2-m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\|u\|_p^p \\
&-\mu_1\int_\Omega uu_t dx-\mu_2\int_\Omega uz(1,t)dx+\int_\Omega a(x)\nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \\
&= \|u_t\|_2^2-m_0\|\nabla u\|_a^2-m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\|u\|_p^p+I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

En adaptant les inégalités de Hölder, de Young et de Sobolev-Poincaré, et la relation (2.5), on estime I_1, I_2 et I_3 comme suit

$$I_1\leq\varepsilon\|u_t\|_2^2+\frac{c_*^2\mu_1^2}{4a_1^2\varepsilon}\|\nabla u\|_a^2, \tag{2.40}$$

$$I_2\leq\varepsilon\|z(1,t)\|_2^2+\frac{c_*^2\mu_2^2}{4a_1^2\varepsilon}\|\nabla u\|_a^2, \tag{2.41}$$

et

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_\Omega\nabla u\int_0^t g(t-s)a(x)(\nabla u(s)-\nabla u(t))dsdx+\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 \\
&\leq(\varepsilon+(m_0-l))\|\nabla u\|_a^2+\frac{(m_0-l)}{4\varepsilon}(g\circ\nabla u)(t).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

En combinant les inégalités (2.40),(2.41) et (2.42), on trouve

$$\phi'(t)\leq(1+\varepsilon)\|u_t\|_2^2-c_\varepsilon\|\nabla u\|_a^2-m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\frac{m_0-l}{4\varepsilon}(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\|z(1,t)\|_2^2+\|u\|_p^p,$$

où

$$c_\varepsilon := l - \varepsilon - \frac{c_*^2}{4a_1^2\varepsilon}(\mu_1^2 + \mu_2^2) > 0.$$

□

Lemme 2.8. La fonctionnelle $\psi(t)$ définie dans (2.37) vérifie :

$$\begin{aligned}\psi'(t) \quad &\leq -\left\{\int_0^t g(s)ds - 2\delta\right\}\|u_t\|_2^2 + \delta\{m_0 + 2(m_0 - l)^2 + c_a\}\|\nabla u\|_a^2 \\ &+\delta m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + \delta\|z(1,t)\|_2^2 + c_3(g \circ \nabla u)(t) - \frac{g(0)c_*^2}{4\delta a_1^2}(g' \circ \nabla u)(t).\end{aligned}$$

Démonstration. On dérive la fonctionnelle $\psi(t)$ définie dans (2.37) par rapport à t en utilisant l'équation (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}\psi'(t) = \quad & -\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & -\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\|u_t\|_2^2 \\ & = M(|\nabla u\|_a^2)\int_\Omega a(x)\nabla u\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \\ & -\int_\Omega\int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(s)ds\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx \\ & +\mu_1\int_\Omega u_t\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & +\mu_2\int_\Omega z(1,t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & -\int_\Omega |u|^{p-2}u\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & -\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\|u_t\|_2^2 \\ & = I_1 + I_2 + \cdots + I_6 - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\|u_t\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Dans ce qui suit, on va estimer tous les termes de l'équation (2.43).
Commençant par le premier terme, en utilisant les inégalités de Hölder et de Young, la condition (A_1) et la relation (2.5), on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(m_0 + m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma}\right) \int_\Omega a(x)\nabla u \int_0^t g(t-s)\nabla u(t) - \nabla u(s) ds dx \\
&\leq \left(m_0 + m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma}\right) \left[\delta\|\nabla u\|_a^2 + \frac{m_0 - l}{4\delta a_1^2}(g \circ \nabla u)(t)\right] \\
&\leq \delta m_0\|\nabla u\|_a^2 + \delta m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + \left[\left(\frac{m_0}{4\delta a_1^2} + \frac{m_1}{4\delta a_1^2}\left(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\right)^\gamma\right)(m_0 - l)\right](g \circ \nabla u)(t) \\
&:= \delta m_0\|\nabla u\|_a^2 + \delta m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + c_\gamma(g \circ \nabla u)(t),
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)a(x)^{\frac{1}{2}}(|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|)ds\right)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4\delta}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)a(x)^{\frac{1}{2}}(\nabla u(t) - \nabla u(s))ds\right)^2 dx \\
&\leq \left(2\delta + \frac{1}{4\delta}\right)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)a(x)^{\frac{1}{2}}(\nabla u(t) - \nabla u(s))ds\right)^2 dx + 2\delta(m_0 - l)^2\|\nabla u\|_a^2 \\
&\leq \left(2\delta + \frac{1}{4\delta}\right)(m_0 - l)(g \circ \nabla u)(t) + 2\delta(m_0 - l)^2\|\nabla u\|_a^2,
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

$$
I_3 \leq \delta\|u_t\|_2^2 + \frac{(m_0 - l)\mu_1^2 c_*^2}{4\delta a_1^2}(g \circ \nabla u)(t), \tag{2.46}
$$

$$
I_4 \leq \delta\|z(1,t)\|_2^2 + \frac{(m_0 - l)\mu_2^2 c_*^2}{4\delta a_1^2}(g \circ \nabla u)(t). \tag{2.47}
$$

Pour estimer I_5, on utilise les inégalités de Hölder et de Young, la condition (A_1) et les deux relations (2.5) et (2.19). L'estimation est donnée comme suit

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \left| \int_\Omega |u|^{p-2}u \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx \right| \\
&\leq \delta \frac{c_*^{2p-2}}{a_1^{2p-2}}\|\nabla u\|_a^{2p-2} + \frac{(m_0 - l)c_*^2}{4\delta a_1^2}(g \circ \nabla u)(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \delta\left\{\frac{c_*^{2p-2}}{a_1^{2p-2}}\left(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\right)^{p-2}\right\}\|\nabla u\|_a^2+\frac{(m_0-l)c_*^2}{4\delta a_1^2}(g\circ\nabla u)(t)\\
&:=\delta c_a\|\nabla u|_a^2+\frac{(m_0-l)c_*^2}{4\delta a_1^2}(g\circ\nabla u)(t).
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

De même, pour I_6, on trouve

$$
I_6 \leq \delta\|u_t\|_2^2-\frac{g(0)c_*^2}{4\delta a_1^2}(g'\circ\nabla u)(t). \tag{2.49}
$$

En combinant les estimations (2.44)-(2.49), l'inegalité (2.43) devient

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \quad &\leq -\left\{\int_0^t g(s)ds-2\delta\right\}\|u_t\|_2^2+\delta\{m_0+2(m_0-l)^2+c_a\}\|\nabla u\|_a^2\\
&+\delta m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\delta\|z(1,t)\|_2^2+c_3(g\circ\nabla u)(t)-\frac{g(0)c_*^2}{4\delta a_1^2}(g'\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}
$$

où

$$
c_3=\left\{c_\gamma+\left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(m_0-l)+\frac{(\mu_1^2+\mu_2^2)(m_0-l)c_*^2}{4\delta a_1^2}+\frac{(m_0-l)c_*^2}{4\delta a_1^2}\right\}.
$$

□

Lemme 2.9. Assumons que les hypothèses (A_1)-(A_3) sont satisfaites. Soit $(u_0,u_1)\in H_a(\Omega)\times L^2(\Omega)$ donné et satisfait les conditions du lemme (2.3). Alors, pour tout t_0, la fonctionnelle $F(t)$ vérifie :

$$
F'(t)\leq -\delta_1 E(t)+\delta_2(g\circ\nabla u)(t), \tag{2.50}
$$

où δ_1 et δ_2 sont des constantes positives.

Démonstration. Tout d'abord, comme la fonction g est continue et positive avec $g(0)\geq 0$, alors pour tout $t_0>0$,

$$
\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{t_0} g(s)ds = g_0.
$$

En utilisant les lemmes (2.7) et (2.8), on obtient

$$
\begin{aligned}
F'(t) \quad &\leq -\{c_0+\varepsilon_2(g_0-2\delta)-\varepsilon_1(1+\varepsilon)\}\|u_t\|_2^2-\{c_0-(\varepsilon_2\delta+\varepsilon_1\varepsilon)\}\|z(1,t)\|_2^2\\
&-\left\{\varepsilon_1 c_\varepsilon-\varepsilon_2\delta\{m_0+2(m_0-l)^2+c_a\}\right\}\|\nabla u|_a^2-m_1\{\varepsilon_1-\varepsilon_2\delta\}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\\
&+\varepsilon_1\|u\|_p^p+\left\{\frac{\varepsilon_1(m_0-l)}{4\varepsilon}+\varepsilon_2 c_3\right\}(g\circ\nabla u)(t)+\left\{\frac{1}{2}-\varepsilon_2\frac{g(0)c_*^2}{4\delta a_1^2}\right\}(g'\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}
$$

Maintenant, on doit choisir δ suffisamment petit tel que :

$$g_0 - 2\delta > \frac{g_0}{2} \quad et \quad \frac{\delta\{m_0 + 2(m_0 - l)^2 + c_a\}}{c_\varepsilon} < \frac{g_0}{4}.$$

Une fois le δ est fixé, on choisit ε_1 et ε_2 de sorte que

$$\frac{g_0}{4\varepsilon_2} < \varepsilon_1 < \frac{g_0\varepsilon_2}{2}, \tag{2.51}$$

et

$$c_4 = \varepsilon_2(g_0 - 2\delta) - \varepsilon_1(1+\varepsilon) > 0,$$

$$c_5 = c_0 - (\varepsilon_2\delta + \varepsilon_1\varepsilon) > 0,$$

$$c_6 = \varepsilon_1 c_\varepsilon - \varepsilon_2\delta(m_0 + 2(m_0 - l)^2 + c_a) > 0,$$

$$c_7 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2\delta > 0.$$

De plus, prenant ε_1 et ε_2 suffisamment petits pour que (2.38) et (2.51) restent valides et que :

$$c_8 = \frac{1}{2} - \varepsilon_2\frac{g(0)c_*^2}{4\delta a_1^2} > 0.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq t_0$, on obtient le résultat voulu. □

Theorem 2.3. *Supposons que les conditions (A_1) - (A_3) soient vérifiées. Si $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, alors l'énergie $E(t)$ vérifie :*

$$E(t) \leq K e^{-k\int_{t_0}^t \zeta(s)ds}, \quad t \geq t_0,$$

où K et k sont deux constantes positives.

Démonstration. Multipliant (2.50) par $\zeta(t)$, on a

$$\zeta(t)F'(t) \leq -\delta_1\zeta(t)E(t) + \delta_2\zeta(t)(g \circ \nabla u)(t),$$

de (A_2) et en appliquant le lemme (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \zeta(t)F'(t) &\leq -\delta_1\zeta(t)E(t) - \delta_2(g' \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -\delta_1\zeta(t)E(t) - 2\delta_2 E'(t), \quad \forall t_0 \leq t, \end{aligned}$$

d'où

$$\zeta(t)F'(t) + 2\delta_2 E'(t) \leq -\delta_1\zeta(t)E(t). \tag{2.52}$$

On introduit la fonctionnelle de Lyapunove $L(t)$ définie par

$$L(t) = \zeta(t)F(t) + CE(t), \tag{2.53}$$

et on la dérive par rapport à t, on obtient

$$L'(t) = \zeta'(t)F(t) + \zeta(t)F'(t) + CE'(t), \tag{2.54}$$

En utilisant (A_2) et (2.52), on trouve

$$L'(t) \leq -\delta_3\zeta(t)E(t), \ \ \forall t_0 \leq t, \tag{2.55}$$

où $c \geq 2\delta_2$.
D'autre part, on peut constater que les deux fonctionnelles, $L(t)$ et $E(t)$, sont équivalentes grâce à l'équivalence établie entre $F(t)$ et $E(t)$ dans le lemme (2.6). De plus, à partir de l'équation (2.53), on peut obtenir

$$\alpha_1 E(t) \leq L(t) \leq \alpha_2 E(t), \tag{2.56}$$

L'utilisation de (2.56), nous permet d'obtenir

$$L'(t) \leq -\delta_4\zeta(t)L(t), \ \ \forall t_0 \leq t, \tag{2.57}$$

où $\delta_4 = \dfrac{\delta_3}{\alpha_2}$. Une simple intégration de (2.57) conduit à

$$L(t) \leq L(t_0)e^{-\delta_4 \int_{t_0}^{t} \zeta(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0$$

. $\square$

2.6 Explosion en temps fini de la solution

Theorem 2.4. *Si les hypothèses (A_1)-(A_3), (2.6) et $E(0) < 0$ sont satisfaites, alors la solution du problème (2.1) connaîtra une explosion en temps fini*

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\kappa\sigma\Psi^{1-\sigma}(0)}.$$

Démonstration. Soit

$$H(t) = -E(t), \tag{2.58}$$

de (2.10), on trouve que

$$H'(t) = -E'(t) \geq c_0(\|u_t\|_2^2 + \|z(1,t)\|_2^2) \geq 0,$$

d'où la croissance de la fonction $H(t)$. De (2.9) et (2.58), on obtient

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p}\|u\|_p^p, \quad t \in [0,T). \tag{2.59}$$

On définit la fonction suivante

$$\Psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx, \tag{2.60}$$

où $\varepsilon > 0$ est une petite constante qui sera choisie ultérieurement, et

$$0 < \sigma \leq \min\left\{\frac{p-2}{2p}, \frac{p-2}{p}\right\}. \tag{2.61}$$

On dérive la fonction (2.60) en utilisant (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx + \varepsilon \int_\Omega u u_{tt} dx \\
&= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H(t) + \varepsilon\|u_t\|_2^2 - \varepsilon m_0 \|\nabla u\|_a^2 - \varepsilon m_1 \|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + \varepsilon\|u\|_p^p \\
&+\varepsilon \int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(s) ds dx - \varepsilon\mu_1 \int_\Omega u u_t dx - \varepsilon\mu_2 \int_\Omega u z(1,t) dx.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Pour estimer le 6^{ieme},le 7^{ieme} et le 8^{ieme} terme dans (2.62), on utilise les inégalités de Hölder et de Young, pour η, $\delta > 0$, on trouve

$$\int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(s) ds dx \geq \left(1 - \frac{1}{4\eta}\right)\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 - \eta(g \circ \nabla u)(t), \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 \int_\Omega u u_t dx &\leq \delta\mu_1^2\|u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\|u_t\|_2^2 \\
&\leq \delta\mu_1^2\|u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta c_0}H'(t),
\end{aligned} \tag{2.64}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_2 \int_\Omega u z(1,t) dx &\leq \delta\mu_2^2\|u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\|z(1,t)\|_2^2 \\
&\leq \delta\mu_2^2\|u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta c_0}H'(t),
\end{aligned} \tag{2.65}$$

En combinant les estimations (2.63)-(2.65) dans (2.62), on obtient :

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \ &\geq \Big\{(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)-\frac{\varepsilon}{2\delta c_0}\Big\}H'(t)+\varepsilon\|u_t\|_2^2-\varepsilon m_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\varepsilon\|u\|_p^p\\ &-\varepsilon\Big\{m_0-\Big(1-\frac{1}{4\eta}\Big)\int_0^t g(s)ds\Big\}\|\nabla u\|_a^2-\varepsilon\eta(g\circ\nabla u)(t)\\ &-\varepsilon\delta(\mu_1^2+\mu_2^2)\|u\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.66}$$

En utilisant (2.9) et (2.58), on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \ &\geq \Big\{(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)-\frac{\varepsilon}{2\delta c_0}\Big\}H'(t)+\varepsilon\{\frac{p}{2}+1\}\|u_t\|_2^2+\varepsilon m_1\Big\{\frac{p}{2\gamma+2}-1\Big\}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\\ &+\varepsilon\Big\{m_0\Big(\frac{p}{2}-1\Big)-\Big(\frac{p}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\Big)\Big(\int_0^t g(s)ds\Big)\Big\}\|\nabla u\|_a^2+\varepsilon pH(t)\\ &+\varepsilon\Big\{\frac{p}{2}-\eta\Big\}(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\frac{p\xi}{2}\int_0^1\|z(\rho,t)\|_2^2d\rho-\varepsilon\delta(\mu_1^2+\mu_2^2)\|u\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Grace à (A_1) et (2.6), on a

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \ &\geq \Big\{(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)-\frac{\varepsilon}{2\delta c_0}\Big\}H'(t)+\varepsilon\Big\{\frac{p}{2}+1\Big\}\|u_t\|_2^2+\varepsilon m_1b_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\\ &+\varepsilon b_2\|\nabla u\|_a^2+\varepsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\frac{p\xi}{2}\int_0^1\|z(\rho,t)\|_2^2d\rho\\ &-\varepsilon\delta(\mu_1^2+\mu_2^2)\|u\|_2^2+p\varepsilon H(t),\end{aligned} \tag{2.68}$$

où $b_1=\dfrac{p}{2\gamma+2}-1>0, b_2=m_0\Big(\dfrac{p}{2}-1\Big)-\Big(\dfrac{p}{2}-1+\dfrac{1}{4\eta}\Big)\Big(\displaystyle\int_0^t g(s)ds\Big)>0, b_3=\dfrac{p}{2}-\eta>0.$
Par conséquent, en prenant $\delta=H^{\sigma}(t)/2c_0k$, où $k>0$ sera spécifié ultérieurement, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) \ &\geq \{(1-\sigma)-\varepsilon k\}H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\Big\{\frac{p}{2}+1\Big\}\|u_t\|_2^2+\varepsilon m_1b_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}+\varepsilon b_2\|\nabla u\|_a^2\\ &\varepsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\frac{p\xi}{2}\int_0^1\|z(\rho,t)\|_2^2d\rho-\varepsilon\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{2c_0k}H^{\sigma}(t)\|u\|_2^2+p\varepsilon H(t),\end{aligned} \tag{2.69}$$

exploitant (2.59), on trouve

$$H^{\sigma}(t)\|u\|_2^2\leq\frac{1}{p^{\sigma}}\|u\|_p^{\sigma p}\|u\|_2^2\leq\frac{c_p^2}{p^{\sigma}}\|u\|_p^{\sigma p+2}. \tag{2.70}$$

En substituant (2.70) dans (2.69), on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq \{(1-\sigma)-\varepsilon k\}H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\left\{\frac{p}{2}+1\right\}\|u_t\|_2^2+\varepsilon m_1 b_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\\ &+\varepsilon b_2\|\nabla u\|_a^2+\varepsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\frac{p\xi}{2}\int_0^1\|z(\rho,t)\|_2^2d\rho-\varepsilon\frac{c}{k}\|u\|_p^{\sigma p+2}+p\varepsilon H(t),\end{aligned} \tag{2.71}$$

où $c=c_p^2(\mu_1^2+\mu_2^2)/2c_0p^{\sigma}$.

De (2.5), (2.61) et le lemme (2.4), il résulte

$$\|u\|_p^{\sigma p+2}\leq C\left(\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_p^p\right)\leq\frac{C}{a_1^2}\|\nabla u\|_a^2+C\|u\|_p^p. \tag{2.72}$$

En combinant (2.72) avec (2.71), on obtient

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq \{(1-\sigma)-\varepsilon k\}H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\left\{\frac{p}{2}+1\right\}\|u_t\|_2^2+\varepsilon m_1 b_1\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\\ &+\varepsilon\left\{b_2-\frac{c}{ka_1^2}C\right\}\|\nabla u\|_a^2+\varepsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\frac{p\xi}{2}\int_0^1\|z(\rho,t)\|_2^2d\rho\\ &-\varepsilon\frac{c}{k}C\|u\|_p^p+p\varepsilon H(t).\end{aligned} \tag{2.73}$$

En soustrayant et en ajoutant $\varepsilon\theta H(t)$ du côté droit de (2.74) et en utilisant (2.9) et (2.58), on déduit que

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq \{(1-\sigma)-\varepsilon k\}H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\left\{\frac{p}{2}-\frac{\theta}{2}+1\right\}\|u_t\|_2^2+\varepsilon m_1\left\{b_1-\frac{\theta}{2\gamma+2}\right\}\|\nabla u\|_a^{2\gamma+2}\\ &+\varepsilon\left\{b_2-\frac{m_0\theta}{2}-\frac{c}{ka_1^2}C\right\}\|\nabla u\|_a^2+\varepsilon\left\{b_3-\frac{\theta}{2}\right\}(g\circ\nabla u)(t)\\ &+\varepsilon\left\{\frac{p\xi}{2}-\frac{\theta\xi}{2}\right\}\int_0^1\|z(\rho,t)\|_2^2d\rho-\varepsilon\left\{\frac{\theta}{p}-\frac{c}{k}C\right\}\|u\|_p^p+\varepsilon(p-\theta)H(t),\end{aligned} \tag{2.74}$$

On choisit θ telle que

$$0<\theta<\min\left\{p,(2\gamma+2)b_1,\frac{2b_2}{m_0},2b_3\right\}.$$

Puis, on prend k suffisamment grand telle que

$$b_2-\frac{\theta m_0}{2}-\frac{c}{ka_1^2}C>0,\quad et\quad \frac{\theta}{p}-\frac{c}{k}C>0.$$

Après avoir fixer k, on choisit ε assez petit pour que

$$(1-\sigma)-\varepsilon k>0,\quad et\quad \Psi(0)=H^{1-\sigma}(0)+\varepsilon\int_\Omega u_0u_1dx.$$

D'où, de (**??**) on obtient

$$\Psi'(t) \geq K\left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_a^2 + \|\nabla u\|_a^{2\gamma+2} + \|u\|_p^p + (g \circ \nabla u)(t) + \int_0^1 \|z(\rho,t)\|_2^2 d\rho + H(t) \right), \tag{2.75}$$

où K est une constante positive.
On passe maintenant à l'estimation du terme $\Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$.
On a d'après l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right| \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \leq c_p \|u\|_p \|u_t\|_2,$$

ce qui implique

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq c_p \|u\|_p^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

l'inégalité de Young nous donne

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C\left(\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right), \tag{2.76}$$

où $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\theta} = 1$. Or l'application du lemme (2.4) necéssite de prendre $\theta = 2(1-\sigma)$, ce qui donne $\dfrac{\mu}{1-\sigma} = \dfrac{2}{1-2\sigma} \leq p$. Par conséquent, (2.76) devient

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C\left(\|u\|_p^s + \|u_t\|_2^2 \right), \tag{2.77}$$

où $s = \dfrac{2}{1-2\sigma}$.
Encore une fois, graçe au lemme (2.4) et à (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C\left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 \right) \\ &\leq \frac{C}{a_1^2}\left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_a^2 + \|u_t\|_2^2 \right). \end{aligned} \tag{2.78}$$

En combinant (2.78) et (2.60), on trouve

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq N\left(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_a^2 + \|u\|_p^p + H(t) \right). \end{aligned} \tag{2.79}$$

De (2.75) et (2.79) on arrive à la relation suivante

$$\Psi'(t) \geq \kappa \Psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t), \quad pout\ \ tout\ \ t > 0, \tag{2.80}$$

où κ est une constante positive.
En effectuant une integration simple de (2.80) sur $(0, t)$, on obtient

$$\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\kappa\sigma t}{1-\sigma}}.$$

$\square$

CHAPITRE 3

LES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES D'UNE ÉQUATION VISCOÉLASTIQUE DE TYPE KIRCHHOFF AVEC UN TERME D'AMORTISSEMENT NON LINÉAIRE AUX BORDS ET UN TERME SOURCE

3.1 Introduction

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une équation viscoélatique de type Kirchhoff avec une densité non constante et des conditions aux bords non-linéaires, donnée par

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \left(a + b\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \alpha\Delta u_{tt} = 0 & \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \left(a + b\|\nabla u\|_2^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial v} + \alpha\dfrac{\partial u_{tt}}{\partial v} - \int_0^t g(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial v}ds + |u_t|^{m-2}u_t = |u|^{p-2}u & \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$, avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ assez régulière telle que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

ρ, a, b et $\alpha > 0$ sont des constantes positives. On désigne par ν la normale sortante de Γ, et par $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ la dérivée normale de u en un point de Γ, $m \geq 2$, g fonction de relaxation positive et décroissante.

Pour une fonction de densité non constante, Cavalcanti et al. [16], ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \gamma \Delta u_t = 0 & \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \Gamma \times (0, +\infty), \\ u(0) = u^0(x), \quad u_t(0) = u^1(x) & \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dans leur article, les auteurs ont d'abord prouvé l'existence globale de la solution faible pour $\gamma = 1$, ensuite, ils ont établi le taux de décroissance de l'énergie pour $\gamma > 0$. Messaoudi et Tatar [65] ont également étudié (3.2), en prenant $\gamma = 0$ et un terme source non linéaire. En introduisant une nouvelle fonctionnelle et en utilisant la méthode de puits de potentiel, ils ont montré que le terme viscoélastique est suffisant pour assurer l'existence globale et la décroissance uniforme des solutions, pourvu que les conditions initiales soient dans le même ensemble stable. Plus tard, Wu [92] a étudié (3.2) avec $\gamma = 0$, un terme source non linéaire et un terme d'amortissement faible. Il a debattu la décroissance uniforme de l'énergie de la solution sous des conditions appropriées sur la fonction de relaxation g et les conditions initiales.

Pour une équation d'onde avec une intéraction d'un terme d'amortissement et un terme source, Vitillaro [88] a étudié le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,t) = 0 & \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} + |u_t|^{m-2} u_t = |u|^{p-2} u & \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

où il a démontré que si $m \geq p$, le terme d'amortissement superlinéaire $|u|^{m-2}u$ implique l'existence globale de la solution pour des conditions initiales arbitraires. En revanche, si $m < p$, la solution du problème (3.3) n'existe plus.

Cependant, en présence du terme viscoélastique, Liu et al. [53] ont étudié la décroissance de l'énergie ainsi que l'explosion de la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = 0 & \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t g(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial v}ds + |u_t|^{m-2}u_t = |u|^{p-2}u & \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Wu [93] a traité le problème (3.4) dans un cadre plus général. En adaptant la méthode de Faedo-Galerkin, il a prouvé l'existence de la solution faible et a travaillé sur sa stabilité. De plus, il a démontré que la solution peut exploser en temps fini pour certaines données initiales dans un ensemble instable.

Di et al. [27] ont pris une fonction de densité non constante et ont étudié le problème d'onde viscoélastique avec un terme source non linéaire aux bords suivant :

$$\begin{cases} u_t^{\rho-1}u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = 0 & \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x,t) = 0 & \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t g(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial v}ds = f(u) & \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ils ont démontré l'existence globale d'une solution faible sous certaines hypothèses sur g et f, en supposant que $I(u_0) \geq 0$ et que $E(0) = d$. Or, pour $I(u_0) < 0$ et $E(0) < \beta\delta$, l'explosion en temps fini a été établie. Plus tard, Di et Shang [26] ont étudié (3.5) avec $f(u) \equiv 0$, un terme d'amortissement non linéaire aux bords et un terme source. Tout d'abord, ils ont prouvé l'existence globale des solutions faibles en combinant la méthode d'approximation de Galerkin, la méthode de puits de potentiel et la méthode de monotonie. Ils ont également établi un résultat de décroissance de l'énergie et ont montré l'explosion de la solution en temps fini sous certaines hypothèses sur g et les données initiales.

Pour l'équation d'onde viscoélastique de type Kirchhoff avec un terme Balakrishnan-Taylor et un terme d'amortissement non linéaire aux bords, Wu [94] a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - M(t)\Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = |u|^{p-1}u & \Omega \times (0,+\infty), \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ M((t)\frac{\partial u}{\partial v} - \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial v}ds + h(u_t) = |u|^{k-1}u & \Gamma_1 \times (0,+\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

où $M(t) = a + b\|\nabla u\|_2^2 + \sigma \int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx$. Ce modèle a été proposé par Balakrishnan et Taylor [7] pour étudier l'amortissement dans les structures flottantes. Dans ce contexte, Shun a examiné les taux de décroissance uniformes en faisant des hypothèses raisonnables sur la fonction de relaxation, le terme d'amortissement et le terme source. Zarai et ses collaborateurs [100] ont été intéressés par l'étude de (5.46) sans le terme source $(|u|^{p-1}u)$ avec $h = \alpha u_t$. Ils ont démontré l'existence globale des solutions et ont obtenu un résultat de décroissance d'énergie et ceci en employant la technique de multiplicateur.

3.2 Préliminaires

Dans cette section on introduit les notions, les outils mathématiques et les concepts de base nécessaires pour atteindre l'objectif de ce chapitre. Les normes usuelles des espaces $L^p(\Omega)$ et $L^p(\Gamma_1)$ sont notées $\|u\|_p$ et $\|u\|_{p,\Gamma_1}$ respectivement. La norme de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est représentée par la notation standard.

On définit l'espace de Hilbert

$$H^1_{\Gamma_0} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma 0} = 0 \right\},$$

muni de la structure de Hilbert introduite par l'espace $H^1(\Omega)$.

Pour affirmer nos résultats, on énonce les hypothèses suivantes :

(A_1) : La fonction de relaxation g est une fonction décroissante de classe C^1 qui satisfait pour tout $s > 0$ les propriétés suivantes :

$$g(s) \geq 0, g'(s) \leq 0, a - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l \geq 0.$$

(A_2) : Il existe une fonction différentiable positive ξ telle que

$$g'(s) \leq -\xi(s)g(s) \;\; pour \;\; tout \;\; s > 0,$$

avec

$$\xi'(t) \leq 0, \;\; et \;\; \int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty.$$

(A_3) : La constante p satisfait la condition suivante :

$$4 < p < \infty, \;\; si \;\; n = 1,2, \;\; et \;\; 4 < p < \frac{2(n-1)}{n-2} \;\; si \;\; n \geq 3.$$

On outre, on suppose que

$$\int_0^{+\infty} g(s)ds < \frac{a(\xi/2-1)}{\xi/2-1+1/2xi}. \tag{3.7}$$

On définit l'énergie associée au problème (3.1) par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}(a - \int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\ &+ \frac{\alpha}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u\|_{p.\Gamma_1}^p. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Maintenant, on rappelle les lemmes suivants :

Lemme 3.1. (Inégalité de Sobolev-Poincaré [2]) Soit $2 \leq q < \infty$ si $n = 1,2$, où $2 \leq q < \dfrac{2n}{n-2}$ si $n \geq 3$, alors, il existe une constante positive $c_* = c_*(\Omega, q)$ telle que

$$\|u\|_q \leq c_*\|\nabla u\|_2 \;\; pour \;\; u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.9}$$

et

$$\|u\|_{q,\Gamma_1} \leq B_*\|\nabla u\|_2, \tag{3.10}$$

où B_* est la constante optimale de l'injection de trace.

Lemme 3.2. [58] Supposons que $p \leq 2\dfrac{n-1}{n-2}$, alors, il existe une constante positive $C > 1$ qui dépend seulement de Γ_1 tel que

$$\|u\|_{p,\Gamma_1}^s \leq C\Big(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p,\Gamma_1}^p\Big),$$

pour tout $u \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ et pour tout entier $2 \leq s \leq p$.

Lemme 3.3. Soit u la solution du problème (3.1), alors on a

$$E'(t) \leq -\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t). \tag{3.11}$$

Démonstration. Multipliant la première équation dans (3.1) par u_t et l'intègrant ensuite sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\left(a - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t)\right. \\ &\left. + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{p}\|u\|_{p,\Gamma_1}^p\right] \\ &= -\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'où (3.11). □

Maintenant, on définit les fonctionnelles suivantes :

$$I(t) = I(u(t)) = \left(a - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^4 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u\|_{p.\Gamma_1}^p. \tag{3.13}$$

et

$$J(t) = J(u(t)) = \frac{1}{2}\left(a - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\nabla u\|_2^4 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{p}\|u\|_{p.\Gamma_1}^p, \tag{3.14}$$

où $J(u(t))$ représente l'énergie potentielle de (3.1).

À partir de (3.13) et (3.14), on peut réécrire l'énergie $E(t)$ comme suit

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + J(t). \tag{3.15}$$

On énonce ci-après le théorème concernant l'existence locale, dont la preuve se trouve dans [32].

Theorem 3.1. *Supposons que les conditions A_1 - A_3 soient satisfaites. Alors, pour tout $(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap L^m(\Gamma_1)$, il existe une solution unique du problème (3.1) telle que :*

$$u \in L^\infty\left([0,T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right), \quad u_t \in L^\infty\left([0,T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap L^m(\Gamma_1)\right),$$

pour $T > 0$.

3.3 Existence Globale

Dans cette section, on démontre que la solution du problème (3.1) est globale.

Lemme 3.4. Supposons que les conditions A_1-A_3 soient satisfaites, et que pour tout $(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on a :

$$I(0) > 0, \quad \vartheta = \frac{B_*^p}{l}\Big(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\Big)^{\frac{p-2}{2}} < 1. \tag{3.16}$$

Alors,

$$I(t) > 0, Pour\ \ tout\ \ t > 0. \tag{3.17}$$

Démonstration. Comme $I(0) > 0$, alor par continuité de $u(t)$, il existe un temps $T_* < T$ tel que

$$I(t) \geq 0, \forall t \in [0, T_*). \tag{3.18}$$

Soit t_0 vérifiant :

$$\Big\{ I(t_0) = 0\ \ et\ \ I(t) > 0,\ \ pour\ \ tout\ \ 0 \leq t_0 < T^* \Big\}. \tag{3.19}$$

Cela implique que, pour tout $t \in [0, T_*)$, on a

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= \frac{p-2}{2p}\left[\Big(a - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^4 + (g \circ \nabla u)(t)\right] + \frac{1}{p}I(t) \\ &\geq \frac{p-2}{2p}\left[\Big(a - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\nabla u\|_2^4 + (g \circ \nabla u)(t)\right]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

En utilisant (A_1), (3.11), (3.15) et (3.20), on arrive à

$$\begin{aligned} l\|\nabla u\|_2^2 &\leq \Big(a - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq \frac{2p}{p-2}J(u(t)) \\ &\leq \frac{2p}{p-2}E(t) \\ &\leq \frac{2p}{p-2}E(0), \ \ \forall\ 0 < t < T_*. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En exploitant maintenant (3.10), (3.16) et (3.21), on trouve

$$\begin{aligned}
\|u(t_0)\|_{p,\Gamma_1}^p &\leq B_*^p\|\nabla u(t_0)\|_2^p \leq \frac{B_*^p}{l}\Big(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\Big)^{\frac{p-2}{2}} l\|\nabla u(t_0)\|_2^p \\
&= \vartheta l\|\nabla u(t_0)\|_2^p \\
&< \Big(a-\int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u(t_0)\|_2^2, \ \ \forall\ 0<t<T_*.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ce qui nous conduit au résultat suivant

$$I(t)>0, \ \ \forall\ t\in[0,T_*),$$

ceci contredit l'équation (3.19), d'où $I(t) > 0$. En répétant cette procédure et en utilisant le fait que

$$\lim_{t\to T_*}\frac{c_*^p}{l}\left(\frac{2p}{l(p-2)}E(u(t),u_t(t))\right)^{\frac{p-2}{2}} \leq \vartheta < 1,$$

T_* est étendu à T. □

Theorem 3.2. *Supposons que les conditions du lemme (3.4) soient satisfaites. Alors, en vertu de ce lemme, la solution du problème (3.1) est globale et bornée.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que

$$\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2 \leq CE(0).$$

On a

$$\begin{aligned}
E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_t\|_2^2+J(t) \\
&\geq \frac{p-2}{2p}(l\|\nabla u\|_2^2)+\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{\alpha}{2}\|\nabla u_t\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

alors, on obtient

$$\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2 \leq CE(0), \tag{3.24}$$

où $C = \dfrac{1}{\min\{\frac{l(p-2)}{2p},\frac{1}{\rho+2},\frac{\alpha}{2}\}}$. □

3.4 Décroissance de l'énergie

Cette section est consacrée à l'étude de la stabilité de la solution du problème (3.1). Afin de prouver notre résultat principal, on définit les fonctionnelles suivantes :

$$\phi(t) = \int_\Omega \frac{1}{1+\rho}|u_t|^\rho u_t u dx + \int_\Omega \alpha\nabla u_t\nabla u dx. \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\psi(t) = & -\int_\Omega \frac{1}{1+\rho}|u_t|^\rho u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & -\int_\Omega \alpha\nabla u_t \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ensuite, on définit la fonctionnelle L par :

$$L(t) = NE(t) + \epsilon\phi(t) + \psi(t). \tag{3.27}$$

On a alors les lemmes suivants :

Lemme 3.5. Pour ϵ assez petit et en choisissant N assez grand, la relation

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \tag{3.28}$$

est vérifiée pour deux constantes positives β_1, β_2.

Démonstration. En se servant des inégalités de Holder, de Young, de Poincaré et l'inégalité (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}|L(t)-NE(t)| & \leq \frac{\epsilon+1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \epsilon c_0\|\nabla u\|_2^2 + \alpha\frac{\epsilon+1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + c_1(g\circ\nabla u)(t) \\ & \leq c(\epsilon)E(t),\end{aligned} \tag{3.29}$$

où

$$c_0 = \frac{c_*^{\rho+2}}{\rho+2}\Big(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\Big)^{\rho/2} + \frac{\alpha}{2},$$

et

$$c_1 = \frac{(a-l)^{\rho+1}c_*^{\rho+2}}{\rho+2}\Big(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\Big)^{\rho/2} + \frac{a-l}{2}.$$

Si on prend ϵ suffisamment petit, alors (3.28) découle de (3.29). □

Lemme 3.6. La fonctionnelle ϕ définie dans (3.25) satisfait

$$\begin{aligned}\phi'(t) & \leq \frac{1}{\rho+1}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - (-\eta + l - \frac{c}{m}\eta^m)\|\nabla u\|_2^2 - b\|\nabla u\|_2^4 + \alpha\|\nabla u_t\|_2^2 \\ & +\frac{a-l}{4\eta}(g\circ\nabla u)(t) + (1+\frac{c}{m}\eta^m)\|u\|_{p,\Gamma_1}^p + \frac{m-1}{m}\eta^{-m/m-1}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Démonstration. En dérivant l'équation (3.25) par rapport à t et en utilisant l'équation (3.1), on trouve

$$\phi'(t) = \int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u dx + \int_\Omega \frac{1}{\rho+1}|u_t|^{\rho+2}dx + \int_\Omega \alpha\nabla u_{tt}\nabla u dx + \int_\Omega \alpha|\nabla u_t|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \frac{1}{\rho+1}|u_t|^{\rho+2}dx - \int_\Omega \left(a+b\|\nabla u\|_2^2\right)|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \alpha|\nabla u_t|^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx - \int_{\Gamma_1} |u_t|^{m-2}u_t u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |u|^p dx.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

En utilisant les inégalités de Holder et de Young, on estime le quatrième et le cinquième terme de (3.31) comme suit

$$\left|\int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx(t)\right| \leq (\eta + a - l)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{a-l}{4\eta}(g\circ\nabla u)(t), \tag{3.32}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_1} |u_t|^{m-2}u_t u d\Gamma\right| &\leq \frac{1}{m}\eta^m \|u\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{m-1}{m}\eta^{-m/m-1}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m \\
&\leq \frac{c}{m}\eta^m(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p,\Gamma_1}^p) + \frac{m-1}{m}\eta^{-m/m-1}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Une substitution de (3.32)-(3.33) dans (3.31) donne (3.30). □

Lemme 3.7. La fonctionnelle ψ définie dans (3.26) satisfait

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\leq -\left\{\frac{1}{\rho+1}\int_0^t g(s)ds - \frac{\delta^{-(\rho+2/\rho+1)}}{\rho+2}\right\}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \delta\left\{a + c_B + 2(a-l)^2\right\}\|\nabla u\|_2^2 \\
&\quad + \delta b\|\nabla u\|_2^4 + \alpha\left\{\delta - \textstyle\int_0^t g(s)ds\right\}\|\nabla u_t\|_2^2 + c_l(g\circ\nabla u)(t) \\
&\quad - \left\{c_\rho + \frac{g(0)c_*^2}{2\delta}\right\}(g'\circ\nabla u)(t) + \delta^{-m/m-1}(a-l)\frac{m-1}{m}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Démonstration. En dérivant l'équation (3.26) par rapport à t et en utilisant l'équation (3.1), on trouve

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= -\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt}\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \frac{1}{\rho+1}\Big(\int_0^t g(s)ds\Big)\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx \\
&\quad - \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\
&\quad - \int_\Omega \alpha\nabla u_t\Big(\int_0^t g(t-s)\nabla u_t(t)ds\Big)dx \\
&\quad - \int_\Omega \alpha\nabla u_t \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_\Omega \alpha \nabla u_{tt} \Big(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))ds \Big) dx \\
= & \int_\Omega (a - b\|\nabla u\|_2^2)\nabla u \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \\
&- \int_\Omega \Big(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds \Big) \Big(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))ds \Big) dx \\
&- \int_\Omega \alpha \nabla u_t \Big(\int_0^t g(t-s)\nabla u_t(t)ds \Big) dx - \quad \frac{1}{\rho+1} \Big(\int_0^t g(s)ds \Big) \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx \\
&- \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s))dsdx \\
&- \int_\Omega \alpha \nabla u_t \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \\
&+ \int_{\Gamma_1} |u_t|^{m-2} u_t \int_0^t g(t-s)\big(u(t) - u(s)\big)dsd\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_1} |u^{p-2} u \int_0^t g(t-s)\big(u(t) - u(s)\big)dsd\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Dans ce qui suit, on va estimer tous les termes de (3.35). Pour ceci, on utilise l'inégalité de Young et l'inégalité de Holder. Plus précisément, pour tout $\delta > 0$, nous pouvons établir les estimations suivantes

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega (a + b\|\nabla u\|_2^2)\nabla u \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \right| \\
\leq & \ (a + b\|\nabla u\|_2^2) \int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \\
\leq & \ (a + b\|\nabla u\|_2^2) \left[\delta\|\nabla u\|_2^2 + \frac{a-l}{4\delta}(g \circ \nabla u)(t) \right] \\
\leq & \ a\delta\|\nabla u\|_2^2 + b\delta\|\nabla u\|_2^4 + c_\delta (g \circ \nabla u)(t),
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

où

$$
c_\delta = \left(a + \big(E(0)/lb\big)^2 \right) \frac{a-l}{4\delta}.
$$

et

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_\Omega \Big(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds \Big) \Big(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))ds \Big) dx \right| \\
\leq & \ 2\delta(a-l)^2 \|\nabla u\|_2^2 + \big(2\delta + \frac{1}{4\delta}\big)(a-l)(g \circ \nabla u)(t).
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

et

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Gamma |u_t|^{m-2}u_t\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsd\Gamma\right|\\&\leq \delta^{-m/m-1}(a-l)\frac{m-1}{m}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m+\frac{\delta^m}{m}B_*^m\Big(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\Big)^{m-2/2}(g\circ\nabla u)(t),\end{aligned} \tag{3.38}$$

et

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Gamma |u|^{p-2}u\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsd\Gamma\right|\\&\leq \delta B_*^{2p-2}\Big(\frac{2p}{l(p-2)}E(0)\Big)^{p-2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{(a-l)B_*^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t)\\&=\delta c_B\|\nabla u\|_2^2+\frac{(a-l)B_*^2}{4\delta}(g\circ\nabla u)(t).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Puisque $0<-\int_0^t g'(s)ds\leq g(0)$ et $E(t)\leq E(0)$, on trouve

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega \frac{1}{\rho+1}|u_t|^\rho u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx\right|\\&\leq \frac{\delta^{-(\rho+2)/\rho+1}}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}-c_\rho(g'\circ\nabla u)(t)\end{aligned} \tag{3.40}$$

avec

$$c_\rho=\frac{g^{\rho+1}(0)c_*^{\rho+2}\delta^{\rho+2}}{\rho+2}\Big(\frac{2p}{p-2}E(0)\Big)^{\rho/2},$$

et

$$\begin{aligned}&\left|\alpha\int_\Omega \nabla u_t\int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx\right|\\&\leq \alpha\delta\|\nabla u_t\|_2^2-\frac{c_*^2g(0)}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t)\end{aligned} \tag{3.41}$$

Une substitution de (3.36)-(3.41) dans (3.35) donne

$$\begin{aligned}\psi'(t)\ &\leq -\Big\{\frac{1}{\rho+1}\int_0^t g(s)ds-\frac{\delta^{-\rho+2/\rho+1}}{\rho+2}\Big\}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\delta\Big\{a+c_B+2(a-l)^2\Big\}\|\nabla u\|_2^2\\&\quad+\delta b\|\nabla u\|_2^4+\alpha\Big\{\delta-\textstyle\int_0^t g(s)ds\Big\}\|\nabla u_t\|_2^2+c_l(g\circ\nabla u)(t)\\&\quad-\Big\{c_\rho+\frac{g(0)c_*^2}{2\delta}\Big\}(g'\circ\nabla u)(t)+\delta^{-m/m-1}(a-l)\frac{m-1}{m}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m,\end{aligned} \tag{3.42}$$

où

$$c_l = c_\delta + \Big(2\delta + \frac{1}{4\delta}\Big)(a-l) + \frac{\delta^m}{m} B_*^m \left(\frac{2p}{l(p-2)} E(0) \right)^{m-2/2} + \frac{(a-l)B_*^2}{4\delta}.$$

□

Lemme 3.8. Supposons que les conditions A_1-A_3 soient satisfaites. Soient $u_0 \in \big(H^1_{\Gamma_0} \cap L^p(\Gamma_1)\big)$ et $u_1 \in \big(H^1_{\Gamma_0} \cap L^m(\Gamma_1)\big)$ donnés et satisfaisant (3.16). Alors pour tout $t_0 > 0$, la fonctionnelle $L(t)$ vérifie

$$L'(t) \le -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 (g \circ \nabla u)(t). \tag{3.43}$$

Pour $\alpha_i > 0$,$(i = 1, 2)$.

Démonstration. D'après les lemmes (3.6) et (3.7), on a

$$\begin{aligned} L'(t) \; &= NE'(t) + \epsilon\phi'(t) + \psi'(t) \\ &\le -\left\{ \frac{g_0 - \epsilon}{\rho+1} + \frac{\delta^{-(\rho+2)/\rho+1}}{\rho+2} \right\} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \big\{\epsilon c_2 - \delta\{a + c_B + 2(a-l)^2\}\big\} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad -b\{\epsilon - \delta\} \|\nabla u\|_2^4 - \alpha \left(g_0 - \delta - \epsilon \right) \|\nabla u_t\|_2^2 + \Big(c_l + \frac{\epsilon(a-l)}{4\eta}\Big)(g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad +\Big(\frac{N}{2} - c_\rho - \frac{g(0)c_*^2}{2\delta}\Big)(g' \circ \nabla u)(t) + \epsilon\Big(1 + \frac{c}{m}\eta^m\Big)\|u\|_{p,\Gamma_1}^p \\ &\quad -\Big(N - \delta^{-m/m-1}(a-l)\frac{m-1}{m} - \epsilon\frac{m-1}{m}\eta^{-m/m-1}\Big)\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m, \end{aligned} \tag{3.44}$$

où $g_0 = \displaystyle\int_0^{t_0} g(s)ds$, on choisit $0 < \epsilon < g_0$ et δ satisfait

$$\delta < min\left\{ \frac{\epsilon c_2}{a + c_B + 2(a-l)^2}, g_0 - \epsilon \right\}.$$

De plus, on choisit N suffisamment grand pour que

$$N > max\left\{ \delta^{-m/m-1}(a-l)\frac{m-1}{m} + \epsilon\frac{m-1}{m}\eta^{-m/m-1}, g_0\Big(\frac{c_*^2}{\delta}\Big) + 2c_\rho \right\}.$$

Ce qui donne pour $\alpha_i > 0$,$i = 1, 2$

$$L'(t) \le -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 (g \circ \nabla u)(t). \tag{3.45}$$

□

Theorem 3.3. *Supposons que les conditions du lemme (3.8) soient satisfaites. Alors, il existe deux constantes positives k_1, k_2, tel que pour tout $t_0 > 0$, l'énergie de la solution du problème (3.1) satisfait*

$$E(t) \leq k_1 E(t_0) exp\Big(-k_2 \int_{t_0}^{t} \zeta(s)ds \Big). \tag{3.46}$$

Démonstration. Multipliant (3.45) par $\zeta(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(t)L'(t) &\leq -\alpha_1 \zeta(t)E(t) - \alpha_2(g' \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -\alpha_1 \zeta(t)E(t) - 2\alpha_2 E'(t), \end{aligned} \tag{3.47}$$

ce qui implique

$$\zeta(t)L'(t) + 2\alpha_2 E'(t) \quad \leq -\alpha_1 \zeta(t)E(t). \tag{3.48}$$

Maintenant, on définit la fonctionnelle de Lyapunov comme suit

$$F(t) = \zeta(t)L(t) + 2\alpha_2 E(t)$$

Graçe à l'équivalence entre les deux fonctionnelles $E(t)$ et $L(t)$, il est facile de démontrer que F est équivalent à $E(t)$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives β_1, β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq F(t) \leq \beta_2 E(t),$$

en utilisant le fait que $\zeta'(t) \leq 0$, on obtient

$$F'(t) \leq -\frac{\alpha_1}{\beta_2} \zeta(t) F(t). \tag{3.49}$$

Ensuite, en effectuant une simple intégration de l'équation (3.49) sur (t_0, t) on obtient

$$F(t) \leq F(t_0) exp\Big(-k \int_{t_0}^{t} \zeta(s)ds \Big).$$

Par conséquent, (3.46) est obtenue. □

3.5 Explosion en temps fini

Dans cette section, on étudie l'explosion en temps fini de la solution du problème (3.1). Notre résultat est donné par le théorème suivant

Theorem 3.4. *Supposons que les conditions $A_1 - A_3$, la condition (3.7), $\rho + 2 < p$ et que $E(0) < 0$ soient satisfaites, et soit $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap L^p(\Gamma_1)$ et $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap L^m(\Gamma_1)$. Alors la solution du problème (3.1) explose en temps fini.*

Démonstration. Soit

$$H(t) = -E(t). \tag{3.50}$$

De (3.11) et (3.50), on obtient

$$\begin{aligned} H'(t) &= \|u_t\|^m_{m.\Gamma_1} + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \\ &\geq \|u_t\|^m_{m.\Gamma_1} \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Donc H est une fonction croissante et pour tout $t \geq 0$, on a

$$H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p}\|u\|^p_{p,\Gamma_1}. \tag{3.52}$$

Maintenant, on définit la fonctionelle G comme suit

$$G(t) = H^{1-\delta}(t) + \epsilon \int_\Omega \frac{1}{\rho+1}|u_t|^\rho u_t u dx + \epsilon \int_\Omega \alpha \nabla u \nabla u_t dx, \tag{3.53}$$

où ϵ est une constante positive assez petite qui sera choisie ultérieurement, et

$$0 < \delta \leq min\Big\{\frac{p-m}{p(m-1)}, \frac{1}{\rho+2} - \frac{1}{p}\Big\}. \tag{3.54}$$

On dérive (3.53), et on utilise l'équation (3.1), on trouve

$$\begin{aligned} G'(t) &= (1-\delta)H^{-\delta}(t)H'(t) + \epsilon \int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u + \frac{\epsilon}{\rho+1}\|u_t\|^{\rho+2}_{\rho+2} dx + \epsilon \int_\Omega \alpha |\nabla u_t|^2 dx \\ &+\epsilon \int_\Omega \alpha \nabla u \nabla u_{tt} dx \\ &= (1-\delta)H^{-\delta}(t)H'(t) + \frac{\epsilon}{\rho+1}\|u_t\|^{\rho+2}_{\rho+2}dx - \epsilon a\|\nabla u\|_2^2 - \epsilon b\|\nabla u\|_2^4 \\ &+\epsilon \int_\Omega |\nabla u| \int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx + \epsilon\alpha\|\nabla u_t\|_2^2 + \epsilon\|u\|^p_{p,\Gamma_1} - \epsilon \int_{\Gamma_1} |u_t|^{m-2}u_t u d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.55}$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} \xi H(t) &= \frac{\xi}{p}\|u\|^p_{p,\Gamma_1} - \frac{\xi}{\rho+2}\|u_t\|^{\rho+2}_{\rho+2} - \frac{\xi}{2}\Big(a - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 - \frac{\xi b}{4}\|\nabla u\|_2^4 \\ &-\frac{\xi}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{\xi\alpha}{2}\|\nabla u_t\|_2^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) &= (1-\delta)H^{-\delta}(t)H'(t) + \epsilon(\frac{1}{\rho+1} + \frac{\xi}{\rho+2})\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \epsilon\Big[\frac{\xi}{2}\Big(a - \int_0^t g(s)ds\Big) - a\Big]\|\nabla u\|_2^2 \\ &+\epsilon b(\frac{\xi}{4}-1)\|\nabla u\|_2^4 + \epsilon\alpha(1+\frac{\xi}{2})\|\nabla u_t\|_2^2 - \epsilon\int_{\Gamma_1}|u_t|^{m-2}u_t u d\Gamma + \epsilon(1-\frac{\xi}{p})\|u\|_{p,\Gamma_1}^p + \epsilon\xi H(t) \\ &+\epsilon\frac{\xi}{2}(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon\int_\Omega |\nabla u|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx. \end{aligned} \tag{3.56}$$

En appliquant l'inégalité de Young, pour $\eta > 0, \sigma > 0$, on estime

$$\int_\Omega |\nabla u|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \geq \left(1-\frac{1}{4\eta}\right)\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_2^2 - \eta(g\circ\nabla u)(t), \tag{3.57}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Gamma_1}|u_t|^{m-2}u_t u d\Gamma\right| &\leq \frac{\sigma^m}{m}\|u\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{m-1}{m}\sigma^{-m/m-1}\|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m \\ &\leq \frac{\sigma^m}{m}\|u\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{m-1}{m}\sigma^{-m/m-1}H'(t). \end{aligned} \tag{3.58}$$

En combinant ces estimations en (3.56), on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) &\geq \Big((1-\delta)H^{-\delta}(t) - \frac{\epsilon(m-1)}{m}\sigma^{-m/m-1}\Big)H'(t) + \epsilon\Big(\frac{1}{\rho+1}+\frac{\xi}{\rho+2}\Big)\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &+\epsilon\left[a\Big(\frac{\xi}{2}-1\Big) - \Big(\frac{\xi}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\Big)\left(\int_0^t g(s)ds\right)\right]\|\nabla u\|_2^2 \\ &+\epsilon b\Big(\frac{\xi}{4}-1\Big)\|\nabla u\|_2^4 + \epsilon\alpha\Big(1+\frac{\xi}{2}\Big)\|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{\epsilon\sigma^m}{m}\|u\|_{m,\Gamma_1}^m + \epsilon(1-\frac{\xi}{p})\|u\|_{p,\Gamma_1}^p \\ &+\epsilon\xi H(t) + \epsilon\Big(\frac{\xi}{2}-\eta\Big)(g\circ\nabla u)(t). \end{aligned} \tag{3.59}$$

En utilisant (3.59), on trouve que pour certains $0 < \eta < \dfrac{\xi}{2}$

$$\begin{aligned} G'(t) &\geq \Big((1-\delta)H^{-\delta}(t) - \frac{\epsilon(m-1)}{m}\sigma^{-m/m-1}\Big)H'(t) + \epsilon\Big(\frac{1}{\rho+1}+\frac{p}{\rho+2}\Big)\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &+\epsilon p H(t) + \epsilon\varsigma_1\|\nabla u\|_2^2 + \epsilon\varsigma_2(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon b(\frac{p}{4}-1)\|\nabla u\|_2^4 \\ &+\epsilon(1-\frac{\xi}{p})\|u\|_{p,\Gamma_1}^p + \epsilon\alpha\Big(1+\frac{p}{2}\Big)\|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{\epsilon\sigma^m}{m}\|u\|_{m,\Gamma_1}^m, \end{aligned} \tag{3.60}$$

où

$$4 < \xi < p,$$

$$\varsigma_1 = \left[a\left(\frac{\xi}{2}-1\right) - \left(\frac{\xi}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\right)\left(\int_0^t g(s)ds\right)\right],$$

et

$$\varsigma_2 = \left(\frac{\xi}{2}-\eta\right).$$

En prenant $\sigma = \left(\frac{mk}{m-1}H(t)^{-\delta}\right)^{-\frac{m-1}{m}}$, où k est une constante positive qu'on précisera ultérieurement, on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) \quad &\geq \big((1-\delta)-\epsilon k\big)H^{-\delta}(t)H'(t) + \epsilon\varsigma_3\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \epsilon\xi H(t) \\ &+\epsilon\varsigma_1\|\nabla u\|_2^2 + \epsilon\varsigma_2(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon\varsigma_4\|\nabla u\|_2^4 + \epsilon\varsigma_5\|\nabla u_t\|_2^2 \\ &+\epsilon(1-\frac{\xi}{p})\|u\|_{p,\Gamma_1}^p - \epsilon k^{1-m}\varsigma_6 H^{\delta(m-1)}(t)\|u\|_{m,\Gamma_1}^m, \end{aligned} \tag{3.61}$$

avec

$$\begin{aligned} \varsigma_3 &= \left(\frac{1}{\rho+1}+\frac{\xi}{\rho+2}\right), \\ \varsigma_4 &= b\left(\frac{\xi}{4}-1\right), \\ \varsigma_5 &= \alpha\left(1+\frac{\xi}{2}\right), \end{aligned}$$

et

$$\varsigma_6 = (m/m-1)^{1-m} > 0.$$

En utilisant le fait que $m < p$ et que

$$H(t) \leq \frac{1}{p}\|u\|_{p,\Gamma_1}^p,$$

on trouve

$$\begin{aligned} G'(t) \quad &\geq \big((1-\delta)-\epsilon k\big)H^{-\delta}(t)H'(t) + \epsilon\varsigma_3\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \epsilon\xi H(t) \\ &+\epsilon\varsigma_1\|\nabla u\|_2^2 + \epsilon\varsigma_2(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon\varsigma_4\|\nabla u\|_2^4 + \epsilon\varsigma_5\|\nabla u_t\|_2^2 \\ &+\epsilon(1-\frac{\xi}{p})\|u\|_{p,\Gamma_1}^p - \epsilon k^{1-m}\varsigma_6\frac{1}{p^{\delta(m-1)}}\|u\|_{p,\Gamma_1}^{m+\delta p(m-1)}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

De (3.54) et du lemme (3.2), on peut déduire que pour $s = m + \delta p(m-1) \leq p$, on a

$$\|u\|_{p,\Gamma_1}^{m+\delta p(m-1)} \leq C\Bigg(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p,\Gamma_1}^p\Bigg). \tag{3.63}$$

Combinant (3.63) dans (3.62), on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) &\geq \big((1-\delta) - \epsilon k\big)H^{-\delta}(t)H'(t) + \epsilon\varsigma_3\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \epsilon\xi H(t) \\ &+\epsilon\Bigg(\varsigma_1 - k^{1-m}\varsigma_6\frac{C}{p^{\delta(m-1)}}\Bigg)\|\nabla u\|_2^2 + \epsilon\varsigma_2(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon\varsigma_4\|\nabla u\|_2^4 \\ &+\epsilon\varsigma_5\|\nabla u_t\|_2^2 + \epsilon\Bigg(1 - \frac{\xi}{p} - k^{1-m}\varsigma_6\frac{C}{p^{\delta(m-1)}}\Bigg)\|u\|_{p,\Gamma_1}^p. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Tout d'abord, on choisit $k > 0$ suffisamment grand pour que $\varsigma_1 - k^{1-m}\varsigma_6\dfrac{C}{p^{\delta(m-1)}} > 0$ et $1 - \dfrac{\xi}{p} - k^{1-m}\varsigma_6\dfrac{C}{p^{\delta(m-1)}} > 0$.

Ensuite, on choisit ϵ suffisamment petit de sorte que $(1-\delta) - \epsilon k > 0$,
et

$$G(0) = H^{1-\delta}(0) + \epsilon\int_\Omega \frac{1}{\rho+1}|u_1|^\rho u_1 u_0 dx + \epsilon\int_\Omega \alpha\nabla u_0\nabla u_1 dx.$$

Ainsi, on obtient

$$G'(t) \geq \lambda\big(\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|\nabla u\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t) + \|\nabla u\|_2^4 + \|\nabla u_t\|_2^2 + H(t) + \|u\|_{p,\Gamma_1}^p\big), \tag{3.65}$$

où λ est une constante positive.
D'autre part, on a

$$G^{\frac{1}{1-\delta}} \leq \gamma\Bigg(H(t) + \Big(\epsilon\int_\Omega \frac{1}{\rho+1}|u_t|^\rho u_t u dx\Big)^{\frac{1}{1-\delta}} + \Big(\epsilon\int_\Omega \alpha\nabla u\nabla u_t dx\Big)^{\frac{1}{1-\delta}}\Bigg). \tag{3.66}$$

En utilisant l'inégalité de Holder, on trouve

$$\Bigg(\bigg|\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\bigg|\Bigg)^{\frac{1}{1-\delta}} \leq c_1\|u\|_p^{\frac{1}{1-\delta}}\|u_t\|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\delta}}.$$

Ensuite, on se sert de l'inégalité de Young pour obtenir

$$\Bigg(\bigg|\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\bigg|\Bigg)^{\frac{1}{1-\delta}} \leq c_2\Bigg(\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\delta}} + \|u_t\|_{\rho+2}^{\frac{\theta(\rho+1)}{1-\delta}}\Bigg),$$

pour $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\theta}=1$, on prend $\theta=\dfrac{(1-\delta)(\rho+2)}{\rho+1}$, alors

$$\mu=\frac{(1-\delta)(\rho+2)}{1-\delta(\rho+2)},$$

on adapte le lemme (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\left|\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right|\right)^{\frac{1}{1-\delta}} &\leq C\left(\|u\|_p^p+\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)\\ &\leq c_3\left(\|\nabla u\|_2^p+\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)\\ &\leq c_4\left(\|\nabla u\|_2^2+\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right).\end{aligned} \tag{3.67}$$

On obtient l'estimation suivante en appliquant à nouveau l'inégalité de Young

$$\left|\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\delta}} \leq C\left(\|\nabla u\|_2^{\frac{\mu}{1-\delta}}+\|\nabla u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\delta}}\right),$$

où $\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{1}{\theta}=1$. On prend $\mu=\dfrac{2(1-\delta)}{1-2\delta}$, $\theta=2(1-\delta)$. Par conséquent, on obtient

$$\left|\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\delta}} \leq C\left(\|\nabla u\|_2^{\frac{2}{1-2\delta}}+\|\nabla u_t\|_2^2\right). \tag{3.68}$$

De (3.67) et (3.68), on obtient

$$G^{\frac{1}{1-\delta}} \leq \kappa_1\left(H(t)+\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\|u\|_p^p+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^{\frac{2}{1-2\delta}}\right). \tag{3.69}$$

D'où,

$$G^{\frac{1}{1-\delta}} \leq \kappa_2\left(H(t)+\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\|u\|_p^p+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2\right). \tag{3.70}$$

Combinant (3.65) et (3.70), on trouve que

$$G'(t)\geq \theta G^{\frac{1}{1-\delta}}(t), \tag{3.71}$$

où θ est une constante positive.
En effectuant une simple integration de l'inégalité (3.71) sur $(0,t)$, on obtient

$$G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(t) \geq \frac{1}{G^{-\frac{\delta}{1-\delta}}(0) - \dfrac{\theta\delta t}{1-\delta}}. \tag{3.72}$$

Ainsi, on a démontré que $G(t)$ ne peut pas rester bornée pour tout $t \geq 0$, donc elle s'explose en temps fini T^*

$$T^* \leq \frac{1-\delta}{\theta\delta G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(0)}. \tag{3.73}$$

$\square$

CHAPITRE 4

EXISTENCE GLOBALE, DÉCROISSANCE ÉNERGÉTIQUE ET EXPLOSION DE SOLUTIONS POUR UNE ÉQUATION D'ONDE DE TYPE P-LAPLACIEN AVEC UN TERME DE MÉMOIRE ET DES CONDITIONS DYNAMIQUES AUX BORDS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta_p u_t = 0 & \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ u_{tt} = -\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}ds - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} & \\ -|\nabla u_t|^{p-2}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} - u_t + |u|^{k-2}u & \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), avec une frontière assez régulière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ telle que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et $mes(\Gamma_0) > 0$. On note par $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la dérivée de la normale extérieure unitaire de Γ. $p, k \geq 2$, la fonction de relaxation g est une fonction positive non-croissante qui satisfait certaines conditions qu'on spécifiera plus tard, u_0, u_1 sont des fonctions appartenant à des espaces appropriés, et l'opérateur Δ_p est le p-Laplacien classique donné par $\Delta_p u = div\Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)$.

Dans les cinquantes dernières années, de nombreux auteurs ont été intéressés par l'étude de

l'équation p-laplacienne lorsque $p \neq 2$. De nombreux résultats ont été obtenu concernant l'existence globale de solutions pour l'équation d'onde de type p-Laplacien. Nous pouvons notamment citer ceux de Nako et Nambu [72] et de Biazutti [11], ainsi que celui de M. Greenberg [38] en présence d'un terme d'amortissement fort. Voir [77, 81, 99] pour en savoir plus sur le rôle important joué par ce terme dans l'existence et la stabilité de la solution.
Abbès Benaissa et al. [9] ont étudié le comportement asymptotique de l'équation d'onde p-Laplacienne avec une faible dissipation de type m-Laplacien, donnée par

$$u_{tt} - div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \sigma(t)div(|\nabla u_t|^{m-2}\nabla u_t) = 0. \tag{4.2}$$

Mokeddem et Mansour [69] ont ajouté un terme source et ont considéré le problème aux limites suivant :

$$u_{tt} - div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - adiv(|\nabla u_t|^{m-2}\nabla u_t) = b|u|^{r-2}u. \tag{4.3}$$

Ils ont établi un résultat d'existence globale et de décroissance de l'énergie. Messaoudi et al. [62] ont étudié l'équation (4.3) avec un terme d'amortissement non linéaire et ont établi le résultat d'explosion de solutions avec une énergie initiale négative. Récemment, Pereira et al.[78] ont considéré une équation d'onde avec un terme d'amortissement de type p-Laplacien

$$u_{tt} - \Delta_p u - \Delta_p u_t = |u|^{r-1}u.$$

Ils ont prouvé l'existence globale et l'unicité de la solution en utilisant la méthode de Faedo Galerkin, ainsi que le comportement asymptotique en utilisant la méthode de Nakao [71].
Pour les équations viscoélastiques avec un terme p-Laplacien, Carlos et al. [82] ont considéré l'équation suivante :

$$u_{tt} - \Delta u - div\left(|\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t\right) + g * \Delta u = 0, \tag{4.4}$$

ils ont prouvé l'existence de la solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, et ont également obtenu des résultats sur la décroissance de l'énergie en utilisant le résultat de P. Martinez [56].

Du point de vue mathématique, lorsque on ne néglige pas les termes d'accélération aux bords, on utilise les conditions dynamiques aux limites, qui représentent la loi de Newton pour la masse attachée. Pour plus d'informations sur la pertinence physique de ces conditions aux limites, nous conseillons aux lecteurs les articles [3, 15, 8, 21]. Ce type de problème a été traité par S. Gerbi et al. [37] où ils ont considéré le problème semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t = |u|^{p-2}u & \Omega \times (0,+\infty), \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ u_{tt} = -a\left[\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \dfrac{\alpha \partial u_t}{\partial \nu} ds + r|u_t|^{m-2}u_t\right] & \Gamma_1 \times (0,+\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Ils ont prouvé l'existence globale de la solution ainsi que la décroissance exponentielle de l'énergie lorsque les données initiales sont à l'intérieur d'un ensemble stable, et ont montré l'explosion de la solution pour des conditions initiales dans un ensemble instable. Gerbi et Said-Houari [36] ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = |u|^{p-2}u & \Omega \times (0,+\infty), \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ u_{tt} = -\left[\dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds + \dfrac{\alpha \partial u_t}{\partial \nu} ds + h(u_t)\right] & \Gamma_1 \times (0,+\infty), \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x). & \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Ils ont étudié l'unicité et l'existence locale de la solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et le théorème du point fixe. Après avoir imposé certaines restrictions sur les conditions initiales, ils ont obtenu l'existence globale de la solution et ils ont également montré que si $\alpha > 0$, la solution croît de manière exponentielle, sinon, la solution explose en un temps fini.

A partir de là, nous allons aborder pour la première fois l'équation d'onde avec un terme p-Laplacien et des conditions dynamiques aux limites. Dans ce chapitre, notre objectif est d'étudier l'équation d'onde avec un terme d'amortissement de type p-Laplacien pour $p > 2$ et de prouver l'existence globale de solutions ainsi que leur comportement asymptotique.

4.2 Notions préliminaires

Dans cette section, on mets en place des notations, des hypothèses et des lemmes qui seront utilisés tout au long de ce chapitre. On note $\|u\|_p$ et $\|u\|_{p,\Gamma_1}$ les normes des espaces $L_p(\Omega)$ et $L_p(\Gamma_1)$ respectivement. Pour les normes des espaces de Sobolev, on utilise la notation

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_2, \quad \|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_p.$$

Soit

$$H^1_{\Gamma_0} = \Big\{u \in H^1(\Omega)/u|_{\Gamma_0} = 0\Big\},$$

et

$$W^{1,p}_{\Gamma_0} = \Big\{u \in W^{1,p}(\Omega)/u|_{\Gamma_0} = 0\Big\}.$$

Il est nécessaire d'énoncer les hypothèses suivantes afin de prouver nos résultats :

(A_1) La fonction de relaxation g est de classe C^1, décroissante et satisfait pour $s > 0$ les conditions suivantes :

$$g(s) \geq 0, \quad g'(s) \leq 0, \quad 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l \geq 0.$$

(A_2) Il existe une fonction différentiable positive ξ telle que

$$g'(s) \leq -\xi(s)g(s) \ \ pour \ \ tout \ \ s > 0,$$

où $\xi(t)$ satisfait

$$\xi'(t) \leq 0 \ et \ \int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty.$$

(A_3) $k > 2$, si $n = 1, 2$, et $2 < k \leq \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, si $n \geq 3$.

En outre, on suppose que g satisfait

$$\int_0^{+\infty} g(s)ds < \frac{m - 2 + 2B_*^2\sigma}{m - 2 + (1/2\eta)}. \tag{4.7}$$

Lemme 4.1. (Inégalité d'injection de Sobolev [2]) Soit $2 \leq q < \infty$ pour $n = 1, 2$, ou $2 \leq q < \dfrac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 3$. Alors, il existe une constante $c_*(\Omega, q)$ telle que

$$\|u\|_q \leq c_* \|\nabla u\|_2 \quad pour \quad u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \tag{4.8}$$

Selon l'hypothèse A_3, on rappelle l'inclusion suivante des espaces de Sobolev :

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^k(\Omega).$$

De plus, on a l'injection de trace suivante :

$$\|u\|_{q,\Gamma_1} \leq B_* \|\nabla u\|_2, \tag{4.9}$$

où B_* la constante optimale de l'injection de trace.

Lemme 4.2. [58] Supposons que $p \leq 2\dfrac{n-1}{n-2}$ soit vérifiée. Alors il existe une constante positive $C(\Omega) > 1$ telle que

$$\|u\|_p^s \leq C\Big(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_p^p\Big),$$

pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$, $2 \leq s \leq p$.

Lemme 4.3. [58] Supposons que $p \leq 2\dfrac{n-1}{n-2}$ soit vérifié. Alors il existe une constante positive $(\Gamma_1) > 1$ telle que

$$\|u\|_{p,\Gamma_1}^s \leq \Big(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p,\Gamma_1}^p\Big),$$

pour tout $u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$, $2 \leq s \leq p$.

Maintenant, on peut définir l'énergie associée au problème (4.1) comme suit

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2}(1 - \int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\ &+ \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{k}\|u\|_{k,\Gamma_1}^k. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Lemme 4.4. Soit u une solution du problème (4.1). Alors

$$E'(t) \leq -\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 - \|\nabla u_t\|_p^p + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t). \tag{4.11}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (4.1) par u_t et l'intégrant sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}(1 - \int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{k}\|u\|_{k,\Gamma_1}^k\right] \\ &= -\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 - \|\nabla u_t\|_p^p - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{4.12}$$

D'où (4.11). □

Maintenat, on définit la fonctionnelle

$$I(t) = I(u(t)) = \Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{2}{p}\|\nabla u\|_p^p + (g \circ \nabla u)(t) - \|u\|_{k.\Gamma_1}^k, \tag{4.13}$$

et l'énergie potentielle

$$J(t) = J(u(t)) = \frac{1}{2}\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{k}\|u\|_{k.\Gamma_1}^k. \tag{4.14}$$

Il s'ensuit que

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + J(t). \tag{4.15}$$

Concernant l'étude de l'existence locale on énoncera simplement le théorème suivant, dont la preuve est similaire à celle présentée dans [37, 82] :

Theorem 4.1. *(Existence Locale). Supposons que* $(A_1) - (A_2)$ *soient vérifiées. Alors, pour tout* $(u_0, u_1) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) \times W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$ *donné, il existe une unique solution locale u du problème (4.1) telle que*

$$u \in C\Big([0,T]; W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)\Big), \;\; u_t \in C\Big([0,T]; W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)\Big),$$

pour $T > 0$.

4.3 Existence Globale

Dans cette section, on va prouver que la solution établie dans le problème (4.1) est globale.

Lemme 4.5. Supposons que (A_1)-(A_2) soient vérifieés, et pour tout $(u_0, u_1) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) \times W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$, tel que

$$I(0) > 0, \quad \vartheta = \frac{B_*^k}{l}\left(\frac{2k}{l(k-2)}E(0)\right)^{\frac{k-2}{2}} < 1, \tag{4.16}$$

où B_* est la constante d'injection de Sobolev. Alors,

$$I(t) > 0, \;\; pourtout \;\; t > 0. \tag{4.17}$$

Démonstration. Comme $I(0) > 0$, alors par continuité de $u(t)$, il existe un temps $T_* > 0$ tel que

$$I(t) \geq 0, \forall \; t \in [0, T_*). \tag{4.18}$$

Choisissons t_0 tel que

$$\Big\{ I(t_0) = 0, \text{et}, I(t) > 0, \text{pour tout}, 0 \leq t_0 < T^* \Big\}. \tag{4.19}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= \frac{k-2}{2k}\left[\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{2}{p}\|\nabla u\|_p^p + (g \circ \nabla u)(t)\right] + \frac{1}{k}I(t) \\ &\geq \frac{k-2}{2k}\left[\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{2}{p}\|\nabla u\|_p^p + (g \circ \nabla u)(t)\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

En utilisant (A_1), (4.15) et le lemme (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned} l\|\nabla u\|_2^2 &\leq \Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq \frac{2k}{k-2}J(u(t)) \\ &\leq \frac{2k}{k-2}E(t) \\ &\leq \frac{2k}{k-2}E(0), \forall 0 < t < T_*. \end{aligned} \tag{4.21}$$

En exploitant (4.9), (4.16) et (4.21), on trouve

$$\begin{aligned} \|u(_0)\|_{k,\Gamma_1}^k &\leq B_*^k\|\nabla u(t_0)\|_2^k \leq \frac{B_*^k}{l}\Big(\frac{2k}{l(k-2)}E(0)\Big)^{\frac{k-2}{2}} l\|\nabla u(t_0)\|_2^p \\ &= \vartheta l\|\nabla u(t_0)\|_2^p \\ &< \Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big)\|\nabla u(t_0)\|_2^2, \forall\ 0 < t < T_*. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Par conséquent, on obtient

$$I(t) > 0,$$

ce qui contredit (4.19), donc $I(t) > 0$ pour tout $t \in (0, T_*)$. En répétant la même procédure, T_* est étendu à T. □

Le résultat de l'existence globale est donné par le théorème suivant :

Theorem 4.2. *Supposons que les conditions du lemme (4.5) soient satisfaites. Alors, pour toute solution u du problème (4.1) avec des données initiales* $(u_0, u_1) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega) \times W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega)$, *la solution reste bornée pour tout temps* $t > 0$.

Démonstration. pour avoir réussi à démontrer la bornitude de la solution, il suffit de démontrer que

$$\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_p^p \leq CE(0),$$

donc, en utilisant le lemme (4.4), (4.15) et (4.20), on obtient

$$\begin{aligned} E(0) & \geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + J(t) \\ & \geq \frac{k-2}{2k}\big(l\|\nabla u\|_2^2 + \frac{2}{2p}\|\nabla u\|_p^p\big) + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Par conséquent,

$$\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_p^p \leq CE(0), \tag{4.24}$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de k, l et p, donnée par

$$C = \frac{1}{min\{\frac{l(k-2)}{2k}, \frac{2}{2p}, \frac{1}{2}\}}.$$

□

4.4 Stabilité

Ladite section est consacrée à l'étude de la stabilité de la solution du problème (4.1). Afin de prouver nos principaux résultats, on définit la fonctionnelle suivante :

$$F(t) := E(t) + \varepsilon\phi(t), \tag{4.25}$$

où ε est une constante positive à spécifier ultérieurement, avec

$$\phi(t) = \int_\Omega u_t u dx + \int_{\Gamma_1} u_t u dx. \tag{4.26}$$

Ensuite, on présente les lemmes suivants

Lemme 4.6. Pour ε assez petit, on a

$$\beta_1 E(t) \leq F(t) \leq \beta_2 E(t), \tag{4.27}$$

où β_1 et β_2 sont deux constantes positives.

Démonstration.

$$\begin{aligned} |F(t) - E(t)| & = |\varepsilon\phi(t)| \\ & \leq \varepsilon \int_\Omega |u_t||u|dx + \int_{\Gamma_1} |u_t||u|dx. \end{aligned} \tag{4.28}$$

En utilisant les inégalités de Hölder, de Young et de Sobolev-Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |F(t)-E(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}\Big(\|u_t\|_2^2+\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2\Big)+\frac{\varepsilon}{2}\Big(\|u\|_2^2+\|u\|_{2,\Gamma_1}^2\Big) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\Big(\|u_t\|_2^2+\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2\Big)+\frac{\varepsilon(c_*^2+B_*^2)}{2}\|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq c\varepsilon E(t). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Si on choisit ε suffisamment petit, alors (4.27) résulte de (4.29). □

Lemme 4.7. La fonctionnelle ϕ définie dans (4.26) vérifie

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\leq \|u_t\|_2^2-(l-\eta(1+B_*^2))\|\nabla u\|_2^2+(1+\frac{1}{4\eta})\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2-\Big(1-\frac{\eta^p}{p}\Big)\|\nabla u\|_p^p \\ &+\frac{p-1}{p}\eta^{-p/p-1}\|\nabla u_t\|_p^p+\frac{1-l}{4\eta}(g\circ\nabla u)(t)+\|u\|_{k,\Gamma_1}^k. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Démonstration. En dérivant (4.26) par rapport à t et en utilisant l'équation (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \|u_t\|_2^2+\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2-\|\nabla u\|_2^2-\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_{k,\Gamma_1}^k \\ &+\int_\Omega \nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx-\int_\Omega |\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t\nabla u dx \\ &+\int_\Gamma u_t u d\Gamma \\ &= \|u_t\|_2^2+\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2-\|\nabla u\|_2^2-\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_{k,\Gamma_1}^k+I_1+I_2+I_3. \end{aligned} \tag{4.31}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on estime I_1,I_2 et I_3 comme suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left|\int_\Omega \nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx(t)\right| \\ &\leq (\eta+(1-l))\|\nabla u\|_2^2+\frac{1-l}{4\eta}(g\circ\nabla u)(t), \end{aligned} \tag{4.32}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \left|\int_\Omega |\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t\nabla u dx\right| \\ &\leq \frac{1}{p}\eta^p\|\nabla u\|_p^p+\frac{p-1}{p}\eta^{-p/p-1}\|\nabla u_t\|_p^p, \end{aligned} \tag{4.33}$$

et

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_\Gamma u_t u d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{4\eta}\|u_t\|^2_{2,\Gamma_1} + \eta\|u\|^2_{2,\Gamma_1} \\ &\leq \frac{1}{4\eta}\|u_t\|^2_{2,\Gamma_1} + \eta B_*^2\|\nabla u\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Une substitution de (4.32)-(4.34) dans (4.31) donne (4.30). □

Lemme 4.8. Supposons que (A_1)–(A_2) soient vérifiées. Soit $(u_0, u_1) \in W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega) \times W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$ donnés et satisfaisant (4.16). Alors, pour tout t_0, la fonctionnelle $F(t)$ vérifie

$$F'(t) \leq -\delta_1 E(t) + \delta_2 (g \circ \nabla u)(t), \tag{4.35}$$

pour certains $\delta_i > 0$, $(i = 1, 2)$.

Démonstration. Comme la fonction g est positive et continue, avec $g(0) \geq 0$, pour tout $t_0 > 0$, on a

$$\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{t_0} g(s)ds = g_0.$$

Grâce aux lemmes (4.4) et (4.7), on a

$$\begin{aligned} F'(t) &= E'(t) + \varepsilon\phi'(t) \\ &\leq \varepsilon\|u_t\|_2^2 - (1 - \varepsilon(1+\eta))\|u_t\|^2_{2,\Gamma_1} - \varepsilon(l - \eta(1 + B_*^2))\|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad -\Big(1 - \varepsilon\frac{p-1}{p}\eta^{-p/p-1}\Big)\|\nabla u_t\|_p^p - \varepsilon\Big(1 - \frac{\eta^p}{p}\Big)\|\nabla u\|_p^p + \varepsilon\|u\|^k_{k,\Gamma_1} \\ &\quad +\frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) + \varepsilon\frac{1-l}{4\eta}(g \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{4.36}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Sobolev-Poincaré et l'injection de Sobolev, on trouve

$$\|u_t\|_2^2 \leq c_*^2\|\nabla u_t\|_2^2 \leq \gamma c_*^2\|\nabla u_t\|_p^p.$$

Donc, l'inégalité (4.36) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -(1 - \varepsilon(1+\eta))\|u_t\|^2_{2,\Gamma_1} - \varepsilon(l - \eta(1 + B_*^2))\|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad -\Big(1 - \varepsilon\Big(\gamma c_*^2 + \frac{p-1}{p}\eta^{-p/p-1}\Big)\|\nabla u_t\|_p^p - \varepsilon\Big(1 - \frac{\eta^p}{p}\Big)\|\nabla u\|_p^p \\ &\quad +\varepsilon\|u\|^k_{k,\Gamma_1} + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) + \varepsilon\frac{1-l}{4\eta}(g \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Maintenant, on choisit η suffisamment petite, de sorte que

$$l-\eta(1+B_*^2)>0,\ 1-\frac{\eta^p}{p}>0.$$

Lorsque η est fixée, on choisit ε suffisamment petit pour que

$$1-\varepsilon(1+\eta)>0,\ 1-\varepsilon\Big(\gamma c_*^2+\frac{p-1}{p}\eta^{-p/p-1}\Big)>0.$$

Donc, pour tout $t>0$, l'inégalité (4.35) est satisfaite. □

Theorem 4.3. *Supposons que (A_1)–(A_2) soient vérifiées. Si $(u_0,u_1)\in W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)\times W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)$. Alors, il existe deux constantes positives k_1 et k_2 telle que l'énergie de (4.1) vérifie*

$$E(t)\le k_1 e^{-k_2\int_{t_0}^t \xi(s)ds},\ t_0\ge t.$$

Démonstration. En multipliant (4.35) par $\xi(t)$, on trouve

$$\xi(t)F'(t)\le -\delta_1\xi(t)E(t)-\delta_2\xi(t)(g\circ\nabla u)(t). \tag{4.38}$$

De l'hypothèse (A_1) et en utilisant le lemme (4.4), on peut obtenir

$$\begin{aligned}\xi(t)F'(t) &\le -\delta_1\xi(t)E(t)-\delta_2(g'\circ\nabla u)(t)\\ &\le -\delta_1\xi(t)E(t)-2\delta_2E'(t),\forall t_0\le t,\end{aligned} \tag{4.39}$$

cela nous donne

$$\xi(t)F'(t)+2\delta_2E'(t)\le -\delta_1\xi(t)E(t),\ \ \forall\ t_0\le t. \tag{4.40}$$

On définit maintenant la fonctionnelle de Lyapunove comme suit

$$L(t)=\xi(t)F(t)+CE(t). \tag{4.41}$$

Grâce à l'équivalence entre les deux fonctionnelles E et F exprimée dans la relation (4.27), on peut voir clairement que la fonctionnelle de Lyapunove l'est aussi.
Dérivant (4.41), on obtient

$$L'(t)=\xi'(t)F(t)+\xi(t)F'(t)+CE'(t), \tag{4.42}$$

vu la condition (A_2), on peut dire

$$L'(t)\le \xi(t)F'(t)+CE'(t),\forall t_0\le t, \tag{4.43}$$

d'où

$$L'(t)\le -\delta_3\xi(t)E(t) \tag{4.44}$$

ou $\delta_3 = \dfrac{max\{1, C\}\delta_1}{max\{1, 2\delta_2\}}$.
Une simple intégration de (4.44), conduit à

$$L(t) \leq L(t_0)e^{-\frac{\delta_3}{k_2}\int_{t_0}^{t}\xi(s)ds}, \forall t_0 \leq t, \tag{4.45}$$

ce qui nous permet de déduire l'inégalité

$$E(t) \leq k_1 e^{-k_2\int_{t_0}^{t}\xi(s)ds}, \;\; t_0 \leq t.$$

□

4.5 Explosion

Dans cette section, on énonce et on prouve le résultat de l'explosion de la solution du problème (4.1). Notre résultat est donné par le théorème suivant :

Theorem 4.4. *Supposons que les conditions* (A_1)–(A_3) *et (4.7) soient satisfaites, en outre, on suppose que* $E(0) < 0$. *Alors, la solution du problème (4.1) s'explose en un temps fini* T^*, *et*

$$T* \leq \frac{1-\delta}{G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(0)\alpha\delta}. \tag{4.46}$$

Démonstration. Soit

$$H(t) = -E(t), \tag{4.47}$$

de (4.11), on trouve

$$\begin{aligned} H'(t) &= -E'(t) \\ &\geq \|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla u_t\|_p^p \geq 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Cela nous permet d'en déduire que la fonction $H(t)$ est croissante. De plus, de (4.10) et (4.47), on obtient, pour tout $t \geq 0$,

$$H(0) \leq H(t) < \frac{1}{k}\|u\|_{k,\Gamma_1}^k. \tag{4.49}$$

Puis, on définit une nouvelle fonctionnelle G comme suit

$$G(t) = H^{1-\delta}(t) + \epsilon\int_\Omega u_t u dx + \epsilon\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma, \tag{4.50}$$

où ϵ est une constante positive assez petite dont on choisira plus tard, et

$$0 < \delta \leq \min\left\{\frac{p-2}{2p}, \frac{p-2(1-s)}{2p}\right\}. \tag{4.51}$$

En dérivant (4.50), et en utilisant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) &= (1-\delta)H^{-\delta}H'(t) + \epsilon\|u_t\|_2^2 + \epsilon\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 - \epsilon\|\nabla u\|_2^2 - \epsilon\|\nabla u\|_p^p + \epsilon\|u\|_{k,\Gamma_1}^k \\ &+\epsilon\int_\Omega \nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx - \epsilon\int_\Omega |\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t\nabla udx - \epsilon\int_\Gamma u_t ud\Gamma. \end{aligned} \tag{4.52}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, pour $\eta, \sigma > 0$, on obtient

$$\epsilon\int_\Omega \nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \geq \epsilon\Big(1-\frac{1}{4\eta}\Big)\Big(\int_0^t g(t)ds\Big)\|\nabla u\|_2^2 - \epsilon\eta(g\circ\nabla u)(t), \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} \epsilon\int_\Omega |\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t\nabla udx &\leq \frac{\epsilon}{p}\sigma^p\|\nabla u\|_p^p + \epsilon\frac{p-1}{p}\sigma^{-p/p-1}\|\nabla u_t\|_p^p \\ &\leq \frac{\epsilon}{p}\sigma^p\|\nabla u\|_p^p + \epsilon\frac{p-1}{p}\sigma^{-p/p-1}H'(t), \end{aligned} \tag{4.54}$$

et

$$\begin{aligned} \epsilon\int_{\Gamma_1} u_t ud\Gamma &\leq \frac{\epsilon}{4\sigma}\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \epsilon B_*^2\sigma\|\nabla u\|_2^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{4\sigma}H'(t) + \epsilon B_*^2\sigma\|\nabla u\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.55}$$

En combinant les estimations (4.53)-(4.55) et (4.52), on trouve

$$\begin{aligned} G'(t) &\geq \Big((1-\delta)H^{-\delta} - \frac{\epsilon}{4\sigma}\Big)H'(t) + \epsilon\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 \\ &-\epsilon\Big\{1-\Big(1-\frac{1}{4\eta}\Big)\Big(\int_0^t g(s)ds\Big) + B_*^2\sigma\Big\}\|\nabla u\|_2^2 \\ &-\epsilon\Big(1+\frac{1}{p}\sigma^p\Big)\|\nabla u\|_p^p + \epsilon\|u\|_{k,\Gamma_1}^k \\ &-\epsilon\frac{p-1}{p}\sigma^{-p/p-1}\|\nabla u_t\|_p^p - \epsilon\eta(g\circ\nabla u)(t). \end{aligned} \tag{4.56}$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} -mH(t) &= \frac{m}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{m}{2}\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \frac{m}{2}(1-\int_0^t g(s)ds)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{m}{2}(g\circ\nabla u)(t) \\ &+\frac{m}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{m}{k}\|u\|_{k,\Gamma_1}^k, \end{aligned} \tag{4.57}$$

on peut obtenir

$$G'(t) \geq \Big((1-\delta)H^{-\delta} - \frac{\epsilon}{4\sigma}\Big)H'(t) + \epsilon\Big(\frac{m}{2}+1\Big)\|u_t\|_2^2 + \epsilon\Big(\frac{m}{2}+1\Big)\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2$$

$$\begin{aligned}
&+\epsilon\left\{\left(\frac{m}{2}-1\right)-\left(\frac{m}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\right)\left(\int_0^t g(s)ds\right)-B_*^2\sigma\right\}\|\nabla u\|_2^2\\
&+\epsilon\left(\frac{m}{p}-1-\frac{1}{p}\sigma^p\right)\|\nabla u\|_p^p-\epsilon\frac{p-1}{p}\sigma^{-p/p-1}\|\nabla u_t\|_p^p+\epsilon\left(1-\frac{m}{k}\right)\|u\|_{k,\Gamma_1}^k\\
&+\epsilon m H(t)+\epsilon\left(\frac{m}{2}-\eta\right)(g\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}\tag{4.58}$$

En utilisant (4.7), on trouve qu'on a pour certains η avec $0<\eta<m/2$

$$\begin{aligned}
G'(t) \ \geq\ &\left((1-\delta)H^{-\delta}-\frac{\epsilon}{4\sigma}\right)H'(t)+\epsilon\left(\frac{m}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2+\epsilon\left(\frac{m}{2}+1\right)\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2\\
&+\epsilon b_1\|\nabla u\|_2^2+\epsilon b_2\|\nabla u\|_p^p+\epsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)-\epsilon\frac{p-1}{p}\sigma^{-p/p-1}\|\nabla u_t\|_p^p\\
&+\epsilon\left(1-\frac{m}{k}\right)\|u\|_{k,\Gamma_1}^k+\epsilon m H(t),
\end{aligned}\tag{4.59}$$

où

$$b_1=\left\{\left(\frac{m}{2}-1\right)-\left(\frac{m}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\right)\left(\int_0^t g(s)ds\right)+B_*^2\sigma\right\}>0,$$

$$b_2=\left(\frac{m}{p}-1-\frac{1}{p}\sigma^p\right)>0,$$

et

$$b_3=\frac{m}{2}-\eta>0.$$

Donc, en prenant $\sigma=H^\delta/4k$, où $k>0$ seront spécifié plus tard, on obtient

$$\begin{aligned}
G'(t) \ \geq\ &\Big((1-\delta)-\epsilon k\Big)H^{-\delta}H'(t)+\epsilon\left(\frac{m}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2+\epsilon\left(\frac{m}{2}+1\right)\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2\\
&+\epsilon b_1\|\nabla u\|_2^2+\epsilon b_2\|\nabla u\|_p^p+\epsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)-\epsilon\frac{p-1}{p(4k)^{-p/p-1}}H^{-\delta p/p-1}H'(t)\\
&+\epsilon\left(1-\frac{m}{k}\right)\|u\|_{k,\Gamma_1}^k+\epsilon m H(t).
\end{aligned}\tag{4.60}$$

En substituant (4.60) dans (4.59), on trouve

$$\begin{aligned}
G'(t) \ \geq\ &\left((1-\delta)-\epsilon\left(k+\frac{p-1}{p(4k)^{-p/p-1}}\right)\right)H^{-\delta}H'(t)+\epsilon\left(\frac{m}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2+\epsilon\left(\frac{m}{2}+1\right)\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2\\
&+\epsilon b_1\|\nabla u\|_2^2+\epsilon b_2\|\nabla u\|_p^p+\epsilon b_3(g\circ\nabla u)(t)+\epsilon\left(1-\frac{m}{k}\right)\|u\|_{k,\Gamma_1}^k+\epsilon m H(t).
\end{aligned}\tag{4.61}$$

on prend $k > 0$ assez grand et on sélectionne $\epsilon > 0$ assez petit pour que

$$(1-\delta) - \epsilon\Big(k + \frac{p-1}{p(4k)^{-p/p-1}}\Big) > 0,$$

et

$$G(0) = H^{1-\delta}(0) + \epsilon \int_\Omega u_1 u_0 dx + \epsilon \int_{\Gamma_1} u_1 u_0 d\Gamma.$$

Par conséquent, de (4.61) on obtient

$$G'(t) \geq K\Big(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_p^p + \|u\|_{k,\Gamma_1}^k + (g \circ \nabla u)(t) + H(t)\Big). \tag{4.62}$$

où K est une constante positive.
Maintenant, on doit estimer $G(t)^{1/1-\delta}$. Par les inégalités de Hölder et Young, on a

$$\left|\int_\Omega u_t u dx\right|^{\frac{1}{1-\delta}} \leq C\left(\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\delta}} + \|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\delta}}\right), \tag{4.63}$$

pour $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\theta} = 1$. Pour pouvoir utiliser le lemme (4.2), on prend $\theta = 2(1-\delta)$ ce qui donne $\dfrac{\mu}{1-\delta} = \dfrac{2}{1-2\delta} \leq p$. Par conséquent, (4.63) devient

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u_t u dx\right|^{\frac{1}{1-\delta}} &\leq C\left(\|u\|_p^{\frac{\mu}{1-\delta}} + \|u_t\|_2^2\right) \\ &\leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla u\|_p^p + \|u_t\|_2^2\right). \end{aligned} \tag{4.64}$$

D'une façon similaire à (4.64), en appliquant le lemme (4.3) on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma\right|^{\frac{1}{1-\delta}} &\leq \left(\|u_t\|_{2,\Gamma_1}\|u\|_{2,\Gamma_1}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ &\leq \left(\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^{\frac{1}{1-\delta}}\|u\|_p^{\frac{1-s}{1-\delta}}\|\nabla u\|_2^{\frac{s}{1-\delta}}\right). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Comme

$$\|\nabla u\|^{\frac{s}{1-\delta}} \leq \gamma^{\frac{s}{2(1-\delta)}},$$

on trouve

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma\right|^{\frac{1}{1-\delta}} &\leq C\left(\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|u\|_p^{\frac{2(1-s)}{1-2\delta}}\right) \\ &\leq C\left(\|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_2^2\right).\end{aligned} \tag{4.66}$$

De (4.64) et (4.66), on obtient

$$G^{\frac{1}{1-\delta}}(t) \leq C\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Gamma_1}^2 + \|\nabla u\|_p^p + \|\nabla u\|_2^2 + H(t)\right). \tag{4.67}$$

En combinant (4.62) et (4.67), on trouve

$$G'(t) \geq \alpha G^{\frac{1}{1-\delta}}(t), \forall t > 0, \tag{4.68}$$

où α une constante positive.
Une simple intégration de (4.68) sur $(0, t)$ nous donne

$$G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(t) \geq \frac{1}{G^{-\frac{\delta}{1-\delta}}(0) - \alpha t \frac{\delta}{1-\delta}}. \tag{4.69}$$

Par conséquent, la solution du problème (4.1) s'explose en temps fini T^* donné par

$$T^* \leq \frac{1-\delta}{G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(0)\alpha\delta}. \tag{4.70}$$

□

CHAPITRE 5

SUR UNE ÉQUATION VISCOÉLASTIQUE À DES EXPOSANTS VARIABLES AVEC UN TERME P(X)-LAPLACIEN

5.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), un domaine Lipschitzien borné et $0 < T < \infty$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta_{p(x)} u - div[a(x)\nabla u] \\ + \int_0^t g(t-s) div[a(x)\nabla u] ds + \mu_1 u_t(x,t)|u_t|^{m(x)-2}(x,t) \\ +\mu_2 u_t(x,t-\tau)|u_t|^{m(x)-2}(x,t-\tau) = \mu_3 u(x,t)|u|^{q(x)-2} & sur \;\; Q_T, \\ u(x,t) = 0 & sur \;\; S_T, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x) & sur \;\; \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau) & sur \;\; \Omega \times (0,\tau), \end{cases} \tag{5.1}$$

où $Q_T = \Omega \times \mathbb{R}^+$ et $S_T = \partial\Omega \times [0,\infty)$ désigne la frontière latérale du cylindre Q_T. Supposons que ρ,μ_1 et μ_3 sont des constantes positives fixées, et μ_2 un nombre réel, $\tau > 0$ représente le temps de retard, g la fonction de relaxation positive décroissante. L'opérateur $\Delta_{p(.)}$ est le p-Laplacien classique donné par $\Delta_{p(x)} = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$, les exposants variables $m(.)$, $q(.)$ et $p(.)$ sont des fonctions mesurables sur $\bar{\Omega}$.

L'étude de l'existence, de l'unicité et du comportement asymptotique des solutions pour les problèmes à exposant variable a attiré l'attention de nombreux auteurs ces dernières années en raison de son importance et de son rôle dans plusieurs domaines tels que les écoulements des fluides électrorhéologiques ou des fluides à viscosité dépendante de la température, la viscoélasticité non linéaire, les processus de filtration à travers un support poreux et le traitement d'image, comme en témoignent les références [1, 20, 51] et d'autres. Antonsev [4], a considéré l'équation non linéaire suivante

$$u_{tt} - div(a(x,t)|\nabla u|^{p(x,t)-2}\nabla u) - \alpha\Delta u_t = b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u,$$

où α est une constante positive, a et b sont deux fonctions données, et p et σ sont des exposants non linéaires. Dans ce travail, Antonsev a étudié l'explosion des solutions en temps fini pour une énergie initiale négative sous certaines hypothèses sur les données initiales. Ensuite, dans [5], il a prouvé l'existence des solutions faibles locales et globales en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Il a également donné le résultat d'explosion sur l'intervalle fini $(0, t_{max})$ pour les solutions avec une énergie initiale strictement négative. Messaoudi et Talahmeh [66] ont étudié l'équation suivante :

$$u_{tt} - div(|\nabla u|^{m(x)-2}\nabla u) + \mu u_t = |u|^{p(x)-2}u. \tag{5.2}$$

Ils ont établi un résultat d'explosion pour certaines solutions avec une énergie initiale positive arbitraire. Leur résultat généralise celui de Korpusov [48], qui a été établi pour (5.2) avec m et p des constantes. Ensuite, dans [61], ils ont considéré une équation r-Laplacienne avec un terme d'amortissement faible non linéaire, et ont établi un résultat de décroissance générale en utilisant la méthode de Komornik sous des conditions appropriées sur r, m et les données initiales. En outre, ils ont donné un exemple numérique pour illustrer leur théorie.

En présence du terme viscoélastique, Y. Gao et W. Gao [34] ont considéré l'équation à exposants variables suivante :

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u_t|^{m(x)-2}u_t = |u|^{p(x)-2}u.$$

Sous des hypothèses appropriées sur g, m et p, ils ont étudié l'existence d'une solution faible en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Pour un terme de retard non linéaire, Kafini et Messaoudi [63] ont étudié l'équation suivante

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} + \mu_2 u_t(x,t-\tau)|u_t(x,t-\tau)|^{m(x)-2} = bu|u|^{p(x)-2}.$$

Dans cette étude, les auteurs ont établi un résultat de décroissance de l'énergie dans le cas où $b = 0$, tandis que pour $b \neq 0$, ils ont prouvé que la solution explose en temps fini. Ferreira et al. [33] ont considéré l'équation de rayonnement de type Kirchhoff suivante

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} + \mu_2 u_t(x,t-\tau)|u_t(x,t-\tau)|^{m(x)-2} = 0.$$

Ils ont démontré la stabilité exponentielle et polynomiale en utilisant les inégalités de Komornik. Antonsev et al. [6], ont étudié l'équation p-Laplacienne avec un terme de retard de la forme donnée ci-dessus. :

$$u_{tt} - \Delta_{p(x)} u + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} + \mu_2 u_t(x,t-\tau)|u_t(x,t-\tau)|^{m(x)-2} = bu|u|^{q(x)-2},$$

où ils ont prouvé que la solution s'explose en temps fini pour $E(0) < 0$. Puis, en utilisant la méthode de Komornik, ils ont obtenu un résultat de décroissance générale.

Inspirés par les recherches précédentes, notre but principal dans le présent chapitre est d'étudier l'existence et le comportement asymptotique des solutions du problème (5.1).

5.2 Notions Préliminaires

Comme dans [101], on définit l'espace de Hilbert

$$H_a := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|\nabla u\|_a^2 := \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx, \tag{5.3}$$

où $a(x) \in C^1(\Omega)$ est une fonction positive qui satisfait

$$a(x) \geq a_1^2 > 0. \tag{5.4}$$

Donc en utilisant (5.3) et (5.4), on peut obtenir

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{1}{a_1^2}\|\nabla u\|_a^2. \tag{5.5}$$

Soit $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$, on définit l'espace de Lebesgue à exposant variable par

$$L^{p(.)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ measurable\ sur\ \Omega : \int_\Omega |u|^{p(.)} dx < \infty \right\},$$

muni de la norme de Luxemburg

$$\|u\|_{p(.)} = inf\left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \tag{5.6}$$

L'espace $L^{p(.)}$ muni de cette norme est un espace de Banach (voir [28]), et immédiatement on a

$$min\left\{ \|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+} \right\} \leq \int_\Omega |u|^{p(x)} dx \leq max\left\{ \|u\|_{p(x)}^{p^-}, \|u\|_{p(x)}^{p^+} \right\}. \tag{5.7}$$

De plus, on définit l'espace de Sobolev à exposant variable $W^{1,p(.)}(\Omega)$ par

$$W^{1,p(.)} = \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : \nabla u\ existe\ et\ |\nabla u| \in\ L^{p(.)}(\Omega) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,p(.)} = \|u\|_{p(.)} + \|\nabla u\|_{p(.)}.$$

L'espace $W_0^{1,p(.)}$ muni de la norme équivalente

$$\|u\|_{1,p(.)} = \|\nabla u\|_{p(.)},$$

est défini comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(.)}(\Omega)$, si $p(x)$ vérifie la condition de continuité log-Hölder suivante

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{\alpha}{log\frac{1}{|x-y|}},\ \ \forall\ x, y \in \Omega\ et\ |x - y| \leq \delta,$$

avec $\alpha > 0$ et $0 < \delta < 1$.

On doit maintenant énoncer les hypothèses suivantes afin de prouver nos résultats :

(A_1) La fonction de relaxation g est une fonction de classe C^1 décroissante et satisfait pour

$s > 0$

$$g(s) \geq 0, g'(s) \leq 0, \;\; 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l \geq 0.$$

(A_2) Il existe une fonction différentiable positive ξ telle que

$$g'(s) \leq -\xi(s)g(s) \;\; pourtout \;\; s > 0,$$

avec

$$\xi'(t) \leq 0, \; et \; \int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty.$$

(A_3) Les exposants $q(x), m(x)$ et $p(x)$ vérifient

$$\begin{cases} 2 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ \leq q^*, \\ \rho + 2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ \leq m^*, \\ 2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq p^*, \end{cases} \tag{5.8}$$

où

$$q^- = infess_{x\in\Omega} \; q(x), \quad q^+ = supess_{x\in\Omega} \; q(x),$$

$$m^- = infess_{x\in\Omega} \; m(x), \quad m^+ = supess_{x\in\Omega} \; m(x),$$

$$p^- = infess_{x\in\Omega} \; p(x), \quad p^+ = supess_{x\in\Omega} \; p(x),$$

et

$$m^* \leq \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & si \;\; n \geq 3, \\ +\infty & si \;\; n < 3, \end{cases} \tag{5.9}$$

et

$$q^* = \begin{cases} \frac{2(n-1)}{n-2} & si \;\; n \geq 3, \\ +\infty & si \;\; n < 3, \end{cases} \tag{5.10}$$

et

$$p^* \leq \begin{cases} essinf_{x\in\Omega} \frac{np(x)}{n-p(x)} & si \;\; p^+ < n, \\ +\infty & si \; ^+ \geq n. \end{cases} \tag{5.11}$$

En outre, on suppose que g satisfait

$$\int_0^\infty g(s)ds < \frac{(1-a)q^- - 2}{(1-a)q^- - 2 + 1/2\eta}. \tag{5.12}$$

Pour a et η deux constantes positives à spécifier ultérieurement.

Maintenant, similaire à Nicaise et Pignotti [73], on introduit une nouvelle variable z pour traiter le terme de retard comme suit

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t-\tau\rho), \quad x \in \Omega, \ \rho \in (0.1) \ et \ t > 0, \tag{5.13}$$

ce qui nous donne

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \ sur \ \Omega \times (0,1) \times (0,+\infty). \tag{5.14}$$

Alors, le problème (5.1) peut être réécrit de la manière suivante

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta_{p(x)}u - div[a(x)\nabla u] & \\ + \displaystyle\int_0^t g(t-s) div[a(x)\nabla u]ds + \mu_1 u_t(x,t)|u_t|^{m(x)-2}(x,t) & \\ +\mu_2 z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2} = \mu_3 u(x,t)|u|^{q(x)-2} & sur \ \ Q_T, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0 & sur \ \ \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & sur \ \ S_T, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & sur \ \ \Omega, \\ z(x,0,t) = u_t(x,t) & sur \ \ \Omega \times (0,\infty), \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\tau\rho) & sur \ \ \Omega \times (0,1). \end{cases} \tag{5.15}$$

Posons ξ une fonction continue positive telle que

$$\tau|\mu_2|(m(x)-1) < \xi(x) < \tau(\mu_1 m(x) - |\mu_2|), \tag{5.16}$$

On définit l'énergie associée au problème (5.1) par

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t)$$

$$-\mu_3 \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)}dx + \int_\Omega \int_0^1 \frac{\xi(x)|z|^{m(x)}}{m(x)}d\rho dx. \tag{5.17}$$

Lemme 5.1. Soit u la solution du problème (5.1). Alors,

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - c_0\left(\int_\Omega |u_t|^{m(x)}dx + \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)}dx\right). \tag{5.18}$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (5.15) par u_t et l'intégrant ensuite sur Ω, puis en multipliant la deuxième équation de (5.15) par $\frac{\xi(x)}{\tau}|z|^{m(x)-2}z$ et l'intégrant sur $\Omega \times (0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t)\right.\\
&\left.-\mu_3 \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)}dx + \int_\Omega \int_0^1 \frac{\xi(x)|z|^{m(x)}}{m(x)}d\rho dx\right]\\
&= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - \int_\Omega (\mu_1 - \frac{\xi(x)}{\tau m(x)})|u_t|^{m(x)}dx\\
&-\mu_2 \int_\Omega z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}u_t dx - \frac{1}{\tau}\int_\Omega \frac{\xi(x)}{m(x)}|z(x,1,t)|^{m(x)}dx.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

En utilisant l'inégalité de Young avec $q = \frac{m(x)}{m(x)-1}$ et $p = m(x)$, on estime le troisième terme de (5.19) comme suit

$$\begin{aligned}
&-\mu_2 \int_\Omega z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}u_t dx\\
&\leq |\mu_2| \int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u_t|^{m(x)}dx + |\mu_2| \int_\Omega \frac{m(x)-1}{m(x)}|z(x,1,t)|^{m(x)}dx.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{dE}{dt} \leq \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - \int_\Omega \left(\mu_1 - \frac{\xi(x)}{\tau m(x)} - \frac{|\mu_2|}{m(x)}\right)|u_t|^{m(x)}dx\\
&- \int_\Omega \left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)} - \frac{|\mu_2|(m(x)-1)}{m(x)}\right)|z(x,1,t)|^{m(x)}dx.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

De la relation (5.16), on obtient

$$f_1(x) = \mu_1 - \frac{\xi(x)}{\tau m(x)} - \frac{|\mu_2|}{m(x)} > 0,$$

et

$$f_2(x) = \frac{\xi(x)}{\tau m(x)} - \frac{|\mu_2|(m(x)-1)}{m(x)} > 0.$$

Comme $m(x)$ et $\xi(x)$ sont bornées, on peut dire que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ le sont également. On définit alors

$$c_0(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}, \ \ pour \ \ tout \ \ x \in \overline{\Omega},$$

en prenant $c_0 = \inf_{x\in\overline{\Omega}} c_0(x)$, on obtient

$$\frac{dE}{dt}(t) \leq \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_a^2 - c_0\bigg(\int_\Omega |u_t|^{m(x)}dx + \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)}dx\bigg).$$

□

Lemme 5.2. [66] Supposons que la condition (A_3) est vérifiée. Alors il existe une constante positive $c > 1$ qui dépend seulement de Ω, telle que

$$\Theta^{s/q^-}(u) \leq c\bigg(\|\nabla u\|_{p^-}^{p(.)} + \Theta(u)\bigg).$$

Alors

$$\|u\|_{q^-}^s \leq c\bigg(\|\nabla u(t)\|_{p^-}^{p(.)} + \|u(t)\|_{q^-}^{q^-}\bigg),$$

et

$$\Theta^{s/q^-}(u) \leq c\bigg(|H(t)| + \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \Theta(u) + \int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho\bigg),$$

pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}$ et $p^- \leq s \leq q^-$.

Corollaire 5.1. [66] Soit l'ypothèse (A_3) verifiée. Alors

$$\|u\|_{q^-}^s \leq c\bigg(|H(t)| + \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|u(t)\|_{q^-}^{q^-} + \int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho\bigg).$$

Pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}$ et $p^- \leq s \leq q^-$.

Ensuite, on définit les fonctionelles suivantes

$$\begin{aligned} I(t) = I(u(t)) &= 2\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx + \bigg(1 - \int_0^t g(s)ds\bigg)\|\nabla u\|_a^2 + (g\circ\nabla u)(t) \\ &+2\int_\Omega\int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}d\rho dx - \mu_3 q(x)\int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)}dx, \end{aligned} \tag{5.22}$$

et l'energie potentielle

$$
\begin{aligned}
J(t) = J(u(t)) &= \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \|\nabla u\|_a^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\
&+ \int_\Omega \int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} d\rho dx - \mu_3 \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} dx.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Cela nous permet de réécrire l'énergie comme suit

$$
E(t) = \frac{1}{\rho+2} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + J(t). \tag{5.24}
$$

5.3 Existence Globale

Dans cette section, on va prouver que la solution du problème (5.1) est globale.

Lemme 5.3. Supposons que les conditions (A_1)-(A_2) soient vérifiées, et pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, telle que

$$
I(0) > 0, \quad \vartheta = \frac{\mu_3 c_*^{q^+}}{q^- a_1^{q^+} l} \Big(\frac{2q^-}{l(q^+-2)} E(0) \Big)^{\frac{q^+-2}{2}} < 1, \tag{5.25}
$$

on a

$$
I(t) > 0, pour \;\; tout \;\; t > 0. \tag{5.26}
$$

Démonstration. Puisque $I(0) > 0$, alors par continuité de $u(t)$, il existe un temps $T_* < T$ tel que

$$
I(t) \geq 0, \forall t \in [0, T_*). \tag{5.27}
$$

Soit t_0 vérifie

$$
\Big\{ I(t_0) = 0, et \;\; I(t) > 0, \forall 0 < t_0 < T^* \Big\}. \tag{5.28}
$$

Alors, pour tout $t \in [0, T^*)$,

$$
\begin{aligned}
J(u(t)) &= \frac{q(x)-2}{2q(x)} \Bigg[\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big) \|\nabla u\|_a^2 + 2\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + (g \circ \nabla u)(t) \\
&+2 \int_\Omega \int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} d\rho dx \Bigg] + \frac{1}{q(x)} I(t) \\
&\geq \frac{q(x)-2}{2q(x)} \Bigg[\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big) \|\nabla u\|_a^2 + 2\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + (g \circ \nabla u)(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_\Omega\int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}d\rho dx\Bigg] \\
&\geq \frac{q^- - 2}{2q^-}\left[\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 + 2\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + (g\circ\nabla u)(t)\right. \\
&\left.+2\int_\Omega\int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}d\rho dx\right].
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

En utilisant (A_1), (5.24) et (5.29), on obtient

$$
\begin{aligned}
l\|\nabla u\|_a^2 &\leq \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 \\
&\leq \frac{2q^-}{q^- - 2}J(u(t)) \\
&\leq \frac{2q^-}{q^- - 2}E(t) \\
&\leq \frac{2q^-}{q^- - 2}E(0), \forall 0<t<T^*.
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

En utilisant l'inégalité de Poincarré, (5.5), (5.25) et (5.30), on trouve

$$
\begin{aligned}
\mu_3 q(x)\int_\Omega \frac{|u(t_0)|^{q(x)}}{q(x)}dx &\leq \frac{\mu_3 q^+}{q^-}\int_\Omega |u(t_0)|^{q^+} \\
&\leq \frac{\mu_3 q^+}{q^-}\|u(t_0)\|_{q^+}^{q^+} \\
&\leq \frac{\mu_3 q^+ c_*^{q^+}}{q^-}\|\nabla u(t_0)\|_2^{q^+} \\
&\leq \frac{\mu_3 q^+ c_*^{q^+}}{q^- a_1^{q^+}}\|\nabla u(t_0)\|_a^{q^+} \\
&\leq \frac{\mu_3 q^+ c_*^{q^+}}{q^- a_1^{q^+} l}\left(\frac{2q^-}{l(q^+-2)}E(0)\right)^{\frac{q^+-2}{2}} l\|\nabla u(t_0)\|_a^2 \\
&= \vartheta l\|\nabla u(t_0)\|_a^2 < \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t_0)\|_a^2.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Par conséquent, on obtient

$$
I(t_0) > 0.
$$

Ce qui contredit (5.28). Ainsi, $I(t)>0$ sur $[0,T_*)$. Répétant cette procédure, T_* est étendu à T. □

Theorem 5.1. *Supposons que les conditions du lemme (5.3) soient satisfaites. Alors la solution du problème (5.1) est globale et bornée.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que

$$\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|\nabla u\|_a^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq CE(0),$$

alors, en utilisant (5.18), (5.24) et (5.29), on obtient

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + J(t) \\ &\geq \frac{q^- - 2}{2q^-}\left(l\|\nabla u\|_a^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) + \frac{1}{\rho+2}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} \qquad (5.32) \\ &\geq \min\left\{\frac{l(q^- - 2)}{2q^-}, \frac{q^- - 2}{q^-}, \frac{1}{\rho+2}\right\}\left(\|\nabla u\|_a^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx + \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|\nabla u\|_a^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq CE(0), \qquad (5.33)$$

où $C = \dfrac{1}{\min\left\{\frac{l(q^- - 2)}{2q^-}, \frac{q^- - 2}{q^-}, \frac{1}{\rho+2}\right\}}$. La preuve est donc complète. □

5.4 Décroissance de l'énergie

Lemme 5.4. Sous les hypothèses (5.8), il existe une constante positive C telle que la solution globale u de (5.1) vérifie

$$\int_\Omega |u(t)|^{q(x)} dx \leq CE(t).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u(t)|^{q(x)} dx \leq max\{\|u\|_{q(x)}^{q^-}, \|u\|_{q(x)}^{q^+}\} \\ &\leq max\left\{c_*^{q^-}\|\nabla u\|_2^{q^-}, c_*^{q^+}\|\nabla u\|_2^{q^+}\right\} \\ &\leq max\left\{\frac{c_*^{q^-}}{a_1^{q^-}}\|\nabla u\|_a^{q^-}, \frac{c_*^{q^+}}{a_1^{q^+}}\|\nabla u\|_a^{q^+}\right\} \\ &\leq max\left\{\frac{c_*^{q^-}}{a_1^{q^-} l}\|\nabla u\|_a^{q^- -2}, \frac{c_*^{q^+}}{a_1^{q^+} l}\|\nabla u\|_a^{q^+ -2}\right\} l\|\nabla u\|_a^2 \leq CE(t). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.5. Sous les hypothèses (5.8), il existe une constante positive C telle que la solution u du problème (5.1) vérifie

$$\int_\Omega |u(t)|^{m(x)}dx \leq CE(t), \quad pour \ \ tout \ \ t > 0.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme précédent. □

Lemme 5.6. (Komornik, [46]) Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante, supposons qu'il existe des constantes r et ω telles que

$$\int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)dt \leq \frac{1}{|\Omega|}E^r(0)E(s) = cE(s), \forall s > 0,$$

alors, on a

$$\begin{cases} E(t) \leq cE(0)/(1+t)^{1/r} & si \ \ r > 0, \\ E(t) \leq cE(0)e^{-\omega t} & si \ \ r = 0. \end{cases}$$

Lemme 5.7. [63] La fonctionnelle

$$\phi(t) = \tau \int_0^1 \int_\Omega e^{-\rho\tau}\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}dxd\rho,$$

satisfait le long de la solution de (5.15) l'inégalité suivante

$$\phi'(t) \leq \int_\Omega \xi(x)|u_t|^{m(x)}dx - \tau e^{-\tau} \int_0^1 \int_\Omega \xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}dxd\rho.$$

Maintenant, on suppose que

$$\rho + 2 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ \leq m^*,$$

où

$$m^* = \begin{cases} infess_{x\in\Omega}\dfrac{nm^-}{n-m^-} & si \ \ m^- < n, \\ \\ +\infty & si \ \ m^- \geq n. \end{cases}$$

Theorem 5.2. *Soient $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $m(\cdot)$, $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ appartenant à $C(\bar{\Omega})$. Alors l'énergie $E(t)$ satisfait*

$$E(t) \leq \begin{cases} ce^{-\alpha t} & si \ \ m(x) = \rho + 2, \\ \\ cE(0)/(1+t)^{2/m^+-(\rho+2)} & si \ \ m^+ > \rho + 2. \end{cases}$$

Pour c et α deux constantes positives.

Démonstration. Soient $T > S > 0$ et $r \geq 0$. En multipliant la première équation de (5.15) par $u(t)E^r(t)$, puis l'intégrant sur $\Omega \times (S,T)$, on obtient

$$\int_s^T E^r(t)\int_\Omega \Bigg[|u_t|^\rho u_{tt}u - \Delta_{p(x)}u.u - div[a(x)\nabla u]u + \int_0^t g(t-s)div[a(x)\nabla u]dsu$$

$$+\mu_1 u_t(x,t)|u_t|^{m(x)-2}(x,t)u + \mu_2 z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}u - \mu_3 u(x,t)|u|^{q(x)-2}u\Bigg]dxdt = 0,$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
&\int_s^T E^r(t)\int_\Omega \Bigg[\frac{d}{dt}\big(|u_t|^\rho u_t u\big) - |u_t|^{\rho+2} + |\nabla u|^{p(x)} + a(x)|\nabla u|^2 \\
&- \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(s)ds\nabla u(t) + \mu_1 u_t(x,t)|u_t|^{m(x)-2}(x,t)u \\
&+\mu_2 z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}u - \mu_3|u|^{q(x)}\Bigg]dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

En utilisant la définition de $E(t)$ et la relation

$$\frac{d}{dt}\Big(E^r\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\Big) = rE^{r-1}(t)E'(t)\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx + E^r\int_\Omega \big(|u_t|^\rho u_t u\big)_t dx.$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&2\int_s^T E^{r+1}dt \leq -\int_s^T \frac{d}{dt}\Big(E^r\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\Big)dt + r\int_s^T E^{r-1}(t)E'(t)\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dxdt \\
&+\Big(\frac{3}{\rho+2}\Big)\int_s^T E^r\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}dt + \int_s^T E^r\int_\Omega\left(\frac{2-p(x)}{p(x)}\right)|\nabla u|^{p(x)}dxdt \\
&+\int_s^T E^r\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|_a^2 dsdxdt \\
&+\int_s^T E^r\int_\Omega\int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(t)\Big[\nabla u(s)-\nabla u(t)\Big]dsdxdt \\
&-\mu_1\int_s^T E^r\int_\Omega u_t(x,t)|u_t|^{m(x)-2}(x,t)udxdt + 2\int_s^T E^r\int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho dt \\
&-\mu_2\int_s^T E^r\int_\Omega z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}udxdt + \mu_3\int_s^T E^r\int_\Omega\left(1-\frac{2}{q(x)}\right)|u|^{q(x)}dxdt.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Maintenant, on estime chaque terme de (5.35)

Estimation du terme : $-\int_s^T \frac{d}{dt}\Big(E^r \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\Big) dt$

$$\begin{aligned}
&\left| -\int_s^T \frac{d}{dt}\Big(E^r \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\Big) dt \right| \\
&= \left[E^r(s) \int_\Omega |u_t(x,s)|^{\rho+1} u dx - E^T(s) \int_\Omega |u_t(x,T)|^{\rho+1} u dx \right] \\
&\leq \frac{1}{\rho+2} E^r(s) \left[(\rho+1) \int_\Omega |u_t(x,s)|^{\rho+2} dx + \int_\Omega |u(x,s)|^{\rho+2} dx \right] \\
&+ \frac{1}{\rho+2} E^r(T) \left[(\rho+1) \int_\Omega |u_t(x,T)|^{\rho+2} dx + \int_\Omega |u(x,T)|^{\rho+2} dx \right] \\
&\leq \frac{1}{\rho+2} E^r(s) \left[(\rho+1) E(s) + \frac{2c_*^{\rho+2}}{l a_1^{\rho+2}} (E(0))^{\rho/2} E(s) \right] \\
&+ \frac{1}{\rho+2} E^r(T) \left[(\rho+1) E(T) + \frac{2c_*^{\rho+2}}{l a_1^{\rho+2}} (E(0))^{\rho/2} E(T) \right].
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Comme $E(t)$ est décroissante, on en déduit que

$$\left| -\int_s^T \frac{d}{dt}\Big(E^r \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\Big) dt \right| \leq c E^{r+1}(s) \leq c E^r(0) E(s) = c_1 E(s). \tag{5.37}$$

Estimation du terme $r \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx dt$

$$\begin{aligned}
&\left| r \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx dt \right| \\
&\leq -r \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) \int_\Omega |u_t|^{\rho+1} u dx dt \\
&\leq -\frac{r}{\rho+2} \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) \Big[(\rho+1) E(t) + \frac{2c_*^{\rho+2}}{l a_1^{\rho+2}} (E(0))^{\rho/2} E(t) \Big] \\
&\leq -c_2 \int_s^T E^r(t) E'(t) dt \\
&\leq -c_2 E^{r+1}(s) \leq c_3 E(s).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Estimation du terme $\left(\dfrac{3}{\rho+2}\right)\displaystyle\int_s^T E^r\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}dt$

On pose $\Omega_- = \Big\{x \in \Omega, |u_t| < 1\Big\}$, *et* $\Omega_+ = \Big\{x \in \Omega, |u_t| \geq 1\Big\}$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dxdt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\left[\int_{\Omega_-}|u_t|^{\rho+2}dx + \int_{\Omega_+}|u_t|^{\rho+2}dx\right]dt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\left[\int_{\Omega_-}(|u_t|^{m^+})^{\rho+2/m^+}dx + \int_{\Omega_+}(|u_t|^{m^-})^{\rho+2/m^-}dx\right]dt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\left[\int_{\Omega}(|u_t|^{m(x)})^{\rho+2/m^+}dx + \int_{\Omega}(|u_t|^{m(x)})^{\rho+2/m^-}dx\right]dt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\Big[(-E'(t))^{\rho+2/m^+} + (-E'(t))^{\rho+2/m^-}\Big]dt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\frac{m^- - 2-\rho}{m^-}\int_s^T E^{rm^-/m^- -2-\rho}dt + \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{\rho+2}{m^-}\right)\int_s^T(-E'(t))dt\\
&+\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{r}{r+1}\right)\int_s^T E^{r+1}(t)dt + \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{1}{r+1}\right)\int_s^T(-E'(t))^{(\rho+2)(r+1)/m^+}(t)dt.
\end{aligned}$$

Pour $m^- \geq \rho+2$, le choix de $r = \frac{m^+}{\rho+2} - 1$ donnera $rm^-/m^- - 2 - \rho = r+1+\dfrac{m^+ - m^-}{m^- - 2 - \rho}$, par conséquent, on considère 2 cas, pour $m^- > \rho+2$ on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dxdt\\
&\leq c_4\int_s^T E^{r+1}(t)dt + c_5(E(0))^{\frac{m^+-m^-}{m^- -2-\rho}}\int_s^T E^{r+1}(t)dt + c_6E(s) \qquad (5.39)\\
&\leq c(\rho)\int_s^T E^{r+1}(t)dt + c_6E(s).
\end{aligned}$$

Pour $m^- = \rho+2$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dxdt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\left[\int_{\Omega_-}|u_t|^{\rho+2}dx + \int_{\Omega_+}|u_t|^{\rho+2}dx\right]dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\left[\int_{\Omega_-}(|u_t|^{m^+})^{\rho+2/m^+}dx+\int_{\Omega_+}|u_t|^{m(x)}dx\right]dt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\left[\int_{\Omega}(|u_t|^{m(x)})^{\rho+2/m^+}dx+\int_{\Omega}|u_t|^{m(x)}dx\right]dt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r(-E'(t))^{\rho+2/m^+}dt+\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{1}{r+1}\right)E^{r+1}(s)\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{r}{r+1}\right)\int_s^T E^{r+1}dt+\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{1}{r+1}\right)\int_s^T(-E'(t))^{(\rho+2)(r+1)/m^+}dt\\
&+\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{1}{r+1}\right)E^{r+1}(s),
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

on prend $r=\dfrac{m^+}{\rho+2}-1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\int_s^T E^r\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dxdt\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{r}{r+1}\right)\int_s^T E^{r+1}dt+\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{1}{r+1}\right)\int_s^T(-E'(t))dt\\
&+\left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{1}{r+1}\right)E^{r+1}(s)\\
&\leq \left(\frac{3}{\rho+2}\right)\left(\frac{r}{r+1}\right)\int_s^T E^{r+1}dt+c_\rho(1+E^r(0))E(s).
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

Estimation du terme $-\mu_1\int_s^T E^r\int_\Omega u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m(x)-2}udxdt$
En utilisant l'inégalité de Young et le lemme (5.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|-\mu_1\int_s^T E^r\int_\Omega u_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m(x)-2}udxdt\right|\\
&\leq \mu_1\int_s^T E^r\int_\Omega |u_t(x,t)|^{m(x)-1}udxdt\\
&\leq \mu_1\int_s^T E^r\left[\frac{m(x)-1}{m(x)}\int_\Omega |u_t|^{m(x)}+\frac{1}{m(x)}\int_\Omega |u|^{m(x)}dx\right]dt\\
&\leq c_{m^1}\int_s^T E^r(t)(-E'(t))dt+c_{m^2}\int_s^T E^r(t)\int_\Omega |u|^{m(x)}dxdt
\end{aligned}
$$

$$\leq c_{m^1} E^r(0)E(s) + c_{m^2} \int_s^T E^{r+1}(t)dt. \tag{5.42}$$

Estimation du terme $\int_s^T E^r \int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_a^2 dsdxdt$

$$\begin{aligned}
&\int_s^T E^r \int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_a^2 dsdxdt \\
&\leq -\int_s^T E^r \int_0^t \frac{1}{\xi(s)} g_t(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_a^2 dsdt \\
&\leq -\frac{1}{\xi(0)} \int_s^T E^r(E'(t))dt \\
&\leq \varsigma_0 E^{r+1}(s) \leq \varsigma_0 E^r(0)E(s) = cE(s).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Estimation du terme $\int_s^T E^r \int_\Omega \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(t)\Big[\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big] dsdxdt$
En utilisant l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \int_s^T E^r \int_\Omega \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(t)\Big[\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big] dsdxdt \right| \\
&\leq \int_s^T E^r \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(t-s)ds\right)\|\nabla u\|_a^2 dt + \int_s^T E^r \frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_a^2 dsdt,
\end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $g(t) \leq -\frac{g_t(t)}{\xi(t)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \int_s^T E^r \int_\Omega \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(t)\Big[\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big] dsdxdt \right| \\
&\leq c\frac{1-l}{l} \int_s^T E^{r+1} dt + cE(s).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Estimation du terme $2\int_s^T E^r \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dxd\rho dt$
En utilisant le lemme (5.7), on obtient

$$\begin{aligned}
&2\int_s^T E^r \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dxd\rho dt \\
&\leq \frac{2}{m^-} \int_s^T E^r \int_0^1 \int_\Omega \xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)} dxd\rho dt
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2e^{\tau}}{m^{-}\tau}\int_s^T E^r\int_\Omega \xi(x)|u_t|^{m(x)}dxdt - \frac{2e^{\tau}}{m^{-}}\int_s^T E^r(t)\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1\int_\Omega e^{-\rho\tau}\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}dxd\rho\Big)dt$$

$$\leq -\frac{2e^{\tau}}{m^{-}}\left[E^r(t)\int_0^1\int_\Omega e^{-\rho\tau}\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}\right]_{t=s}^{t=T} + \frac{2e^{\tau}}{m^{-}\tau}\int_s^T E^r\int_\Omega \xi(x)|u_t|^{m(x)}dxdt.$$

Comme $\xi(x)$ est bornée, on obtient

$$\begin{aligned} &2\int_s^T E^r\int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho dt \\ &\leq \frac{2e^{\tau}}{m^{-}}E^{r+1}(s) + \frac{2e^{\tau}\xi_0}{m^{-}\tau}E^{r+1}(s) \leq c(m)E(s). \end{aligned} \tag{5.45}$$

Estimation du terme $-\mu_2\int_s^T E^r\int_\Omega z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}udxdt$

$$\begin{aligned} &\left|-\mu_2\int_s^T E^r\int_\Omega z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}udxdt\right| \\ &\leq \mu_2\int_s^T E^r\int_\Omega \frac{m(x)-1}{m(x)}|z(x,1,t)|^{m(x)}dxdt + \mu_2\int_s^T E^r\int_\Omega \frac{1}{m(x)}|u(x,t)|^{m(x)}dxdt \\ &\leq \frac{\mu_2(m^+-1)}{m^-}\int_s^T E^r(t)(-E'(t))dt + \frac{\mu_2 C}{m^-}\int_s^T E^{r+1}(t)dt \\ &\leq \frac{\mu_2(m^+-1)}{m^-}E^r(0)E(s) + \frac{\mu_2 C}{m^-}\int_s^T E^{r+1}(t)dt. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Estimation du terme $\mu_3\int_s^T E^r\int_\Omega\left(1-\frac{2}{q(x)}\right)|u|^{q(x)}dxdt$

En utilisant le lemme (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} &\mu_3\int_s^T E^r\int_\Omega\left(1-\frac{2}{q(x)}\right)|u|^{q(x)}dxdt \\ &\leq \mu_3\left(1-\frac{2}{q^+}\right)\int_s^T E^r\int_\Omega |u|^{q(x)}dxdt \\ &\leq \mu_3\left(1-\frac{2}{q^+}\right)\int_s^T E^{r+1}(t)dt. \end{aligned} \tag{5.47}$$

En combinant (5.37)-(5.47), on arrive à

$$\textstyle\int_s^T E^{r+1}(t)dt \leq c_{\rho,m}\int_s^T E^{r+1}(t)dt + cE(s). \tag{5.48}$$

On choisit $c_{\rho,m} < 1$, assez petit pour que

$$\int_s^T E^{r+1}(t)dt \leq cE(s). \tag{5.49}$$

En prenant $T \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)dt \leq cE(s). \tag{5.50}$$

Ainsi, le lemme de Komornik implique le résultat souhaité. □

5.5 Explosion de la solution

Dans cette section, on énonçe et on démontre le résultat de l'explosion de la solution en temps fini pour le problème (5.1).

On suppose que

$$\rho + 2 \leq \max\{m^+, p^+\} < q^- \leq q(x) \leq q^+ \leq p^*. \tag{5.51}$$

On a alors

Lemme 5.8. [66] Soit l'hypothèse (5.51) est vérifiée, et soit (u) une solution de (5.1). Alors

$$\Theta(u) \geq C\|u\|_{q^-}^{q^-}$$

et

$$\int_\Omega |u|^{m(x)}dx \leq C\big(\Theta^{m^-/q^-}(u) + \Theta^{m^+/q^-}(u)\big).$$

Theorem 5.3. *Supposons que les conditions (A_1)–(A_2) et $E(0) < 0$ sont vérifiées. Alors, la solution du problème (5.1) explose en temps fini T^*, et*

$$T* \leq \frac{1-\delta}{G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(0)\kappa\delta} \tag{5.52}$$

Démonstration. Soit

$$H(t) = -E(t), \tag{5.53}$$

de (5.18), on trouve

$$\begin{aligned} H'(t) &= -E'(t) \\ &\geq c_0\Big(\int_\Omega |u_t|^{m(x)} ds + \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)} dx \Big) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Donc $H(t)$ est une fonction croissante. À partir de l'énergie et de (5.53), on obtient pour tout $t \geq 0$ que

$$H(0) \leq H(t) < \mu_3 \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} \leq \frac{\mu_3}{q^-}\Theta(u), \tag{5.55}$$

où

$$\Theta(u) = \int_\Omega |u|^{q(x)} dx.$$

Ensuite, on définit l'équation

$$G(t) = H^{1-\delta}(t) + \epsilon \int_\Omega \frac{1}{\rho+1} |u_t|^\rho u_t u dx, \tag{5.56}$$

où $\epsilon > 0$ une petite constante que l'on choisira plus tard, et

$$0 < \delta \leq \min\left\{ \frac{q^- - m^+}{q^-(m^+-1)}, \frac{q^- - (\rho+2)}{(q^-)(\rho+2)} \right\}. \tag{5.57}$$

En dérivant (5.56), et en utilisant (5.1), on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) &= (1-\delta)H^{-\delta}H'(t) + \epsilon \int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} u + \frac{\epsilon}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} dx \\ &= (1-\delta)H^{-\delta}H'(t) + \frac{\epsilon}{\rho+1}\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \epsilon \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - \epsilon \|\nabla u\|_a^2 \\ &+\epsilon \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(s) ds dx - \epsilon\mu_1 \int_\Omega |u_t|^{m(x)-2} u_t u dx \\ &-\epsilon\mu_2 \int_\Omega z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2} u dx + \epsilon\mu_3 \int_\Omega |u|^{q(x)} dx. \end{aligned} \tag{5.58}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, pour $\eta, \sigma > 0$, on arrive à

$$\epsilon \int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)a(x)\nabla u(s) ds dx \geq \epsilon\Big(1 - \frac{1}{4\eta}\Big)\Big(\int_0^t g(t) ds\Big)\|\nabla u\|_a^2 - \epsilon\eta(g\circ\nabla u)(t) \tag{5.59}$$

et

$$\int_\Omega \mu_1 |u_t|^{m(x)-1} u dx \leq \frac{\mu_1^{m^+}}{m^-}\int_\Omega \sigma^{m(x)}|u|^{m(x)} dx + \frac{m^+-1}{m^+}\int_\Omega \sigma^{-m(x)/m(x)-1}|u_t|^{m(x)} dx. \tag{5.60}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mu_2 |z(x,1,t)|^{m(x)-1} u dx &\leq \frac{\mu_2^{m^+}}{m^-} \int_\Omega \sigma^{m(x)} |u|^{m(x)} dx \\ &+ \frac{m^+ - 1}{m^+} \int_\Omega \sigma^{-m(x)/m(x)-1} |z(x,1,t)|^{m(x)} dx. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Comme dans [67], on prend σ pour que

$$\sigma^{-m(x)/m(x)-1} = kH^{-\delta}(t),$$

où $k \geq 1$ est spécifié plus tard, on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma^{-m(x)/m(x)-1} |u_t|^{m(x)} dx &= kH^{-\delta}(t) \int_\Omega |u_t|^{m(x)} dx \\ &\leq kH^{-\delta}(t) H'(t). \end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma^{-m(x)/m(x)-1} |z(x,1,t)|^{m(x)} dx &= kH^{-\delta}(t) \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)} dx \\ &\leq kH^{-\delta}(t) H'(t). \end{aligned} \tag{5.63}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma^{m(x)} |u|^{m(x)} dx &= \int_\Omega k^{1-m(x)} H^{\delta(m(x)-1)} |u|^{m(x)} dx \\ &\leq k^{1-m^-} H^{\delta(m+-1)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} dx. \end{aligned} \tag{5.64}$$

En utilisant le lemme (5.8), on obtient

$$\begin{aligned} & k^{1-m^-} H^{\delta(m+-1)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} dx \\ & \leq k^{1-m^-} c \left(\Theta^{m^- + q^- \delta(m^+-1)/q^-} + \Theta^{m^+ + q^- \delta(m^+-1)/q^-} \right) \end{aligned} \tag{5.65}$$

et en utilisant le lemme (5.2) en prenant

$$s = m^- + q^- \delta(m^+ - 1) \leq q^-, \ et \ \ s = m^+ + q^- \delta(m^+ - 1) \leq q^-,$$

on obtient

$$H^{\delta(m+-1)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} dx \leq c \left(\|\nabla u\|_p^{p^-} + \Theta(u) \right) \tag{5.66}$$

En combinant (5.59)-(5.66), on obtient

$$\begin{aligned}G'(t) &\geq \left[(1-\delta)-\epsilon\frac{2(m^+-1)}{m^+}k\right]H^{-\delta}(t)H'(t)+\epsilon\left(\frac{1}{\rho+1}+\frac{(1-a)q^-}{\rho+2}\right)\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}\\
&+\epsilon\left\{\frac{(1-a)q^-}{p^-}-c\frac{\mu_1^{m^+}+\mu_2^{m^+}}{m^-k^{m^--1}}-1\right\}\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)}dx+\epsilon\left(\frac{(1-a)q^-}{2}-\eta\right)(g\circ\nabla u)(t)\\
&+\epsilon\left\{\left(\frac{(1-a)q^-}{2}-1\right)-\left(\frac{(1-a)q^-}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t g(s)ds\right\}\|\nabla u\|_a^2\\
&+\epsilon\left\{\mu_3 a-c\frac{\mu_1^{m^+}+\mu_2^{m^+}}{m^-k^{m^--1}}\right\}\Theta(u)+\epsilon(1-a)q^-H(t)+\epsilon(1-a)q^-\int_\Omega\int_0^1\frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho.\end{aligned} \tag{5.67}$$

Tout d'abord, on fixe a tel que

$$0<a<min\left\{\frac{q^--p^-}{q^-},\frac{q^--2\eta}{q^-}\right\}$$

Ensuite, on prend $k>0$ assez grand pour que

$$\frac{(1-a)q^-}{p^+}-c\frac{\mu_1^{m^+}+\mu_2^{m^+}}{m^-k^{m^--1}}-1>0,\ \ et\ \ \mu_3 a-c\frac{\mu_1^{m^+}+\mu_2^{m^+}}{m^-k^{m^--1}}>0.$$

Une fois k est fixé, on sélectionne $\epsilon>0$ assez petit pour que

$$(1-\delta)-\epsilon\frac{2(m^+-1)}{m^+}k>0,\ \ et\ \ G(0)=H^{1-\delta}(0)+\epsilon\int_\Omega\frac{1}{\rho+1}|u_1|^\rho u_1u_0dx.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}G'(t) &\geq K\bigg(\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2}+\|\nabla u\|_{p(.)}^{p^-}+\|\nabla u\|_a^2+(g\circ\nabla u)(t)+\Theta(u)\\
&+\int_\Omega\int_0^1\frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho+H(t)\bigg),\end{aligned} \tag{5.68}$$

où K une constante positive.

On estime maintenant $G(t)^{\frac{1}{1-\delta}}$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left(\left|\int_\Omega|u_t|^\rho u_tudx\right|\right)^{\frac{1}{1-\delta}}\leq C\|u\|_{q^-}^{\frac{1}{1-\delta}}\|u_t\|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\delta}}.$$

L'inégalité de Young nous donne

$$\left(\left|\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right|\right)^{\frac{1}{1-\delta}} \leq C\left(\|u\|_{q^-}^{\frac{\beta}{1-\delta}} + \|u_t\|_{\rho+2}^{\frac{\theta(\rho+1)}{1-\delta}}\right),$$

pour $\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\theta}=1$, on prend $\theta=\frac{(1-\delta)(\rho+2)}{\rho+1}$, alors

$$\beta=\frac{(1-\delta)(\rho+2)}{1-\delta(\rho+2)}.$$

Ainsi, du corollaire (5.1) on obtient

$$\left(\left|\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right|\right)^{\frac{1}{1-\delta}} \leq C\left[\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \Theta(u) + \int_\Omega\int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho + H(t)\right]. \tag{5.69}$$

En combinant (5.56) et (5.69), il est possible de conclure que

$$\begin{aligned} G^{\frac{1}{1-\delta}} &= \left[H^{1-\delta}+\epsilon\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx\right]^{\frac{1}{1-\delta}} \\ &\leq M\left(\|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \Theta(u) + \int_\Omega\int_0^1 \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho + H(t)\right). \end{aligned} \tag{5.70}$$

Finalement, de (5.68) et (5.70), on trouve

$$G'(t) \geq \kappa G^{\frac{1}{1-\delta}}, \tag{5.71}$$

où κ est une constante positive.
Une simple intégration de (5.71) sur $(0,t)$ nous donne

$$G^{\frac{\delta}{1-\delta}}(t) \geq \frac{1}{G^{\frac{-\delta}{1-\delta}}(0) - \dfrac{\kappa\delta t}{1-\delta}}.$$

Par conséquent, la solution du problème (5.1) s'explose en temps fini T^*. □

Conclusion générale

"We can only see a short distance ahead,
but we can see plenty there that needs to be done."
[*"Nous ne pouvons voir qu'une courte distance devant nous,*
mais nous pouvons y voir beaucoup de travail à accomplir."]

Alan M., Turing turing

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement asymptotiques des solutions pour des équations d'onde viscoélastiques avec des conditions aux limites de différents types. Où, nous avons pu obtenir les résultats suivants :

1- Solvabilité et comportement asymptotique de la solution d'une équation viscoélastique de type Kirchhoff avec un terme de retard et un terme source.

2- Existence globale, la stabilité et l'explosion de la solution d'une équation viscoélastique de type Kirchhoff avec des conditions aux limites non-linéaire.

3- Etude de l'existence globale de la solution ainsi que son comportement asymptotique pour une équation viscoélastique avec un terme p-Laplacien et avec des conditions aux limites dynamiques.

4- Enfin, on a généralisé l'étude du chapitre précédent en introduisant un terme p(x)-Laplacien et des exposants variables.

Il est nécessaire de noter qu'il n'existe pas encore une méthode générale pour la construction des fonctionnelles de Lyapunove, où on a remarqué qu'il est parfois difficile de construire une fonctionnelle de Lyapunove compatible avec le problème étudié, c'est ce que nous avons bien remarqué lors de notre étude du dernier chapitre, où nous n'avons pas pu arriver à la construire.

Ainsi, de nombreuses perspectives intéressantes pour l'analyse numérique, et la stabilisation qui pourraient permettre de poursuivre les problèmes aborder dans cette thèse.

LISTE DES PUBLICATIONS

I) Articles publiés

1) Intitulé de la Revue : Acta Appl Math

Intitulé de la Publication : "Asymptotic Behavior for a Viscoelastic Kirchhoff-Type Equation with Delay and Source Terms"

2) Intitulé de la Revue : Boundary Value Problems

Intitulé de la Publication : "Dynamics Properties For a Viscoelastic Kirchhoff Type Equation With Nonlinear Boundary Damping And Source Terms".

II) Articles accéptés

Intitulé de la Revue : Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana

Intitulé de la Publication : "Global existence, energy decay, and blow up of solutions for a wave equation type p-Laplacian with memory term and dynamic boundary conditions".

III) Article sous soumission

Intitulé de la Revue : Electronic Journal of Differential Equations

Intitulé de la Publication : "On a Nonlinear Delayed Viscoelastic p(x)-Laplacian Equation with Variable-Exponent Nonlinearities".

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Aboulaich ; D. Meskine and A. Souissi, New diffusion models in image processing, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 874–882.

[2] R.Adams ; J. Fournier, Sobolev Spaces. Academic Press, New York (2003).

[3] K.T. Andrews. K.L. Kuttler, M. Shillor, Second order evolution equations with dynamic boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 197 (3) (1996) 781-795.

[4] S. Antontsev, Wave equation with $p(x,t) - Laplacian$ and damping term : blow-up of solutions, C.R. Mecanique 339 (2011), 751–755.

[5] S. Antontsev, Wave equation with $p(x,t) - Laplacian$ and damping term : existence and blow-up, Differential Equations Appl. 3 (2011), 503–525.

[6] S. Antontsev ; J. Ferreira ; E. Piskin ; H. Yuksekkaya ; M Shahrouzi, Blow up and asymptotic behavior of solutions for a $p(x) - Laplacian$ equation with delay term andvariable exponents, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2021 (2021), No.84, pp. 1–20.

[7] A.V. Balakrishnan ; L.W. Taylor, Distributed parameter nonlinear damping models,for flight structures.

[8] J.T. Beale, Spectral properties of an acoustic boundary condition. Indiana Univ.Math. J. 25 (9) (1976) 895917.

[9] A. Benaissa, S.Mokeddem, Decay estimates for the wave equation of p-Laplacian type with dissipation of m-Laplacian type. Math. Meth. Appl.Sci. 30(2)(2007) 237-247.

[10] J. Benedikt ; P. Girg ; L. Kotrla ; P. Takac, ORIGIN OF THE p-LAPLACIAN AND A. MISSBACH, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2018 (2018), No. 16, pp. 1-17.

[11] A.C. Biazutti, On a nonlinear evolution equation and its applications. Non-linear Analysis. Theory, Methods and Applications 24 (1995) 12211234.

[12] N. Boumaza ; B. Gheraibia, General decay and blowup of solutions for a degenerate viscoelastic equation of Kirchhoff type with source term. J. Math. Anal. Appl. 489(2),124185 (2020).

[13] N. Boumaza ; M. Saker ; B. Gheraibia, Asymptotic Behavior for a Viscoelastic Kirchhoff-Type Equation with Delay and Source Terms, Acta Appl Math (2021)171 :18.

[14] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Masson, Paris, 2^{me} tirage, 1983, 2-225-77198-7, 0754-4405.

[15] B.M. Budak, A.A. Samarskii, A.N. Tikhonov, A collection of problems on mathematical physics, Translated by A.R.M. Robson. The Macmillan Co. New York 1964.

[16] M. M. Cavalcanti ; V. N. Domingos Cavalcanti and J. Ferreira, Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping, Math. Meth. Appl.Sci. 2001 ; 24 :1043–1053.

[17] M.M. Cavalcanti ; V.N. Domingos Cavalcanti ; M.A. Jorge Silva ; A.Y.Souza Franco, Exponential stability for the wave model with localized memory in a past history framework. J. Differ. Equ. 264, 6535– 6584 (2018).

[18] M.M. Cavalcanti ; H.P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J. Control Optim. 42(4), 1310–1324 (2003).

[19] M.M. Cavalcanti, V.N. D. Cavalcanti, J.S. Prates, J.A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. Differential Integral Equations 14 (1) (2001) 85-116.

[20] Y. Chen ; S. Levine and M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. 66 (2006), 1383–1406.

[21] F. Conrad. O. Morgul, stabilization of a exible beam with a tip mass. SIAM J. Control Optim. 36 (6) (1998) 1962-1986.

[22] K. Daewook, Asymptiotic behavior for the viscoelastic Kirchhoff type equation with an internal time varying delay term. East Asian Math. J. 32(03), 399–412 (2016).

[23] Q.Y. Dai ; Z.F. Yang, Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay. Z. Angew. Math. Phys. 65(5), 885–903 (2014).

[24] R. Datko, Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delay in their feedbacks. SIAM J. Control Optim. 26(3), 697–713 (1988).

[25] U. David cruz, Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis, CRM Preprints, vol.pages.1-74.

[26] H. Di, Y. Shang, Existence, nonexistence and decay estimate of globalsolutions for a viscoelastic wave equation with nonlinearboundary damping and internal source terms. Eur. J. Pure. Appl. Math. 10(4) (2017) 668-701.

[27] H. Di, Y. Shang, X. Peng, Global existence and nonexistence of solutions for a viscoelastic wave equation with nonlinear boundary source term. Math. Nachr. 289 (11-12)(2016) 1408-1432.

[28] L. Diening et al, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics 2017, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2011.

[29] R.E. Edwards, Functional Analysis : Theory And Applications. Institute of Advanced Studies Australian National University. Library of Congress Catalog Card Number : 65-13244 (1965).

[30] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Sciences Sup, EAN Ebook : Pdf 9782100835362, octobre 2021.

[31] J.C.O. Faria ; M.A. Jorge Silva ; A.Y. Souza Franco, A general stability result for the semilinear viscoelastic wave model under localized effects. Nonlinear Anal., Real World Appl. 56, 103158 (2020).

[32] M. Ferhat, A. Hakem, Global existence and energy decay result for a weak viscoelastic wave equations with a dynamic boundary and nonlinear delay term. Computers and Mathematics with Applications 71 (2016) 779–804.

[33] J. Ferreira ; E. Piskin ; C. Raposo ; M. Shahrouzi and H. Yuksekkaya, Stability Result for a Kirchhoff Beam Equation with Variable Exponent and Time Delay, Universal Journal of Mathematics and Applications 5 (1) (2022) 1-9.

[34] Y. Gao ; W. Gao, Existence of weak solutions for viscoelastic hyperbolic equations with variable exponents, Bound. Value Probl. 2013 (1) (2013) 1–8.

[35] V. Georgiev, G. Todorova, Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Diff. Equ. 109 (2) (1994)295-308.

[36] S. Gerbi, B. Said-Houari, Global existence and exponential growth for a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions. Adv. Nonlinear Anal. 2 (2013) 163193.

[37] S. Gerbi, B. Said-Houari. Local existence and exponential growth for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Advances in Differential Equations. Volume 13, Numbers 11-12 (2008), 10511074.

[38] J. M. Greenberg, R. C. M. CAMY, V. J. Mizel, On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of the Equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$. Journal of Mathematics and Mechanics (1968) 707-728.

[39] A. Guesmia, S.A. Messaoudi, C.M. Webler, Well-posedness and optimal decay rates for the viscoelastic Kirchhoff equation, Bol. Soc. Parana. Mat. 35 (3) (2017) 203–224.

[40] R. Ikehata, A note on the global solvability of solutions to some nonlinear wave equations with dissipative terms. Differ. Integral Equ. 8, 607–616 (1995).

[41] M. Kafini ; S.A. Messaoudi, A blow-up result in a nonlinear wave equation with delay. Mediterr. J. Math. 13(1), 237–247 (2016).

[42] M. Kafini ; S.A. Messaoudi ; S.A. Nicaise, A blow-up result in a nonlinear abstract evolution system with delay. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 23(2), 13 (2016).

[43] J.R. Kang, General stability of solutions for a viscoelastic wave equations of Kirchhoff type with acoustic boundary conditions. Math. Methods Appl. Sci. 39, 2953–2964 (2016).

[44] M. Kirane ; B. Said-Houari, Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. Z. Angew. Math. Phys. 62, 1065–1082 (2011).

[45] G. Kirchhoff, Vorlesungen uber Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[46] V. Komornik, Exact controllability and stabilization ; the multiplier method, Res.Appl. Math.,vol 36, Wiley-Masson, 1994, viii + 156 pp. ISBN 0-471- 95367-9.

[47] M. Kopackova, Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation, Comment. Math. Univ. Carolin. 30 (1989) 713–719.

[48] M.O. Korpusov, Non-existence of global solutions to generalized dissipative Klein-Gordon equations with positive energy, Electron. J. Differential Equations 2012 (119)(2012) 1–10.

[49] F. Li ; S.Xi, Dynamic properties of a nonlinear viscoelastic Kirchhoff-type equation with acoustic control boundary conditions. I. Math. Notes 106, 814–832 (2019).

[50] F. Li ; Z.Zhao ; Y. Chen, Global existence uniqueness and decay estimates for nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation. Nonlinear Anal., Real World Appl. 12, 1759–1773 (2011).

[51] S. Lian ; W. Gao ; C. Cao and H. Yuan, Study of the solutions to a model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity, J. Math. Anal. Appl.342(2008), 27–38.

[52] J.L. Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod Gauthier Villars, Paris 1969

[53] W.J. Liu ; J. Yu, On decay and blow-up of the solution for a viscoelastic wave equation with boundary damping and source terms. Nonlinear Anal. 74(6), 2175–2190 (2011).

[54] G.W. Liu ; H.W. Zhang, Well-posedness for a class of wave equation with past history and a delay. Z. Angew. Math. Phys. 67(1), 1–14 (2016).

[55] T. F. Ma, J. A. Soriano, On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 37(8) (1999),1029-1038.

[56] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 4(1999) 419-444.

[57] T. Matsuyama ; R. Ikehata, On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms. J. Math. Anal. Appl. 204(3), 729–753 (1996).

[58] S.A. Messaoudi, Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. Math. Nachr. 260, 58–66 (2003).

[59] S.A. Messaoudi, General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear. Anal. 69(2008)2589-2598.

[60] S. Messaoudi, On the decay of solutions for a class of quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms. Math Meth. Appl. Sci. 28 (2005) 1819-1828.

[61] S. Messaoudi ; J.H. Al-Smail, A.A. Talahmeh, Decay for solutions of a nonlinear damped wave equation with variable-exponent nonlinearities. Computers and Mathematics with Applications, 2018.07.035

[62] S. A. Messaoudi, B. S. Houari, Global non-existence of solutions of a class of wave equations with non-linear damping and source terms. Math. Meth. Appl. Sci. 27 (2004)1687-1696.

[63] S. Messaoudi ; M. Kafini, On the decay and global nonexistence of solutions to a damped wave equation with variable-exponent nonlinearity and delay. Annales Polonici Mathematici, Vol.122. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2019.

[64] S.A. Messaoudi, M. Mustafa, On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback, Nonlinear Analysis : RealWorld Applications 10 (2009) 3132-3140.

[65] S.A. Messaoudi and Nasser-eddine Tatar, Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem, Math. Meth. Appl. Sci. 2007 ; 30 :665–680.

[66] S. Messaoudi ; A.A. Talahmeh, A blow-up result for a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities, Appl. Anal. 96 (9) (2017) 1509–1515.

[67] S. A. Messaoudi, A. A. Talahmeh and J. H. Al-Smail, Nonlinear damped wave equation : Existence and blow-up, Computers Math. Appl. 74 (2017), 3024-3041.

[68] N. Mezouar ; S. Boulaaras, Global existence and decay of solutions for a class of viscoelastic Kirchhoff equation. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43(1), 725–755 (2020).

[69] S. Mokeddem, K. Ben Walid Mansour. Asymptotic behaviour of solutions for p-Laplacian wave equation with m-Laplacian dissipation. Z. Anal. Anwend. 33 (3)(2014) 259 -269.

[70] J.E. Munoz Rivera, Global solution on a quasilinear wave equation with memory, Boll. Unione Mat. Ital., B 7 (8) (1994)289303.

[71] M. Nakao ; H. Kuwahara, Decay estimates for some semilinear wave equations with degenerate dissipative terms. Funkcialaj Ekvacioj, 30 (1987) 135-145.

[72] M. Nakao, T. Nanbu, Existence of global (bounded) solutions for some nonlinear evolution equations of second order. Mathematical Reports of College of General Education. Kyushu University 10 (1975) 67-75.

[73] S. Nicaise ; C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. SIAM J. Control Optim. 45, 1561–1585 (2006).

[74] S. Nicaise ; C. Pignotti, Interior feedback stabilization of wave equations with time dependence delay. Electron. J. Differ. Equ. 41, 1 (2011).

[75] K. Ono, Global existence, decay and blow up of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings. J. Differ. Equ. 137, 273–301 (1997).

[76] S.H. Park ; M.J. Lee ; J.R. Kang, Blow-up results for viscoelastic wave equations with weak damping. Appl. Math. Lett. 80, 20–26 (2018).

[77] P. Pei, M. Rammaha, D. Toundykov, Weak solutions and blow-up for wave equations of p-Laplacian type with supercritical sources. Journal of Mathematical Physics, 56(8) (2015) 081503.

[78] D.C. Pereira, C.A. Raposo, C.H.M. Maranh ao. Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p-Laplacian with p-Laplacian damping. MathLAB Journal Vol 5 (2020) ISSN : 2582-0389.

[79] L.Qian ; H. Luofei, General decay of solutions to a viscoelastic wave equation with linear damping, nonlinear damping and source term. Appl. Anal. 99(7), 1248–1259 (2020).

[80] K.R. Rajagopal ; M. Ruzicka, Mathematical modeling of electrorheological materials, Continuum Mech. Thermodyn. (2001) 13 : 59–78.

[81] M. Rammaha, D. Toundykov, Z. Wilstein, Global existence and decay of energy for a nonlinear wave equation with p-Laplacian damping. Discrete Contin. Dyn. Syst. 32(12)(2012) 4361-4390.

[82] C. A. Raposo ; A. P. Cattai, J. O. Ribeiro. Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p-Laplacian with memory. Open J. Math. Anal.Vol. 2(2018), No. 2, pp. 156 - 171.

[83] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I, Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 1-141.

[84] R. E. Showalter, Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equation, By the American Mathematical Society, (1997).

[85] J. Simon, Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann, Série Analyse pour les EDP, Volume 1, 22 Mars 2018.

[86] T. Taniguchi, Existence and asymptotic behaviour of solutions to weakly damped wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping and source terms. J. Math. Anal. Appl. 361(2), 566–578 (2010).

[87] R.M. Torrejon ; J.Young, On a quasilinear wave equation with memory, Nonlinecv Anulysrs, Theory, Methods and Applicorions, Vol. 16, No. 1, pp. 61-78, 1991.

[88] E. Vitillaro, Global existence for wave equation with nonlinear boundary damping and source terms. J. Differ. Equ. 186 (2002) 259-298.

[89] W. Walter, "Ordinary Di¤erential Equations," Springer-Verlage, New York, Inc, (1998).

[90] S.T. Wu, Exponential energy decay of solutions for an integro-differential equation with strong damping. J. Math. Anal. Appl. 364, 609–617 (2010).

[91] S. Wu, Blow-up of solution for a viscoelastic wave equation with delay. Acta Math. Sci. 39, 329–338 (2019).

[92] S.T. Wu, General decay of solutions for a viscoelastic equation with nonlinear damping and source terms. Acta Math. Sci. 31B (2011) 1436-1448.

[93] S.T. Wu, General decay and blow-up of solutions for a viscoelastic equation with nonlinear boundary damping-source interactions, Z. Angew. Math. Phys. 63 (2012),65–106.

[94] S.T. Wu, General decay of solutions for a viscoelastic equation with Balakrishnan-Taylor damping and nonlinear bouandary damping-source interactions. Acta Math.Sci. 35B(5) (2015) 981994.

[95] S.T. Wu ; L.Y. Tsai, On global existence and blow-up of solutions for an integro-differential equation with strong damping. Taiwan. J. Math. 10(4), 979–1014 (2006).

[96] S.T. Wu ; L.Y. Tsai, Blow-up of solutions for some non-linear wave equations of Kirchhoff type with some dissipation. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 65(2), 243–264 (2006).

[97] Z. Yang, Blow-up and lifespan of solutions for a nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation. Results Math. 75, 84 (2020).

[98] Z. Yang ; Z. Gong, Blow-up of solutions for viscoelastic equations of Kirchhoff type with arbitrary positive initial energy. Electron. J. Differ. Equ. 332, 1 (2016).

[99] Y. Ye, Global existence and asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear degenerate wave equations. International Journal of Differential Equations (2007) 19685.

[100] A. Zarai, N-e. Tatar, S. Abdelmalek, Elastic membrance equation with memory term and nonlinear boundary damping : global existence, decay and blowup of the solution. Acta Math. Sci. 33B(1) (2013) 84106.

[101] K. Zennir ; M. Bayoud ; S. Georgiev, Decay of solution for degenerate wave equation of Kirchhoff type in viscoelasticity. Int. J. Appl. Comput. Math. 4, 54 (2018).

[102] S.M. zheng, Nonlinear evolution equations, Library og Congress Cataloging-in-publication Data, ISBN 1-58488-452-5(2004).