وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة العربي التبسي– تبسة –
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
ميدان التكوين: علوم اقتصادية تسيير وعلوم تجارية
قسم التعليم الأساسي

كتاب بيداغوجي
في الإحصاء 1

المستوى: سنة أولى ليسانس

د. عبد الحليم الحمزة

السنة الجامعية: **2023/2022**

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهرس

مقدمة

الإحصاء علم يهتم بالمعلومات والبيانات يهدف إلى تجميعها وتبويبها وتنظميها وتحليلها واستخلاص النتائج منها بل وتعميم نتائجها واستخدامها في اتخاذ القرارات، وأدى التقدم المذهل في تكنولوجيا المعلومات واستخدام الحاسبات الآلية إلى مساعدة الدارسين والباحثين ومتخذي القرارات في الوصول إلى درجات عالية ومستويات متقدمة من التحليل ووصف الواقع ومتابعته ثم إلى التنبؤ بالمستقبل، ولم تعد البحوث الاقتصادية والإدارية وغيرها في وقتنا المعاصر، وفي ظل التقدم التكنولوجي الهائل في كافة ميادين حياتنا اليومية، تكتفي بمجرد عرض المشاكل ودراسة الظواهر وتحديد الأسباب واستخلاص النتائج واتخاذ القرارات بطريقة سطحية مجردة عن أسلوب الإقناع والتقدير والقياس.

وبهدف إلمام الطلبة بهذا المقياس وتسهيل فهمهم له، تمت صياغة دروس في الإحصاء 1 أو الإحصاء الوصفي بغرض تخفيف الصعوبات التي يواجهونها وفهم أفضل لهذا المقياس، وهذه الدروس هي عبارة عن سلسلة من المحاضرات والأعمال الموجهة في الإحصاء الوصفي موجهة لطلبة السنة الأولى في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير نظام (LMD) نقدم من خلالها دروس مبسطة ومختصرة وسهلة الفهم مدعمة بالعديد من الأمثلة والتمارين التي تعرض بحلول نموذجية.

سعينا إلى تقديم ما هو مقرر دراسته في مقياس الإحصاء الوصفي لطلبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، لذلك قمنا بتقسيم محتوى هذه الدروس إلى تسعة فصول، يتضمن الفصل الأول المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء، ويتناول الفصل الثاني كيفية عرض البيانات في جداول تكرارية، أما الفصل الثالث تضمن كيفية عرض البيانات في أشكال وتمثيلات بيانية، فيما خصصنا الفصل الرابع إلى مقاييس النزعة المركزية، في حين يتعرض الفصل الخامس إلى مقاييس التشتت، يليه الفصل السادس الذي يتناول مقاييس الشكل، ثم يليه الفصل السابع الذي يتناول مقاييس التركز ثم الفصل الثامن الذي يتناول الارتباط والانحدار، وأخيرا الفصل التاسع الذي يتناول الأرقام القياسية.

الفصل الأول

مفاهيم عامة في الإحصاء

تمهيد:

لقد أصبح الاتجاه العام في البحوث والدراسات الاقتصادية هو استخدام طرق القياس الكمية ووسائل الإقناع الإحصائية وذلك لتحديد الخصائص وإبراز الاتجاهات العامة في الظواهر الاقتصادية والإدارية، وتحليل العلاقات المتشابكة والمتبادلة بين الظواهر علي أساس موضوعي غير متميز، وعلم الإحصاء يعطي للباحثين في مجال العلوم الاقتصادية والإدارية، العديد من الطرق والأساليب اللازمة لضرورة القيام بالدراسات والبحوث الاقتصادية والإدارية على أساس من القياس لحركة العديد من المتغيرات المحددة للظواهر موضوع الدراسة.

1- مفهوم الإحصاء وتطوره: لقد احتل الإحصاء كعلم مركزا مرموقا بين العلوم الأخرى خلال القرنين الماضيين، وقد برز الإحصاء في وقتنا الحاضر كأحد أهم العلوم التطبيقية التي لا يمكن الاستغناء عنها في أي فرع من فروع الحياة.

1-1- تطور علم الإحصاء: استخدم الإحصاء منذ الخليقة الأولى، فعندما كان الإنسان القديم يحصي أفراد عائلته أو عشيرته أو ما يمتلكه من مواشي بالفطرة فهو تطبيق لمعنى الإحصاء، ويعبر عن ذلك في صور ولذلك سمي بالإحصاء الصوري، وعندما بدأ استخدام الأرقام والأعداد سمي بالإحصاء العددي وقد يكون استخدام الحصى أو نواة التمر صورة من هذا العلم الحيوي، وقد وردت إشارة عن العد من قبل المؤرخ اليوناني هيرودوتس حين ذكر أنه في عام 480 (ق.م) استعمل أحد قادة الجيوش طريقة بدائية بسيطة لمعرفة عدد جيشه، وقد استخدم البابليون والآشوريون والفراعنة الإحصاء العددي في عد الجند والأسلحة والمعدات الحربية، وكذلك بالنسبة لإحصاء الإنتاج الزراعي والضرائب وسمي بالحساب السياسي أو حساب الدولة، عندما استخدم الإحصاء في جمع المعلومات المتعلقة بشؤون الدولة، وسمي الإحصاء بعلم الأوساط أو المعدلات عندما استخدمت الأوساط أو المعدلات كمؤشرات إحصائية، وأطلق عليه أيضا علم الأعداد الكبيرة لتعامله مع الأرقام الكبيرة، واستمر الحال حتى منتصف القرن السابع عشر من القرن الماضي، حيث تطور علم الإحصاء من مجرد فكرة الحصر والعد إلى أن أصبح علما له قواعده ونظرياته ويرجع الفضل في ذلك إلى كثير من العلماء من أمثال عائلة برونلي (Bernoulli) وفردريك جاوس (Gauss) وكيتليه (Quetlet) وجولتون (Galton) وأخيرا كارل بيرسون (Pearson) وبولي (Bowley) ويول (Yule) وفيشر (Fisher) وغيرهم، وجاء التطور في علم الإحصاء بصفة عامة ملازما وموازيا للتطور في نظرية الاحتمالات، فقد نشأت نظرية الاحتمالات بدءا في القرن السابع عشر من القرن الماضي حيث وضع أسسها العالم باسكال (Pascal) في عام 1654 .[1]

1-2- تعريف علم الإحصاء: كلمة الإحصاء (Statistics) مشتقة من الكلمة اللاتينية (Status) تعني حقائق ومعلومات عن الدولة (Political State)، حيث استخدم هذا المفهوم لجمع المعلومات الخاصة

[1]. خالد المشهداني ورائد العبيدي، **مبادئ الإحصاء متضمن التحليل الإحصائي spss**، دار الأيام للنشر، الأردن، 2013، ص 7.

بأفراد المجتمع لأغراض تكوين فكرة عن قوة العمل حينذاك وتكوين قاعدة معلومات من خلالها يمكن للدول فرض ضرائب لتعزيز وضعها المالي.[1]

وكلمة إحصاء من الناحية اللغوية مشتقة من الفعل أحصى والذي يعني عد أو حسب، فأحصى الأشياء يعني عدها أو سجلها وحفظها، فلا يمكن للإنسان قديما أو حديثا الاستغناء عن مبدأ العد إن كان ذلك لعد الأشياء العينية أو النقدية.[2]

وفي القرآن الكريم وردت إشارات كثيرة تقرن الإحصاء بعملية العد، مثل قوله تعالى:" **لقد أحصاهم وعدهم عدا** " (سورة مريم، الآية 94)، وفي السيرة النبوية الشريفة مثال رائع لعملية العد، ذلك عندما قام النبي صلى الله عليه وسلم بتقدير بالغ الدقة لعدد جيش قريش يوم بدر حينما علم أن قريش تنحر لجيشها كل يوم تسع من الإبل.

ظل الاعتقاد لوقت طويل أن علم الإحصاء هو العلم الذي يهتم بعمليات جمع البيانات وتنظيمها وعرضها في صورة بيانية أو جدولية، حتى أعتقد البعض في الوقت الحاضر أن الإحصاء ما هو إلا هذه العمليات، لكن بعد تطور الحاسبات وتوسع مجالات التطبيق الإحصائي، تطور مفهوم علم الإحصاء إلى أن أصبح العلم الذي يهتم بمراحل جمع البيانات وترتيبها وتنظيمها وعرضها وتحليلها وتفسير نتائجها، ويتضح من ذلك أن البيانات هي القاعدة الأساسية للإحصاء، فكل العمليات الإحصائية تتم عليها.[3]

يمكن تعريف علم الإحصاء بأنه وسيلة أو أداة يمكن من خلالها تجميع الحقائق والمعلومات وصياغتها بشكل عددي، عدها أو تقديرها طبقا لمستوى معقول من الدقة، وجمع هذه الحقائق والمعلومات بشكل دوري منتظم ولأغراض محددة سلفا، ومرتبة بالشكل الذي يبين العلاقة ما بينها وباختصار يمكن تعريف علم الإحصاء على أنه علم التقديرات والاحتمالات.[4]

2- تطبيقات الإحصاء: الإحصاء في صورته الحديثة هو أحد الدعامات الرئيسية التي تقوم عليها البحوث في كافة مجالات العلوم الطبيعية والإنسانية، وقد شهد هذا القرن والقرن الماضي ظهور علوم جديدة نشأت من اقتران الإحصاء بالعلوم المختلفة، فاقترن علم الإحصاء بالرياضيات البحتة والميكانيكا، وعلم النفس، وعلم البيولوجيا، وعلم الاقتصاد وعلم الاجتماع، وعلوم أخرى، لينشئ من ذلك كله علوم جديدة مثل علم الإحصاء الرياضي، والميكانيكا الإحصائية، وعلم النفس الإحصائي، وهكذا ما يزال العلم يكشف عن تطبيقات جديدة للإحصاء في الأبحاث النظرية والتجريبية، والتطبيقية وفي جميع مجالات الحياة.[5]

---

[1]. راشد عادل الأسمر، **علم الإحصاء بين النظرية والتطبيق**، دار أمجد للنشر والتوزيع، الأردن، 2015، ص 37.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 37.

[3]. معوض الفلاح عبد السلام، **مقدمة في الإحصاء لاختصاصيي المكتبات والمعلومات باستخدام برنامج SPSS**، مكتبة الرشد، السعودية، 2009، ص 35.

[4]. طه حسين الزبيدي، **مبادئ الإحصاء**، دار غيداء للنشر والتوزيع، الأردن، 2013، ص 7.

[5]. السيد محمد أبو هاشم وأحمد عبد الرحمن إبراهيم، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي باستخدام البرنامج الإحصائي SPSS**، مكتبة الرشد، السعودية، 2012، ص 08.

ويستخدم الإحصاء في مجالات العلوم الإنسانية لتفسير نتائج البحوث والدراسات بعد تحليل البيانات باستخدام الأساليب والطرق الإحصائية المناسبة، ويقدم للمشتغلين في هذه المجالات وغيرها أدلة تجريبية تستخدم لدعم أو دحض النظريات العلمية.

وعلى هذا يمكن تعريف علم الإحصاء بأنه العلم الذي يهتم بجمع البيانات الكمية أو النوعية والتي تسمى أحيانا البيانات الخام وتنظيمها في صورة جداول أو رسوم بيانية وتحليلها ووصفها باستخدام مفاهيم إحصائية معينة والاستدلال منها على النتائج التي تسهم في اتخاذ القرارات الإحصائية المناسبة، وعلم الإحصاء وفقا لهذا التعريف يتضمن أربع عمليات هي: جمع البيانات، تنظيم البيانات، الوصف الإحصائي، الاستدلال الإحصائي.

3-أنواع الإحصاء: يقسم ويصنف المختصون الإحصاء إلى قسمين هما:[1]

3-1- الإحصاء الوصفي: يختص هذا النوع من الإحصاء بالطرق المختلفة لجمع البيانات وتحليلها ووصفها حتى تقدم بصورة بسيطة سهلة الفهم وذات دلالة دون أي تعميم، وتتمثل وسائل هذا النوع من الإحصاء العرض الجدولي والبياني والحساب الإحصائي، فالعرض الجدولي والبياني يعني جدولة البيانات وعرضها جدوليا وبيانيا والحساب الإحصائي يعني حساب المقاييس الإحصائية لتلك البيانات كمقاييس النزعة المركزية أو مقاييس التشتت أو مقاييس الشكل.

3-2- الإحصاء الاستدلالي: وهي الأساليب والطرق التي تعرفنا بخصائص المجتمع من خلال عينة مسحوبة من هذا المجتمع، فالوسط الحسابي العام للمجتمع يمكن أن يقدر من خلال الوسط الحسابي للعينة وتباين المجتمع يمكن أن يقدر من خلال تباين العينة، والإحصاء الاستدلالي يستند إلى التقدير والتنبؤ والتعميم من خلال الاستنتاج والاستدلال، وقد يعمل في بعض الحالات بظروف عدم التأكد لذا يلجأ إلى نظريات علم الاحتمالات للتقدير والاستنتاج والتنبؤ، لذا تكون عملية التعميم من العينة إلى المجتمع وفق نسبة من الثقة وحد مسموح به من الخطأ، والعملية الإحصائية والبحث الإحصائي قد يتطلب استخدام الإحصاء الوصفي فقط من خلال جمح البيانات وتنظيمها وعرضها بجداول ورسوم بيانية، كما أنه لظروف مختلفة يكون المطلوب استخدام أسلوب الإحصاء الاستدلالي لأغراض عملية تحليل البيانات وتقديرها من عينة والتوصل إلى استنتاجات تعمم لمجتمع، لذا فإن الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي هما فرعا ما يسمى بعلم الإحصاء الحديث.

4- البيانات الإحصائية

4-1- مفهوم البيانات الإحصائية: هي مجموعة القيم أو المفردات أو المشاهدات أو القياسات التي يتم الحصول عليها من المجتمع أو العينة المدروسة على أي هيأة كانت رقمية أو وصفية، كما تعرف البيانات الإحصائية على أنها كلمات أو حروف أو صور أو أرقام أو إشارات، تدل في نهاية الأمر على حقائق ومعلومات خاصة في شيء معين، ويمكن الحصول على البيانات بطرق كثيرة جدا.[2]

[1]. طه حسين الزبيدي، مرجع سابق، ص 10.

[2]. عبد الحليم عشماوي وآخرون، **الإحصاء الحيوي وتصميم التجارب**، المكتبة الأكاديمية، مصر، 2008، ص 4.

4-2- أنواع البيانات الإحصائية: هناك نوعين رئيسيين من البيانات الإحصائية هما:[1]

4-2-1- البيانات الوصفية (النوعية): وهي البيانات التي تكون على شكل وصف ولا يمكن إجراء عمليات حسابية عليها مثل: لون الشعر، لون العين، الحالة الاجتماعية، وغيرها. وتقسم إلى قسمين هما:

- **البيانات الاسمية:** هي عبارة عن اسم أو وصف لأي عنصر مثل: أسماء الأشخاص، قارات العالم، جنسيات الأفراد، وغيرها.
- **البيانات الترتيبية:** هي عبارة عن اسم أو وصف يعبر عن الأفضلية أو تفضيل الترتيب، مثل: تقدير الشهادة، درجة التحصيل العلمي، الدرجة الوظيفية، وغيرها.

4-2-2- البيانات الكمية: هي البيانات التي يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها ويمكن عدها وقياسها مثل: درجات الحرارة، الوزن، الطول، وغيرها. وتقسم إلى قسمين هما:

- **البيانات المتصلة:** هي القيم التي تدل على صفة يمكن قياسها وتأخذ قيم موجبة وسالبة، ويمكن أن تحتوي أيضا على كسور مثل: الوزن، الطول، وغيرها.
- **البيانات المنفصلة:** هي القيم التي تدل على صفة يمكن قياسها وعدها بصورة تأخذ قيم صحيحة فقط مثل: عدد الكتب، عدد أفراد الأسرة، وغيرها.

5- مصادر البيانات الإحصائية: هناك مصدران لجمع البيانات الإحصائية هما:[2]

5-1- المصادر التاريخية أو الوثائقية: قبل جمع البيانات عن أي مشكلة لا بد وأن يسبقه دراسة وافية للمصادر التاريخية للموضوع محل الدراسة (وثائق، ميزانيات مالية أو أي نشاطات أخرى)، إن من المحتمل أن تتوافر البيانات التي يتطلب الأمر جمعها كلها أو بعضها في الإحصاءات التي تنشرها الأجهزة الإحصائية أو الهيئات المتخصصة في الدولة، ففي بعض الأحيان توفر علينا البيانات التي نحصل عليها من هذه المصادر مشقة جمعها من الميدان مرة أخرى، وما يترتب عليه من جهد بشري وتكاليف مادية، وهذه المصادر تكون على نوعين هما:

- **مصادر أصلية:** ويعني أن الدوائر تقوم بذاتها بالتقصي عن الظاهرة وتجمع البيانات عنها وتهيئتها ونشرها، كما هو معمول به في دوائر الاحصاء ومؤسسات المعلومات المركزية وبعض الدوائر الحكومية؛
- **مصادر ثانوية:** ويقصد بذلك أن الدوائر أو الجهات المكلفة بدراسة الظواهر والمشاكل المختلفة تزود من جهات أخرى بالبيانات عن بعض الظواهر المراد دراستها، أي يتم استلامها جاهزة وهي التي تكون مسؤولة عن تنقيتها وتبويبها ونشرها بعد استلامها من المصادر الرئيسية (الأصلية)، كما هو الحال مع المنظمات الدولية والإقليمية التي تقوم بنشر المطبوعات الإحصائية التي تستلمها من الدول الأعضاء.

5-2- المصادر الميدانية: وهنا يقوم الباحث بجمع البيانات عن طريق الاتصال بمفردات المجتمع المبحوث مباشرة، وذلك عن طريق توجيه الأسئلة أو عن طريق المشاهدة المباشرة، ويقوم الباحث بجمع

---

[1]. عبد الحليم عشماوي وآخرون، مرجع سابق، ص ص: 5 – 6.

[2]. محمد النعيمي وعبد الرحمن العودة، **مقدمة في الإحصاء مع تطبيقات على برنامج (SPSS)**، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، الأردن، 2007، ص 6.

بياناته في استمارة إحصائية معدة لهذا الغرض، ويختلف تصميم الاستمارة عادة حسب نوع البيانات المطلوبة والمستوى العلمي والاجتماعي للجهات (دوائر، أفراد) الذين تجمع منهم البيانات.

6- أساليب جمع البيانات الإحصائية: هناك أسلوبان لجمع البيانات الإحصائية هما:[1]

6-1- أسلوب الحصر الشامل: حيث يتم دراسة كل فرد أو عينة خاضعة للبحث دون استثناءات مما يجعله دقيقا وواقعيا ولكنه مكلف من جميع النواحي.

6-2- أسلوب المعاينة: حيث يتم دراسة مجموعة صغيرة محددة بناءا على أسس علمية، ثم يتم تعميم النتائج على جميع أفراد المجتمع مما يجعله أسلوب غير دقيق ولكن يوفر الوقت والجهد والمال ويكون أكثر تفصيلا وهو أفضل للحالات التي يصعب حصرها.

7- مصطلحات إحصائية عامة

7-1- المجتمع الإحصائي: هو كافة الوحدات أو المفردات المراد دراستها أو العائدة لظاهرة أو دراسة معينة والتي تشترك فيما بينها في الصفة الأساسية محل اهتمام الباحث، مثل: سكان مدينة معينة، الوحدات المنتجة في مصنع، أشجار الزيتون في بلد معين، ويقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين:[2]

- **مجتمع محدود:** يكون فيه عدد محدود من الأفراد مثل: عدد أجهزة الكمبيوتر في معمل، عدد الطلاب في كلية ما، وغيرها.

- **مجتمع غير محدود:** يكون فيه عدد الأفراد غير منته وغير محدود مثل: عدد النجوم في السماء، عدد حبات القمح المحصود في مزرعة معينة، وغيرها.

7-2- الوحدة الإحصائية: هي المفردة الأساسية لتكوين المجتمع الإحصائي والتي تجرى عليها الدراسة الإحصائية، أو هي العنصر الإحصائي الأولي محل الملاحظة مهما كانت طبيعته.[3]

7-3- العينة الإحصائية: هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم استخراجها بطرق إحصائية معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويتم الاعتماد عليها في الدراسة بدل المجتمع عند كبر حجم المجتمع أو ربحا للوقت والجهد والمال.[4]

7-4- المتغير الإحصائي: هو الخاصية أو الصفة الإحصائية المشاهدة للعنصر الإحصائي التي تتغير وفقا للزمن أو من شخص لآخر أو من وحدة لأخرى، وتنقسم المتغيرات الإحصائية إلى نوعين هما:[5]

7-4-1- متغيرات نوعية (كيفية): هي تلك المتغيرات الوصفية التي لا يمكن قياسها، وتنقسم بدورها إلى قسمين هما:

- **متغيرات قابلة للترتيب:** مثل: المستوى التعليمي، الرتب العسكرية، الحالة الاقتصادية، وغيرها.

---

[1]. محمد النعيمي وعبد الرحمن العودة، مرجع السابق، ص 7.

[2]. إسماعيل بن قانة، **الإحصاء الوصفي والحيوي: دروس وتطبيقات**، دار أسامة للنشر والتوزيع، الأردن، 2011، ص 9.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 9.

[4]. نفس المرجع السابق، ص 10.

[5]. نفس المرجع السابق، ص 12.

- **متغيرات غير قابلة للترتيب (اسمية):** مثل: الجنسية، الجنس، الحالة العائلية، اللون، وغيرها.

7-4-2- متغيرات كمية: هي تلك المتغيرات التي يمكن قياسها، وهي أكثر المتغيرات انتشارا واستعمالا لأن لغة الإحصاء هي لغة الأرقام، والمتغيرات الكمية تنقسم بدورها إلى قسمين:

- متغيرات متقطعة (منفصلة): وهي المتغيرات التي تأخذ أعدادا صحيحة أي غير قابلة للتجزئة، مثل: عدد أفراد الأسرة، عدد الكتب فوق رف مكتبة، وغيرها.

- متغيرات مستمرة (متصلة): وهي المتغيرات التي يمكن أن تأخذ أي قيمة بين قيمتين صحيحتين، أي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة مثل: الطول، الوزن، الزمن، السرعة، وغيرها، ونظرا للعدد غير المتناهي لهذه القيم يقسم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى الفئات.

تمارين الفصل الأول

التمرين الأول: حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته من الأمثلة التالية:

– مدة حياة المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع.

– الأجور الشهرية لعمال مؤسسة ما.

– أوزان طلبة جامعة التكوين المتواصل.

– الرياضة الممارسة من طرف طلبة جامعة تبسة.

– تصنيف عمال مصنع حسب المؤهل.

– عدد السيارات في دولة حسب الصنف.

حل التمرين الأول: – تحديد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته: يتضح ذلك في الجدول أدناه.

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الإحصائي	نوعه	طبيعته
المصابيح الكهربائية	مصباح كهربائي	مدة الحياة	كمي	مستمر
عمال مؤسسة ما	عامل	الأجر الشهري	كمي	مستمر
طلبة جامعة التكوين المتواصل	طالب	الوزن	كمي	مستمر
طلبة جامعة تبسة	طالب	الرياضة	نوعي	غير ترتيبي
عمال مصنع	عامل	المؤهل	نوعي	غير ترتيبي
السيارات	سيارة	الصنف	نوعي	غير ترتيبي

التمرين الثاني: حدد المجتمع الإحصائي، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته في الأمثلة التالية:

– تصنيف الأحزاب السياسية حسب عدد الأصوات المكتسبة في الانتخابات.

– رقم الأعمال الشهري للمؤسسات التي تنشط في أسواق الهاتف النقال.

– عدد الجوائز التي ستقدم للطلبة الأوائل في نهاية السنة في المؤسسات الجامعية للشرق الوطني.

حل التمرين الثاني: – تحديد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته: يتضح ذلك في الجدول أدناه.

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الإحصائي	نوعه	طبيعته
الأحزاب السياسية	حزب سياسي	عدد الأصوات	كمي	متقطع
المؤسسات	مؤسسة	رقم الأعمال الشهري	كمي	مستمر
المؤسسات الجامعية	مؤسسة جامعية	عدد الجوائز	كمي	متقطع

التمرين الثالث: حدد المجتمع الإحصائي، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته في الأمثلة التالية:

- عدد الغرف المملوكة من طرف العائلات في الأحياء السكنية في مدينة ما.
- مبيعات متجر معين من جريدة الخبر خلال 50 يوم.
- مداخيل 50 شخص في إحدى المؤسسات يوميا بالدنانير.
- تقدير الشهادات الجامعية للخريجين من جامعة تبسة خلال موسم جامعي.

<u>حل التمرين الثالث:</u> - تحديد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته: يتضح ذلك في الجدول أدناه.

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الإحصائي	نوعه	طبيعته
العائلات	عائلة	عدد الغرف	كمي	متقطع
50 يوم	يوم	المبيعات	كمي	متقطع
50 شخص	شخص	المداخيل	كمي	مستمر
الخريجين	خريج	تقدير الشهادة	نوعي	ترتيبي

الفصل الثانـي

العرض الجدولي للبيانات الإحصائيـة

تمهيد:

عند جمع البيانات والمعلومات من مشاهدات المجتمع الإحصائي أو العينة الإحصائية فان هذه البيانات بشكلها الأولي تسمى بالبيانات الخام، وقد تكون كبيرة جدا ولا يمكن التعامل معها والاستفادة منها بوضعها الحالي، فيلجأ الباحث الإحصائي إلى عرض هذه البيانات على شكل جداول أو رسوم بيانية لتسهيل عملية دراستها وتحليلها أو الاستفادة منها ومن أهم طرق عرض البيانات الإحصائية ما يسمى بالعرض الجدولي للبيانات الإحصائية وهو عرض البيانات في جدول التوزيع التكراري.

1- تعريف العرض الجدولي للبيانات الإحصائية: وهي عملية تحويل البيانات الخام أو الأولية والتي تسمى عادة بيانات غير مبوبة إلى بيانات مبوبة عن طريق تنظيمها ووضعها بجدول يسمى جدول التوزيع التكراري، ويتكون في الأساس من عمودين أو سطرين، يبين العمود (السطر) الأول قيم المتغير المدروس، وتكون هذه القيم على شكل صفات أو قيم نقطية أو فئات حسب نوع المتغير المدروس، أما العمود (السطر) الثاني فيحتوي على التكرار المطلق (Absolute Frequency) وهو عدد المشاهدات المقابلة لهذه الصفات أو القيم أو عدد المشاهدات التي تقع ضمن كل فئة من الفئات.[1]

2- أشكال العرض الجدولي للبيانات الإحصائية: تتخذ جداول التوزيعات التكرارية أشكالا مختلفة حسب نوع المتغير الإحصائي المدروس نميزها فيما يلي:

2-1- العرض الجدولي للبيانات الإحصائية في حالة المتغير النوعي: لتكوين جدول توزيع تكراري للبيانات النوعية أو الكيفية نحتاج إلى إعداد جدول مكون من ثلاثة أعمدة، يخصص العمود الأول لصفات المتغير الإحصائي بعد ترتيبها إن كانت قابلة للترتيب والعمود الثاني يخصص لتفريغ البيانات فيما يخصص العمود الثالث للتكرارات المطلقة وهي عدد المشاهدات المقابلة لهذه الصفات.[2]

مثال (1-2): أخذت عينة من طلبة جامعة تبسة متكونة من 20 طالب، وكان توزيع الطلبة حسب التخصصات كما يلي: حقوق، حقوق، اقتصاد، آداب، اقتصاد، حقوق، اقتصاد، آداب، اقتصاد، آداب، اقتصاد، علوم إنسانية، حقوق، حقوق، حقوق، علوم إنسانية، اقتصاد، علوم إنسانية، آداب، آداب.

المطلوب: اعرض هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

الحل: - **إعداد جدول توزيع مجموعة من طلبة جامعة تبسة حسب التخصصات:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

التخصصات	تفريغ البيانات	عدد الطلبة (التكرار المطلق f_i)
حقوق	///// /	6
اقتصاد	///// /	6
آداب	/////	5
علوم إنسانية	///	3

[1]. وليد إسماعيل السيفو، **أساسيات الأساليب الإحصائية للأعمال**، الطبعة الأولى، منشورات زمزم، الأردن، 2010، ص 67.

[2]. إبراهيم أبو عقيل، **مبادئ في الإحصاء**، الطبعة الأولى، دار أسامة للنشر والتوزيع، الأردن، 2012، ص 35.

المجموع ($\sum$)	–	**20**

2-2- العرض الجدولي للبيانات الإحصائية في حالة المتغير الكمي المتقطع: لغرض تبويب بيانات المتغيرات الكمية المتقطعة يتم تصنيفها إلى مجموعات متشابهة، ثم يتم وضعها في جدول مكون من ثلاثة أعمدة، يخصص العمود الأول لقيم الظاهرة (المتغير) بعد ترتيبها والعمود الثاني يخصص لتفريغ البيانات فيما يخصص العمود الثالث للتكرارات المطلقة وهي عدد المشاهدات المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي.[1]

مثال(2-2): البيانات التالية تمثل عدد الأفراد في عينة مكونة من 30 أسرة كما يلي:

2	3	2	4	5	2	4	4	5	2
2	4	3	4	5	3	5	4	3	4
5	4	5	3	4	5	3	4	5	3

المطلوب: اعرض البيانات في جدول توزيع تكراري.

الحل: – **إعداد جدول التوزيع التكراري**: يتضح ذلك في الجدول أدناه.

عدد أفراد الأسرة (X_i)	تفريغ البيانات	عدد الأسر (التكرار المطلق f_i)
2	/////	5
3	///// //	7
4	///// /////	10
5	///// ///	8
المجموع ($\sum$)	–	**30**

3-2- العرض الجدولي للبيانات الإحصائية في حالة المتغير الكمي المستمر: عند دراسة متغير كمي مستمر، يضم مجال الدراسة ما لا نهاية من القيم، نقوم بتقسيم هذا المجال إلى مجالات أو مجاميع جزئية تسمى فئات، وقد تكون الفئات متساوية الطول أو غير متساوية، وعدد القيم أو المشاهدات الداخلة ضمن هذه الفئة أو المجموعة تسمى بالتكرار المطلق، وينبغي ملاحظة النقاط التالية عند إعداد جدول التوزيع التكراري:[2]

– من المستحسن أن يتراوح عدد الفئات في جدول التوزيع التكراري من 5 إلى 15 فئة.

– يجب أن لا تكون أي من القيم داخلة في أكثر من فئة.

– من المستحسن أن تكون أطوال الفئات متساوية، وإذا حدث وكان أحد التكرارات المقابلة لفئة صفر فيجب أن تدمج هذه الفئة مع الفئة السابقة أو اللاحقة.

– يجب أن تصنف الفئات بحيث تحتوي على أدنى وأعلى قيمة في قيم البيانات وبحيث يكون مجموع تكرارات الفئات مساويا إلى عدد المفردات.

[1]. إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص 36.

[2]. ثائر فيصل شاهر، **الإحصاء في العلوم الإدارية والمالية**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص 30.

ولبناء جدول التوزيع التكراري ينبغي إتباع الخطوات التالية:[1]

– **تحديد المدى العام (Range):** والذي يعرف على أنه الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات، والصيغة العامة للمدى العام هي: $R = X_{max} - X_{min}$

حيث: R : المدى العام، X_{max} : أكبر قيمة في قيم البيانات المراد تبويبها.

X_{min} : أصغر قيمة في قيم البيانات المراد تبويبها.

– **تحديد عدد الفئات:** وهو عدد المجالات أو المجاميع التي يتألف منها جدول التوزيع التكراري، وهناك أكثر من طريقة لتعيين عدد الفئات منها طريقة يول (Yule) وطريقة ستيرجس (Sturges)، حيث يتم تقريب الناتج إلى أقرب عدد صحيح عند التطبيق العملي لأن من المنطقي أن يكون عدد الفئات عدد صحيح.

تعطى معادلة ستيرجس بالصيغة التالية: $K = 1 + 3,322 \log(n)$

حيث: K : عدد الفئات، n : عدد القيم أو المفردات، Log : اللوغاريتم العشري.

تعطى معادلة يول بالصيغة التالية: $K = 2,5\sqrt[4]{n}$ ، حيث: K : عدد الفئات، n: عدد المفردات.

– **تحديد طول الفئة:** وهو عبارة عن مقدار المسافة بين الحد الأدنى والأعلى للفئة، فبعد تحديد عدد الفئات ينبغي إيجاد طول الفئة، وفي حالة الجداول ذات الفئات متساوية الطول يستخرج طول الفئة من قسمة المدى العام على عدد الفئات، كما هو مبين في الصيغة التالية: $W = \frac{R}{K}$ ، حيث: W : طول الفئة.

إن طول الفئة يتناسب عكسيا مع عدد الفئات فكلما زاد طول الفئة قل عدد الفئات والعكس صحيح، وعند تحديد طول الفئة يجب مراعاة المتراجحة التالية: (طول الفئة X عدد الفئات ≤ المدى العام).

– **تحديد الحدود الدنيا والعليا للفئات:** حيث يتم تحديد الحد الأدنى للفئة الأولى والذي يكون مساويا أو أصغر من أصغر قيمة في مجموعة البيانات، ثم نجد الحد الأعلى للفئة الأولى بإضافة طول الفئة للحد الأدنى لها، ثم نعتبر الحد الأعلى للفئة الأولى مساويا إلى الحد الأدنى للفئة الثانية، وبنفس الطريقة يمكن إيجاد بقية حدود فئات التوزيع، على أن يكون الحد الأعلى للفئة الأخيرة أكبر من أكبر البيانات، وهذا في حالة الفئات متساوية الطول.

في هذه الحالة يمكن استخراج طول الفئة لأي جدول توزيع تكراري حسب الصيغة التالية:

$W = U - L$ ، حيث: W : طول الفئة، U : الحد الأعلى للفئة، L : الحد الأدنى للفئة.

– **تفريغ البيانات على الفئات وحساب التكرارات المطلقة:** بعد تحديد فئات التوزيع نفرغ البيانات على الفئات التي تم استخراجها بالخطوة السابقة، وبذلك نجد التكرارات المقابلة لكل فئة من الفئات، وهذا العمود يسمى عمود التكرارات المطلقة للتوزيع ويرمز لها بالرمز (f_i) وبعد إجراء عملية التبويب ينبغي التأكد من أن مجموع التكرارات المطلقة يجب أن يكون مساويا إلى عدد المفردات، والجدول التكراري قد يكون مغلق

[1]. ثائر فيصل شاهر، مرجع سابق، ص ص: 31 – 32.

(يمتلك حدا أدنى للفئة الأولى وحدا أعلى للفئة الأخيرة)، أو مفتوح (لا يمتلك حدا أدنى للفئة الأولى أو حدا أعلى للفئة الأخيرة أو كليهما معا)، وذلك يعتمد على طبيعة الدراسة.

إن أسلوب التبويب الذي تم اعتماده سابقا يفترض تساوي أطوال الفئات ولكن هنالك حالات أخرى تكون أطوال الفئات غير متساوية وذلك حسب طبيعة الدراسة، ولذلك يكون الأسلوب أعلاه غير مفيد في تلك الحالة، مما يتطلب تحديد عدد الفئات وحدودها على نمط التبويب الذي يحقق أهداف الدراسة مع مراعاة نوع المتغير متقطعا كان أو مستمرا.

مثال(3−2): البيانات التالية تمثل إنتاج 60 ورشة من الكراسي خلال أحد الأيام.

المطلوب: تكوين جدول تكراري باستخدام معادلة ستيرجس (Sturges) ومعادلة يول (Yule).

72	31	25	62	77	57	46	21	93	87
54	72	81	83	73	62	66	89	29	68
96	88	83	73	12	73	62	58	81	57
63	71	36	29	17	63	52	97	87	67
33	21	54	36	71	65	57	73	92	62
91	51	62	56	36	49	46	89	58	42

الحل: − **تكوين جدول تكراري باستخدام معادلة ستيرجس (Sturges) ومعادلة يول (Yule):** يتم ذلك في الخطوات التالية:

1− تحديد المدى العام (Range): يعطى المدى العام بالصيغة التالية: $R = X_{max} - X_{min}$:

حيث: R : المدى العام، X_{max} : أكبر قيمة في قيم البيانات المراد تبويبها.

X_{min} : أصغر قيمة في قيم البيانات المراد تبويبها.

$$R = X_{max} - X_{min} = 97 - 12 = 85$$

2− حساب عدد الفئات: يعطى عدد الفئات حسب صيغتين كما يلي:

2−1− حسب صيغة ستيرجس (Sturges): تعطى صيغة ستيرجس (Sturges) كما يلي:

$K = 1 + 3,322\log(n)$ ، حيث: K : عدد الفئات، n : عدد القيم أو المفردات.

Log : اللوغاريتم العشري.

$$K = 1 + 3,322\log(n) = 1 + 3,322\log(60) = 6,9 \approx 7$$

2−2− حسب صيغة يول (Yule): تعطى صيغة يول (Yule) كما يلي: $K = 2,5\sqrt[4]{n}$

حيث: K : عدد الفئات، n: عدد القيم أو المفردات.

$$K = 2,5\sqrt[4]{n} = 2,5\sqrt[4]{60} = 6,95 \approx 7$$

3− حساب طول الفئة: يعطى بالصيغة التالية: $W = \frac{R}{K}$ ، حيث: W : طول الفئة.

$$W = \frac{R}{K} = \frac{85}{7} = 12,14 \approx 13$$

إذن طول الفئة يساوي 13 إذا أخذنا في الاعتبار المتراجحة التالية:

(طول الفئة X عدد الفئات ≤ المدى العام)، أي:

.(85 ≤ 7 x13)

ومن أجل تكوين جدول التوزيع التكراري نحدد حدود الفئة الأولى، حيث يساوي الحد الأدنى للفئة الأولى أصغر البيانات أو أقل منه، وبالتالي فالحد الأدنى للفئة الأولى في مثالنا يساوي 12.

أما الحد الأعلى للفئة الأولى فيساوي الحد الأدنى مضافا إليه طول الفئة، وبالتالي فالحد الأعلى للفئة الأولى في مثالنا يساوي (12 + 13 = 25).

والآن يتم إفراغ البيانات في جدول التوزيع التكراري مع مراعاة أن يكون لكل قيمة فئة واحدة وواحدة فقط والتأكد من أن مجموع التكرارات يساوي عدد القيم، ويتضح ذلك في الجدول أدناه.

الإنتاج (X_i)	تفريغ البيانات	عدد الورشات (التكرار المطلق f_i)
] 25 -12]	////	4
] 38 - 25]	/// /////	8
] 51 - 38]	////	4
] 64 - 51]	// ///// ///// /////	17
] 77 - 64]	// ///// /////	12
] 90 - 77]	///// /////	10
] 103 - 90]	/////	5
المجموع (∑)	-	**60**

3- مركز الفئة: عند تكوين جدول التوزيع التكراري ذو الفئات تضيع القيم الإحصائية الأصلية وتختفي ضمن الفئات، ولتخطي هذه المشكلة نقوم بتحديد مركز كل فئة (Center of Class) وهو معدل الحد الأدنى والأعلى لكل فئة، ويستخرج مركز الفئة من حاصل جمع الحد الأدنى والأعلى للفئة وقسمة الناتج على 2، ويحسب بالصيغة التالية: $C = \frac{U + L}{2}$ ، حيث: C : مركز الفئة.[1]

مثال(4-2): احسب مراكز الفئات في التوزيع التكراري في المثال (3-2).

الحل: - حساب مراكز الفئات: يعطى مركز الفئة بالصيغة التالية: $C = \frac{U + L}{2}$

حيث: C : مركز الفئة، U : الحد الأعلى للفئة، L : الحد الأدنى للفئة.

مراكز الفئات مبينة في الجدول الأدنى.

الإنتاج (X_i)	مركز الفئات (C_i)
] 25 -12]	18,5
] 38 - 25]	31,5
] 51 - 38]	44,5

[1]. ثائر فيصل شاهر، مرجع سابق، ص 38.

57,5	] 64 – 51]
70,5	] 77 – 64]
83,5	] 90 – 77]
96,5	] 103 – 90]

4- التوزيع التكراري النسبي: يعرف التكرار النسبي (Relative Frequency) للفئة بأنه حاصل قسمة التكرار المطلق للفئة على مجموع التكرارات المطلقة، ويرمز له بالرمز (Rf_i)، ويلاحظ أن مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات يساوي إلى الواحد الصحيح، ويعطى التكرار النسبي وفق الصيغة التالية:[1]

$Rf_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$ ، حيث: Rf_i : التكرار النسبي، f_i : التكرار المطلق، n : عدد القيم.

5- التوزيع التكراري المئوي: يعرف التكرار المئوي (Percentage Frequency) بأنه عبارة عن التكرار النسبي مضروبا في 100، ويرمز له بالرمز (Pf_i)، وهو عبارة عن التكرار المطلق معبرا عنه بنسب مئوية، ومن الملاحظ أن مجموع التكرارات المئوية للفئات مساويا إلى 100، ويحسب وفق الصيغة التالية: $Pf_i = Rf_i \times 100$ ، حيث: Pf_i : التكرار المئوي.[2]

مثال(5-2): ليكن لديك جدول التوزيع التكراري الموالي للمبالغ المدمرة بالآلاف دينار لمجموعة من الأشخاص.

المبالغ المدخرة (X_i)	عدد الأشخاص (f_i)
] 16 -10]	2
] 22 - 16]	3
] 28 - 22]	4
] 34 - 28]	6
] 40 - 34]	3
] 46 - 40]	2
المجموع (∑)	**20**

المطلوب: احسب التكرارات النسبية والمئوية للفئات.

الحل: - حساب التكرارات النسبية والمئوية للفئات: يتم حساب التكرارات النسبية للفئات وفق الصيغة التالية: $Rf_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$ ، حيث: Rf_i : التكرار النسبي، f_i : التكرار المطلق، n : عدد القيم.

يتم حساب التكرارات المئوية للفئات وفق الصيغة التالية: $Pf_i = Rf_i \times 100$ ، حيث: Pf_i: التكرار المئوي.

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **أساليب الإحصاء للعلوم الاقتصادية وإدارة الأعمال مع استخدام برنامج SPSS**، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص 49.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 50.

وبالتالي ينتج لنا جدول التوزيع التكراري النسبي والمئوي أدناه.

المبالغ المدخرة (X_i)	عدد الأشخاص (f_i)	التكرار النسبي (Rf_i)	التكرار المئوي (Pf_i)
] 16 −10]	2	0,1	10
] 22 − 16]	3	0,15	15
] 28 − 22]	4	0,2	20
] 34 − 28]	6	0,3	30
] 40 − 34]	3	0,15	15
] 46 − 40]	2	0,1	10
المجموع ($\sum$)	**20**	**1**	**100**

6- التوزيع التكراري المتجمع (التراكمي): في بعض الأحيان نحتاج إلى إيجاد عدد المشاهدات التي تساوي أو تقل عن قيمة معينة، أو العكس تساوي أو تقل عن قيمة معينة وبالتالي نكون أمام التكرارات المتجمعة أو التراكمية، ونميز بين نوعين من التوزيعات التكرارية المتجمعة هما:[1]

6-1- التوزيع التكراري المتجمع الصاعد: التكرار المتجمع الصاعد (Upward Cumulative Frequency) هو مجموع التكرارات التي تقع دون الحد الأعلى للفئة، ولإيجاده يتم تجميع التكرارات ابتداء من الفئة الأولى (الذي يكون تكرارها المتجمع الصاعد مساويا إلى تكرارها الأصلي) حتى التكرار المتجمع الصاعد للفئة الأخيرة (الذي يكون مساويا لمجموع التكرارات) وتوضع التكرارات المتجمعة الصاعدة للفئات في مقابل أقل تماما من الحدود العليا للفئات، ويرمز له بالرمز (UCF) .

ويحسب التكرار المتجمع الصاعد وفق الصيغة التالية:

$UCF_k = \sum_{i=1}^{i=k} f_i$ ، حيث: UCF_k : التكرار المتجمع الصاعد، f_i : التكرار المطلق.

ويمكن تحويل التكرار المتجمع الصاعد إلى تكرار متجمع صاعد نسبي ومئوي بنفس صيغة تحويل التكرار المطلق إلى تكرار نسبي ومئوي.

التكرار المتجمع الصاعد النسبي يحسب وفق الصيغة التالية: $RUCF_i = \frac{UCF_i}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$ ، حيث: $RUCF_i$: التكرار المتجمع الصاعد النسبي، f_i : التكرار المطلق، n : عدد القيم.

التكرار المتجمع الصاعد المئوي يحسب وفق الصيغة التالية:

$PUCF_i = RUCF_i \times 100$، حيث: $PUCF_i$: التكرار المتجمع الصاعد المئوي.

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 38.

مثال(6-2): اوجد التكرارات المتجمعة الصاعدة للتوزيع التكراري المبين في المثال(5-2).

الحل: - **حساب التكرارات المتجمعة الصاعدة:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

المبالغ المدخرة (X_i)	عدد الأشخاص (f_i)	أقل تماما من الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد (UCF)
[10 -16 [	2	أقل تماما من 16	2
[16 - 22 [	3	أقل تماما من 22	5
[22 - 28 [	4	أقل تماما من 28	9
[28 - 34 [	6	أقل تماما من 34	15
[34 - 40 [	3	أقل تماما من 40	18
[40 - 46 [	2	أقل تماما من 46	20
المجموع ($\sum$)	**20**	-	-

كذلك يمكن تكوين جدول توزيع تكراري متجمع صاعد في حالة المتغيرات الكمية المتقطعة، وتوضع التكرارات المتجمعة الصاعدة في مقابل أقل من أو يساوي قيم المتغير الإحصائي.

مثال(7-2): اوجد التكرارات المتجمعة الصاعدة للتوزيع التكراري المبين في المثال (2-2).

الحل: - **إعداد جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

عدد أفراد الأسرة (X_i)	عدد الأسر (f_i)	أقل من أو يساوي	التكرار المتجمع الصاعد (UCF)
2	5	2	5
3	7	3	12
4	10	4	22
5	8	5	30
المجموع ($\sum$)	**30**	-	-

كذلك يمكن تكوين جدول توزيع تكراري متجمع صاعد في حالة المتغيرات النوعية وذلك من خلال تجميع التكرارات حسب مستويات ذلك المتغير.

مثال(8-2): اوجد التكرارات المتجمعة الصاعدة للتوزيع التكراري المبين في المثال(1-2).

الحل: - **إعداد جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

التخصصات	عدد الطلبة (f_i)	التجميع	التكرار المتجمع الصاعد (UCF)
حقوق	6	حقوق	6
اقتصاد	6	حقوق واقتصاد	12

آداب	5	حقوق واقتصاد وآداب	17
علوم إنسانية	3	حقوق واقتصاد وآداب وعلوم إنسانية	20
المجموع ($\sum$)	**20**	–	–

6-2- التوزيع التكراري المتجمع النازل: التكرار المتجمع النازل (Downward Cumulative Frequency) هو مجموع التكرارات التي تقع أعلى الحد الأدنى للفئة، وفيه تكون التكرارات متجمعة بصورة معاكسة عن التوزيع المتجمع الصاعد، إذ تتناقص التكرارات من التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى (الذي يساوي مجموع التكرارات)، وهكذا فإن التكرار المتجمع النازل للفئة الثانية يستخرج من طرح تكرار الفئة الأولى من التكرار المتجمع النازل للفئة الأولى وصولا إلى التكرار المتجمع النازل للفئة الأخيرة فيكون مساويا لنفس تكرارها الأصلي وتكتب عادة التكرارات المتجمعة النازلة في مقابل أكبر من أو يساوي الحدود الدنيا للفئات ويرمز له بالرمز (DCF).

ويحسب التكرار المتجمع النازل وفق الصيغة التالية:

$DCF_k = N - \sum_{i=1}^{i=k-1} f_i$ ، حيث: DCF_k : التكرار المتجمع النازل، f_i : التكرار المطلق،

N : مجموع التكرارات المطلقة.

ويمكن تحويل التكرار المتجمع النازل إلى تكرار متجمع نازل نسبي ومئوي بنفس صيغة تحويل التكرار المطلق إلى تكرار نسبي ومئوي.

التكرار المتجمع النازل النسبي يحسب وفق الصيغة التالية: $RDCF_i = \frac{DCF_i}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$ ، حيث: $RDCF_i$: التكرار المتجمع النازل النسبي، f_i : التكرار المطلق، n : عدد القيم.

التكرار المتجمع النازل المئوي يحسب وفق الصيغة التالية:

$PDCF_i = RDCF_i \times 100$ ، حيث: $PDCF_i$: التكرار المتجمع الصاعد النازل المئوي.

مثال(9-2): اوجد التكرارات المتجمعة النازلة للتوزيع التكراري المبين في المثال(5-2).

الحل: – **حساب التكرارات المتجمعة النازلة:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

المبالغ المدخرة (X_i)	**عدد الأشخاص (f_i)**	**أكبر من أو يساوي الحدود الدنيا للفئات**	**التكرار المتجمع النازل (DCF)**
[10 -16 [	2	أكبر من أو يساوي 10	20
[16 – 22 [	3	أكبر من أو يساوي 16	18
[22 – 28 [	4	أكبر من أو يساوي 22	15
[28 – 34 [	6	أكبر من أو يساوي 28	11
[34 – 40 [	3	أكبر من أو يساوي 34	5

]40 – 46 [	2	أكبر من أو يساوي 40	2
المجموع (∑)	**20**	–	–

كذلك يمكن تكوين جدول توزيع تكراري متجمع نازل في حالة المتغيرات الكمية المتقطعة، وتوضع التكرارات المتجمعة النازلة في مقابل أكبر من أو يساوي قيم المتغير الإحصائي.

مثال(10–2): اوجد التكرارات المتجمعة النازلة للتوزيع التكراري المبين في المثال (2–2).

الحل: – **إعداد جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

عدد أفراد الأسرة (X_i)	**عدد الأسر (f_i)**	**أكبر من أو يساوي**	**التكرار المتجمع النازل (DCF)**
2	5	2	30
3	7	3	25
4	10	4	18
5	8	5	8
المجموع (∑)	**30**	–	–

كذلك يمكن تكوين جدول توزيع تكراري متجمع نازل في حالة المتغيرات النوعية وذلك من خلال تنقيص التكرارات حسب مستويات ذلك المتغير.

مثال(11–2): اوجد التكرارات المتجمعة النازلة للتوزيع التكراري المبين في المثال(1–2).

الحل: – **إعداد جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل:** يتضح ذلك في الجدول أدناه.

التخصصات	**عدد الطلبة (f_i)**	**التنقيص**	**التكرار المتجمع النازل (DCF)**
حقوق	6	حقوق واقتصاد وآداب وعلوم إنسانية	20
اقتصاد	6	اقتصاد وآداب وعلوم إنسانية	14
آداب	5	آداب وعلوم إنسانية	8
علوم إنسانية	3	علوم إنسانية	3
المجموع (∑)	**20**	–	–

تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول: البيانات التالية تبين عدد الغيابات التي سجلها عمال مؤسسة ما خلال الثلاثي الأول من سنة معينة مبينة في الجدول أدناه.

3	5	2	6	2	3	7	5	3	4	6	1	4	5	9
0	5	2	1	5	0	0	4	5	5	9	4	3	3	2
4	1	2	3	2	0	3	5	1	1	1	2	2	2	1

المطلوب:

1- حدد المجتمع الإحصائي، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته.

2- لخص هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

حل التمرين الأول:

1- تحديد المجتمع الإحصائي، المتغير الإحصائي، نوعه وطبيعته:

- **المجتمع الإحصائي:** عمال مؤسسة.
- **المتغير الإحصائي:** عدد الغيابات.
- **نوعه وطبيعته:** كمي متقطع.

2- تلخيص البيانات في جدول توزيع تكراري: يتضح ذلك في الجدول التالي:

عدد الغيابات (X_i)	1	2	3	4	5	6	**المجموع**
عدد العمال (f_i)	5	12	18	4	4	2	**45**

التمرين الثاني: لخص السلسلة التالية في جدول توزيع تكراري.

18	23	03	07	08	29	24	30
12	15	07	19	09	18	07	12
13	18	17	22	25	01	13	12

حل التمرين الثاني:

- **تلخيص السلسلة في جدول توزيع تكراري:** وذلك بإتباع الخطوات التالية:

1- تحديد المدى العام (Range): يعطى المدى العام بالصيغة التالية: $R = X_{max} - X_{min}$

حيث: R : المدى العام، X_{max} : أكبر قيمة في قيم البيانات المراد تبويبها.

X_{min} : أصغر قيمة في قيم البيانات المراد تبويبها.

$$R = X_{max} - X_{min} = 30 - 1 = 29$$

2- حساب عدد الفئات: يعطى عدد الفئات حسب صيغتين كما يلي:

2-1- حسب صيغة ستيرجس (Sturges): تعطى صيغة ستيرجس (Sturges) كما يلي:

$K = 1 + 3{,}322\log(n)$ ، حيث: K : عدد الفئات، n : عدد القيم أو المفردات.

Log : اللوغاريتم العشري.

$K = 1 + 3{,}322 \log(n) = 1 + 3{,}322 \log(24) = 5{,}58 \approx 6$

2-2- حسب صيغة يول (Yule): تعطى صيغة يول (Yule) كما يلي: $K = 2{,}5\sqrt[4]{n}$

حيث: K : عدد الفئات، n: عدد القيم أو المفردات.

$K = 2{,}5\sqrt[4]{n} = 2{,}5\sqrt[4]{24} = 5{,}53 \approx 6$

3- حساب طول الفئة: يعطى بالصيغة التالية: $W = \frac{R}{K}$ ، حيث: W : طول الفئة.

$W = \frac{R}{K} = \frac{29}{6} = 4{,}83 \approx 5$

إذن طول الفئة يساوي 5 إذا أخذنا في الاعتبار المتراجحة التالية: (طول الفئة X عدد الفئات ≥ المدى العام)، أي:

$(5 \times 6 \geq 29)$.

ومن أجل تكوين جدول التوزيع التكراري نحدد حدود الفئة الأولى، حيث يساوي الحد الأدنى للفئة الأولى أصغر البيانات أو أقل منه، وبالتالي فالحد الأدنى للفئة الأولى في مثالنا يساوي 1.

أما الحد الأعلى للفئة الأولى فيساوي الحد الأدنى مضافا إليه طول الفئة، وبالتالي فالحد الأعلى للفئة الأولى في مثالنا يساوي

$(1 + 5 = 6)$.

والآن يتم إفراغ البيانات في جدول التوزيع التكراري مع مراعاة أن يكون لكل قيمة فئة واحدة وواحدة فقط والتأكد من أن مجموع التكرارات يساوي عدد القيم، ويتضح ذلك في الجدول أدناه.

الفئات (X_i)	تفريغ البيانات	التكرار المطلق (f_i)
$[1 - 6[$	//	2
$[6 - 11[$	/////	5
$[11 - 16[$	///// /	6
$[16 - 21[$	/////	5
$[21 - 26[$	////	4
$[26 - 31[$	//	2
المجموع ($\sum$)	-	**24**

التمرين الثالث: البيانات التالية تمثل نتائج لدراسة إحصائية حول عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة من 50 مسكن ببلدية تبسة.

4	4	2	3	6	3	3	4	2	5
4	7	8	4	5	7	3	4	2	2
6	3	4	8	2	5	3	7	4	3

4	5	2	4	6	3	6	3	4	3
2	4	3	5	1	4	5	3	3	2

المطلوب:

1- أنشئ جدول التوزيع التكراري.

2- احسب التكرارات النسبية والمئوية.

3- احسب التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة.

حل التمرين الثالث:

1- إنشاء جدول التوزيع التكراري: نرتب البيانات تصاعديا ونعرضها في جدول توزيع تكراري كما يلي:

عدد الغرف (X_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	**المجموع**
عدد المساكن (f_i)	1	8	13	13	6	4	3	2	**50**

2- حساب التكرارات النسبية والمئوية: يعطى التكرار النسبي وفق الصيغة التالية:

$Rf_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$ ، حيث: Rf_i : التكرار النسبي، f_i : التكرار المطلق، n : عدد القيم.

ويحسب التكرار المئوي وفق الصيغة التالية: $Pf_i = Rf_i \times 100$ ، حيث: Pf_i : التكرار المئوي.

ينتج لدينا جدول التوزيع التكراري النسبي والمئوي التالي:

عدد الغرف (X_i)	**عدد المساكن (f_i)**	**التكرار النسبي (Rf_i)**	**التكرار المئوي (Pf_i)**
1	1	0,02	2
2	8	0,16	16
3	13	0,26	26
4	13	0,26	26
5	6	0,12	12
6	4	0,08	8
7	3	0,06	6
8	2	0,04	4
المجموع	**50**	**1**	**100**

3- حساب التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة: يحسب التكرار المتجمع الصاعد وفق الصيغة التالية:

$UCF_k = \sum_{i=1}^{i=k} f_i$ ، حيث: UCF_k : التكرار المتجمع الصاعد، f_i : التكرار المطلق.

ويحسب التكرار المتجمع النازل وفق الصيغة التالية: $DCF_k = N - \sum_{i=1}^{i=k-1} f_i$ ، حيث: DCF_k : التكرار المتجمع النازل، f_i : التكرار المطلق، N : مجموع التكرارات المطلقة.

ينتج لدينا جدول التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة أدناه.

أقل من أو يساوي	التكرارات المتجمعة الصاعدة (UCF)	أكبر من أو يساوي	التكرارات المتجمعة النازلة (DCF)
1	1	1	50
2	9	2	49
3	22	3	41
4	35	4	28
5	41	5	15
6	45	6	9
7	48	7	5
8	50	8	2

<u>التمرين الرابع:</u> رميت زهرة نرد 1000 مرة وكل مرة يسجل عدد الرميات التي تظهر الصورة بالجدول التالي:

عدد الصور	عدد الرميات
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
6	0

المطلوب: كون جدولا تظهر فيه النسب المئوية للرميات التي تظهر بها الصور أقل من 6، 5، 4، 3، 2، 1، 0.

<u>حل التمرين الرابع:</u> – تكوين جدول النسب المئوية للرميات: النسب المئوية للرميات هي التكرارات المتجمعة الصاعدة المئوية، وتحسب انطلاقا من الصيغة التالية: $PUCF_i = RUCF_i \times 100$ ، حيث: $PUCF_i$: التكرار المتجمع الصاعد المئوي، وقبل ذلك يتم حساب التكرارات المتجمعة الصاعدة النسبية، وتحسب انطلاقا من الصيغة التالية: $RUCF_i = \frac{UCF_i}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$ ، حيث: $RUCF_i$: التكرار المتجمع الصاعد النسبي، f_i : التكرار المطلق، n : عدد القيم.

ويتضح ذلك في الجدول الموالي:

عدد الصور (X_i)	عدد الرميات (f_i)	أقل من أو يساوي	التكرار المتجمع الصاعد (UCF)	التكرار المتجمع الصاعد النسبي $(RUCF_i)$	التكرار المتجمع الصاعد المئوي $(PUCF_i)$
0	38	0	38	0,038	3,8
1	144	1	182	0,182	18,2
2	342	2	524	0,524	52,4
3	287	3	811	0,811	81,1
4	164	4	975	0,975	97,5
5	25	5	1000	1	100
6	0	6	1000	1	100
المجموع	**1000**	–	–	–	–

التمرين الرابع: من اجل دراسة الحالة العائلية لعمال مؤسسة ما، قام باحث بتوزيع استمارات خاصة على العمال وقد تحصل على النتائج التالية:

متزوج	أعزب	أعزب	مطلق	مطلق	متزوج	متزوج	مطلق	متزوج	متزوج
أعزب	متزوج	أرمل	مطلق	متزوج	أعزب	أعزب	متزوج	مطلق	أرمل
أرمل	مطلق	متزوج	أعزب	مطلق	متزوج	متزوج	متزوج	أعزب	أعزب
متزوج	متزوج	مطلق	أرمل	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب	متزوج	أرمل

المطلوب:

1- تحديد نوع البيانات.

2- اعرض البيانات في جدول تكراري.

حل التمرين الرابع:

1- تحديد نوع البيانات: بيانات نوعية (كيفية).

2- عرض البيانات في جدول تكراري: يتضح ذلك في الجدول الموالي:

الحالة العائلية (X_i)	متزوج	أعزب	مطلق	أرمل	**المجموع**
عدد العمال (f_i)	17	10	8	5	**40**

الفصل الثالث

العرض البياني للبيانات الإحصائية

تمهيد:

بالإضافة إلى العرض الجدولي للبيانات الإحصائية يمكن وصف وتلخيص البيانات الإحصائية باستخدام الرسومات البيانية والأشكال الهندسية، إذ تمكن هذه الأخيرة من القيام بتحليل سريع للظاهرة المدروسة، وتستخدم أنواع مختلفة للعرض البياني حسب نوع المتغير الإحصائي المدروس.

1- العرض البياني للبيانات الإحصائية في حالة متغير كمي متقطع: هنا يختلف العرض البياني للبيانات الإحصائية بين التكرارات المطلقة والتكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة كما يلي:

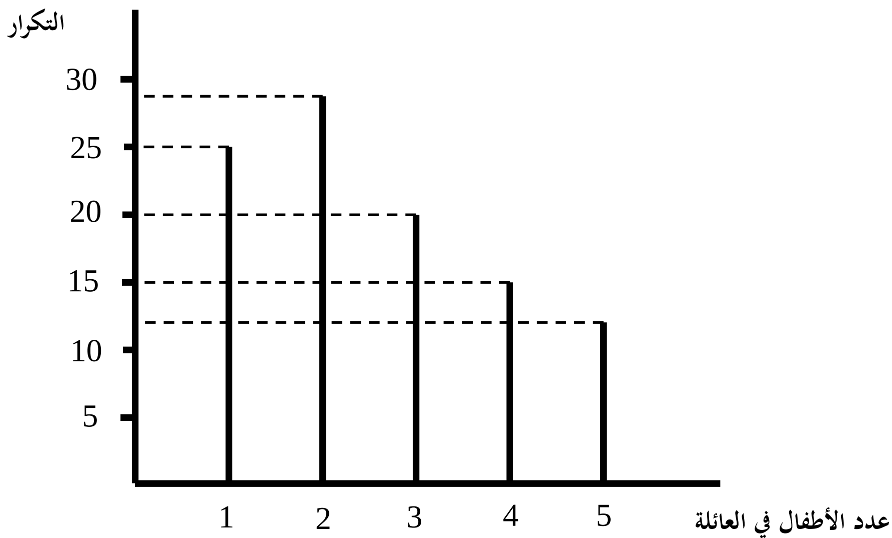
1-1- العرض البياني للتكرارات المطلقة: في هذه الحالة يكون العرض البياني على شكل خطوط بيانية تتناسب أطوالها مع التكرار المطلق المقابل لكل قيمة من قيم المتغير المدروس.[1]

مثال (1-3): يبين الجدول التالي عدد الأطفال في العائلة لعينة تتكون من 100 عائلة.

عدد الأطفال في العائلة (X_i)	1	2	3	4	5	المجموع
التكرار (f_i)	25	28	20	15	12	100

المطلوب: اعرض البيانات بالطريقة المناسبة.

الحل: - عرض البيانات بالطريقة المناسبة: أفضل طريقة لعرض هذه البيانات هي طريقة الخطوط البيانية لأنها تناسب المتغيرات الكمية المتقطعة.



1-2- العرض البياني للتكرارات المتجمعة الصاعدة: يكون العرض البياني في هذه الحالة عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب تصاعد التكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس.[2]

[1]. صالح بن محمد الصغير، **مقدمة في الإحصاء الاجتماعي**، مكتبة الملك فهد الوطنية للطباعة والنشر، السعودية، 2013، ص 38.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 45.

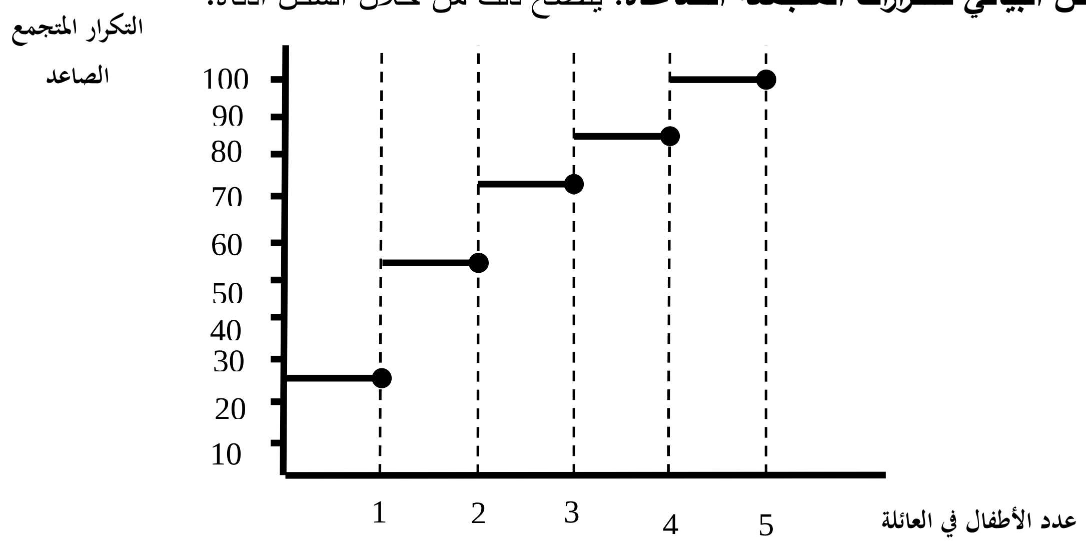
1-3- العرض البياني للتكرارات المتجمعة النازلة: يكون العرض البياني في هذه الحالة عبارة عن قطع مستقيمة متنازلة حسب تنازل التكرارات التجميعية النازلة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس.[1]

مثال (2-3): اعرض بيانيا التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة للتوزيع التكراري في المثال (1-3).

الحل: - **حساب التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة:** يتضح ذلك من خلال الجدول أدناه.

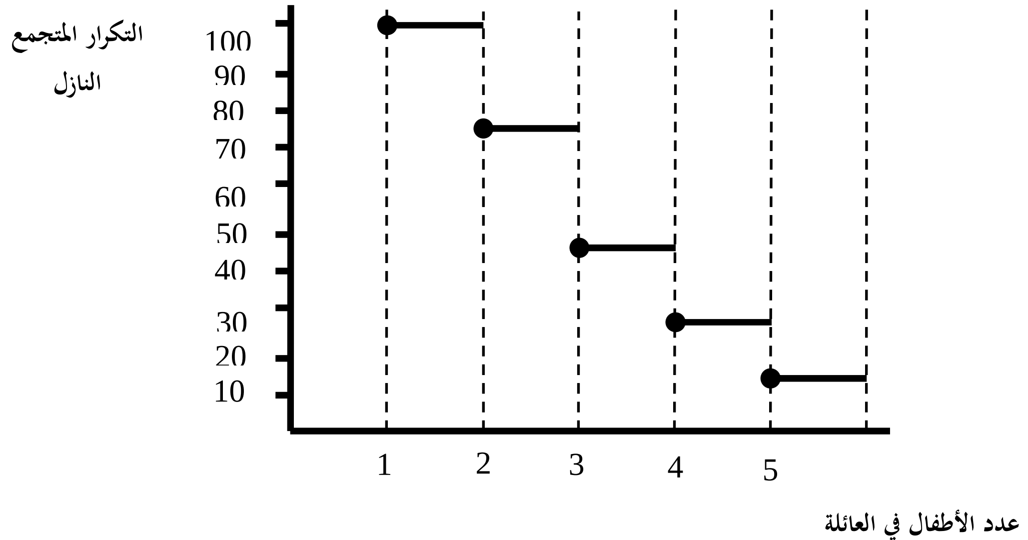
عدد الأطفال في العائلة (X_i)	التكرار (f_i)	التكرار المتجمع الصاعد (UCF)	التكرار المتجمع النازل (DCF)
1	25	25	100
2	28	53	75
3	20	73	47
4	15	88	27
5	12	100	12
المجموع	**100**	-	-

- **العرض البياني للتكرارات المتجمعة الصاعدة:** يتضح ذلك من خلال الشكل أدناه.



[1]. صالح بن محمد الصغير، مرجع سابق، ص 47.

- **العرض البياني للتكرارات المتجمعة النازلة:** يتضح ذلك من خلال الشكل أدناه.



2- العرض البياني للبيانات الإحصائية في حالة متغير كمي مستمر: إن العروض البيانية للمتغير الكمي المستمر هي أكثر العروض البيانية استعمالا ونميز بين ما يلي:

2-1- العرض البياني للتكرارات المطلقة: هناك أنواع مختلفة من التمثيلات البيانية تتمثل فيما يلي:[1]

2-1-1- المدرج التكراري: وهو عبارة عن مستطيلات (أعمدة) متلاصقة تمثل تكرارات أو قيم كل فئة من الفئات، حيث أن طول كل منها يتناسب مع التكرار المقابل لها، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة، وتوضع الفئات على المحور الأفقي بينما توضع التكرارات على المحور العمودي، ونميز بين حالتين عند رسم المدرج التكراري كما يلي:

- **المدرج التكراري في حالة الفئات متساوية الطول:** عندما تكون الفئات متساوية الطول فإن قاعدة المقارنة ثابتة ومتساوية، وعليه نقوم برسم المدرج التكراري مباشرة.

مثال (3-3): الجدول التالي يبين توزيع النفقات اليومية لعينة من 40 طالب. (الوحدة: 10 دج)

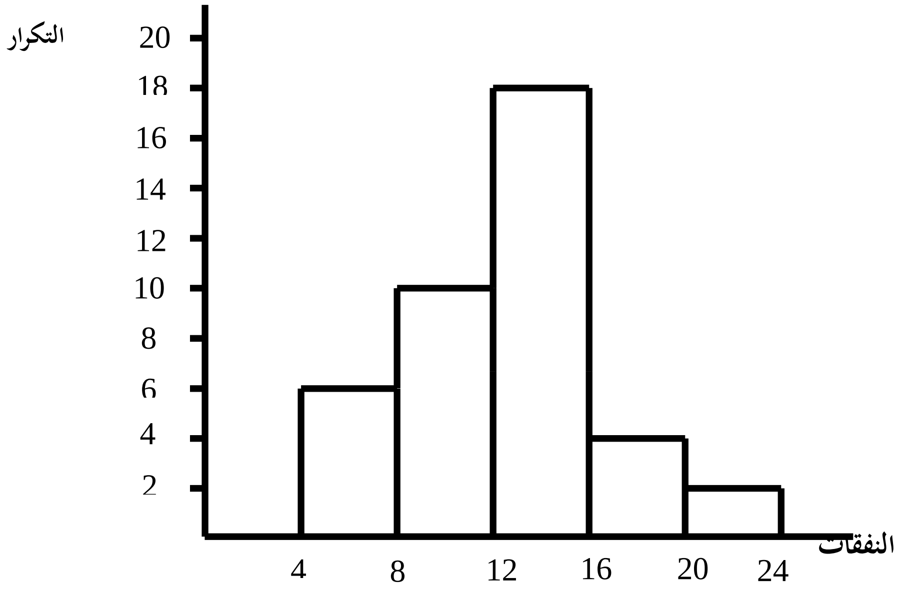
النفقات (X_i)	]4 -8]	]8 -12]	]12 -16]	]16 -20]	]20 -24]	**المجموع**
التكرار (f_i)	6	10	18	4	2	**40**

المطلوب: اعرض بيانيا التوزيع التكراري.

الحل: - **العرض البياني للتوزيع التكراري:** بما أن الفئات متساوية الطول نقوم برسم المدرج التكراري مباشرة.

---

[1]. فتحي عبد العزيز أبو راضي، **الطرق الإحصائية في العلوم الاجتماعية**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، لبنان، ص 98.



- **المدرج التكراري في حالة الفئات غير متساوية الطول:** إذا كانت فئات التوزيع غير متساوية الطول نقوم بتعديل التكرارات (لان قاعدة المقارنة غير ثابتة) حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، ولغرض تعديل التكرارات نستخدم المعادلة الآتية:

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}} \times \text{طول الفئة الشائع}$$

مثال (4-3): الجدول الموالي يبين توزيع الأجر الشهري لعينة من 100 عامل. (الوحدة: 1000 دج)

الأجر (X_i)	]25 – 20]	]35 – 25]	]40 – 35]	]55 – 40]	]75 – 55]	]80 – 75]
التكرار (f_i)	5	15	20	25	30	5

المطلوب: اعرض بيانيا التوزيع التكراري.

الحل: - **العرض البياني للتوزيع التكراري:** بما أن فئات التوزيع غير متساوية الطول نقوم بتعديل التكرارات وبأخذ طول الفئة الشائع (5) كأساس لتعديل التكرارات.

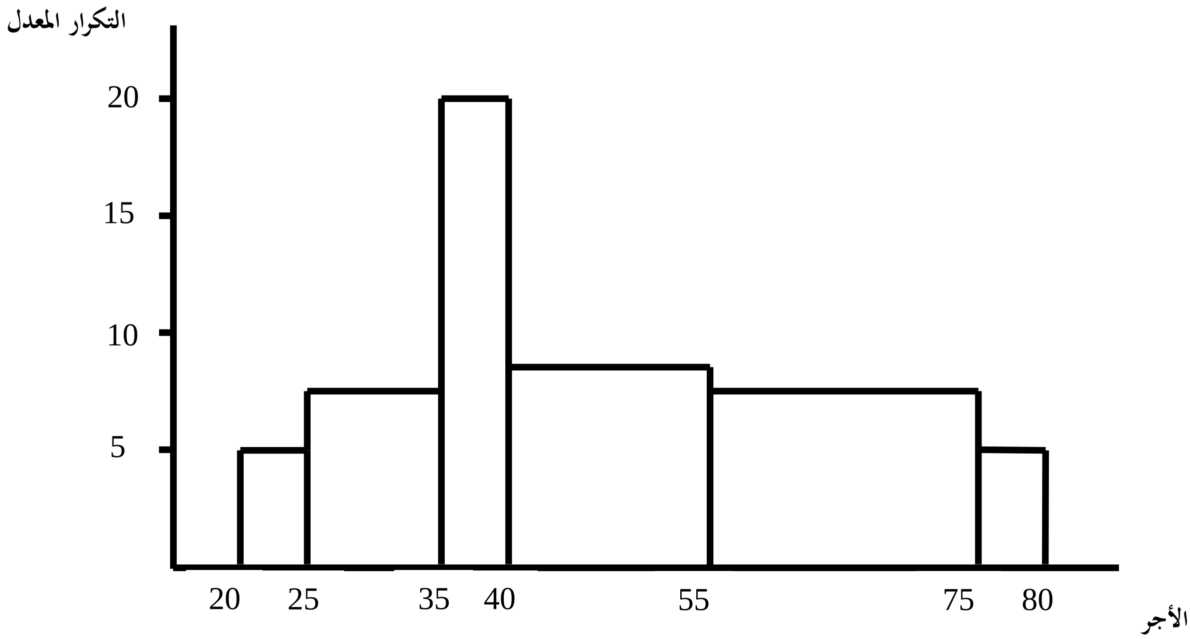
نستخدم المعادلة الآتية: $\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}} \times \text{طول الفئة الشائع}$

فنحصل على الجدول الموالي.

الأجر (X_i)	**التكرار (f_i)**	**طول الفئة**	**التكرار المعدل**
]25 – 20]	5	5	5
]35 – 25]	15	10	7,5
]40 – 35]	20	5	20
]55 – 40]	25	15	8,33
]75 – 55]	30	20	7,5

5	5	5	]80 – 75]
–	–	**100**	**المجموع**

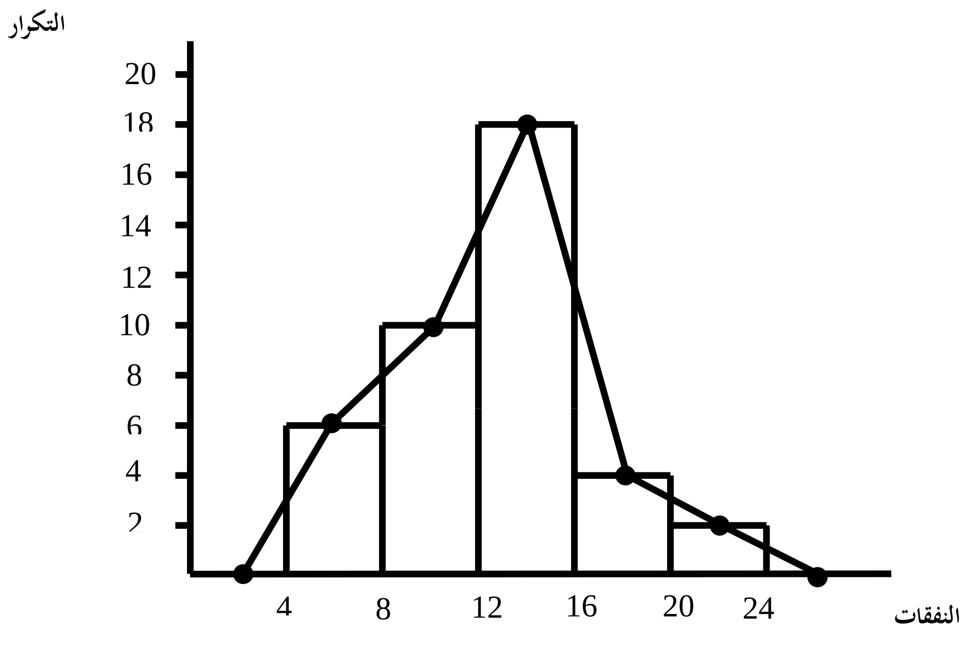
بعد ذلك يتضح التمثيل البياني في الشكل أدناه.



2-1-2- المضلع التكراري: هو مجموعة من القطع المستقيمة المتصلة والمنكسرة تتحدد بنقاط إحداثياتها مراكز الفئات والتكرارات المقابلة.

مثال (5-3): ارسم المضلع التكراري للتوزيع المبين في المثال (3-3).

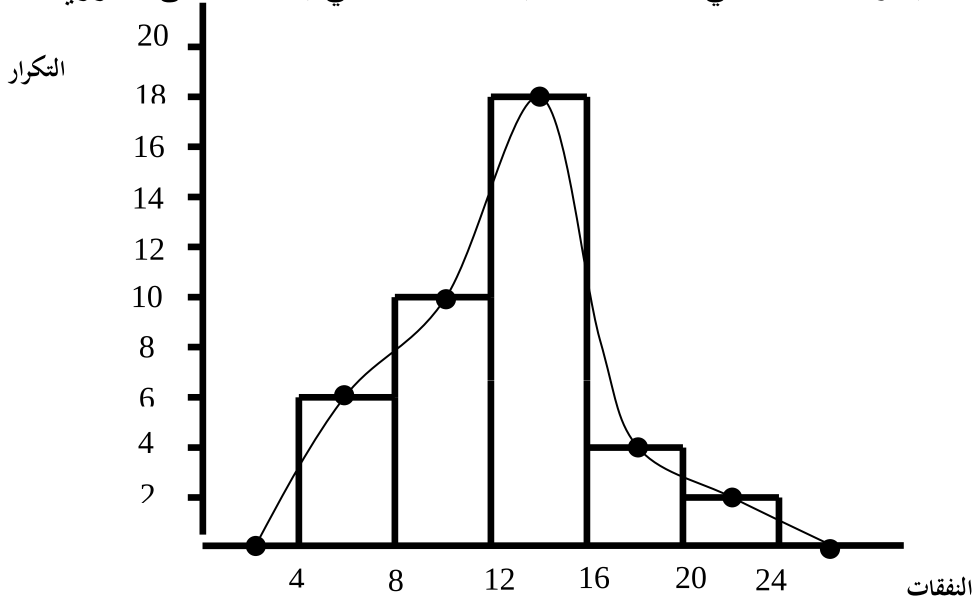
الحل: - **رسم المضلع التكراري:** بعد رسم المدرج التكراري نقوم بتحديد مراكز الفئات والتوصيل بينها بخطوط منكسرة ومتصلة كما في الشكل أدناه حيث الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري.



2-1-3- المنحنى التكراري: له نفس فكرة المضلع التكراري غير أننا نمرر منحنى بين النقاط المرسومة (على محور أفقي يمثل مراكز الفئات ومحور عمودي يمثل التكرارات) بدلا من خطوط مستقيمة منكسرة.

مثال (6-3): ارسم المنحنى التكراري للتوزيع المبين في المثال (3-3).

الحل: - رسم المنحنى التكراري: بعد رسم المدرج التكراري نقوم بتحديد مراكز الفئات والتوصيل بينها بخطوط منحنية ومتصلة كما في الشكل أدناه حيث الخط المنحني يمثل المنحنى التكراري.



2-2- العرض البياني للتكرارات المتجمعة الصاعدة: يكون العرض البياني في هذه الحالة عبارة عن مستطيلات متصاعدة حسب تصاعد التكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس.[1]

2-3- العرض البياني للتكرارات المتجمعة النازلة: يكون العرض البياني في هذه الحالة عبارة عن مستطيلات متنازلة حسب تنازل التكرارات التجميعية النازلة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس.[2]

3- العرض البياني للبيانات الإحصائية في حالة متغير نوعي: يمكن تمثيل المتغير النوعي بيانيا بعدة أنواع من التمثيلات البيانية من أهمها ما يلي:

3-1- الدائرة البيانية: هي عبارة عن دائرة مقسمة إلى عدة أجزاء أو قطاعات دائرية، كل جزء يقابل زاوية مركزية تتناسب مع التكرارات المقابلة لكل خاصية من الخصائص المدروسة، ويتم حساب زوايا كل قطاع دائري باستخدام العلاقة التالية[3]:

$$\text{زاوية القطاع الدائري} = \frac{\text{تكرار الخاصية}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360°$$

[1]. فتحي عبد العزيز أبو راضي، مرجع سابق، ص 100.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 102.

[3]. صالح بن محمد الصغير، مرجع سابق، ص 39.

مثال (7-3): الجدول التالي يبين مكونات الدخل الوطني (بملايين الدولارات) لبلد معين خلال سنة ما مقسما حسب القطاعات.

القطاع	الخدمات	الزراعة	الصناعة	التجارة	المواصلات	المجموع
الدخل الوطني	1200	1000	900	700	600	4400

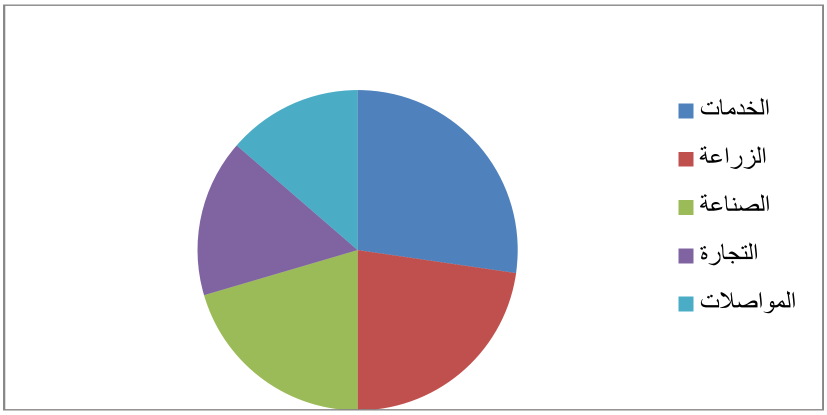
المطلوب: اعرض البيانات باستخدام العرض الدائري.

الحل: - **عرض البيانات باستخدام طريقة الدائرة البيانية**: نقوم بحساب زاوية كل قطاع دائري لكل خاصية باستخدام الصيغة التالية: زاوية القطاع الدائري $= \frac{\text{تكرار الخاصية}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360°$

فينتج الجدول الموالي:

القطاع	الدخل الوطني	زاوية القطاع الدائري
الخدمات	1200	°98,18
الزراعة	1000	°81,82
الصناعة	900	°73,64
التجارة	700	°57,27
المواصلات	600	°49,09
المجموع	4400	°360

ويكون التمثيل البياني بطريقة الدائرة البيانية كما في الشكل أدناه.

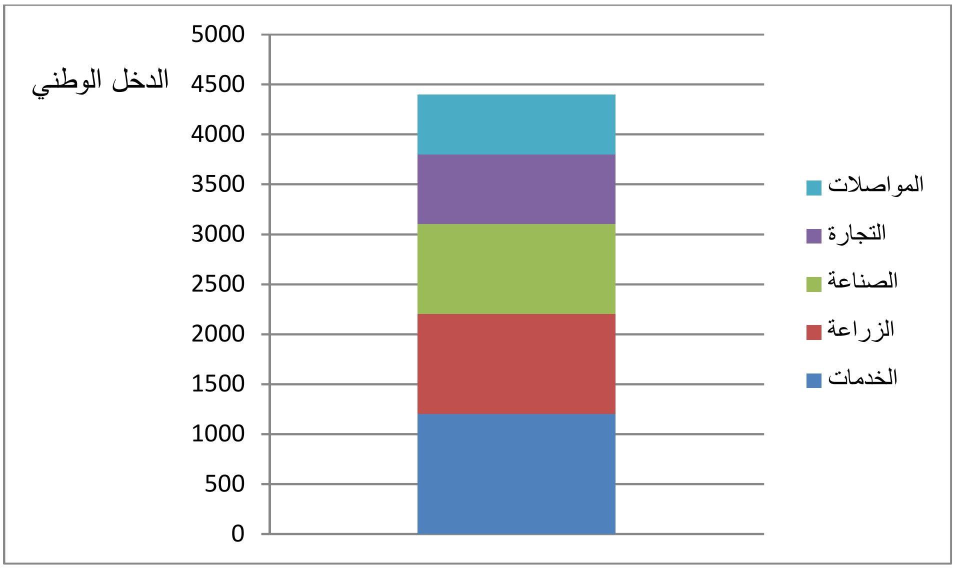


3-2- العمود المجزأ: هو عبارة عن مستطيل مقسم إلى عدة أجزاء، كل جزء منه يقابل تكرار معين للخاصية المدروسة، ومن الأفضل عند رسم العمود المجزأ استعمال النسب المئوية المقابلة لكل تكرار.[1]

مثال (8-3): مثل بطريقة العمود المجزأ بيانات المثال (7-3).

الحل: - **التمثيل بطريقة العمود المجزأ**: يتضح ذلك من خلال الشكل أدناه.

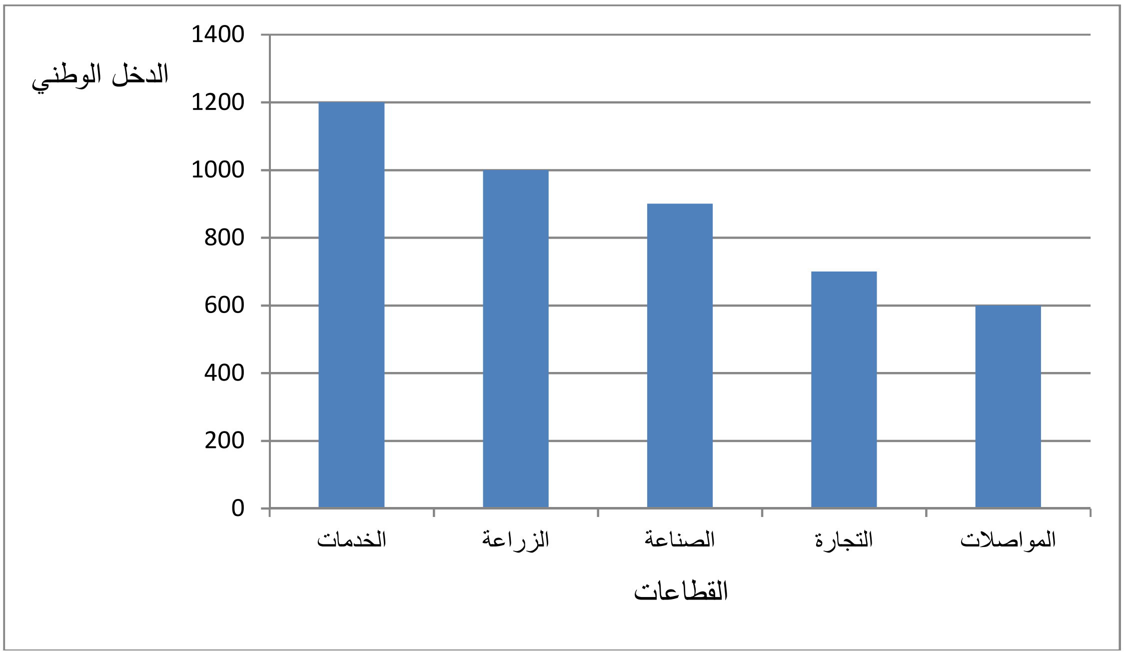
[1]. صالح بن محمد الصغير، مرجع سابق، ص 40.



3-3- المستطيلات (الأعمدة البيانية): هي عبارة عن مستطيلات متباعدة بمسافات ثابتة ولها قواعد متساوية وتتناسب أطوالها مع التكرارات المقابلة لمكونات الخاصية المدروسة.[1]

مثال (9-3): مثل بطريقة الأعمدة البيانية بيانات المثال (7-3).

الحل: - **التمثيل بطريقة الأعمدة البيانية:** يتضح ذلك من خلال الشكل أدناه.



[1]. صالح بن محمد الصغير، مرجع سابق، ص 41.

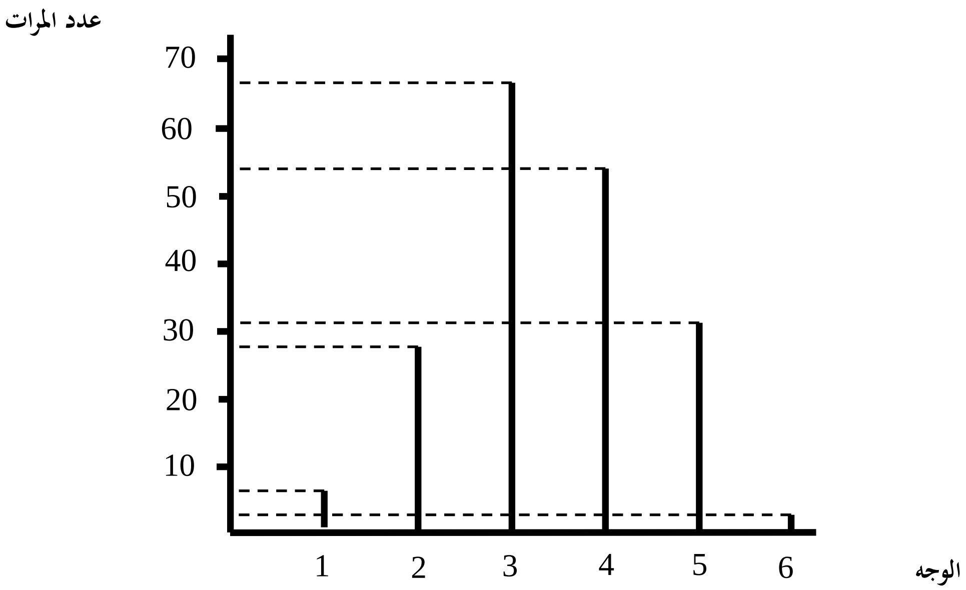
تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول: عند إلقاء زهرة نرد 200 مرة سجل عدد المرات التي شوهد فيها كل وجه من الأوجه الستة وكانت نتائج التجربة كالتالي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	8	29	68	57	33	5

المطلوب: عرض هذه البيانات بيانيا.

حل التمرين الأول: – **عرض البيانات بيانيا:** بما أن المتغير الإحصائي كمي متقطع وبالتالي تعتبر طريقة الخطوط البيانية مناسبة لعرض هذه البيانات بيانيا، ويتضح ذلك في الشكل الموالي:



التمرين الثاني: الجدول التالي يبين توزيع عمال مؤسسة ما حسب التخصص كما يلي:

التخصص (X_i)	مهندس	تقني سامي	تقني	عامل متخصص	عامل بسيط	**المجموع**
العدد (f_i)	50	50	100	200	400	**800**

المطلوب:

1- حدد نوع وطبيعة المتغير الإحصائي.

2- تمثيل هذه البيانات عن طريق القطاعات الدائرية.

حل التمرين الثاني:

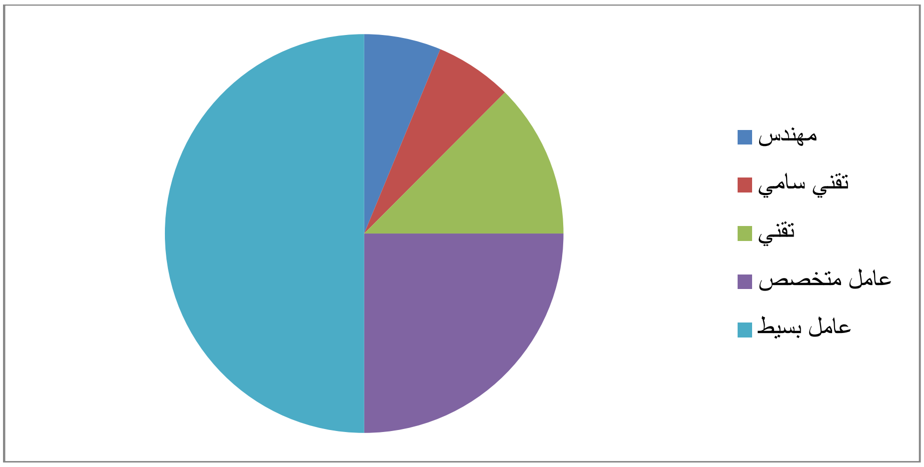
1- تحديد نوع وطبيعة المتغير الإحصائي: نوعي قابل للترتيب.

2- تمثيل البيانات عن طريق القطاعات الدائرية: نقوم بحساب زاوية كل قطاع دائري لكل خاصية باستخدام الصيغة التالية: زاوية القطاع الدائري $= \frac{\text{تكرار الخاصية}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360°$

فينتج الجدول الموالي:

التخصص (X_i)	التكرار (f_i)	زاوية القطاع الدائري
مهندس	50	°22,5
تقني سامي	50	°22,5
تقني	100	°45
عامل متخصص	200	°90
عامل بسيط	400	°180
المجموع	**800**	°360

ثم ينتج لنا العرض الدائري التالي:

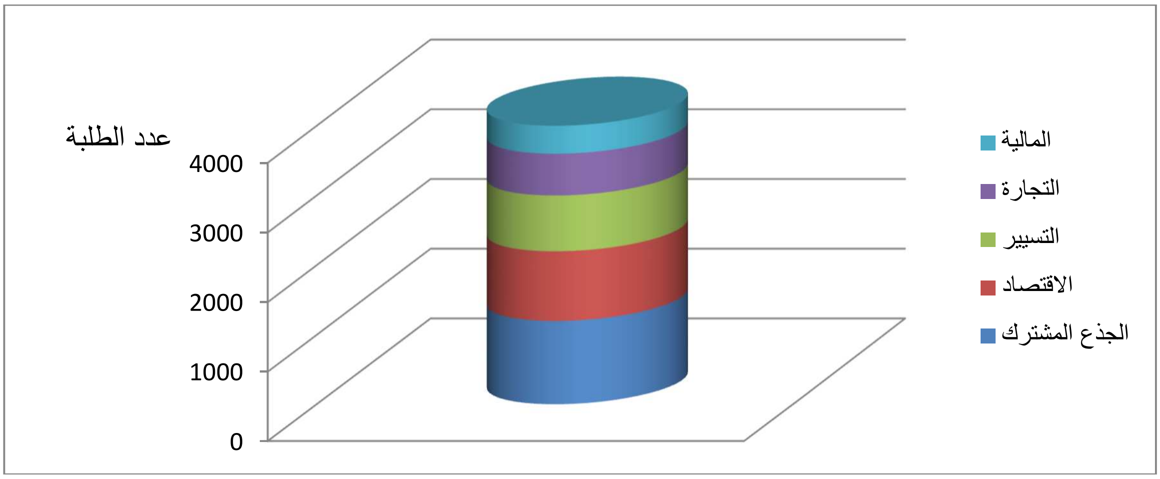


<u>التمرين الثالث:</u> يبين الجدول التالي عدد طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير في إحدى الجامعات الجزائرية سنة 2004 مقسمين على أقسام الكلية المختلفة.

القسم	الجذع المشترك	الاقتصاد	التسيير	التجارة	المالية	**المجموع**
عدد الطلبة	1200	1000	800	600	400	**4000**

المطلوب: عرض البيانات باستخدام طريقة العمود المجزأ.

<u>حل التمرين الثالث:</u> - عرض البيانات باستخدام طريقة العمود المجزأ: يتضح ذلك في الشكل التالي:



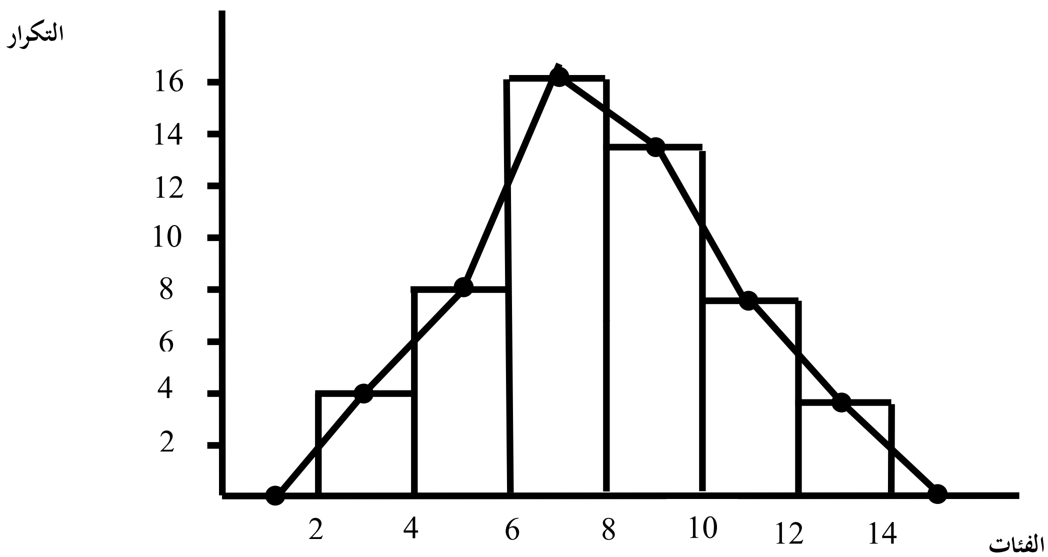
التمرين الرابع: ليكن لديك التوزيع التكراري التالي.

الفئات (X_i)	$]2-4]$	$]4-6]$	$]6-8]$	$]8-10]$	$]10-12]$	$]12-14]$
التكرار (f_i)	4	8	16	12	6	2

المطلوب: أرسم المدرج التكراري والمضلع التكراري.

حل التمرين الرابع: – **رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري:** بما أن الفئات متساوية الطول سيتم رسم كل من المدرج التكراري والمضلع التكراري مباشرة، ويتضح ذلك في الشكل الموالي:

تمثل الأعمدة المتلاصقة المدرج التكراري بينما الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري.

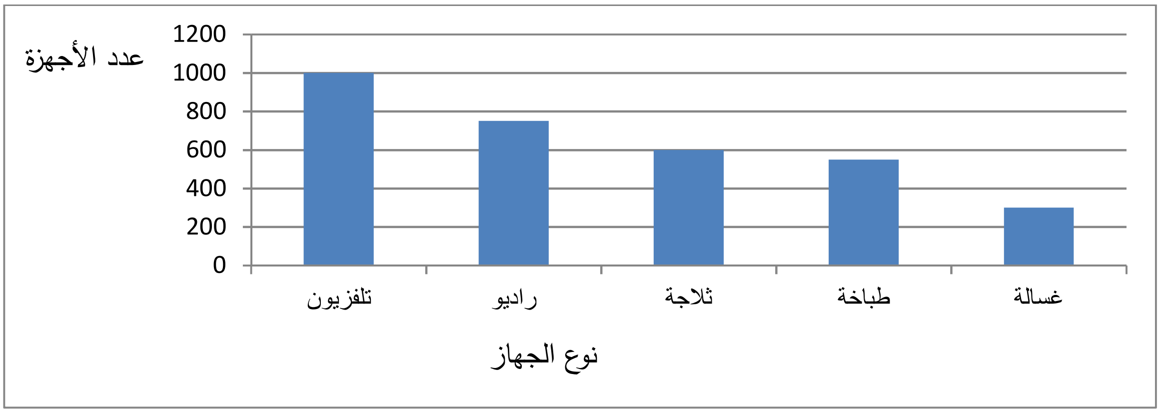


التمرين الخامس: يبين الجدول التالي مبيعات شركة للأجهزة الالكترومنزلية.

نوع الجهاز	تلفزيون	راديو	ثلاجة	طباخة	غسالة
عدد الأجهزة	1000	750	600	550	300

المطلوب: تمثيل هذه البيانات بطريقة المستطيلات البيانية.

<u>**حل التمرين الخامس:**</u> – **تمثيل هذه البيانات بطريقة المستطيلات البيانية:** يتضح ذلك في الشكل أدناه.



<u>**التمرين السادس:**</u> التوزيع التكراري التالي يبين الفترة الزمنية بالدقائق التي قضاها مجموعة من الطلبة في أداء امتحان في أحد المواد.

الفترة الزمنية	]10 − 5]	]20 − 10]	]35 − 20]	]55 − 35]	]60 − 55]
عدد الطلبة	10	30	30	20	10

المطلوب: تمثيل هذه البيانات بمدرج تكراري.

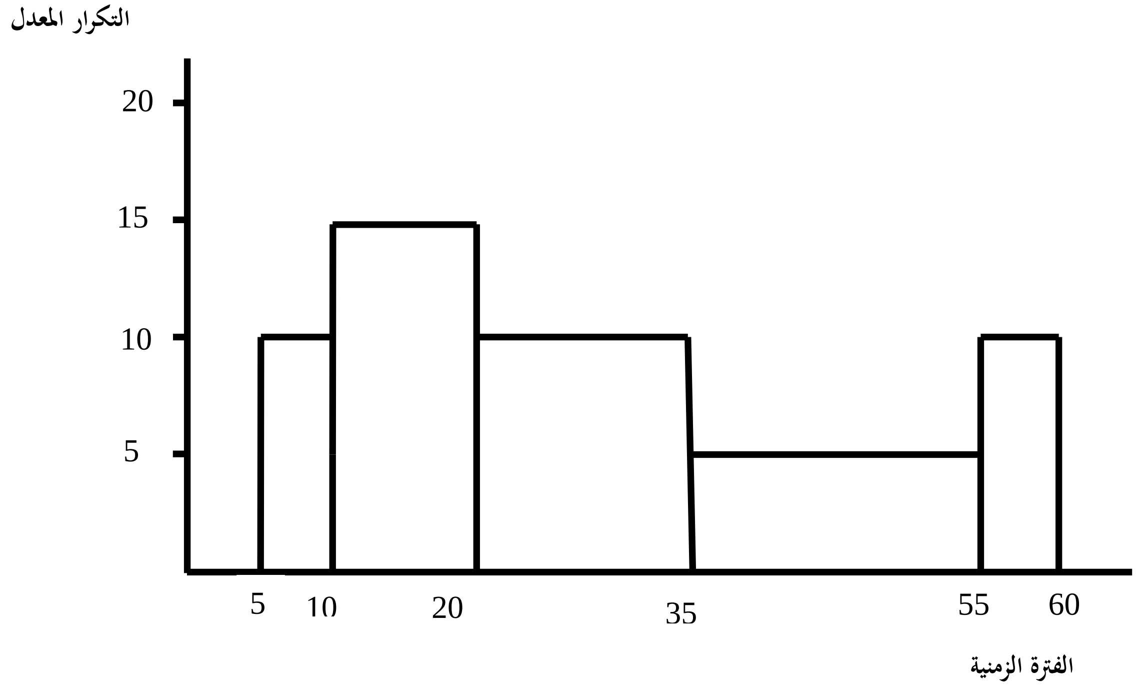
<u>**حل التمرين السادس:**</u> – **تمثيل البيانات بمدرج تكراري:** بما أن فئات التوزيع غير متساوية الطول نقوم أولا بحساب التكرارات المعدلة، ثم نقوم برسم المدرج التكراري، ولتعديل التكرارات نقوم بأخذ طول الفئة الشائع وهو هنا يساوي (5) كأساس لتعديل التكرارات.

ثم نستخدم المعادلة الآتية: $\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}} \times \text{طول الفئة الشائع}$

فينتج لنا الجدول الموالي:

الفترة الزمنية	**عدد الطلبة**	**طول الفئة**	**التكرار المعدل**
]10 − 5]	10	5	10
]20 − 10]	30	10	15
]35 − 20]	30	15	10
]55 − 35]	20	20	5
]60 − 55]	10	5	10
المجموع	**100**	–	–

بعد ذلك يتضح التمثيل البياني في الشكل أدناه.


التكرار المعدل
20
15
10
5
5
10
20
35
55
60
الفترة الزمنية

الفصل الرابـع

مقاييس النزعة المركزيـة

تمهيد:

تعتبر مقاييس النزعة المركزية أو كما تسمى (المتوسطات) من أهم المقاييس الإحصائية التي يفكر الباحث في حسابها، فمقياس النزعة المركزية لظاهرة ما تعني التعرف على القيمة التي تقع عادة عند مركز توزيعا ما.

إن متوسط أي ظاهرة يعبر عن المستوى العام لهذه الظاهرة، فمتوسط مجموعة من القيم هو القيمة التي تعبر عن جميع القيم، أو هو القيمة التي تدور أو تتمركز حولها باقي القيم، فمتوسط الدخل لأي بلد يعبر عن المستوى العام للدخل في هذا البلد كما أن متوسط دخل عمال أحد المصانع هو الدخل الذي تتمركز حوله دخول العمال بهذا المصنع، ولهذا السبب تسمى المتوسطات بمقاييس النزعة المركزية، وذلك لأن قيم أي ظاهرة تميل أو تنزع للتمركز حول قيمة معينة هي متوسط هذه الظاهرة أو مقياس نزعتها المركزية، فأطوال البالغين تتمركز حول رقم معين هو متوسط الطول، وكذلك أوزانهم ومعدلات ذكائهم، وأي ظاهرة أخرى، فالمتوسط بشكل عام هو الذي يعبر عن المستوى العام للظاهرة، أي هو الذي يعبر عن جميع قيمها.

وسوف نتناول في هذا الفصل أهم مقاييس النزعة المركزية وهي: المتوسطات بأنواعها الحسابي والهندسي والتوافقي والتربيعي والوسيط وأشباه الوسيط كالربيعات والعشيرات والمئينات والمنوال، وفيما يلي عرض لهذه المقاييس، نبين فيه تعريف كل مقياس وكيفية حسابه وخصائصه.

1- المتوسطات وأنواعها: تنقسم المتوسطات كمقاييس للنزعة المركزية إلى عدة أنواع وسيتم تناول كل منها من حيث تعريف كل مقياس وكيفية حسابه وخصائصه.

1-1- المتوسط الحسابي (Arithmetic Mean): يعتبر المتوسط أو الوسط الحسابي أكثر المقاييس شهرة وأكثرها استخداما، بل لعله من أهم المقاييس الإحصائية على الإطلاق، وذلك لما يتمتع به من مزايا وخواص، ولدخوله في حساب الكثير من المقاييس الإحصائية الأخرى، ويتميز المتوسط الحسابي بخصائص هي:[1]

- لحساب المتوسط الحسابي يجب أن تكون لدينا بيانات كمية، أي لا يصلح المتوسط الحسابي إذا كانت البيانات وصفية اسمية أو ترتيبية، إذ لا معنى له في هذه الحالات، كما لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة من البداية أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات.
- إن جميع القيم وبدون أي استثناء تدخل في حساب المتوسط الحسابي، أي أنه يعبر عن جميع القيم فعلا، ولذا فإنه إذا كان من بين القيم قيمة شاذة أو (متطرفة) بمعنى أنها كبيرة جدا أو صغيرة جدا بالنسبة لباقي القيم (فإنها سوف تؤثر في قيمة المتوسط الحسابي، أي أنه يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة، فوجود قيمة كبيرة جدا بالنسبة لباقي القيم يرفع قيمة المتوسط، والعكس وجود قيمة صغيرة جدا يقلل من قيمة المتوسط، لذا فإنه يقال أن المتوسط في هذه الحالات قد يكون مضللا أي لا يعبر عن الغالبية العظمى من القيم.

---

[1]. أحمد عبد السميع طبيه، **مبادئ الإحصاء**، دار البداية ناشرون وموزعون، الأردن، 2008، ص 44.

1-1-1- طرق حساب المتوسط الحسابي: بالنظر إلى أهمية المتوسط الحسابي في التحليل الإحصائي، فهناك عدة طرق لحسابه، حيث يمكن حسابه من البيانات الأولية (غير المبوبة) أو البيانات المبوبة.

1-1-1-1- حساب المتوسط الحسابي من البيانات الأولية (غير المبوبة): يحسب بطريقتين كما يلي:[1]

- **الطريقة المباشرة:** الفكرة الأساسية في حساب المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم أنه يساوي حاصل قسمة مجموع القيم على عددها، فإذا كان لدينا مجموعة من القيم هي: $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ ، فان المتوسط الحسابي لهذه القيم يكتب كالآتي: $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$ ، ويسمى المتوسط الحسابي في هذه الحالة بالمتوسط الحسابي البسيط لان مجموعة القيم لها نفس الأهمية أو التكرار.

مثال(1-4): استغرق سباق السيارات بين فريقين خمس جولات، وكانت كل جولة تستغرق عدة ساعات كما يلي:

7، 10، 12، 8، 9.

أحسب المتوسط الحسابي لعدد الساعات في هذه الجولات.

الحل: - **حساب المتوسط الحسابي لعدد الساعات في هذه الجولات:** لدينا خمس قيم، أي أن: n 5 = جولات.

يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية: $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$

أي أن: $\overline{X}=\frac{7+10+12+8+9}{5}=\frac{46}{5}=9{,}2$

وهو يمثل عدد الساعات ويمثل المتوسط الحسابي لساعات الجولات الخمسة.

في بعض الحالات، تكون القيم المراد حساب المتوسط الحسابي لها ليس لها نفس الأهمية، بل أهميات نسبية تختلف باختلاف عامل الترجيح الخاص، في هذه الحالات يتطلب الأمر استخدام صيغة أخرى تسمى بصيغة المتوسط الحسابي المرجح.

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots, f_n$ التكرارات المقابلة لها، في هذه الحالة تعطى علاقة المتوسط الحسابي المرجح بالصيغة التالية:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

مثال(2-4): البيانات الإحصائية التالية تمثل توزيع عائلات حي معيّن حسب عدد الغرف.

عدد الغرف x_i	1	2	3	4	**المجموع**
عدد العائلات f_i	5	10	20	30	65

[1]. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 45.

المطلوب: إيجاد متوسط الغرف المملوكة من طرف العائلات.

الحل:- حساب متوسط الغرف المملوكة من طرف العائلات: يحسب انطلاقا من الصيغة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

$\mathbf{f_i \times x_i}$	عدد العائلات f_i	عدد الغرف x_i
5	5	1
20	10	2
60	20	3
120	30	4
205	65	**المجموع**

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{205}{65} = 3{,}15 \approx 3$$

ومنه متوسط الغرف المملوكة من طرف العائلات هو: 3.

- طريقة الانحرافات البسيطة (طريقة المتوسط الفرضي): إذا كان لدينا مجموعة من القيم هي: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة إحصائية معينة، وكان العدد x_0 يمثل المتوسط الفرضي لهذه البيانات (يفضّل أن تكون قيمة المتوسط الفرضي مساوية لإحدى مفردات الظاهرة وأن تكون قيمة هذه المفردة واقعة في منتصف البيانات)، وكان العدد $(x_i - x_0)$ يمثل انحرافات المفردات عن متوسطها الفرضي، فإن المتوسط الحسابي في هذه الحالة معطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)}{n}$$

ويسمى المتوسط الحسابي في هذه الحالة بالمتوسط الحسابي البسيط لان مجموعة القيم لها نفس الأهمية أو التكرار.

مثال(2-4): أوجد المتوسط الحسابي باستخدام طريقة المتوسط الفرضي للبيانات التالية: 15، 10، 14، 13، 8، 11، 12، 9، 16.

الحل:- حساب المتوسط الحسابي باستخدام طريقة المتوسط الفرضي: لنفرض أن المتوسط الفرضي $x_0 = 11$

$\mathbf{x_i - x_0}$	$\mathbf{x_i}$
4	15
−1	10
3	14
2	13

−3	8
0	11
1	12
−2	9
5	16

$$\overline{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)}{n} = 11 + \frac{9}{9} = 12$$

المتوسط الحسابي باستخدام طريقة الوسط الفرضي للبيانات السابقة يساوي 12.

في بعض الحالات، تكون القيم المراد حساب المتوسط الحسابي لها ليس لها نفس الأهمية، بل أهميات نسبية تختلف باختلاف عامل الترجيح الخاص (التكرار)، في مثل هذه الحالات يتطلب الأمر استخدام صيغة أخرى تسمى بصيغة المتوسط الحسابي المرجح، وفي هذه الحالة يفضل أن تكون قيمة المتوسط الفرضي قيمة المفردة الأكبر تكرارا.

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots, f_n$ التكرارات المقابلة لها، وكان العدد x_0 يمثل المتوسط الفرضي لهذه البيانات (يفضّل أن تكون قيمة المتوسط الفرضي قيمة المفردة الأكبر تكرارا)، وكان العدد $(x_i - x_0)$ يمثل انحرافات المفردات عن وسطها الفرضي، فإن المتوسط الحسابي في هذه الحالة معطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال(4−3): أوجد المتوسط الحسابي باستخدام طريقة المتوسط الفرضي لبيانات الجدول الإحصائي التالي:

x_i	15	25	35	45	55	65	**المجموع**
f_i	18	30	25	17	12	8	110

الحل:− حساب المتوسط الحسابي باستخدام طريقة المتوسط الفرضي: لنفرض أن المتوسط الفرضي $x_0 = 25$

والذي يقابله اكبر تكرار $f = 30$

x_i	**f_i**	**$x_i - x_0$**	**$f_i(x_i - x_0)$**
15	18	−10	−180
25	30	0	0
35	25	10	250
45	17	20	340
55	12	30	360
65	8	40	320

المجموع	110	/	1090

المتوسط الحسابي في هذه الحالة معطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 25 + \frac{1090}{110} = 34{,}9$$

1-1-2- حساب المتوسط الحسابي من البيانات المبوبة (فئات): في هذه الحالة يكون جدول التوزيع التكراري على شكل فئات، ويحسب بطريقتين كما يلي:[1]

- **الطريقة المباشرة:** إذا كانت لدينا مجموعة من الفئات عددها n، وكانت $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_n$ ، تمثل مراكز الفئات، وكانت $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإننا نعتبر أن التكرارات تتجمع حول مراكز الفئات وعليه نستخدم الصيغة التالية لحساب المتوسط الحسابي: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_n c_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$

مثال(4-4): الجدول الإحصائي التالي يبيّن توزيع عمال مؤسسة ما حسب أجورهم الشهرية (الوحدة: 1000 دج).

الأجر x_i	$]20-10]$	$]30-20]$	$]40-30]$	$]50-40]$	$]60-50]$	$]70-60]$
عدد العمال f_i	18	30	25	17	12	8

المطلوب: إيجاد متوسط الأجر الشهري للعمال.

الحل:- حساب متوسط الأجر الشهري للعمال: نستخدم الصيغة التالية لحساب المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_n c_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الأجر x_i	**عدد العمال f_i**	**مركز الفئة c_i**	**$f_i\ c_i$**
$]20-10]$	18	15	270
$]30-20]$	30	25	750
$]40-30]$	25	35	875
$]50-40]$	17	45	765
$]60-50]$	12	55	660
$]70-60]$	8	65	520
المجموع	110	/	3840

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{3840}{110} = 34{,}9$$

ومنه متوسط أجر عمال هذه المؤسسة هو : $(\overline{X} = 34{,}9 \times 1000 = 34900)$

---

[1]. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 45.

- **طريقة الانحرافات البسيطة (طريقة المتوسط الفرضي):** إذا كانت لدينا مجموعة من الفئات عددها n، وكانت مراكز الفئات $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$ وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات وكان العدد c_0 يمثل المتوسط الفرضي لهذه البيانات (يفضّل أن تكون قيمة المتوسط الفرضي مركز الفئة التي تقع وسط الفئات وأن يكون لهذه الفئة أكبر تكرار إن أمكن)، وكان العدد $(c_i - c_0)$ يمثل انحرافات المراكز عن متوسطها الفرضي، فإن المتوسط الحسابي في هذه الحالة معطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = c_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(c_i - c_0)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

يفضل أن تكون قيمة المتوسط الفرضي مركز الفئة التي تقع وسط الفئات (في حالة متغير كمي متصل) وأن يكون لهذه الفئة أكبر تكرار إن أمكن.

مثال(5-4): بأخذ معطيات المثال السابق احسب المتوسط الحسابي بطريقة الانحرافات البسيطة (المتوسط الفرضي).

الحل:- حساب متوسط الأجر الشهري للعمال بطريقة الانحرافات البسيطة (المتوسط الفرضي): نستخدم الصيغة التالية لحساب المتوسط الحسابي: $\overline{X} = c_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(c_i - c_0)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

لنفرض أن المتوسط الفرضي $c_0 = 25$ ، والذي يقابله اكبر تكرار $f = 30$

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	$c_i - c_0$	$f_i(c_i - c_0)$
]10 – 20]	18	15	10 -	180 -
]20 – 30]	30	25	0	0
]30 – 40]	25	35	10	250
]40 – 50]	17	45	20	340
]50 – 60]	12	55	30	360
]60 – 70]	8	65	40	320
المجموع	**110**	/	/	**1090**

$$\overline{X} = c_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(c_i - c_0)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 25 + \frac{1090}{110} = 34,9$$

ومنه متوسط أجر عمال هذه المؤسسة هو: $(\overline{X} = 34,9 \times 1000 = 34900)$

نلاحظ أن متوسط أجر عمال هذه المؤسسة هو قيمة واحدة رغم اختلاف طرق حساب المتوسط الحسابي.

1-2- المتوسط الحسابي المرجح (الموزون) لأوساط حسابية: إذا كان لدينا عينتين، حجم الأولى n_1 وحجم الثانية n_2 وكان المتوسط الحسابي لكل منهما: $\overline{X_1}$ ، $\overline{X_2}$ ، فإنه يمكن حساب المتوسط الحسابي المرجح للعينتين معا بالاستفادة من متوسط كل منهما كما يلي: $\overline{X} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2}}{n_1 + n_2}$ ، ويسمى المتوسط

في هذه الحالة المتوسط المرجح ونلاحظ أنه تم ترجيح كل متوسط بحجم العينة المحسوب منها، أي إعطاء كل متوسط وزن يساوي حجم العينة الخاصة به، ثم القسمة على مجموع حجم العينتين معا، أي أنه لحساب المتوسط الحسابي للعينتين معا، لا نجمع المتوسطين ونقسم على اثنين إلا في حالة واحدة فقط وهي إذا كان حجم العينتين متساويين.[1]

أما في الحالة العامة وهي اختلاف حجم العينات فيتم ضرب كل متوسط في حجم العينة الخاص به، ونجمع، ثم نقسم على حجم العينات، فمثلا إذا كان لدينا k عينات أحجامها هي: $n_1, n_2, n_3,\ldots\ldots,$ n_k، ومتوسطاتها هي على الترتيب:

$\overline{X_1}\ ,\overline{X_2}\ ,\overline{X_3}\ ,\ldots\ldots,\overline{X_k}$ فإن الوسط المرجح للعينات هو:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_k\overline{X_k}}{\sum_{i=1}^{k}n_k}=\frac{n_1\overline{X_1}+n_2\overline{X_2}+n_3\overline{X_3}+\cdots+n_k\overline{X_k}}{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k}$$

مثال(6-4):إذا كانت لدينا مجموعتين من الطلاب تدرسان البرنامج نفسه، وكان عدد الطلاب في المجموعتين هو:

$n_2=25$ و $n_1=40$

وكان المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في المجموعتين هو: $\overline{X_1}=75$ و $\overline{X_2}=80$

فما هو المتوسط الحسابي المرجح لدرجات الطلاب في المجموعتين معا ؟

الحل:- حساب المتوسط الحسابي المرجح لدرجات الطلاب في المجموعتين معا:

يحسب انطلاقا من الصيغة التالية: $\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_k\overline{X_k}}{\sum_{i=1}^{k}n_k}=\frac{40\times75+25\times80}{25+40}=76{,}9$

1-2- المتوسط الهندسي (Geometric Mean): في حالات عدّة تكون قيم الظاهرة المدروسة عبارة عن نسب أو معدلات، وهي الحالات التي نرغب فيها بدراسة معدل تغيّر ظاهرة ما، هنا المتوسط الحسابي لا يصف هذه الظاهرة الوصف السليم ولا يعطي أي فكرة صحيحة عن مثل هذه الظواهر، لهذا دعت الضرورة إيجاد متوسط آخر يصلح لوصف مثل هذه الظواهر يسمى المتوسط الهندسي.

يعرف المتوسط الهندسي G لمجموعة من القيم أو الأرقام $x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots, x_n$ والتي عددها n بالجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم.

1-2-1- حساب المتوسط الهندسي: يحسب حسب طريقتين كما يلي:[2]

1-2-1-1- حساب المتوسط الهندسي للبيانات الأولية (غير المبوبة): يحسب كما يلي:

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، فإن المتوسط الهندسي لهذه القيم (عددها n قيمة) هو عبارة عن الجذر النوني لجداء هذه القيم وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$G=\sqrt[n]{x_1\times x_2\times x_3\times\ldots.\times x_n}$$

1. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 52.

2. محمد القوصي، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، مركز الكتاب الأكاديمي، الأردن، 2014، ص 118.

ولغرض تسهيل العملية الحسابية في حال كون البيانات كبيرة فإنه يفضل استخدام لوغاريتم البيانات لتصبح صيغة المتوسط الهندسي كما يلي: $\log G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$

مثال(7−4): احسب المتوسط الهندسي للسلسلة الإحصائية التالية: 9، 5، 12، 6، 7.

الحل: − **حساب المتوسط الهندسي:** يحسب بالعلاقة التالية:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots . \times x_n} = \sqrt[5]{9 \times 5 \times 12 \times 6 \times 7} = 7{,}43$$

1−2−1−2− حساب المتوسط الهندسي للبيانات المبوبة: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ ، تمثل مراكز الفئات، وكانت $f_1, f_2, f_3, \ldots,$ f_nتمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن المتوسط الهندسي في هذه الحالة يحسب كما يلي:

$G = \sqrt[N]{c_1^{f_1} \times c_2^{f_2} \times c_3^{f_3} \times \ldots . \times c_n^{f_n}}$، حيث: $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

في حال كون البيانات كبيرة ولتسهيل العملية الحسابية فإنه يفضل استخدام العلاقة التالية:

$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \times \log c_i$، حيث: $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

مثال(8−4): بأخذ معطيات المثال (5−4) احسب المتوسط الهندسي.

الحل: − **حساب المتوسط الهندسي:** لتسهيل العملية الحسابية فإنه يفضل استخدام العلاقة التالية:

$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \times \log c_i$، حيث: $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	$\log c_i$	$f_i \times \log c_i$
$]20 - 10]$	18	15	2,708	48,74
$]30 - 20]$	30	25	3,218	96,57
$]40 - 30]$	25	35	3,55	88,88
$]50 - 40]$	17	45	3,806	64,71
$]60 - 50]$	12	55	4,007	48,08
$]70 - 60]$	8	65	4,17	33,39
المجموع	**110**	/	/	**380,37**

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \times \log c_i = \frac{380{,}37}{110} = 3{,}457$$

$$G = 31{,}75$$

ومنه المتوسط الهندسي لأجور عمال هذه المؤسسة هو: $(G = 31{,}75 \times 1000 = 31750)$

1-2-2- خصائص المتوسط الهندسي: المتوسط الهندسي واسع الاستعمال في الحياة الاقتصادية، لأن التركيز يكون غالبا منصبا على إيجاد متوسط نسب التغير لبعض الظواهر، ويتميز المتوسط الهندسي بمجموعة من الخصائص هي:[1]

- يدخل في حسابه جميع القيم ولكنه أقل تأثرا بالقيم المتطرفة من المتوسط الحسابي؛
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- ليس له معنى إذا كانت إحدى القيم سالبة أو تساوي الصفر؛
- يستخدم بأكثر واقعية عند وصف الظواهر النسبية؛
- قيمة المتوسط الهندسي لأي ظاهرة أصغر دائما من قيمة المتوسط الحسابي
- يستخدم في حساب الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار، وعند حساب المعدلات (معدلات الفائدة، معدل النمو الاقتصادي، معدل النمو السكاني وغيرها).

1-3- المتوسط التوافقي (Harmonic Mean): المتوسط التوافقي لمجموعة من القيم هو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم، وهو من المقاييس الخاصة التي تستخدم لتحديد معدلات السرعة ومتوسط الأسعار ومتوسط الكثافة السكانية، وغيرها من المتغيرات التي هي عبارة عن نسبة بين متغيرين.

1-3-1- حساب المتوسط التوافقي: يحسب حسب طريقتين كما يلي:[2]

1-3-1-1- حساب المتوسط الهندسي للبيانات الأولية (غير المبوبة): يحسب كما يلي:

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، فإن المتوسط التوافقي لهذه القيم (عددها n قيمة) هو عبارة عن مقلوب المتوسط الحسابي لمقاليب هذه القيم وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

مثال(4-9): احسب المتوسط التوافقي للسلسلة الإحصائية التالية: 9، 5، 12، 6، 7.

الحل: - **حساب المتوسط التوافقي:** يحسب بالعلاقة التالية:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{5}{\frac{1}{9}+\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}} = \frac{5}{0,703} = 8,52$$

1-3-1-2- حساب المتوسط التوافقي للبيانات المبوبة: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$ ، تمثل مراكز الفئات، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن المتوسط التوافقي في هذه الحالة يحسب كما يلي:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{c_i}}$$

مثال(4-10): بأخذ معطيات المثال (4-5) احسب المتوسط التوافقي.

1. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 119.
2. نفس المرجع السابق، ص 119.

الحل: – حساب المتوسط التوافقي: يتم استخدام العلاقة التالية: $H=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{c_i}}$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	$\frac{f_i}{c_i}$
$]20-10]$	18	15	1,2
$]30-20]$	30	25	1,2
$]40-30]$	25	35	0,71
$]50-40]$	17	45	0,38
$]60-50]$	12	55	0,22
$]70-60]$	8	65	0,12
المجموع	**110**	/	**3,83**

$$H=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{c_i}}=\frac{110}{3,83}=28,72$$

ومنه المتوسط التوافقي لأجور عمال هذه المؤسسة هو: $(H=28,72\times1000=28720)$

1-3-2- خصائص المتوسط التوافقي: يتميز بالخصائص التالية:[1]

– يأخذ بعين الاعتبار جميع القيم، وتأثره بالقيم المتطرفة أقل من تأثر المتوسط الحسابي؛

– لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة، وكذا في حالة وجود بيانات معدومة؛

– يعطي نتائج أكثر واقعية في حالة حساب متوسطات السرعة والأسعار؛

– قيمة المتوسط التوافقي دائما أقل من قيمة المتوسط الهندسي.

1-4- المتوسط التربيعي (Quadratic Mean): المتوسط التربيعي لأي مجموعة من القيم هو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات تلك القيم، ويحسب حسب طريقتين كما يلي:

1-4-1- حساب المتوسط التربيعي للبيانات الأولية (غير المبوبة): يحسب كما يلي:[2]

إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، فإن المتوسط التربيعي لهذه القيم (عددها n قيمة) هو عبارة عن الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لمربعات تلك القيم، وهو معطى بالعلاقة التالية: $Q=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$

مثال(4-11): احسب المتوسط التربيعي للسلسلة الإحصائية التالية: 9، 5، 12، 6، 7.

الحل: – حساب المتوسط التربيعي: يحسب بالعلاقة التالية:

1. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 120.

2. نفس المرجع السابق، ص 121.

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{9^2+5^2+12^2+6^2+7^2}{5}} = \sqrt{\frac{335}{5}} = 8,18$$

1-4-2- حساب المتوسط التربيعي للبيانات المبوبة: يحسب كما يلي:[1]

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ ، تمثل مراكز الفئات، وكانت $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن المتوسط التربيعي في هذه الحالة يعطى كما يلي:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

مثال(4-12): بأخذ معطيات المثال (4-5) احسب المتوسط التربيعي.

الحل: - **حساب المتوسط التربيعي:** يتم استخدام العلاقة التالية: $Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	c_i^2	$c_i^2 f_i$
$]20 - 10]$	18	15	225	4050
$]30 - 20]$	30	25	625	18750
$]40 - 30]$	25	35	1225	30625
$]50 - 40]$	17	45	2025	34425
$]60 - 50]$	12	55	3025	36300
$]70 - 60]$	8	65	4225	33800
المجموع	**110**	/	/	**157950**

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{157950}{110}} = 37,89$$

ومنه المتوسط التربيعي لأجور عمال هذه المؤسسة هو: $(Q = 37,89 \times 1000 = 37890)$

ملاحظة: عند حساب المتوسطات السابقة يجب التحقق من العلاقة التالية: $H < G < \overline{X} < Q$

2- الوسيط (Mediane): الوسيط لمجموعة من البيانات هو القيمة التي تقسم تلك البيانات المرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا إلى قسمين متساويين، حيث يكون عدد القيم الأكبر منه مساويا لعدد القيم الأصغر منه، ويرمز للوسيط بالرمز M_e.

2-1- حساب الوسيط: يحسب حسب عدة طرق كما يلي:[2]

[1]. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 122.

[2]. كامل فليفل وفتحي حمدان، **الإحصاء**، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، 2013، ص 54.

2-1-1- حساب الوسيط للبيانات الأولية (غير المبوبة): لحساب الوسيط من البيانات الأولية يجب أولا ترتيب البيانات (القيم) تصاعديا أو تنازليا وهنا نميز حالتين كما يلي:

2-1-1-1- حساب الوسيط للبيانات المفردة: إذا كان عدد القيم (n) فردي فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ وبالتالي قيمة الوسيط هي قيمة المفردة التي ترتيبها يقابل رتبة الوسيط.

$$M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$$

مثال(13-4): أوجد الوسيط للبيانات التالية: 8، 6، 3، 10، 12، 15، 9.

الحل: - حساب الوسيط: نرتب البيانات (القيم) تصاعديا كما يلي: 3، 6، 8، 9، 10، 12، 15.

عدد القيم فردي ($n = 7$) وعليه فإن رتبة الوسيط هي: ($\frac{n+1}{2} = 4$) وبالتالي قيمة الوسيط هي قيمة المفردة التي ترتيبها يقابل رتبة الوسيط أي أن: $M_e = x_{\frac{n+1}{2}} = x_4 = 9$

2-1-1-2- حساب الوسيط للبيانات الزوجية: إذا كان عدد القيم (n) زوجي فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبها ($\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$) أي أن: $M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

مثال(14-4): أوجد الوسيط للبيانات التالية: 16، 6، 8، 10، 3، 1، 13، 7.

الحل: - حساب الوسيط: نرتب البيانات (القيم) تصاعديا كما يلي: 1، 3، 6، 7، 8، 10، 13، 16.

عدد القيم زوجي ($n = 8$) وعليه فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبها ($\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1$) أي أن: $M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4+x_5}{2} = \frac{7+8}{2} = 7{,}5$

2-1-2- حساب الوسيط للبيانات المبوبة (متغير كمي متقطع): لحساب الوسيط لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري (حالة متغير كمي متقطع نتبع الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد؛
- تحديد رتبة الوسيط وهي: $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2}$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.
- نبحث في العمود (السطر) الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد عن القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد يساوي رتبة الوسيط أو أعلى منها مباشرة، لتكون القيمة التي تقابلها هي قيمة الوسيط.

مثال(15-4): البيانات الإحصائية التالية تمثل توزيع عائلات حي معيّن حسب عدد الغرف.

عدد الغرف (X_i)	1	2	3	4	**المجموع**
عدد العائلات (f_i)	5	10	20	30	**65**

المطلوب: حساب الوسيط لهذه البيانات.

الحل: - حساب الوسيط: لحساب الوسيط نتبع الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

عدد الغرف (X_i)	**عدد العائلات (f_i)**	**التكرار المتجمع الصاعد**
1	5	5

2	10	15
3	20	35
4	30	65
المجموع	**65**	/

– تحديد رتبة الوسيط وهي: $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$

– البحث في العمود (السطر) الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد عن القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد يساوي رتبة الوسيط أو أعلى منها مباشرة، أي: $15 < \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = 32,5 < 35$

وعليه تكون قيمة الوسيط هي قيمة (X_i) التي تقابل القيمة 35 أي أن قيمة الوسيط هي: 3 $(M_e = 3)$.

2-1-3- حساب الوسيط للبيانات المبوبة (متغير كمي مستمر): لتحديد الوسيط لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري بفئات (حالة متغير كمي مستمر) نتبع الخطوات التالية:

– حساب التكرار المتجمع الصاعد؛

– تحديد رتبة الوسيط وهي: $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2}$ ، حيث: (n) عدد فئات المتغير.

– تحديد الفئة الوسيطية (الفئة التي ينتمي إليها الوسيط)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الوسيط أو أعلى منها مباشرة؛

– حساب الوسيط بتطبيق العلاقة التالية: $M_e = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} - F_0}{f_e} \times k$

حيث: L : الحد الأدنى للفئة الوسيطية، F_0 : التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية.

f_e: تكرار الفئة الوسيطية، k : طول الفئة الوسيطية.

مثال(4-16): الجدول التالي يبيّن توزيع مجموعة من العمال حسب أجورهم الشهرية (الوحدة: 10^3 دج).

الأجر x_i	$]10-20]$	$]20-30]$	$]30-40]$	$]40-50]$	$]50-60]$	$]60-70]$
عدد العمال f_i	18	30	25	17	12	8

المطلوب: حساب قيمة الوسيط.

الحل: – حساب قيمة الوسيط: لتحديد الوسيط نتبع الخطوات التالية:

– حساب التكرار المتجمع الصاعد حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

الأجر x_i	عدد العمال f_i	التكرار المتجمع الصاعد
$]10-20]$	18	18
$]20-30]$	30	48
$]30-40]$	25	73
$]40-50]$	17	90
$]50-60]$	12	102
$]60-70]$	8	110

المجموع	110	/

– تحديد رتبة الوسيط وهي: $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = \frac{110}{2} = 55$

– تحديد الفئة الوسيطية (الفئة التي ينتمي إليها الوسيط)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الوسيط أو أعلى منها مباشرة، أي: $48 < \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = 55 < 73$

وعليه فان الفئة الوسيطية هي: $[30 - 40[$

– حساب الوسيط بتطبيق العلاقة التالية: $M_e = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} - F_0}{f_e} \times k = 30 + \frac{55-48}{25} \times 10 = 32{,}8$

وعليه تكون قيمة الوسيط هي: $(M_e = 32{,}8 \times 1000 = 32800)$

2-1-4- حساب الوسيط بيانيا: الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل، كما يمكن تحديده باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل فقط ويكون ذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:

– رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل؛

– تحديد رتبة الوسيط على محور التراتيب، ثم رسم مستقيم أفقي ينطلق من رتبة الوسيط على محور التراتيب حتى يلامس منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل؛

– رسم مستقيم عمودي ينطلق من نقطة التماس السابقة وينتهي مع ملامسة المحور الأفقي، حيث تعطي نقطة التماس مع المحور الأفقي قيمة الوسيط.

2-2- خصائص الوسيط: يتميز بالخصائص التالية:[1]

– لا يتأثر بالقيم المتطرفة وهو غير قابل للعمليات الجبرية؛

– يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛

– يمكن حسابه بيانيا؛

– لا يدخل في حسابه جميع القيم ويتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها.

3- أشباه الوسيط: الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموع البيانات إلى قسمين متساويين، وما دام يمكن تقسيم بيانات أي ظاهرة إلى عدة أقسام متساوية فإنه يمكن التعامل مع القيم التي تقسم هذه البيانات بنفس طريقة التعامل مع الوسيط، وأشباه الوسيط هي: الربيعات والعشيرات والمئينات.

3-1- الربيعات (Quartiles): هي القيم التي تقسم البيانات إلى أربع أجزاء متساوية، ويعرف الربيع (r) حيث: $(r = 1,2,3)$ على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها $(r \times \%25)$ من البيانات المرتبة تصاعديا.

[1]. كامل فليفل وفتحي حمدان، مرجع سابق، ص 56.

3-1-1- حساب الربيعات للبيانات المبوبة (متغير كمي متقطع): لحساب الربيعات لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري (حالة متغير كمي متقطع) نتبع الخطوات التالية:[1]

- ترتيب قيم المتغير الإحصائي في الجدول تصاعديا، وحساب التكرارات المتجمعة الصاعدة؛
- تحديد رتبة الربيع (r) وهي: $\frac{r}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.
- من العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد نحدد موقع رتبة الربيع (r) فإذا كانت رتبة الربيع (r) موجودة ضمن قيم العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد، فإن قيمة الربيع (Q_i) هي القيمة المقابلة لذلك التكرار، أما إن لم تكن رتبة الربيع (r) ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد فإن قيمة الربيع (Q_i) هي القيمة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الأعلى مباشرة من رتبة الربيع (r).

مثال(18-4): البيانات التالية تمثل عدد الأطفال في العائلة لعينة مكونة من 60 عائلة.

عدد الأطفال x_i	0	1	2	3	4	5	المجموع
عدد العائلات f_i	8	10	12	14	12	4	**60**

المطلوب: حساب الربيع الأول والثاني والثالث.

الحل: - **حساب الربيعات:** لحساب الربيعات نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب قيم المتغير تصاعديا، وحساب التكرارات المتجمعة الصاعدة حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

عدد الأطفال x_i	عدد العائلات f_i	التكرار المتجمع الصاعد
0	8	8
1	10	18
2	12	30
3	14	44
4	12	56
5	4	60
المجموع	60	/

- تحديد رتبة الربيع الأول وهي: $\frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{1}{4} \times 60 = 15$

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة رتبة الربيع الأول غير موجودة ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد، لذلك نبحث عن القيمة الأعلى منها مباشرة (القيمة 18 أكبر مباشرة من رتبة الربيع الأول 15) وعليه فإن قيمة الربيع الأول هي: ($Q_1 = 1$).

- تحديد رتبة الربيع الثاني وهي: $\frac{2}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{2}{4} \times 60 = 30$

[1]. كامل فليفل وفتحي حمدان، مرجع سابق، ص 46.

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة رتبة الربيع الثاني موجودة ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد، وعليه فإن قيمة الربيع الثاني هي القيمة المقابلة لرتبة الربيع الثاني، علما أن الربيع الثاني هو نفسه الوسيط وهي: $(Q_2 = M_e = 2)$.

– تحديد رتبة الربيع الثالث وهي: $\frac{3}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{3}{4} \times 60 = 45$

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة رتبة الربيع الثالث غير موجودة ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد، لذلك نبحث عن القيمة الأعلى منها مباشرة (القيمة 56 أكبر مباشرة من رتبة الربيع الثالث 45) وعليه فإن قيمة الربيع الثالث هي: $(Q_3 = 4)$.

3-1-2- حساب الربيعات للبيانات المبوبة (متغير كمي مستمر): لحساب الربيعات لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري بفئات (حالة متغير كمي مستمر) نتبع الخطوات التالية:[1]

– حساب التكرار المتجمع الصاعد؛

– تحديد رتبة الربيع (r) وهي: $\frac{r}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.

– تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع أو أعلى منها مباشرة؛

– حساب قيمة الربيع (Q_r) بتطبيق العلاقة التالية: $Q_r = L + \frac{r \times \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k$

حيث: L : الحد الأدنى للفئة الربيعية، F_0 : التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الربيعية.

f_e: تكرار الفئة الربيعية، k : طول الفئة الربيعية.

مثال(4-19): انطلاقا من معطيات المثال (4-16) احسب الربيع الأول والثاني والثالث.

الحل: – حساب الربيعات: لحساب الربيعات نتبع الخطوات التالية:

– حساب التكرار المتجمع الصاعد حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

الأجر x_i	عدد العمال f_i	التكرار المتجمع الصاعد
$]20-10]$	18	18
$]30-20]$	30	48
$]40-30]$	25	73
$]50-40]$	17	90
$]60-50]$	12	102
$]70-60]$	8	110
المجموع	**110**	/

– تحديد رتبة الربيع الأول وهي: $\frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{110}{4} = 27{,}5$

[1]. كامل فليفل وفتحي حمدان، مرجع سابق، ص 47.

تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع الأول أو أعلى منها مباشرة، أي: $48 > 27{,}5 = \frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i > 18$

وعليه فان الفئة الربيعية هي: $[20 - 30[$

حساب الربيع بتطبيق العلاقة التالية: $Q_1 = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k = 20 + \frac{27{,}5-18}{30} \times 10 = 23{,}16$

وعليه تكون قيمة الربيع الأول هي: $(Q_1 = 23{,}16 \times 1000 = 23160)$

– تحديد رتبة الربيع الثاني وهي: $\frac{2}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{110}{2} = 55$

تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع الثاني أو أعلى منها مباشرة، أي: $73 > 55 = \frac{2}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i > 48$

وعليه فان الفئة الربيعية هي: $[30 - 40[$

حساب الربيع بتطبيق العلاقة التالية: $Q_2 = L + \frac{\frac{2 \times \sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k = 30 + \frac{55-48}{25} \times 10 = 32{,}8$

وعليه تكون قيمة الربيع الثاني هي: $(Q_2 = 32{,}8 \times 1000 = 32800)$

– تحديد رتبة الربيع الثالث وهي: $\frac{3}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{330}{4} = 82{,}5$

تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع الثالث أو أعلى منها مباشرة، أي: $90 > 82{,}5 = \frac{3}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i > 73$

وعليه فان الفئة الربيعية هي: $[40 - 50[$

حساب الربيع بتطبيق العلاقة التالية:

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3 \times \sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k = 40 + \frac{82{,}5-73}{17} \times 10 = 45{,}58$$

وعليه تكون قيمة الربيع الثالث هي:

$(Q_3 = 45{,}58 \times 1000 = 45580)$

3–2– العشيرات (Deciles): هي القيم التي تقسم البيانات إلى عشرة أجزاء متساوية، ويعرف العشير (r) حيث: $(r = 1,2,3, \dots ,9)$ على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها $(r \times 10\%)$ من البيانات المرتبة تصاعديا.

3–2–1– حساب العشيرات للبيانات المبوبة (متغير كمي متقطع): لحساب الربيعات لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري (حالة متغير كمي متقطع) نتبع الخطوات التالية:[1]

– ترتيب قيم المتغير الإحصائي في الجدول تصاعديا، وحساب التكرارات المتجمعة الصاعدة؛

– تحديد رتبة العشير (r) وهي: $\frac{r}{10} \times \sum_{i=1}^{n} f_i$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.

1. كامل فليفل وفتحي حمدان، مرجع سابق، ص 48.

– من العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد نحدد موقع رتبة العشير (r) فإذا كانت رتبة العشير (r) موجودة ضمن قيم العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد، فإن قيمة العشير (D_i) هي القيمة المقابلة لذلك التكرار، أما إن لم تكن رتبة العشير (r) ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد فإن قيمة الربيع (D_i) هي القيمة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الأعلى مباشرة من رتبة العشير (r).

3-2-2- حساب العشيرات للبيانات المبوبة (متغير كمي مستمر): لحساب العشيرات لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري بفئات (حالة متغير كمي مستمر) نتبع الخطوات التالية:[1]

– حساب التكرار المتجمع الصاعد؛

– تحديد رتبة العشير (r) وهي: $\frac{r}{10} \times \sum_{i=1}^{n} f_i$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.

– تحديد الفئة العشيرية (الفئة التي ينتمي إليها العشير)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة العشير أو أعلى منها مباشرة؛

– حساب قيمة العشير (D_r) بتطبيق العلاقة التالية: $D_r = L + \frac{r \times \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{10} - F_0}{f_e} \times k$

حيث:L : الحد الأدنى للفئة العشيرية، F_0 : التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل العشيرية.

f_e: تكرار الفئة العشيرية، k : طول الفئة العشيرية.

3-3- المئينات (Percentiles): هي القيم التي تقسم البيانات إلى مئة جزء متساوية، ويعرف المئين (r) حيث: $(r = 1,2,3,\dots,99)$ على أنه القيمة أو المفردة التي يسبقها $(r\%)$ من البيانات المرتبة تصاعديا.

3-3-1- حساب المئينات للبيانات المبوبة (متغير كمي متقطع): لحساب المئينات لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري (حالة متغير كمي متقطع) نتبع الخطوات التالية:[2]

– ترتيب قيم المتغير الإحصائي في الجدول تصاعديا، وحساب التكرارات المتجمعة الصاعدة؛

– تحديد رتبة المئين (r) وهي: $\frac{r}{100} \times \sum_{i=1}^{n} f_i$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.

– من العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد نحدد موقع رتبة المئين (r) فإذا كانت رتبة المئين (r) موجودة ضمن قيم العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد، فإن قيمة المئين (P_i) هي القيمة المقابلة لذلك التكرار، أما إن لم تكن رتبة المئين (r) ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد فإن قيمة المئين (P_i) هي القيمة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الأعلى مباشرة من رتبة المئين (r).

3-3-2- حساب المئينات للبيانات المبوبة (متغير كمي مستمر): لحساب المئينات لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري بفئات (حالة متغير كمي مستمر) نتبع الخطوات التالية:[3]

– حساب التكرار المتجمع الصاعد؛

– تحديد رتبة المئين (r) وهي: $\frac{r}{100} \times \sum_{i=1}^{n} f_i$ ، حيث: (n) عدد قيم المتغير.

[1]. كامل فليفل وفتحي حمدان، مرجع سابق، ص 49.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 50.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 51.

– تحديد الفئة المئينية (الفئة التي ينتمي إليها المئين)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة المئين أو أعلى منها مباشرة؛

– حساب قيمة المئين (P_r) بتطبيق العلاقة التالية: $P_r = L + \frac{r\times\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{100} - F_0}{f_e} \times k$

حيث:L : الحد الأدنى للفئة المئينية، F_0 : التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل المئينية، f_e: تكرار الفئة المئينية، k : طول الفئة المئينية.

مثال(20–4): انطلاقا من معطيات المثال (18–4) احسب العشير السادس والمئين الخمسون.

الحل: – حساب العشير السادس والمئين الخمسون: نتبع الخطوات التالية:

– ترتيب قيم المتغير تصاعديا، وحساب التكرارات المتجمعة الصاعدة حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

عدد الأطفال x_i	عدد العائلات f_i	التكرار المتجمع الصاعد
0	8	8
1	10	18
2	12	30
3	14	44
4	12	56
5	4	60
المجموع	60	/

– تحديد رتبة العشير السادس وهي: $\frac{6}{10} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{360}{10} = 36$

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة رتبة العشير السادس غير موجودة ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد، لذلك نبحث عن القيمة الأعلى منها مباشرة (القيمة 44 أكبر مباشرة من رتبة العشير السادس 36) وعليه فإن قيمة العشير السادس هي: ($D_6 = 3$).

– تحديد رتبة المئين الخمسون وهي: $\frac{50}{100} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{3000}{100} = 30$

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة رتبة المئين الخمسون موجودة ضمن قيم عمود التكرار المتجمع الصاعد، وعليه فإن قيمة المئين الخمسون هي: ($P_{50} = 2$).

مثال(21–4): انطلاقا من معطيات المثال (16–4) احسب العشير السادس والمئين الخمسون.

الحل: – حساب العشير السادس والمئين الخمسون: نتبع الخطوات التالية:

– حساب التكرار المتجمع الصاعد حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

الأجر x_i	عدد العمال f_i	التكرار المتجمع الصاعد
$]20 - 10]$	18	18

$]30-20]$	30	48
$]40-30]$	25	73
$]50-40]$	17	90
$]60-50]$	12	102
$]70-60]$	8	110
المجموع	**110**	/

– تحديد رتبة العشير السادس وهي: $\frac{6}{10}\times\sum_{i=1}^{n} f_i=\frac{660}{10}=66$

تحديد الفئة العشيرية (الفئة التي ينتمي إليها العشير)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة العشير السادس أو أعلى منها مباشرة، أي: $48<\frac{6}{10}\times\sum_{i=1}^{n} f_i=66<73$

وعليه فان الفئة العشيرية هي: $[30-40]$

حساب العشير بتطبيق العلاقة التالية: $D_6=L+\frac{6\times\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{10}-F_0}{f_e}\times k=30+\frac{66-48}{25}\times 10=37{,}2$

وعليه تكون قيمة العشير السادس هي: $(D_6=37{,}2\times 1000=37200)$

– تحديد رتبة المئين الخمسين وهي: $\frac{50}{100}\times\sum_{i=1}^{n} f_i=\frac{5500}{100}=55$

تحديد الفئة المئينية (الفئة التي ينتمي إليها المئين)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة المئين الخمسون أو أعلى منها مباشرة، أي: $48<\frac{50}{100}\times\sum_{i=1}^{n} f_i=55<73$

وعليه فان الفئة المئينية هي: $[30-40]$

حساب المئين بتطبيق العلاقة التالية: $P_{50}=L+\frac{50\times\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{100}-F_0}{f_e}\times k=30+\frac{55-48}{25}\times 10=32{,}8$

وعليه تكون قيمة المئين الخمسون هي: $(P_{50}=32{,}8\times 1000=32800)$

4– المنوال (Mode): المنوال هو المشاهدة الأكثر تكرارا فهو بمثابة القيمة الشائعة، وقد يكون للبيانات منوال واحد، ويمكن أن يكون لها أكثر من منوال، كما يمكن أن لا يوجد منوال لمجموعة من البيانات، ويعتبر المنوال أفضل مقياس لوصف البيانات النوعية، ويرمز له بالرمز (M_o).

4–1– حساب المنوال: يحسب حسب عدة طرق كما يلي:[1]

4–1–1– حساب المنوال للبيانات الأولية (غير المبوبة): المنوال هو القيمة أو الصفة الأكثر تكرارا مقارنة ببقية القيم أو الصفات، وعلى ضوء هذا التعريف فإن المنوال لمجموعة من البيانات قد لا يكون قيمة أو صفة واحدة.

مثال(4–22): البيانات التالية تمثل التقديرات التي تحصل عليها 10 طلاب وهي: ممتاز، جيد، جيد جدا، جيد، متوسط، فوق المتوسط، جيد، ضعيف، جيد جدا، جيد.

1. مؤيد الفضل وحامد الشمرتي، **الأساليب الإحصائية في اتخاذ القرار**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الأردن، 2005، ص 109.

المطلوب: إيجاد المنوال لهذه البيانات.

الحل: نلاحظ أن الصفة (جيد) هي الصفة الأكثر تكرارا من بين الصفات وعليه فإن المنوال هو الصفة جيد.

مثال(23-4): إذا كان (X_i) متغير يمثل عدد الغرف في البيت لعدد من العائلات القاطنة بحي معين كما يلي: 3، 4، 2، 5، 4، 3، 3، 5، 2، 3.

المطلوب: أوجد المنوال لهذه البيانات.

الحل: المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا مقارنة ببقية القيم، وعليه نلاحظ أن القيمة 3 هي الأكثر تكرارا (العدد 3 يتكرر أربع مرات)، وبالتالي فإن المنوال هنا هو: $M_o = 3$

4-1-2- حساب المنوال للبيانات المبوبة: المنوال هو القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا من بين القيم، ونمير في هذا الصدد حالتين كما يلي:

4-1-2-1- حساب المنوال للبيانات المبوبة (متغير كمي متقطع): المنوال هو قيمة المتغير المقابلة لأكبر تكرار في جدول التوزيع الإحصائي.

مثال(24-4): يمثل الجدول التالي عدد أيام التغيب لعمال مؤسسة ما.

عدد الأيام (X_i)	0	1	2	3	4	5
عدد العمال (f_i)	22	18	15	25	12	8

المطلوب: إيجاد المنوال لهذه البيانات.

الحل:- حساب المنوال: من خلال الجدول السابق نلاحظ أن أكبر تكرار هو 25 وعليه فإن قيمة المنوال هي: $M_o = 3$ وهذا يعني أن التغيب الشائع وسط العمال هو 3 أيام.

4-1-2-1- حساب المنوال للبيانات المبوبة (متغير كمي مستمر): لإيجاد المنوال لبيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري (حالة متغير كمي مستمر)، نقوم في البداية بتحديد الفئة المنوالية ثم حساب المنوال، وهنا يجب التركيز على أطوال الفئات، فإذا كانت أطوال الفئات غير متساوية نقوم بتعديل التكرارات حتى تكون الفئات متناسقة بينها، وهنا نميز حالتين:

- **حالة فئات متساوية الطول:** في هذه الحالة الفئة المنوالية هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار، ويتم حساب المنوال باستخدام العلاقة التالية: $M_o = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times k$ ، حيث:L : الحد الأدنى للفئة المنوالية، Δ_1 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها، Δ_2 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها، k : طول الفئة المنوالية.

- **حالة فئات غير متساوية الطول:** إذا كانت فئات التوزيع الإحصائي غير متساوية الطول نقوم بتعديل التكرارات، وتكون الفئة المنوالية هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار معدّل (f_i^*) ويتم حساب المنوال باستخدام نفس العلاقة السابقة (يستخدم التكرار المعدّل بدل التكرار المطلق) كما يلي: : $M_o = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times$ k، حيث:L : الحد الأدنى للفئة المنوالية، Δ_1 : الفرق بين التكرار المعدل للفئة المنوالية والتكرار المعدل

للفئة السابقة لها، Δ_2 : الفرق بين التكرار المعدل للفئة المنوالية والتكرار المعدل للفئة اللاحقة لها، k : طول الفئة المنوالية.

مثال(25-4): انطلاقا من معطيات المثال (16-4) احسب المنوال.

الحل:- حساب المنوال: بما أن الفئات متساوية الطول نتبع الخطوات التالية:

- تحديد الفئة المنوالية: هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار (أكبر تكرار هو 30 إذن الفئة المنوالية هي: $]30-20]$

- حساب المنوال: نقوم بحساب المنوال باستخدام العلاقة التالية:

$$M_o = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times k = 20 + \frac{30-18}{(30-18)+(30-25)} \times 10 = 27{,}05$$

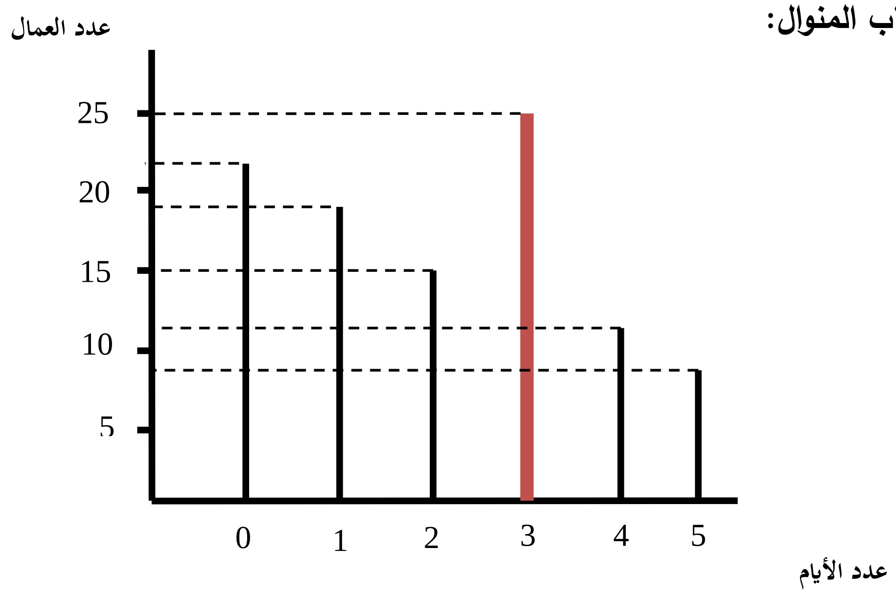
وعليه تكون قيمة المنوال هي: $(M_o = 27{,}05 \times 1000 = 27050)$

4-1-3- حساب المنوال بيانيا: يحسب حسب نوع المتغير كما يلي:

4-1-3-1- حساب المنوال بيانيا لمتغير كمي متقطع: المنوال هو قيمة المتغير على المحور الأفقي المقابلة لأكبر تكرار على المحور العمودي في التمثيل البياني للتوزيع الإحصائي.

مثال(26-4): انطلاقا من معطيات المثال (24-4) احسب المنوال بيانيا.

الحل:- حساب المنوال:



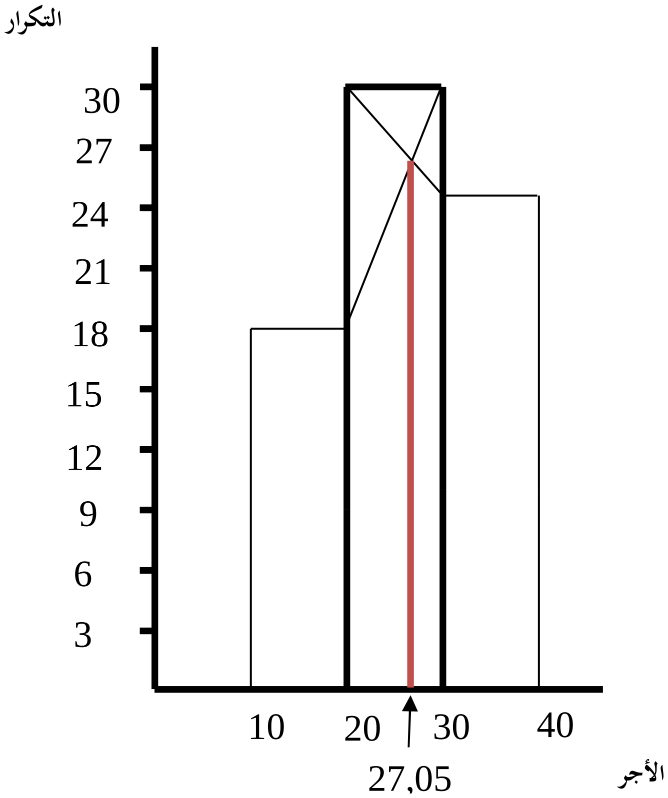
بعد تمثيل المتغير الكمي المتقطع بيانيا بطريقة الأعمدة البيانية نلاحظ أن قيمة المتغير على المحور الأفقي المقابلة لأكبر تكرار على المحور العمودي هي: 3، أي أن المنوال يساوي 3، $(M_o = 3)$

4-1-3-2- حساب المنوال بيانيا لمتغير كمي مستمر: يمكن تحديد المنوال بيانيا وذلك من خلال رسم المدرج التكراري للفئة المنوالية والفئتين السابقة واللاحقة لها، حيث نقوم بإيصال بداية المستطيل للفئة المنوالية ببداية المستطيل للفئة اللاحقة لها، ونهاية المستطيل للفئة المنوالية بنهاية المستطيل للفئة السابقة

لها، ومن نقطة التقاطع نسقط عمود على المحور الأفقي ونقطة تقاطعه مع هذا المحور تعطي قيمة المنوال.

مثال(27-4): انطلاقا من معطيات المثال (16-4) احسب المنوال بيانيا.

الحل:- حساب المنوال:



بعد تمثيل المتغير الكمي المستمر بيانيا، حيث نقوم بإيصال بداية المستطيل للفئة المنوالية ببداية المستطيل للفئة اللاحقة لها، ونهاية المستطيل للفئة المنوالية بنهاية المستطيل للفئة السابقة لها، ومن نقطة التقاطع نسقط عمود على المحور الأفقي ونقطة تقاطعه مع هذا المحور تعطي قيمة المنوال، $(M_o = 27{,}05)$

4-2- خصائص المنوال: يتميز بالخصائص التالية:[1]

- يعتبر أسهل مقاييس النزعة المركزية ويمكن حسابه بيانيا؛
- لا يتأثر بالقيم المتطرفة وغير قابل للعمليات الجبرية؛
- يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يعتبر أفضل المتوسطات لوصف الظواهر النوعية (الكيفية).

---

[1]. مؤيد الفضل وحامد الشمرتي، مرجع سابق، ص 110.

تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول: إذا كانت الدرجات التي تحصل عليها الطالب في خمس مواد هي: 8، 10، 13، 14، 15.

أحسب متوسط درجات هذا الطالب.

الحل:- حساب متوسط الدرجات: يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

أي أن: $\overline{X} = \frac{8+10+13+14+15}{5} = \frac{60}{5} = 12$

التمرين الثاني: في امتحان فجائي في مادة الإحصاء الوصفي تحصل طلبة فوج معين على الدرجات المبينة في الجدول التالي:

الدرجة	3	4	5	6	8	9
عدد الطلبة	4	3	6	5	4	2

المطلوب: حساب متوسط الدرجات التي تحصل عليها طلبة هذا الفوج.

الحل:- حساب متوسط الدرجات: يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الدرجة x_i	عدد الطلبة f_i	$f_i \times x_i$
3	4	12
4	3	12
5	6	30
6	5	30
8	4	32
9	2	18
المجموع	**24**	**134**

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{134}{24} = 5{,}58$$

أي أن متوسط درجات طلبة هذا الفوج الحسابي في الامتحان الفجائي هو: ($\overline{X} = 5{,}58$).

التمرين الثالث: في دراسة إحصائية حول مادة الحليب بالمزارع الموجودة على مستوى إحدى الولايات توصلنا إلى إعداد الجدول التالي:

الإنتاج باللتر x_i	$]240-200]$	$]280-240]$	$]320-280]$	$]360-320]$
عدد المزارع f_i	5	6	8	4

المطلوب: إيجاد متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع.

الحل:- حساب متوسط إنتاج الحليب: يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_n c_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الإنتاج باللتر x_i	عدد المزارع f_i	مركز الفئة c_i	$f_i \ c_i$
$]240-200]$	5	220	1100
$]280-240]$	6	260	1560
$]320-280]$	8	300	2400
$]360-320]$	4	340	760
المجموع	**23**	/	**5820**

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{5820}{23} = 253{,}04$$

أي أن متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع هو: $(\overline{X} = 253{,}04)$.

<u>التمرين الرابع</u>: أوجد المتوسط الهندسي للأعداد التالية: 2، 4، 5، 6.

الحل:- حساب المتوسط الهندسي: يحسب بالعلاقة التالية:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots . \times x_n} = \sqrt[4]{2 \times 4 \times 5 \times 6} = 3{,}94$$

<u>التمرين الخامس</u>: أوجد المتوسط الهندسي للبيانات المبينة في الجدول أدناه.

المتغير	2	4	5	6
التكرار	2	3	2	4

الحل:- حساب المتوسط الهندسي: يحسب بالعلاقة التالية:

$G = \sqrt[N]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ x_3^{f_3} \times \ldots . \times x_n^{f_n}}$، حيث: $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

$$G = \sqrt[N]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ x_3^{f_3} \times \ldots . \times x_n^{f_n}} = \sqrt[11]{2^2 \times 4^3 \times \ 5^2 \times 6^4} = 4{,}24$$

<u>التمرين السادس</u>: اشترى شخص من نفس السوق الكميات التالية من مادة البطاطس كما يلي:

4كغ بقيمة 100 دينار ثم 5 كغ بقيمة 100 دينار أيضا ثم 8 كغ بقيمة 120 دينار.

المطلوب: إيجاد متوسط سعر البطاطس المشتراة.

الحل:- حساب متوسط سعر البطاطس (المتوسط التوافقي): يتم استخدام العلاقة التالية:

سعر الكيلو غرام في الحالة الأولى $= \frac{100}{4} = 25$ دينار.

سعر الكيلو غرام في الحالة الثانية $= \frac{100}{5} = 20$ دينار.

سعر الكيلو غرام في الحالة الثالثة $= \frac{120}{8} = 15$ دينار.

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}} = \frac{100+100+120}{\frac{100}{25}+\frac{100}{20}+\frac{120}{25}} = \frac{96000}{5100} = 18,82$$

<u>التمرين السابع</u>: أوجد الوسيط للبيانات التالية: 8، 6، 8، 10، 12، 15، 9.

الحل: – **حساب الوسيط:** نرتب البيانات (القيم) تصاعديا كما يلي: 6، 8، 8، 9، 10، 12، 15.

عدد القيم فردي ($n = 7$) وعليه فإن رتبة الوسيط هي: ($\frac{n+1}{2} = 4$) وبالتالي قيمة الوسيط هي قيمة المفردة التي ترتيبها يقابل رتبة الوسيط أي أن: $M_e = x_{\frac{n+1}{2}} = x_4 = 9$

<u>التمرين الثامن</u>: البيانات التالية تمثل الدرجات التي تحصل عليها 10 طلبة في امتحان معين:

16، 17، 17، 15، 14، 16، 15، 13، 4، 3.

المطلوب:– إيجاد متوسط درجات هؤلاء الطلبة.

– إيجاد وسيط الدرجات.

– أيهما أكثر تعبيرا على نتائج الطلبة ولماذا ؟

الحل:– **إيجاد متوسط الدرجات:** يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{130}{10} = 13$$

– **إيجاد وسيط الدرجات:** نرتب البيانات (القيم) تصاعديا كما يلي: 3، 4، 13، 14، 15، 15، 16، 16، 17، 17.

عدد القيم زوجي ($n = 10$) وعليه فإن الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبها ($\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$) أي أن: $M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{15+15}{2} = 15$

– نلاحظ من النتائج المتحصل عليها أن المتوسط الحسابي لم ينصف أغلب (8) الطلبة الذين تحصلوا على درجات أكبر بكثير من هذا المتوسط وانحاز ناحية نتيجة الطالبين اللذين تحصلا على نتائج سيئة، في حين أن وسيط هذه الدرجات قسم نتائج الطلبة إلى قسمين بحيث نصف عدد الطلبة تحصلوا على درجات أعلى منه ونصف عدد الطلبة تحصلوا على درجة أقل منه وهو هنا أصدق من المتوسط الحسابي.

<u>التمرين التاسع</u>: يبين التوزيع التكراري التالي توزيع 50 طالب حسب الدرجة المتحصل عليها في امتحان مادة ما.

الدرجة x_i	$]4-2]$	$]6-4]$	$]8-6]$	$]10-8]$	$]12-10]$	$]14-12]$
عدد الطلبة f_i	2	6	8	10	14	6

المطلوب: – احسب قيمة الوسيط لهذه البيانات.

– احسب الربيع الأول والعشير الثالث والمئين الستين.

الحل: – **حساب قيمة الوسيط:** لتحديد الوسيط نتبع الخطوات التالية:

– حساب التكرار المتجمع الصاعد حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

الدرجة x_i	عدد الطلبة f_i	التكرار المتجمع الصاعد
$]4-2]$	2	2
$]6-4]$	6	8
$]8-6]$	8	16
$]10-8]$	10	26
$]12-10]$	14	40
$]14-12]$	6	46
المجموع	**46**	/

– تحديد رتبة الوسيط وهي: $\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = \frac{46}{2} = 23$

– تحديد الفئة الوسيطية (الفئة التي ينتمي إليها الوسيط)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الوسيط أو أعلى منها مباشرة، أي: $16 < \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} = 23 < 26$

وعليه فان الفئة الوسيطية هي: $]10-8]$

– حساب الوسيط بتطبيق العلاقة التالية: $M_e = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{2} - F_0}{f_e} \times k = 8 + \frac{23-16}{10} \times 2 = 9{,}4$

وعليه تكون قيمة الوسيط هي: $(M_e = 9{,}4)$

– **حساب الربيع الأول:** لحساب الربيع الأول نتبع الخطوات التالية:

– تحديد رتبة الربيع الأول وهي: $\frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{46}{4} = 11{,}5$

تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع الأول أو أعلى منها مباشرة، أي: $8 < \frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = 11{,}5 < 16$

وعليه فان الفئة الربيعية هي: $]8-6]$

حساب الربيع بتطبيق العلاقة التالية: $Q_1 = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k = 8 + \frac{11{,}5-8}{8} \times 2 = 8{,}875$

وعليه تكون قيمة الربيع الأول هي: $(Q_1 = 8{,}875)$

– **حساب العشير الثالث:** لحساب العشير الثالث نتبع الخطوات التالية:

– تحديد رتبة العشير الثالث وهي: $\frac{3}{10} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{138}{10} = 13{,}8$

تحديد الفئة العشيرية (الفئة التي ينتمي إليها العشير)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة العشير السادس أو أعلى منها مباشرة، أي: $8 < \frac{3}{10} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = 13{,}8 < 16$

وعليه فان الفئة العشيرية هي: $]8-6]$

حساب العشير بتطبيق العلاقة التالية: $D_3 = L + \frac{3\times\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{10} - F_0}{f_e} \times k = 6 + \frac{13,8-8}{8} \times 2 = 7,45$

وعليه تكون قيمة العشير الثالث هي: $(D_3 = 7,45)$

– **حساب المئين الستون:** لحساب المئين الستون نتبع الخطوات التالية:

– تحديد رتبة المئين الستون وهي: $\frac{60}{100} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{5500}{100} = 27,6$

تحديد الفئة المئينية (الفئة التي ينتمي إليها المئين)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة المئين الستون أو أعلى منها مباشرة، أي: $26 < \frac{50}{100} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = 27,6 < 40$

وعليه فان الفئة المئينية هي: $]12-10]$

حساب المئين بتطبيق العلاقة التالية: $P_{60} = L + \frac{60\times\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{100} - F_0}{f_e} \times k = 10 + \frac{27,6-26}{14} \times 2 = 10,22$

وعليه تكون قيمة المئين الستون هي: $(P_{60} = 10,22)$

التمرين العاشر: البيانات التالية تمثل التقديرات التي تحصل عليها 10 طلاب في مادة الرياضيات.

ممتاز، جيد، جيد جدا، جيد، متوسط، فوق المتوسط، جيد، ضعيف، جيد جدا، جيد.

المطلوب: إيجاد المنوال.

الحل: نلاحظ أن الصفة (جيد) هي الصفة الأكثر تكرارا من بين الصفات وعليه فإن المنوال هو الصفة جيد.

التمرين الحادي عشر: الجدول التالي يبين توزيع عمال مؤسسة ما حسب الأجور الموزعة (الوحدة: 1000 دج).

الأجور x_i	$]15-10]$	$]20-15]$	$]25-20]$	$]30-25]$	$]35-30]$	$]40-35]$
عدد العمال f_i	10	15	20	15	10	5

المطلوب: تحديد قيمة المنوال.

الحل:– حساب المنوال: بما أن الفئات متساوية الطول نتبع الخطوات التالية:

– تحديد الفئة المنوالية: هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار (أكبر تكرار هو 20 إذن الفئة المنوالية هي: $]25-20]$

– حساب المنوال: نقوم بحساب المنوال باستخدام العلاقة التالية:

$$M_o = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times k = 20 + \frac{20-15}{(20-15)+(20-15)} \times 5 = 22,5$$

وعليه تكون قيمة المنوال هي: $(M_o = 22,5 \times 1000 = 22500)$

الفصل الخامس

مقاييس التشتت

تمهيد:

إن مقاييس النزعة المركزية لا تكفي لإعطاء صورة كاملة عن علاقة البيانات ببعضها البعض، فقد نجد أن لسلسلتين مختلفتين نفس المتوسط الحسابي، بينما مدى البيانات للسلسلتين مختلف، هذا الفرق في البيانات مقابل تساوي المتوسط الحسابي يجعل من الضرورة استخدام مقاييس أخرى تكمل المقاييس الأولى، وتسمى هذه المقاييس بمقاييس التشتت.

مقاييس التشتت هي عبارة عن مقاييس إحصائية هدفها قياس مدى تشتت وتباعد البيانات عن بعضها البعض، وتكمن أهميتها في كون أنه لا يمكن أن نتصور مثلا تساوي الإنتاج في جميع المؤسسات الصناعية أو تساوي مستوى الخدمات في جميع المصالح الخدماتية أو تساوي جميع أطوال الأشخاص وغيرها، وبالتالي فإن استخدام قيمة واحدة لوصف التوزيع التكراري قد تكون مضللة أحيانا.

إن تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات هذه الظاهرة، وتعتبر بيانات الظاهرة متجانسة عندما تكون قيمها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة انها غير مشتتة، أما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول أن مفردات (قيم) الظاهرة مشتتة وغير ممركزة.

1- مقاييس التشتت المطلق: تقيس تقارب أو تباعد القيم عن بعضها البعض، أو تقيس قرب أو بعد القيم من قيمة معينة كالمتوسط الحسابي مثلا.

1-1- المدى العام: المدى العام لمجموعة من البيانات هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأصغر قيمة لها، ويستخدم هذا المقياس عندما يكون الهدف هو الحصول على مقياس سريع لمدى تشتت القيم دون الاهتمام الكبير بالدقة في القياس أو حينما يكون للمفردات (القيم) المتطرفة أهمية خاصة.

1-1-1- حساب المدى العام: يرمز له بالرمز (R)، ويعطى بالعلاقة التالية:[1]

$$R = X_{max} + X_{min}$$

حالة خاصة: المدى العام في حالة توزيع تكراري بفئات يحسب بعدة طرق هي: إما الفرق بين مركز الفئة الأخيرة ومركز الفئة الأولى، أو الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى.

مثال(1-5): أوجد المدى العام للبيانات التالية: 12، 18، 28، 22، 30.

الحل: - حساب المدى العام:يحسب بالعلاقة التالية:

$$R = X_{max} + X_{min} = 30 - 12 = 18$$

1-1-2- خصائص المدى العام: يتميز بالخصائص التالية:[2]

- بسيط الحساب وسهل الفهم ويعتمد في حسابه على قيمتين فقط؛
- شديد التأثر بالقيم المتطرفة؛
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة.

[1]. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 75.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 76.

1-2- المدى الربيعي: للتخلص من بعض عيوب المدى والتي من أهمها تأثره بالقيم المتطرفة وعدم إمكانية حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، وجد مقياس آخر وهو المدى الربيعي حيث نقوم في هذا المقياس بإهمال الربع الأول والربع الأخير من البيانات المرتبة تصاعديا، وفي هذه الحالة تكون أكبر قيمة في البيانات هي الربيع الثالث وأصغر قيمة في البيانات هي الربيع الأول، والفرق بينهما يعطي ما يسمى بالمدى الربيعي.

1-2-1- حساب المدى الربيعي: يستخدم هذا المقياس إذا كان الوسيط هو المقياس المناسب للنزعة المركزية أو عندما تكون هناك قيم متطرفة جدا، ويتم حساب هذا المقياس من البيانات الأولية أو جداول التوزيع التكرارية باستخدام العلاقة التالية[1]: $I_Q = Q_3 - Q_1$

مثال(5-2): أحسب المدى الربيعي للبيانات التالية:

الأجر x_i	$]20-10]$	$]30-20]$	$]40-30]$	$]50-40]$	$]60-50]$	$]70-60]$
عدد العمال f_i	18	30	25	17	12	8

الحل: - **حساب المدى الربيعي:** لحساب الربيع الأول والثالث نتبع الخطوات التالية:

- حساب التكرار المتجمع الصاعد حسبما هو مبين في الجدول الأدنى:

الأجر x_i	**عدد العمال f_i**	**التكرار المتجمع الصاعد**
$]20-10]$	18	18
$]30-20]$	30	48
$]40-30]$	25	73
$]50-40]$	17	90
$]60-50]$	12	102
$]70-60]$	8	110
المجموع	**110**	/

- تحديد رتبة الربيع الأول وهي: $\frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{110}{4} = 27{,}5$

تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع الأول أو أعلى منها مباشرة، أي: $18 < \frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = 27{,}5 < 48$

وعليه فان الفئة الربيعية هي: $]30-20]$

حساب الربيع بتطبيق العلاقة التالية: $Q_1 = L + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k = 20 + \frac{27{,}5-18}{30} \times 10 = 23{,}16$

- تحديد رتبة الربيع الثالث وهي: $\frac{3}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{330}{4} = 82{,}5$

[1]. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 77.

تحديد الفئة الربيعية (الفئة التي ينتمي إليها الربيع)، وهي الفئة التي تقابل التكرار المتجمع الصاعد الذي يساوي رتبة الربيع الثالث أو أعلى منها مباشرة، أي: $73 < \frac{3}{4} \times \sum_{i=1}^{n} f_i = 82{,}5 < 90$

وعليه فان الفئة الربيعية هي: $[40 - 50[$

حساب الربيع بتطبيق العلاقة التالية: $Q_3 = L + \frac{\frac{3\times\sum_{i=1}^{n} f_i}{4} - F_0}{f_e} \times k = 40 + \frac{82{,}5-73}{17} \times 10 = 45{,}58$

يحسب المدى الربيعي باستخدام العلاقة التالية:

$$I_Q = Q_3 - Q_1 = 45{,}58 - 23{,}16 = 22{,}42$$

1-2-2- خصائص المدى الربيعي: يتميز بالخصائص التالية:[1]

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة ويمكن حسابه بيانيا؛
- يمكن حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها؛
- يستخدم كمقياس للتشتت في التوزيعات التكرارية شديدة الالتواء؛
- عبارة عن فترة تحتوي على 50 % من البيانات.

1-3- الانحراف المتوسط: مقاييس التشتت هي مقاييس لقوة تجمع البيانات حول بعضها، ومن حيث أن التجمع يكون حول قيمة متوسطة، فإذا كان مقدار الاختلاف (الانحراف) بين القيم ومتوسطها كبيرا دلّ ذلك على عدم تجانسها والعكس صحيح، ويعرف الانحراف المتوسط بأنه المتوسط الحسابي للقيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي.

1-3-1- حساب الانحراف المتوسط: يرمز له بالرمز ($E_{\overline{X}}$)، ويحسب كما يلي:[2]

1-3-1-1- حساب الانحراف المتوسط من البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، فإن الانحراف المتوسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$E_{\overline{X}} = \frac{|x_1 - \overline{X}| + |x_2 - \overline{X}| + \cdots |x_n - \overline{X}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{X}|}{n}$$

مثال(3-5): أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية: 2، 3، 5، 6، 9.

الحل: - حساب الانحراف المتوسط: يتم حساب المتوسط الحسابي للبيانات كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

الانحراف المتوسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{X}|}{n} = \frac{10}{5} = 2$$

[1]. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 78.

[2]. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 147.

1-3-1-2- حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت $c_1, c_2, c_3,\ldots, c_n$ ، تمثل مراكز الفئات، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن الانحراف المتوسط في هذه الحالة يحسب كما يلي:

$$E_{\overline{X}} = \frac{f_1|c_1-\overline{X}| + f_2|c_2-\overline{X}| + \cdots f_n|c_n-\overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i|c_i-\overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال(5-4): أحسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

الأجر x_i	$]20-10]$	$]30-20]$	$]40-30]$	$]50-40]$	$]60-50]$	$]70-60]$
عدد العمال f_i	18	30	25	17	12	8

الحل: - حساب الانحراف المتوسط: يحسب كما يلي:

$$E_{\overline{X}} = \frac{f_1|c_1-\overline{X}| + f_2|c_2-\overline{X}| + \cdots f_n|c_n-\overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i|c_i-\overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	$f_i\ c_i$	$\lvert c_i-\overline{X}\rvert$	$f_i\lvert c_i-\overline{X}\rvert$
$]20-10]$	18	15	270	19,9	358,2
$]30-20]$	30	25	750	9,9	297
$]40-30]$	25	35	875	0,1	2,5
$]50-40]$	17	45	765	10,1	171,1
$]60-50]$	12	55	660	20,1	241,2
$]70-60]$	8	65	520	30,1	240,8
المجموع	**110**	/	**3840**	/	**1310,8**

يتم حساب المتوسط الحسابي للبيانات كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{3840}{110} = 34{,}9$$

الانحراف المتوسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i|c_i-\overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1310{,}8}{110} = 11{,}92$$

1-3-2- خصائص الانحراف المتوسط: يتميز بالخصائص التالية:[1]

- يتأثر بالقيم المتطرفة ويعتمد في حسابه على جميع القيم؛
- لا يمكن حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛

[1]. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 149.

- يمكن حسابه عن طريق الانحرافات عن الوسيط مع الملاحظة أن الانحراف المتوسط عن الوسيط أقل من الانحراف المتوسط عن المتوسط الحسابي.

1-4- التباين والانحراف المعياري: يعتبران من أهم مقاييس التشتت، ويحسبان كما يلي:

1-4-1- التباين: هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي، ونستخدم مربعات الفروق هنا تفاديا لاستخدام القيم المطلقة كما هو الشأن في الانحراف المتوسط.

1-4-1-1- حساب التباين: يرمز له بالرمز (δ^2) أو (V_x) ، ويحسب كما يلي:[1]

- حساب التباين من البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، و$(\overline{X}^2)$ متوسطها الحسابي فإن التباين يعطى بالعلاقة التالية:

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2$$

مثال(5-5): أحسب التباين للبيانات التالية: 2، 3، 5، 6، 9.

الحل: **- حساب التباين:** يحسب كما يلي:

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{30}{5} = 6$$

- حساب التباين من البيانات المبوبة: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت مراكز الفئات هي: $c_1, c_2, c_3,\ldots\ldots, c$ ، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن التباين في هذه الحالة يحسب كما يلي:

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(c_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^2}{n} - \overline{X}^2$$

مثال(5-6): أحسب التباين للبيانات التالية:

الأجر x_i	$]20-10]$	$]30-20]$	$]40-30]$	$]50-40]$	$]60-50]$	$]70-60]$
عدد العمال f_i	18	30	25	17	12	8

الحل: **- حساب التباين:** يحسب كما يلي: $V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(c_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^2}{n} - \overline{X}^2$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	$f_i\ c_i$	$(c_i - \overline{X})$	$f_i(c_i - \overline{X})^2$
$]20-10]$	18	15	270	19,9-	7128,18
$]30-20]$	30	25	750	9,9-	2940,3
$]40-30]$	25	35	875	0,1	0,25
$]50-40]$	17	45	765	10,1	1734,17

[1]. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 151.

]60 − 50]	12	55	660	20,1	4848,12
]70 − 60]	8	65	520	30,1	7248,08
المجموع	**110**	/	**3840**	/	**23899,1**

يتم حساب المتوسط الحسابي للبيانات كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{3840}{110} = 34,9$$

التباين يعطى بالعلاقة التالية:

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (c_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{23899,1}{110} = 219,26$$

1-4-2- الانحراف المعياري: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، ويعتبر من أهم المقاييس الإحصائية للتشتت وأكثرها استخداما في النظريات والقوانين الإحصائية ويرمز له بالرمز (δ)، ويعطى بالعلاقة التالية:[1]

$$\delta = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (c_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^2}{n} - \overline{X}^2}$$

مثال(7-5): انطلاقا من معطيات المثال (6-5) احسب الانحراف المعياري.

الحل: - حساب الانحراف المعياري: يحسب كما يلي:

$$\delta = \sqrt{V_x} = \sqrt{219,26} = 14,81$$

1-4-3- خصائص التباين والانحراف المعياري: يتميزان بالخصائص التالية:[2]

- لا يمكن حسابهما من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يتأثران بالقيم المتطرفة؛
- قابلان للعمليات الجبرية لذلك فهما كثيرا الاستخدام في القوانين والنظريات الإحصائية؛
- يأخذان نفس وحدة القياس للمتغير الأصلي؛
- يمكن الاعتماد عليها للمقارنة بين تشتت توزيعين إحصائيين من نفس النوعية (وحدة القياس) ولهما نفس المتوسط الحسابي.

2- مقاييس التشتت النسبي: هي مقاييس تستخدم للمقارنة بين مجموعتين من البيانات المختلفة في وحدات القياس، فهي مقاييس خالية من وحدات القياس، ويمكن وصفها بأنها مقاييس نسبة ومن أهمها:[3]

2-1- معامل الاختلاف النسبي: هو عبارة عن النسبة المئوية للانحراف المعياري منسوبا إلى المتوسط الحسابي، فكلما كانت قيمة هذا المعامل كبيرة دلّ ذلك على وجود تشتت كبير بين مفردات التوزيع والعكس صحيح.

---

1. محمد القوصي، مرجع سابق، ص 152.
2. نفس المرجع السابق، ص 153.
3. مؤيد الفضل وحامد الشمرتي، مرجع سابق، ص 154.

2-1-1- حساب معامل الاختلاف النسبي: يرمز لهذا المعامل بالرمز (CV) ويتم حسابه كما يلي:

$$CV = \frac{\delta}{\bar{\bar{X}}} \times 100$$

مثال(7-5): أوجد معامل الاختلاف النسبي لمجوعتين من درجات الطلبة في مادة الإحصاء حسب المعطيات أدناه:

	المجموعة A	المجموعة B
المتوسط الحسابي	40	33
لانحراف المعياري	24	16

الحل: - حساب معامل الاختلاف النسبي للمجموعتين: يحسب كما يلي:

$$CV_A = \frac{\delta}{\bar{\bar{X}}} \times 100 = \frac{24}{40} \times 100 = 60\%$$

$$CV_B = \frac{\delta}{\bar{\bar{X}}} \times 100 = \frac{16}{33} \times 100 = 48\%$$

بالمقارنة نجد أن تشتت المجموعة A أكبر من تشتت المجموعة B التي تعتبر أكثر تجانسا وأقل ابتعادا عن قيمتها المتوسطة.

2-1-2- خصائص معامل الاختلاف النسبي: يتميز بالخصائص التالية:

- يقيس الاختلاف النسبي دون وحدة تمييز؛
- ليس له معنى إذا كانت المتوسطات الحسابية معدومة؛
- يستخدم لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات من حيث التشتت، خاصة إذا اختلفت متوسطاتها الحسابية.

2-2- معامل الاختلاف الربيعي: يستخدم هذا المعامل في حالة توزيع تكراري مفتوح، ويرمز له بالرمز (CV_Q) وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$CV_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \times 100$$

مثال(8-5): انطلاقا من معطيات المثال (2-5) احسب معامل الاختلاف الربيعي.

الحل: - حساب معامل الاختلاف الربيعي: بعد حساب سابقا كل من الربيع الأول والثاني والثالث توصلنا إلى النتائج التالية:

$Q_3 = 45{,}59$ ،$Q_2 = 32{,}8$،$Q_1 = 23{,}17$

يعطى معامل الاختلاف الربيعي بالعلاقة التالية:

$$CV_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \times 100 = \frac{45{,}59 - 23{,}17}{32{,}8} \times 100 = 68{,}35\%$$

يمكن القول أن تشتت هذه البيانات هو تشتت كبير نتيجة لكون قيمة معامل الاختلاف الربيعي كبيرة.

تمارين الفصل الخامس

التمرين الأول: أوجد المدى العام للبيانات التالية: 30، 28، 22، 18، 12.

الحل: – **حساب المدى العام:** يحسب بالعلاقة التالية:

$$R = X_{max} + X_{min} = 30 - 12 = 18$$

التمرين الثاني: أوجد تشتت البيانات المبوبة في جدول التوزيع التكراري الآتي باستخدام الانحراف المتوسط.

الفئة	$]2-0]$	$]4-2]$	$]6-4]$	$]8-6]$	**المجموع**
التكرار	2	3	4	3	**12**

الحل: – **حساب الانحراف المتوسط:** يحسب كما يلي:

$$E_{\overline{X}} == \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |c_i - \overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الفئة	**التكرار**	**مركز الفئة** c_i	$\mathbf{f_i\ c_i}$	$\mathbf{|c_i - \overline{X}|}$	$\mathbf{f_i|c_i - \overline{X}|}$
$]2-0]$	2	1	2	3,33	6,66
$]4-2]$	3	3	9	1,33	4
$]6-4]$	4	5	20	0,67	2,68
$]8-6]$	3	7	21	2,67	8,01
المجموع	**12**	/	**52**	/	**21,35**

يتم حساب المتوسط الحسابي للبيانات كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{52}{12} = 4{,}33$$

الانحراف المتوسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |c_i - \overline{X}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{21{,}35}{12} = 1{,}78$$

التمرين الثالث: أوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة في الجدول الإحصائي التالي:

الفئة	$]8-4]$	$]12-8]$	$]16-12]$	$]20-16]$	$]24-20]$	**المجموع**
التكرار	3	4	6	2	4	**19**

الحل: – **حساب التباين:** يحسب كما يلي: $V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (c_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^2}{n} - \overline{X}^2$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

الفئة	التكرار	مركز الفئة c_i	$f_i\ c_i$	$(c_i-\bar{X})$	$f_i(c_i-\bar{X})^2$
$]8-4]$	3	6	18	8−	192
$]12-8]$	4	10	40	4−	64
$]16-12]$	6	14	84	0	0
$]20-16]$	2	18	36	4	32
$]24-20]$	4	22	88	8	256
المجموع	**19**	/	**266**	/	**544**

يتم حساب المتوسط الحسابي للبيانات كما يلي:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ c_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{266}{19}=14$$

التباين يعطى بالعلاقة التالية:

$$V_x=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(c_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{544}{19}=28,63$$

– **حساب الانحراف المعياري:** يحسب كما يلي:

$$\delta=\sqrt{V}_x=\sqrt{28,63}=5,35$$

<u>التمرين الرابع</u>: إذا كان متوسط درجات مجموعة من الطلبة في مادة ما هو 15 بانحراف معياري 3 ومتوسط درجاتهم في مادة أخرى هو 8 بانحراف معياري 2، فأي الدرجات في نظرك أكثر تشتتا ؟

الحل:– حساب معامل الاختلاف النسبي للمجموعتين: يحسب كما يلي:

$$CV_A=\frac{\delta}{\bar{\bar{X}}}\times 100=\frac{3}{15}\times 100=20\%$$

$$CV_B=\frac{\delta}{\bar{\bar{X}}}\times 100=\frac{2}{8}\times 100=25\%$$

بالاعتماد على معامل الاختلاف النسبي نجد أن درجات المادة الثانية أكثر تشتتا.

الفصل السادس

مقاييس الشكل

تمهيد:

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام تعطي فكرة عن خصائص توزيع هذه البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها، فإن هذا الوصف يبقى تنقصه الدقة المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة فيما يخص انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه وتفلطحه عن الوضع الطبيعي، لذلك دعت الحاجة لاستخدام مقاييس أخرى لتحقيق هذا الغرض سميت مقاييس الشكل (الالتواء والتفلطح).

1- العزوم: تعتمد مقاييس الشكل على العزوم البسيطة والمركزية لذا سنقوم في البداية بإعطاء علاقات العزوم.

العزوم قد تكون حول نقطة الأصل أو حول المتوسط أو حول أي نقطة معينة، أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن المتوسط الحسابي، ونميز نوعان هما:

1-1- العزوم البسيطة: العزوم البسيطة تكون حول نقطة الأصل، وتحسب كما يلي:[1]

1-1-1- حساب العزوم البسيطة من البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، فإن العزم البسيط من الدرجة (r) لهذا المتغير يعطى بالعلاقة التالية:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$$

1-1-2- حساب العزوم البسيطة من البيانات المبوبة: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت مراكز الفئات هي: $c_1, c_2, c_3,\ldots\ldots, c$ ، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن العزم البسيط من الدرجة (r) لهذا المتغير يعطى بالعلاقة التالية:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^r}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

1-2- العزوم المركزية: العزوم المركزية تكون حول المتوسط الحسابي، وتحسب كما يلي:[2]

1-2-1- حساب العزوم المركزية من البيانات الأولية: إذا كانت $x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots, x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة، فإن العزم المركزي من الدرجة (r) حول المتوسط الحسابي $\overline{X}$ لهذا المتغير يعطى بالعلاقة التالية:

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^r}{n}$$

1-2-2- حساب العزوم المركزية من البيانات المبوبة: إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات المبوبة أو الفئات عددها n، وكانت مراكز الفئات هي: $c_1, c_2, c_3,\ldots\ldots, c$ ، وكانت $f_1, f_2, f_3,\ldots\ldots, f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات، فإن العزم المركزي من الدرجة (r) حول المتوسط الحسابي $\overline{X}$ لهذا المتغير يعطى بالعلاقة التالية:

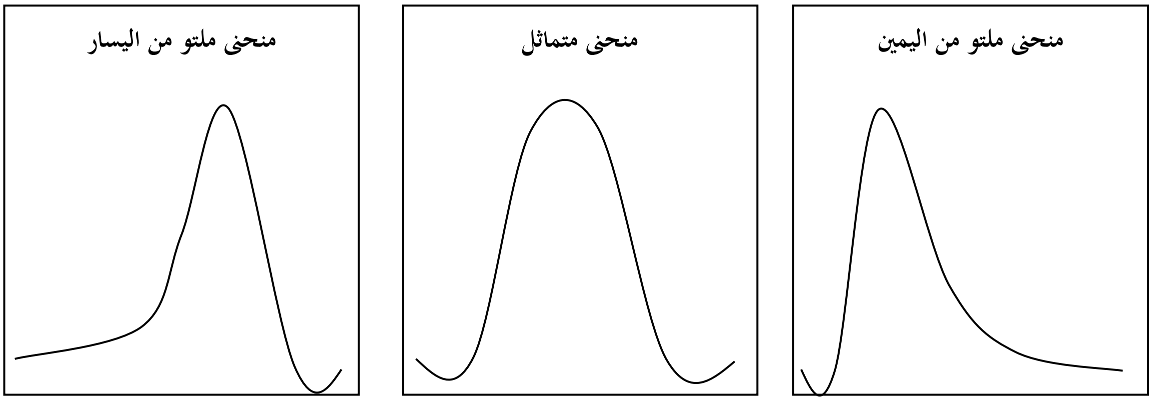
[1]. ثائر فيصل شاهر، مرجع سابق، ص 161.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 163.

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{X})^r}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ملاحظة: يمكن تعريف العزم المركزي حول أي قيمة أخرى خلاف المتوسط الحسابي وذلك من خلال استبدال قيمة المتوسط الحسابي بقيمة ذلك المقياس.

2- الالتواء: يعبر الالتواء عن درجة توزيع البيانات حول نقطة التمركز فيها، فوجود الالتواء دليل على انعدام الانتظام في التوزيع، ويمكن معرفة طبيعة أي توزيع بمجرد النظر إلى منحنى التوزيع الذي يأخذ أحد الأشكال التالية:



ويقاس الالتواء بأحد المعاملات التالية:[1]

2-1- معاملات بيرسون للالتواء: تعطى معاملات بيرسون للالتواء بالصيغ التالية:

2-1-1- معامل بيرسون الأول: يعطى معامل بيرسون الأول للالتواء بالعلاقة التالية: $P_1 = \frac{\bar{X} - M_o}{\delta}$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $P_1 = 0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر).
- إذا كان: $P_1 > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليمين (موجب الالتواء).
- إذا كان: $P_1 < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليسار (سالب الالتواء).

2-1-2- معامل بيرسون الثاني: يعطى معامل بيرسون الثاني للالتواء بالعلاقة التالية: $P_2 = \frac{3 \times (\bar{X} - M_e)}{\delta}$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $P_2 = 0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر).
- إذا كان: $P_2 > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليمين (موجب الالتواء).
- إذا كان: $P_2 < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليسار (سالب الالتواء).

2-2- معامل فيشر للالتواء: يعطى معامل فيشر للالتواء بالعلاقة التالية: $F_1 = \frac{M_3}{\delta^3}$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $F_1 = 0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر).

[1]. طه حسين الزبيدي، مرجع سابق، ص 147.

– إذا كان: $F_1 > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

– إذا كان: $F_1 < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليسار (سالب الالتواء).

2–3– معامل يول للالتواء: يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، ويسمى أيضا معامل الالتواء الربيعي، وهو معطى بالعلاقة التالية: $Y = \frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

– إذا كان: $Y = 0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر).

– إذا كان: $Y > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

– إذا كان: $Y < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليسار (سالب الالتواء).

مثال(6–1): ادرس شكل التوزيع التالي من حيث الالتواء:

الأجر x_i	$]20-10]$	$]30-20]$	$]40-30]$	$]50-40]$	$]60-50]$	$]70-60]$
عدد العمال f_i	18	30	25	17	12	8

الحل:– دراسة التواء التوزيع: لقد قمنا سابقا بحساب مقاييس النزعة المركزية للتوزيع السابق فحصلنا على النتائج التالية:

$M_o = 27{,}05$، $M_e = 32{,}8$، $\bar{X} = 34{,}9$

وكذلك بالنسبة للانحراف المعياري تحصلنا على النتيجة التالية: $\delta = 14{,}81$

يتم تحديد التواء منحنى التوزيع باستخدام أحد المعاملات التالية:

معامل بيرسون الأول: يعطى معامل بيرسون الأول للالتواء بالعلاقة التالية:

$$P_1 = \frac{\bar{X} - M_o}{\delta} = \frac{34{,}9 - 27{,}05}{14{,}81} = 0{,}53$$

بما أن: $P_1 > 0$، فإن منحنى التوزيع ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

معامل بيرسون الثاني: يعطى معامل بيرسون الثاني للالتواء بالعلاقة التالية:

$$P_2 = \frac{3 \times (\bar{X} - M_e)}{\delta} = \frac{3 \times (34{,}9 - 32{,}8)}{14{,}81} = 0{,}425$$

بما أن: $P_2 > 0$، فإن منحنى التوزيع ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

– **معامل فيشر للالتواء:** يعطى معامل فيشر للالتواء بالعلاقة التالية: $F_1 = \frac{M_3}{\delta^3}$

الجدول الموالي يبين بعض حساب العزم المركزي من الدرجة الثالثة.

الأجر x_i	**عدد العمال f_i**	**مركز الفئة c_i**	$(c_i - \bar{X})$	$f_i(c_i - \bar{X})^3$
$]20-10]$	18	15	19,9–	– 141850,78
$]30-20]$	30	25	9,9–	29108,97–

$]40-30]$	25	35	0,1	0,025
$]50-40]$	17	45	10,1	17515,1
$]60-50]$	12	55	20,1	97447,21
$]70-60]$	8	65	30,1	218167,21
المجموع	**110**	/	/	**162169,81**

$$M_3=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{X})^3}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{162169,81}{110}=1474,271$$

$$F_1=\frac{M_3}{\delta^3}=\frac{1474,271}{(14,81)^3}=0,45$$

بما أن: $F_1>0$، فإن منحنى التوزيع ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

معامل يول للالتواء: يعطى بالعلاقة التالية:

$$Y=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}$$

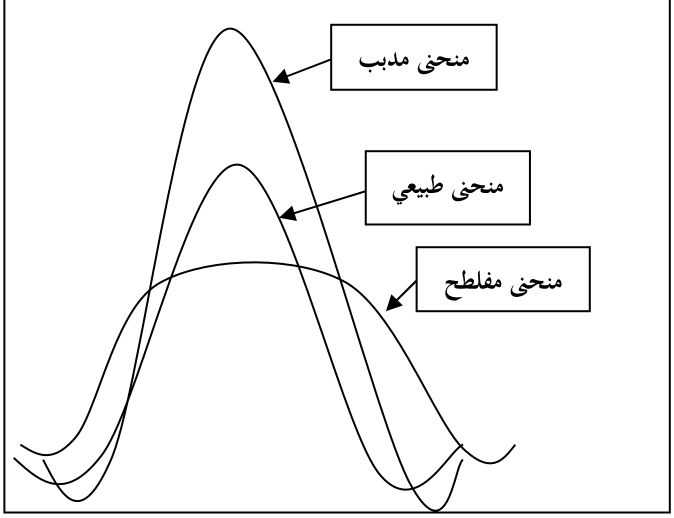
حصلنا سابقا على النتائج التالية:

$Q_1=23,17$، $Q_2=32,8$، $Q_3=45,59$

$$Y=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}=\frac{(45,59-32,8)-(32,8-23,17)}{(45,59-23,17)}=0,14$$

بما أن: $Y>0$، فإن منحنى التوزيع ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

3- التفلطح: هو قياس درجة علو قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي، أي يقصد به مدى اتساع أو ضعف قمة منحنى التوزيع، فكلما كان الشكل أكثر ارتفاعا من الشكل الطبيعي نقول أن الشكل مدبب، أما إذا كان أقل ارتفاعا من الشكل الطبيعي فنقول عنه أنه مفلطح، والتمثيل البياني التالي يبيّن ذلك:



ويقاس التفلطح بأحد المعاملات التالية:[1]

2-1- معامل بيرسون للتفلطح: يعطى معامل بيرسون للتفلطح بالعلاقة التالية: $\beta = \frac{M_4}{\delta^4}$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $\beta = 3$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر) أو طبيعي.
- إذا كان: $\beta > 3$، فإن منحنى التوزيع يكون مدبب.
- إذا كان: $\beta < 3$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح.

2-2- معامل فيشر للتفلطح: يعطى معامل فيشر للتفلطح بالعلاقة التالية: $F_2 = \beta - 3 = \frac{M_4}{\delta^4} - 3$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $F_2 = 0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر) أو طبيعي.
- إذا كان: $F_2 > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون مدبب.
- إذا كان: $F_2 < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح.

2-3- معامل التفلطح المئوي: يستخدم هذا المعامل في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$\beta = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2 \times (P_{90} - P_{10})}$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

- إذا كان: $\beta = 0{,}263$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متناظر) أو طبيعي.
- إذا كان: $\beta > 0{,}263$، فإن منحنى التوزيع يكون مدبب.
- إذا كان: $\beta < 0{,}263$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح.

مثال(2-6): انطلاقا من بيانات المثال(1-6) ادرس شكل التوزيع من حيث التفلطح.

الحل:- دراسة تفلطح التوزيع: لقد قمنا سابقا بحساب مقاييس النزعة المركزية للتوزيع السابق فحصلنا على النتائج التالية:

$\bar{X} = 34{,}9$، وكذلك بالنسبة للانحراف المعياري تحصلنا على النتيجة التالية: $\delta = 14{,}81$

يتم تحديد تفلطح منحنى التوزيع باستخدام أحد المعاملات التالية:

معامل بيرسون للتفلطح: يعطى معامل بيرسون للتفلطح بالعلاقة التالية: $\beta = \frac{M_4}{\delta^4}$

الجدول الموالي يبين بعض حساب العزم المركزي من الدرجة الرابعة.

الأجر x_i	عدد العمال f_i	مركز الفئة c_i	$(c_i - \bar{X})$	$f_i(c_i - \bar{X})^4$
$]20 - 10]$	18	15	19,9-	2822830,56
$]30 - 20]$	30	25	9,9-	288178,8

[1]. طه حسين الزبيدي، مرجع سابق، ص 149.

0,0025	0,1	35	25	$]40-30]$
176902,68	10,1	45	17	$]50-40]$
1958688,96	20,1	55	12	$]60-50]$
6566832,96	30,1	65	8	$]70-60]$
11813434	/	/	**110**	**المجموع**

$$M_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{X})^4}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{11813434}{110} = 107394{,}85$$

$$\beta = \frac{M_4}{\delta^4} = \frac{107394{,}85}{(14{,}81)^4} = 2{,}233$$

- بما أن: $\beta < 3$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح.

معامل فيشر للتفلطح: يعطى معامل فيشر للتفلطح بالعلاقة التالية:

$$F_2 = \beta - 3 = \frac{M_4}{\delta^4} - 3 = 2{,}233 - 3 = -0{,}77$$

- بما أن: $F_2 < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح.

تمارين الفصل السادس

التمرين الأول: إذا كانت لدينا القيم 8، 5، 2، 1، أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول نقطة الأصل.

الحل: – **حساب العزوم البسيطة:** العزم البسيط من الدرجة (r) يعطى بالعلاقة التالية: $m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1}{n} = \frac{16}{4} = 4$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \frac{94}{4} = 23,5$$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n} = \frac{646}{4} = 161,5$$

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}{n} = \frac{4738}{4} = 1184,5$$

التمرين الثاني: أوجد العزم الأول والثاني والثالث حول المتوسط الحسابي للقيم التالية 2، 4، 6.

الحل: – **حساب العزوم المركزية:** العزم المركزي من الدرجة (r) حول المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^r}{n}$$

يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{12}{3} = 4$

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^1}{n} = \frac{0}{3} = 0$$

$$M_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{8}{3} = 2,66$$

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^3}{n} = \frac{0}{3} = 0$$

التمرين الثالث: أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معامل فيشر للالتواء ومعامل بيرسون للتفلطح.

x_i	1	2	3	4	**المجموع**
f_i	6	9	4	1	**20**

الحل:– دراسة شكل التوزيع التكراري باستخدام معامل فيشر للالتواء: يعطى معامل فيشر للالتواء بالعلاقة التالية: $F_1 = \frac{M_3}{\delta^3}$

الجدول الموالي يبين بعض الحسابات انطلاقا من الصيغة السابقة.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{X})$	$f_i(x_i - \overline{X})$	$f_i(x_i - \overline{X})^2$	$f_i(x_i - \overline{X})^3$	$f_i(x_i - \overline{X})^4$
1	6	6	−1	−6	6	−6	6
2	9	18	0	0	0	0	0
3	4	12	1	4	4	4	4

4	1	4	2	2	4	8	16
المجموع	**20**	**40**	/	**0**	**14**	**6**	**26**

يحسب المتوسط الحسابي وفق الصيغة التالية: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{40}{20} = 2$

$$\delta = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (c_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{14}{20}} = 0{,}83$$

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{X})^3}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

$$F_1 = \frac{M_3}{\delta^3} = \frac{0{,}3}{(0{,}83)^3} = 0{,}52$$

– بما أن: $F_1 > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون ملتو من اليمين (موجب الالتواء).

– **دراسة شكل التوزيع التكراري باستخدام معامل بيرسون للتفلطح:** يعطى معامل بيرسون للتفلطح بالعلاقة التالية:

$$\beta = \frac{M_4}{\delta^4}$$

$$M_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{X})^4}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{26}{20} = 1{,}3$$

$$\beta = \frac{M_4}{\delta^4} = \frac{1{,}3}{(0{,}83)^4} = 2{,}653$$

– بما أن: $\beta < 3$، فإن منحنى التوزيع يكون مدبب (متطاول).

الفصل السابع

مقاييس التركز

تمهيد:

يقصد بالتركز استخدام البيانات لمعرفة مدى تركز الظاهرة المكانية. ويمكن قياس التركز للبيانات بعدد من المقاييس هي: دليل التركز، معامل التوطن، منحني لورنز، معامل جيني، وغيرها، حيث تهدف مقاييس التمركز إلى قياس ابتعاد توزيع حقيقي ما عن حالة التوزيع الذي يظهر تساويا في النسب، وسوف نتناول ما يلي:

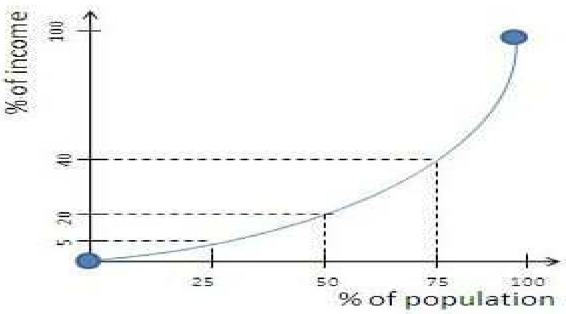
1- منحنى لورنز: ينتمي هذا النوع من المنحنيات إلى ما يسمى بالرسوم البيانية التحليلية التي تظهر نوع من التحليل والتفسير للإحصاء. ومنحنى لورنز هو واحد من الرسوم الشهيرة التي يعتمد عليها الجغرافيون لقياس درجة تركز ظاهرة جغرافية، ومعرفة مدى العدالة في توزيع الظاهرة بالنسبة لظاهرة أخرى ترتبط بها، فمثلا توضيح صورة توزيع السكان بالنسبة للمساحة، يمكن التعرف عليها من خلال هذا المنحنى التحليلي والذي يعطينا صورة واضحة لا تقبل الشك ولا الجدال حول شكل التوزيع على المساحة، هل هو مركز ام مبعثر.

منحنى لورنز هو أحد أساليب قياس العلاقة بين توزيع ظاهرة ما في إطار مساحة جغرافية، أي التعرف على درجة توزيع معين عن المثالية، وكمثال لتطبيق منحنى لورنز على توزيع السكان وعلاقاتهم بالمساحة[1].

في علم الاقتصاد، يمثل منحنى لورنز رسما بيانيًا لتوزيع الدخل أو الثروة. طوره ماكس لورنز في عام 1905 لتمثيل عدم المساواة في توزيع الثروة.

منحنى لورنز هو تمثيل بياني لعدم المساواة في توزيع الدخل الموجود في منطقة معينة (عادة بلد)، في ذلك، يتم وضع نسبة السكان المتراكمة على المحور الأفقي ونسبة الدخل المتراكم يقع على المحور العمودي.

2- شرح منحنى لورنز: ليكن لدينا المنحنى أدناه.



سيكون توزيع الدخل المتساوي تماما هو التوزيع الذي يحصل فيه كل الأشخاص على الدخل نفسه. في هذه الحالة، سيحصل نسبة معينة من المجتمع على نفس النسبة من الدخل. يمكن وصف ذلك بالخط المستقيم ويسمى خط (المساواة التامة) او خط التساوي (45 درجة)[2].

---

1. طه حسين الزبيدي، مرجع سابق، ص 98.
2. نفس المرجع السابق، ص 100.

على سبيل المثال، يمثل الرقم 20 على المحور الأفقي نسبة 20 % الدنيا من أصحاب الدخول، ويمثل الرقم 50 % من أصحاب الدخل، المحور العمودي لمنحنى لورنز هو النسبة المئوية من إجمالي الدخل في الاقتصاد.

يمكننا البدء في رسم المنحنى من خلال ملاحظة أن النقاط (0،0) و (100،100) يجب أن تكون طرفي المنحنى. وهذا ببساطة لأن نسبة 0% من السكان (التي لا يوجد بها أشخاص) لديها بحكم تعريفها 0% من دخل الاقتصاد، و100 % من السكان لديهم 100 % من الدخل.

ثم يتم إنشاء بقية المنحنى بالنظر إلى جميع النسب المئوية للسكان بين 0 و100 % والتخطيط للنسب المئوية المقابلة من الدخل.

في هذا المثال تمثل النقطة (25،5) حقيقة افتراضية بأن نسبة 25 % من الأشخاص لديهم 5 % من الدخل. توضح النقطة (50،20) أن نسبة 50 % من السكان لديهم 20 % من الدخل، والنقطة (75،40) تُظهر أن نسبة 75 % من السكان لديهم 40 % من الدخل.

وبسبب الطريقة التي يتم بها إنشاء منحنى لورنز، فإنه سوف يكون دائما منحنيا للأسفل كما في المثال أعلاه. وهذا ببساطة لأنه من المستحيل رياضيا أن يحصل 20 % من أصحاب الدخل الأدنى على أكثر من 20 % من الدخل، لأن 50 % من أصحاب الدخول الأدنى يحصلون على أكثر من 50 % من الدخل، وهكذا.

الخط 45 درجة يمثل المساواة الكاملة في الدخل في الاقتصاد. وذلك إذا كان الجميع يحصل على نفس المبلغ من المال. ويعني هذا أن نسبة 5 % الأدنى لديها 5 % من الدخل، وأن نسبة 10 % الأدنى لديها 10 % من الدخل، وهكذا.

لذلك، يمكننا أن نستنتج أن منحنيات لورنز التي تنحني بعيدا عن هذا الخط القطري (خط التساوي) تقابل التزايد في التفاوت في الدخل.

3- خصائص منحنى لورنز: يتميز بالخصائص التالية[1]:

- يبدأ منحنى لورنز دائمًا عند (0،0) وينتهي عند (100،100).
- لم يُحدد منحنى لورنز في الحالات التي يكون فيها متوسط التوزيع الاحتمالي صفرا أو لانهائي.
- يمكن تلخيص المعلومات الموجودة في منحنى لورنز بواسطة معامل جيني ومعامل لورنز لعدم التماثل.
- لا يمكن أن يرتفع منحنى لورنز فوق خط المساواة التامة.

مثال(7-1): اذا أردنا معرفة توزيع السكان على المساحات الأرضية في المنطقة الشمالية الغربية للمملكة السعودية، لمعرفة مدى انتشار وتركز السكان ضمن المساحة الأرضية التي يعيشون عليها، نقوم برسم منحنى لورنز باتباع الطرق الآتية:

[1]. راشد عادل الأسمر، مرجع سابق، ص 87.

الوحدات الإدارية	المساحة (كم2)	عدد السكان	المساحة %	عدد السكان %	معامل التفاضل
مكة المكرمة	150000	1754108	39.3	66.2	1.68
المدينة المنورة	130000	519292	33.8	19.5	0.58
تبوك	83564	193673	21.7	7.3	0.34
الباحة	20000	185905	5.2	7.0	1.35
المنطقة الشمالية الغربية	383564	2652978	%100	%100	

– نجمع بيانات المساحة وعدد السكان في إقليم المنطقة الشمالية، ومن ثم تكون نسبتها 100%.

– نحول المساحة وعدد السكان في كل إقليم إلى نسبة مئوية، أي نقسم المساحة لكل منطقة على المساحة الإجمالية للمنطقة الشمالية، مضروب الناتج في 100 ونفعل نفس الشيء بالنسبة لعدد السكان.

– نحسب معامل التفاضل لكل منطقة، وذلك بقسمة النسبة المئوية لعدد السكان على النسبة المئوية للمساحة.

– ترتب القيم في الجدول تبعا لمعامل التفاضل ترتيبا تصاعديا أو تنازليا في جدول جديد كما يوضح بالأسفل.

الوحدات الإدارية	المساحة (كم2)	عدد السكان	المتجمع الصاعد للمساحة	المتجمع الصاعد لعدد السكان	معامل التفاضل
مكة المكرمة	150000	1754108	39.3	66.7	1.68
الباحة	20000	185905	44.5	73.2	1.35
المدينة المنورة	130000	519292	78.3	92.7	0.58
تبوك	83564	193673	100	100	0.34

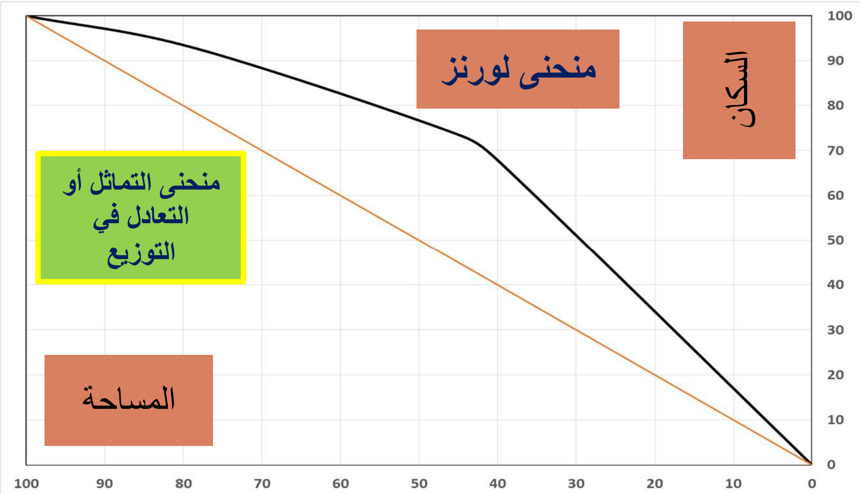
– نقوم بعمل التوزيع المتجمع الصاعد لكل من النسبة المئوية للمساحة والنسبة المئوية لعدد السكان.

– نقوم برسم محورين يمثل الأفقي منها النسب المئوية للتكرارات المتجمعة الصاعدة للمساحة، ويمثل المحور العمودي بالنسب المئوية للتكرارات المتجمعة لعدد السكان، ويلاحظ بدء المحاور من نقطة الصفر وانتهاءها 100%.

– نقوم برصد النقاط الممثلة للنسب ونصل بينها فنحصل على منحنى لورنز، ونكمل الشكل ليصبح مربعا، وذلك برسم محورين إضافيين مقابلين لمحوري التوزيع، ونصل قطر المربع الذي يمثل التوزيع العادل.

– توضح المساحة المحصورة بين المنحنى وخط التوزيع المتساوي (مساحة التركز)، وكبرها يدل على تركز السكان في مساحة قليلة من المساحة، وهذا بعيد عن التوزيع المثالي، وصغر هذه المساحة يمثل قرب توزيع الشكان من التوزيع المثالي.

– إن التكرارات النسبية المتجمعة الصاعدة مع منحنى لورنز، تعتبر من مؤشرات قياس تركز السكان على أساس الكثافة، وان تفحصنا في الجداول التي توضح المتجمع الصاعد، لوجدنا أن اكثر من ثلثي السكان حوالي (66.7%) يتركزون في (39%) من المساحة العامة، بينما يتركز (93%) من السكان في حوالى (78%) من المساحة العامة كما يوضحه الشكل أدناه.



4- معامل جيني: معامل جيني في علم الاقتصاد الذي يُطلق عليه أحيانًا مؤشر جيني أو نسبة جيني، هو مقياس للتشتت الإحصائي الذي يهدف إلى تمثيل عدم المساواة في الدخل أو عدم المساواة في الثروة داخل دولة أو أي مجموعة أخرى من الناس. تم تطويره بواسطة الإحصائي وعالم الاجتماع الإيطالي كورادو جيني ونشر في مقالته التي صدرت عام 1912.

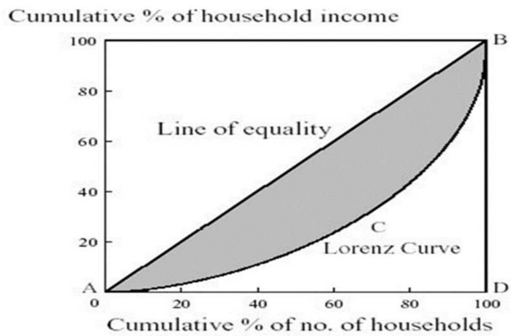
يقيس معامل جيني عدم المساواة بين قيم متغيرة (على سبيل المثال، مستويات الدخل). يعبر معامل جيني للصفر عن المساواة الكاملة حيث تكون جميع القيم متماثلة (على سبيل المثال، حيث يحصل كل فرد على نفس الدخل). يعبر معامل جيني بواحد أو 100٪ عن الحد الأقصى من عدم المساواة بين القيم (على سبيل المثال، بالنسبة لعدد كبير من الأشخاص حيث يكون لدى شخص واحد فقط كل الدخل أو الاستهلاك بينما لا يملك الآخرون أي شيء، فإن معامل جيني سيكون واحدًا تقريبًا[1].

وتجدر الإشارة هنا إلى أن قيمة معامل جيني تختلف باختلاف نوع البيانات، (دخل أو إنفاق)، وباختلاف صيغة الفئات، (فئات أسرة أو فرد)، وباختلاف مؤشر توزيع السكان، (أفراد أو اسر)، وعليه لا تصلح مقارنة قيم معامل جيني المحسوبة من بيانات مختلفة من حيث النوع أو صيغة الفئات أو مؤشر توزيع السكان إذ قد تؤدي إلى استنتاجات مضللة.

جنبًا إلى جنب مع منحنى لورنز، يمكننا حساب مؤشر جيني، ببساطة تقسيم المساحة بين المنحنى وخط التساوي، وهذا على إجمالي المساحة التي تظل تحت المنحنى، بهذه الطريقة نحصل على المعامل أو نضاعف النتيجة في 100، نحصل على النسبة المئوية.

يقيس معامل جيني عدالة توزيع الدخل، يعتمد المعامل في حسابه على الشكل التالي:

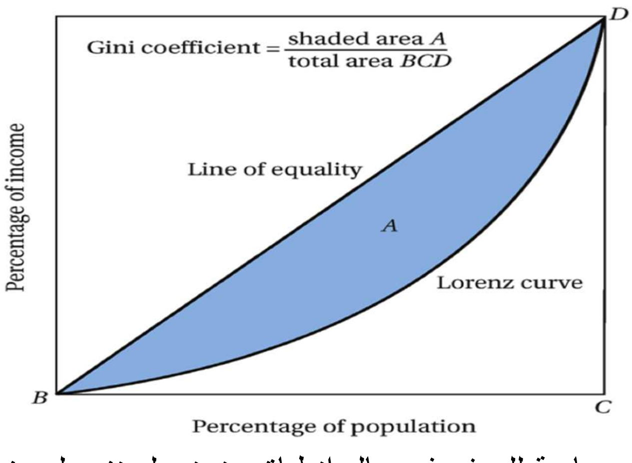
[1]. راشد عادل الأسمر، مرجع سابق، ص 93.



يمثل المحور الأفقي التوزيع التراكمي للسكان في الدولة، في حين يمثل المحور العمودي التوزيع التراكمي للدخل، الخط المستقيم AB يمثل خط العدالة او المساواة أو خط 45 درجة، ومعنى العدالة أن كل نقطة على الخط AB تتساوى عندها النسبة المقابلة على المحور الأفقي مع النسبة المقابلة على المحور العمودي.

ومن ثم فإننا كلما ابتعدنا عن الخط AB كلما زادت درجة عدم العدالة في توزيع الدخل إلى أن نصل إلى عدم العدالة المطلقة، وهي الحالة التي يحصل فيها شخص واحط فقط على كل الدخل في الدولة، هذه الحالة يمكن التعبير عنها بالنقطة D ويكون شكل المنحني هوADB ؛ أي أنه ينطبق على ضلعي الزاوية القائمة D .

يتم حساب معامل جيني من خلال قسمة المساحة المحصورة بين منحنى لورنز وخط العدالة المطلقة (A)على المساحة الكلية للمثلث(BCD) ، كما هو موضح في الشكل التالي:



تكون قيمة المعامل مساوية للصفر في حال انطباق منحنى لورنز على خط العدالة المطلقة، وتكون قيمته مساوية للواحد الصحيح في حالة عدم العدالة المطلقة؛ أي أن قيمة المعامل تنحصر بين الصفر والواحد، وكلما اقتربت القيمة من الصفر زادت عدالة توزيع الدخل، وكلما اقتربت من الواحد انخفضت عدالة التوزيع.

مثال(7−2): لدينا الجدول الموالي يبين توزيع الأسر والإنفاق حسب فئات الإنفاق.

فئات الإنفاق	توزيع الأسر			توزيع الإنفاق		
	العدد	%	تكرار متجمع صاعد	مجموع الإنفاق	%	تكرار متجمع صاعد
100 فأقل	26	12.9	12.9	1767.2	3.8	3.8
200−101	72	35.6	48.5	11096.8	23.6	27.3
300−201	48	23.8	72.3	11708.4	24.9	52.2
400−301	41	20.3	92.6	14019.7	29.8	82.0
500−401	7	3.5	96	3033.5	6.4	88.5
600−501	4	2.0	98	2231.1	4.7	93.2
700−601	2	1.0	99	1277.2	2.7	95.9
800−701	1	0.5	99.5	733.3	1.6	97.5
900−801	0	0.0	99.5	0.0	0.0	97.5
901 فأكثر	1	0.5	100	1182.8	2.5	100
المجموع	202	100	−	47050	100	−

احسب معامل جيني للعدالة في توزيع الدخول أو الإنفاق

الحل:

ولحساب معامل جيني تم استخدام الصيغة التالية:

$$G = 1 - \left(\frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{n} w_i \left(s_i + s_{i-1}\right)\right)$$

حيث أن:

G: ترمز لمعامل جيني.

Si: ترمز إلى المتجمع الصاعد (التراكمي) للنسب المئوية للإنفاق المقابل للفئةi.

Si_{-1}: هي المتجمع الصاعد (التراكمي) نفسه بالنسبة للفئة السابقة i.

Wi: هي النسبة المئوية نفسها لعدد الأسر في الفئة i.

n : عدد الفئات.

ومن الجدول أدناه نحصل على قيمة معامل جيني.

فئات الإنفاق	Si	Si_{-1}	$Si + Si_{-1}$	Wi	$Wi(Si + Si_{-1})$
100 فأقل	3.8	−	3.8	12.9	49.02
200−101	27.3	3.8	31.1	35.6	1107.16
300−201	52.2	27.3	79.5	23.8	1892.1
400−301	82.0	52.2	134.2	20.3	2724.26
500−401	88.5	82.0	170.5	3.5	596.75

600−501	93.2	88.5	181.7	2.0	363.4
700−601	95.9	93.2	189.1	1.0	189.1
800−701	97.5	95.9	193.4	0.5	96.7
900−801	97.5	97.5	195	0.0	0.0
901 فأكثر	100	97.5	197.5	0.5	98.78
المجموع	−	−	−	100	7116.27

ومن الجدول السابق فإن: معامل جيني للإنفاق يساوي 0.29

$$G = 1 - \frac{7116,27}{10000} = 0,29$$

تمارين الفصل السابع

التمرين الأول:

الجدول أدناه يبين المساحة وعدد السكان في قطاع غزة عام 1997، والمطلوب رسم منحني لورنز لايجاد العلاقة بينهما تبعاً للكثافة السكانية.

المنطقة	المساحة كم^2	عدد السكان
شمال غزة	61	179690
غزة	74	359941
دير البلح	58	144890
خان يونس	108	196662
رفح	64	120386
المجموع	365	1001569

الحل:

الخطوة الأولي نستخرج الكثافة السكانية للمناطق

المنطقة	المساحة كم^2	عدد السكان	الكثافة السكانية
شمال غزة	61	179690	2946
غزة	74	359941	4864
دير البلح	58	144890	2498
خان يونس	108	196662	1821
رفح	64	120386	1881

الخطوة الثانية ترتيب المناطق تصاعدياً حسب الكثافة

المنطقة	المساحة كم^2	عدد السكان	الكثافة السكانية
خان يونس	108	196662	1821
رفح	64	120386	1881
دير البلح	58	144890	2498
شمال غزة	61	179690	2946
غزة	74	359941	4864
المجموع	365	1001569	/

الخطوة الثالثة نستخرج التوزيع النسبي للمساحة والسكان

المنطقة	المساحة %	عدد السكان %
خان يونس	29.6	19.6

رفح	17.5	12.0
دير البلح	15.9	14.5
شمال غزة	16.7	17.9
غزة	20.3	35.9

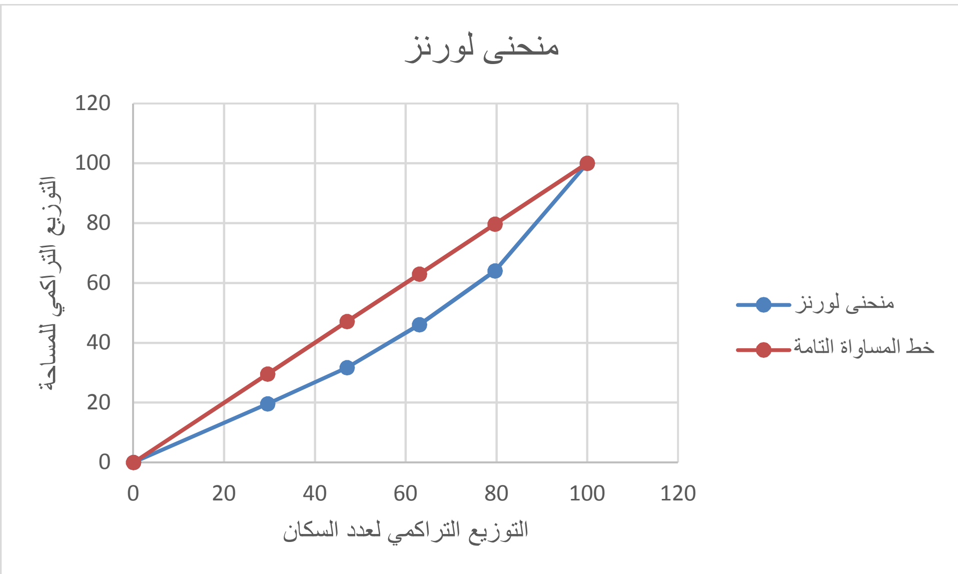
الخطوة الرابعة نستخرج التوزيع التراكمي للسكان والمساحة

المنطقة	التوزيع التراكمي للمساحة	التوزيع التراكمي لعدد السكان
خان يونس	29.6	19.6
رفح	47.1	31.7
دير البلح	63.0	46.1
شمال غزة	79.7	64.1
غزة	100.0	100.0

الخطوة الخامسة التمهيد للرسم البياني

الرقم	الوزن النسبي	التوزيع التراكمي للمساحة	التوزيع التراكمي لعدد السكان
0	0	0	0
1	20	29.6	19.6
2	40	47.1	31.7
3	60	63.0	46.1
4	80	79.7	64.1
5	100	100.0	100.0

أخيرا ينتج لدينا منحنى لورنز كما في الشكل أدناه.



التمرين الثاني:

لنفرض وجود البيانات التالية عن اربعة أشخاص.

الشخص	1	2	3	4	المجموع
الثروة	25	25	50	25	**125**

– احسب معامل جيني لبيان مدى التفاوت في توزيع الثروة على الأشخاص.

الحل:

لحساب معامل جيني تم استخدام الصيغة التالية:

$$G = 1 - \left(\frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{n} w_i\left(S_i + S_{i-1}\right)\right)$$

أولا إنشاء جدول التوزيع التراكمي للأشخاص والثروة.

نسب التوزيع التراكمي للثروة (S_i)	S_{i-1}	S_i+S_{i-1}	نسبة الاشخاص (W_i)	$W_i(S_i+S_{i-1})$
20	–	20	25	500
40	20	60	25	1500
80	40	120	25	3000
100	80	180	25	4500

$$G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(S_i + S_{i-1})}{10000} = 1 - \frac{9500}{10000} = 1 - 0.95 = 0.05$$

الفصل الثامن

الارتباط والانحدار

تمهيد:

يعد الارتباط والانحدار الخطي البسيط من أكثر الموضوعات استخداماً في العمليات الإحصائية، والهدف من دراسة الارتباط هو الكشف عن قوة أو درجة العلاقة بين متغيرين أو أكثر، بينما الهدف الاساسي من تحليل الانحدار هو تقدير الصورة الرياضية للعلاقة بين متغير مستقل ومتغير تابع، ويستخدم تحليل الانحدار لدراسة مدى تأثير متغير مستقل واحد أو أكثر على متغير تابع محدد بحيث نستطيع التنبؤ بقيم المتغير التابع اذا علمنا قيم المتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة.

1- الجداول التكرارية المشتركة (ثنائية البعد): الجدول التكراري المشترك او المزدوج هو جدول تكراري يدرس متغيرين من نفس المجتمع، فهو يحتوي بيانات لمتغيرين من نفس المجتمع حسب التكرارات المشتركة بينهما[1].

ليكن لدينا المتغير X يأخذ القيم التالية: x_i: $i=1,2,\ldots\ldots\ldots,n$

والمتغير Y يأخذ القيم التالية: y_j: $j=1,2,\ldots\ldots\ldots,m$

f_{ij}: تمثل التكرارات المشتركة بين المتغيرين $f(x_i,y_j)$

شكل الجدول التكراري المزدوج للمتغيرين X وY هو كما يلي:

X_i \ Y_j	y_1	y_2	....	y_m	المجموع
x_1	f_{11}	f_{12}	....	f_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} f_{1j}$
x_2	f_{21}	f_{22}	....	f_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} f_{2j}$
. .	. .	. .	. .	. .	. .
x_n	f_{n1}	f_{n2}	....	f_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} f_{nj}$
المجموع	$\sum_{i=1}^{n} f_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} f_{i2}$	....	$\sum_{i=1}^{n} f_{im}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}$

مثال (8-1): في ثانوية ينقسم التلاميذ حسب متغيري الجنس والمستوى الدراسي كما يلي:

	أولى ثانوي	ثانية ثانوي	ثالثة ثانوي	المجموع
ذكور	295	190	128	613
إناث	269	203	174	646
المجموع	564	393	302	1259

[1]. عبد الحليم عشماوي وآخرون، مرجع سابق، ص 75.

2- الجداول التكرارية الهامشية: بفرض التوزيع التكراري الثنائي البعد للمتغيرين X و Y.

التوزيع الهامشي للمتغير X و من ثم Y هو التوزيع الأحادي البعد للمتغير X و من Y مع اعتبار ثبات المتغير الآخر، وهو نتيجة تجميع التكرارات للقيم الفعلية[1].

التكرارات الهامشية للمتغير X تحسب وفق الصيغة التالية:

$$f_{i.} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \qquad , i = 1,2, \dots \dots , n$$

التكرارات الهامشية للمتغير Y تحسب وفق الصيغة التالية:

$$f_{.j} = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} \qquad , j = 1,2, \dots \dots , m$$

مثال (8-2): لدينا الجدول التقاطعي للمتغيرين:

X: المهنة، Y: النشاط لعينة من 1000 موظف

المهنة (X)	**النشاط (Y)**			**التوزيع الهامشي (X)**
	نادرا	أحيانا	منتظم	
عامل	240	120	70	430
بائع	160	90	90	340
خادم	30	30	30	90
مزارع	37	7	6	50
موظف	40	32	18	90
التوزيع الهامشي (Y)	507	279	214	1000

3- الجداول التكرارية الشرطية: بفرض التوزيع التكراري الثنائي البعد للمتغيرين X و Y، يدعى التوزيع التكراري للمتغير X عند القيمة الثابتة المعطاة للمتغير Y بالتوزيع الشرطي أو التوزيع الشرطي للمتغير X بشرط y_i [2].

ويحسب التكرار الشرطي للمتغير Y بشرط $X = x_i$ وفقا للصيغة التالية:

$$f_{x_i}(y_j) = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{f_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} f_{ij}}$$

ويحسب التكرار الشرطي للمتغير X بشرط $Y = y_i$ وفقا للصيغة التالية:

$$f_{y_j}(x_i) = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \frac{f_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}}$$

[1]. عبد الحليم عشماوي وآخرون، مرجع سابق، ص 75.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 77.

التوزيعات الشرطية هي توزيعات أحادية البعد.

مثال (8–3): بالرجوع الى المثال السابق يمكن إيجاد التوزيع الشرطي للمتغير Y بشرط $X = x_i$ كما يلي:

المهنة (X)	**النشاط (Y)**			**التوزيع الشرطي (Y)**
	نادرا	أحيانا	منتظم	
عامل	0,56	0,28	0,16	1,00
بائع	0,470	0,26	0,26	1,00
خادم	0,33	0,33	0,33	1,00
مزارع	0,74	0,14	0,12	1,00
موظف	0,44	0,36	0,20	1,00

4– خواص التوزيعات التكرارية المزدوجة (ثنائية البعد): لأجل التوزيع الهامشي والتوزيع الشرطي نستعمل مقاييس النزعة المركزية والتشتت وبنفس الطريقة كما في التوزيعات أحادية البعد.

5– التباين المشترك: التباين المشترك هو الخاصية المحددة للتوزيعات ثنائية البعد والذي يقيس التباين المشترك للمتغيرين X و Y.

اذا كانت لدينا المشاهدات n لمتغيرين X و Y مع التكرارات المطلقة ($f(x_i,y_j) = f_{ij}$) نحسب التباين المشترك للمتغيرين وفق الصيغة التالية[1]:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}}$$

يمكن أن يأخذ التباين المشترك القيم السالبة.

يعني استقلال متغيرين بأن توزيعي المتغيرين لا يعتمد أحدهما على قيم المتغير الآخر، عندئذ تباينهم المشترك يساوي للصفر.

مثال (8–4): ليكن المتغيران X و Y، حيث يعطى الجدول التقاطعي لهما كما يلي:

X_i \ Y_j	**1**	**2**	**المجموع**
1	4	4	8
2	0	4	4
المجموع	4	8	12

حساب التباين المشترك بين المتغيرين.

الحل:

$$\bar{X} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\bar{Y} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

[1]. عبد الحليم عشماوي وآخرون، مرجع سابق، ص 78.

$$Cov(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f_{ij}(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f_{ij}}$$
$$=\frac{4*\left(1-\frac{4}{3}\right)\left(1-\frac{5}{3}\right)+4*\left(1-\frac{4}{3}\right)\left(2-\frac{5}{3}\right)+0*\left(2-\frac{4}{3}\right)\left(1-\frac{5}{3}\right)+4*\left(2-\frac{4}{3}\right)\left(2-\frac{5}{3}\right)}{12}$$
$$=\frac{12}{9}$$

6- جداول التوافق: هي جداول تكرارية تقاطعية او مزدوجة توضح التوزيع التكراري المشترك بين متغيرين نوعيين اسميين، فهي تستخدم في حالة لكل من الظاهرتين أو إحداهما على الأقل لها أكثر من صفتين، أما في حالة الظاهرتين لها صفتين فقط، فتسمى حينئذ بجداول الاقتران، مثل الجدول أدناه[1].

التدخين مشاهدة البرنامج	يدخن	لا يدخن	المجموع
دائماً يشاهد البرنامج	62	116	**178**
غالباً يشاهد البرنامج	17	176	**193**
أحياناً يشاهد البرنامج	5	73	**78**
لا يشاهد البرنامج	3	20	**23**
المجموع	**87**	**385**	**472**

7- الارتباط: من أساليب التحليل الإحصائي للبيانات ما يسمى بالارتباط، والارتباط هو مفهوم إحصائي يوضح العلاقة بين متغيرين أو أكثر، ونظرا لتعدد أنواع البيانات أو المتغيرات وحتى وحدات القياس في البحث العلمي فقد تعددت أنواع معاملات الارتباط وطرق حسابها.

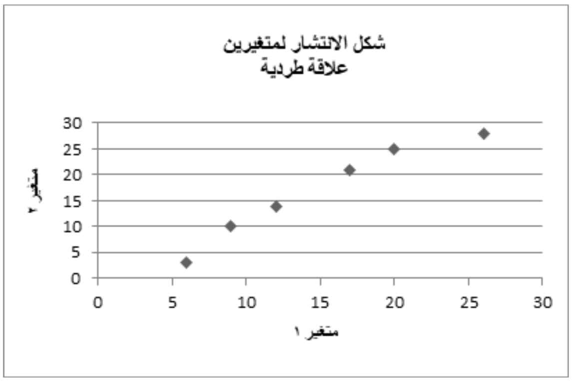
والهدف من استخدام هذا المعامل يكون لإيجاد العلاقة بين متغيرين، وفحص ما إذا كانت علاقة إيجابية أو سلبية (علاقة طردية أو عكسية)، قوية أو ضعيفة. كما تأتي أهمية دراسة الارتباط من دوره في التنبؤ كطريقة من طرق الحصول على المعرفة. فإذا كان الارتباط قويا بين متغيرين فهذا يعني إمكانية تقدير قيمة أحد المتغيرين عند معرفة القيمة المقابلة للمتغير الآخر بدقة أكبر مما لو كان الارتباط ضعيفا. ويقصد بالارتباط البسيط العلاقة بين متغيرين بصرف النظر عن نوع أي منهم من حيث نوع القياس، وأكثرها شيوعا هو الارتباط بين متغيرين كل منهما من نوع القياس الفئوي أو من نوع القياس النسبي، ويحدد الارتباط عادة بالقوة والاتجاه (قيمة موجبة أو سالبة) [2].

يعطي شكل الانتشار فكرة سريعة عن قوة واتجاه علاقة الارتباط بين متغيرين، فيتم تحديد قيم أحد المتغيرين على المحور الأفقي والمتغير الآخر على المحور العمودي. وتحدد النقاط التي تشكل أزواج القيم إحداثياتها. والشكل الناتج بعد تحديد جميع النقاط هو شكل الانتشار، وحتى يتضح معنى قوة العلاقة لا بد

[1]. عبد الحليم عشماوي وآخرون، مرجع سابق، ص 81.
[2]. إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص 85.

من مقارنة الشكل الناتج بشكل انتشار معين. فإذا كانت جميع النقاط واقعة على خط مستقيم فهذا يعني أن العلاقة تامة سواء كانت علاقة طردية أو عكسية.

مثلا، الشكل التالي يوضح شكل الانتشار لمتغيرين مرتبطين بعلاقة طردية.



يعتبر معامل الارتباط مؤشرا كميا على قوة العلاقة واتجاهها بين متغيرين، إذ يمكن أن يأخذ أي قيمة بين (−1 ،1)، حيث تدل القيمة المحسوبة على قوة العلاقة وتدل الإشارة على اتجاهها، موجبة أو سالبة. وتتعدد أنواع معاملات الارتباط حسب تعدد أنواع المتغيرات، فقد يكون الارتباط بين متغيرين كل منهما اسميا، أو رتبيا أو فئويا وربما كان خليطا من هذه المتغيرات.

يشير معامل الارتباط إلى قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين، ولكن هذه العلاقة لاُ تفَّسر على أنها علاقة سببية، مع أنها يمكن أن تكون كذلك، وقد جرى تصنيف قيم معامل الارتباط إلى ضعيفة، متوسطة، قوية إذا وقعت ضمن المدى المحدد من طرف الباحث.

تتعدد أنواع معامل الارتباط بحسب تعدد أنواع البيانات أو المتغيرات التي يتم بحث أو تحليل الارتباط فيما بينها. فقد يكون الارتباط بين متغيرين كل منهما اسميا أو رتبيا أو فئويا أو حتى خليطا من هذه الأنواع، وبالتالي يختلف المعامل الذي يمكن استخدامه بحسب نوع وطبيعة تلك البيانات والمتغيرات[1].

وتوجد أنواع من معاملات الارتباط وهي:

7−1− معامل ارتباط بيرسون (Pearson): معامل ارتباط بيرسون يقيس العلاقة الإحصائية أو الارتباط بين متغيرين مستمرين. يُعرف باسم أفضل طريقة لقياس الارتباط بين المتغيرات لأنه يعتمد على طريقة التغاير فهو يعطي معلومات حول حجم الارتباط واتجاه العلاقة.

تتراوح قيمة معامل ارتباط بيرسون من −1 إلى 1، اذا كانت تساوي −1 تشير إلى علاقة خطية سالبة مثالية بين المتغيرات، في حين لما تساوي 0 تشير إلى عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرات، في حال لما تساوي 1 تشير إلى وجود علاقة خطية موجبة مثالية بين المتغيرات. ويتم حساب معامل ارتباط بيرسون وفق الصيغة التالية[2]:

$$r_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

---

[1]. إبراهيم أبو عقيل، مرجع سابق، ص 88.

[2]. ثائر فيصل شاهر، مرجع سابق، ص 101.

مثال (8-4): لدينا 15 شركة نعرف المتغيرات:

X: الربح السنوي مليون أورو

Y: الايجار السنوي بالألف أورو.

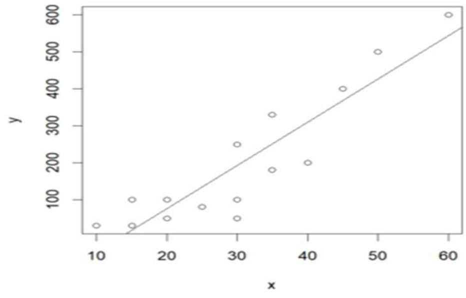
يمكن مشاهدة قيم المتغيرات في الجدول التالي:

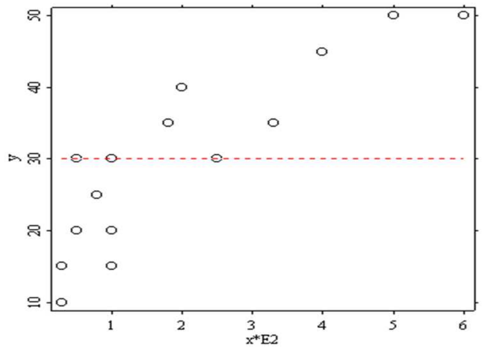
الايجار السنوي	الربح السنوي	الشركة
x_i	y_i	i
30	10	1
30	15	2
100	15	3
50	20	4
100	20	5
80	25	6
50	30	7
100	30	8
250	30	9
180	35	10
330	35	11
200	40	12
400	45	13
500	50	14
600	50	15

احسب معامل الارتباط بين المتغيرين

الحل:

يمكن تلخيص قيم المتغيرين بيانيا في الشكل البياني التالي:





$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{28100}{\sqrt{457000 * 2250}} = 0.8763$$

معامل الارتباط البسيط في هذا المثال هو 0,8763 ويشير هذا لعلاقة خطية موجبة قوية.

7-2- معامل ارتباط الرتب (Spearman): معامل ارتباط سبيرمان يقيس العلاقة الإحصائية أو الارتباط بين متغيرين نوعيين من الشكل الترتيبي.

نقطة البداية لقياس العلاقة بين المتغيرين الرتبيين X و Y هي الرتب

$$R(x_i), R(y_i) \quad , i = 1,2,,,,,,,, n$$

والمصممة للمشاهدات x_i و y_i طبقا لرتبهم.

تعرف الرتب $R(x_i)$ مساوية الى 1 لأجل x_i التي تأخذ القيمة الأكبر المشاهدة ومساوية الى 2 لأجل x_i التي تأخذ القيمة الأكبر الثانية المشاهدة وهكذا.

يحسب معامل الارتباط الرتب سبيرمان من أزواج الرتب كالتالي[1]:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} [R(x_i) - R(y_i)]^2}{n(n^2 - 1)}$$

ويأخذ معامل ارتباط الرتب سبيرمان القيم بين −1 و +1.

يأخذ معامل ارتباط الرتب سبيرمان القيمة 1 اذا الرتب تتصرف بنفس الطريقة أي:

$$R(x_i) = R(y_i) \quad , i = 1,2,,,,,,,, n$$

يأخذ معامل ارتباط الرتب سبيرمان القيمة −1 اذا الرتب متعارضة مع بعضها البعض أي:

$$R(x_i) = n + 1 - R(y_i) \quad , i = 1,2,,,,,,,, n$$

مثال (8-5): كانت تقديرات درجات ستة طلبة في مادتي الاحصاء والرياضيات هي كالآتي:

الاحصاء: جيد ، متوسط ، ضعيف ، مقبول ، جيد جدا ، ممتاز

الرياضيات: متوسط ، جيد ، مقبول ، ضعيف ، ممتاز ، جيد جداً

أوجد معامل الارتباط بين تقديرات درجات الطلاب في امتحاني الاحصاء والرياضيات.

الحل:

ترتب التقديرات وفق ترتيب تصاعدي أو تنازلي، وليكن الترتيب تصاعدي وتخصص لها سلسلة الأعداد الطبيعية.

التقديرات: ضعيف، مقبول، متوسط، جيد، جيد جدا، ممتاز.

1 2 3 4 5 6

ثم يعوض عن كل تقدير بما يقابله من اعداد طبيعية.

$[R(x_i) - R(y_i)]^2$	$R(x_i) - R(y_i)$	$R(y_i)$	$R(x_i)$	y_i	x_i
1	1	3	4	متوسط	جيد
1	1−	4	3	جيد	متوسط

---

[1]. ثائر فيصل شاهر، مرجع سابق، ص 103.

1	1−	2	1	مقبول	ضعيف
1	1	1	2	ضعيف	مقبول
1	1−	6	5	ممتاز	جيد جدا
1	1	5	6	جيد جدا	ممتاز

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}[R(x_i) - R(y_i)]^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6*6}{6*35} = 0.8$$

توجد علاقة موجبة طردية جيدة جداً بين درجات الطلاب.

7-3- معامل التوافق: يستخدم معامل التوافق لحساب قيمة معامل الارتباط عندما يكون المتغيران المراد قياس الارتباط بينهم صفات أي متغيرين نوعيين اسميين، أحدهما على الأقل يحوي اكثر من صفتين، وأيضا الجدول المزدوج الذي يمثل العلاقة بينهما يزيد عدد خلاياه عن (4) خلايا دون خلايا المجموع ونستخدم الصيغة التالية لحساب قيمة معامل التوافق:[1]

$$r_a = \sqrt{\frac{B-1}{B}} \quad /B = \frac{f_{11}^2}{f_{1.}f_{.1}} + \frac{f_{12}^2}{f_{1.}f_{.2}} + \cdots + \frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}$$

مثال (8-6): بهدف دراسة علاقة لون البشرة لمجموعة من الأمهات مع لون بشرة المولود الأول لكل منهن، اخترنا بشكل عشوائي عينة من 100 أم وعرفنا المتغير X بلون بشرة الأمهات (أبيض، أسود، أسمر) وكذلك المتغير Y بلون بشرة المولود الأول ويأخذ نفس الحالات وسجلنا النتائج في الجدول الآتي:

المجموع	أسمر	أسود	أبيض	X_i / Y_j
40	7	6	27	**أبيض**
30	5	17	8	**أسود**
30	18	7	5	**أسمر**
100	30	30	40	**المجموع**

احسب معامل التوافق.

الحل:

$$B = \frac{f_{11}^2}{f_{1.}f_{.1}} + \frac{f_{12}^2}{f_{1.}f_{.2}} + \cdots + \frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}} = 1.36$$

$$r_a = \sqrt{\frac{B-1}{B}} = \sqrt{\frac{1.36-1}{1.36}} = 0.51$$

إن معامل التوافق يبين أن قوة الارتباط بين لون البشرة للأمهات وللأبناء متوسطة وليست قوية.

8- الانحدار الخطي البسيط: إن الغرض من استخدام أسلوب تحليل الانحدار الخطي البسيط، هو دراسة وتحليل أثر متغير كمي على متغير كمي آخر، ومن الأمثلة على ذلك ما يلي:

[1]. ثائر فيصل شاهر، مرجع سابق، ص 105.

دراسة أثر الإنتاج على التكلفة.

دراسة أثر كمية السماد على إنتاجية المزرعة.

أثر الدخل على الإنفاق الاستهلاكي.

وهكذا هناك أمثلة في كثير من النواحي الاقتصادية، والزراعية، والتجارية، والعلوم السلوكية، وغيرها من المجالات الأخرى.

تحليل الانحدار الخطي يهتم بوصف وتقييم العلاقة الخطية بين متغير (عادة يسمى المتغير التابع) وواحد أو اكثر لمتغيرات أخرى (تسمى عادة المتغيرات المفسرة آو المتغيرات المستقلة) ويرمز للمتغير التابع y والمتغيرات المفسرة $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$.

اذا كان هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة، يعرف هذا بالانحدار الخطي البسيط، واذا كان هناك اكثر من متغير مستقل واحد نحصل على ما يعرف بالانحدار الخطي المتعدد.

العلاقة بينY و X تمثل بالتالي: $Y = f(X)$

الخط الذي يمثل العلاقة هو العلاقة التحديدية، بالرجوع إلى المعادلة التي تمثل الدالة، نستطيع القول إن الدالة تمثل الخط $f(x)=\alpha+\beta X$ وتمثل α و β معاملات الانحدار[1].

الهدف هو الحصول على تقدير للمعاملات الغير معروفه α، β للقيام بعملية التقدير.

8-1- تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى: هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها: طريقة المربعات الصغرى، وطريقة الإمكانية العظمى.

تقدير النموذج يتم بغرض الحصول على مقدرات معالم نموذج الانحدار البسـيط، نموذج الانحدار البسيط يتضمن معلمتين: معلمة التقاطع α، معلمة الميل β، المراد هو استخدام إحصائيات المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة حسب الطرق الإحصائية الملائمة للحصول على مقدرات لهذه المعالم.

تعطى تقديرات معلمتي النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية وفق الصيغة التالية[2]:

$$\widehat{B}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$\widehat{\alpha}=\bar{y}-\widehat{B}\bar{x}$$

مثال (8-7): قدر نموذج الانحدار الخطي البسيط للجدول أدناه

X	Y	X^2	XY
2	4	4	8
3	7	9	21
1	3	1	3
5	9	25	45
9	17	81	153
$\sum X$=20	**$\sum Y$=40**	**$\sum X^2$= 120**	**$\sum XY$= 230**

1. صالح بن محمد الصغير، مرجع سابق، ص 111.

2. نفس المرجع السابق، ص 113.

$$\widehat{B} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{(5 * 230) - (20 * 40)}{5(120)^2 - (20)^2} = 1.75$$

$$\widehat{\alpha} = \bar{y} - \widehat{B}\bar{x} = 8 - (1.75 * 4) = 1$$

معادلة خط الانحدار البسيط تكتب كما يلي:

$$\widehat{Y} = 1 + 1{,}75X$$

8-2- معامل التحديد: يقيس نسبة تفسير المتغير المستقل لتغيرات المتغير التابع، ويمثل نسبة مجموع مربعات الانحدار إلى مجموع المربعات الإجمالي، وتعطى صيغته كالتالي[1]:

$$R_{xy}^2 = \frac{\widehat{B}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

قيمة معامل التحديد تتراوح بين صفر وواحد، إذا كانت مرتفعة أي قريبة من الواحد يفسر المتغير المستقل نسبة كبيرة من تغيرات المتغير التابع، إذا كانت قريبه من الصفر فان المتغير المستقل لا يفسر إلا القليل من تغيرات المتغير التابع.

مثال (8-7): بالعودة الى المثال السابق احسب معامل التحديد.

الحل:

X	Y	Y^2	XY
2	4	16	8
3	7	49	21
1	3	9	3
5	9	81	45
9	17	289	153
∑X=20	**∑Y=40**	**$\sum Y^2$=444**	**∑XY= 230**

$$R_{xy}^2 = \frac{\widehat{B}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \frac{1{,}75 * 230}{444} = 0{,}90$$

اذن المتغير المستقل يفسر 90% من تغيرات المتغير التابع.

[1]. صالح بن محمد الصغير، مرجع سابق، ص 116.

تمارين الفصل الثامن

التمرين الأول:

قام أحد الباحثين بعمل بحث عن المدخنين ومدى تأثرهم بمشاهدة برنامج خمسة لصحتك فحصل على بيانات الجدول التالي:

التدخين / مشاهدة البرنامج	يدخن	لا يدخن	المجموع
دائماً يشاهد البرنامج	62	116	**178**
غالباً يشاهد البرنامج	17	176	**193**
أحياناً يشاهد البرنامج	5	73	**78**
لا يشاهد البرنامج	3	20	**23**
المجموع	**87**	**385**	**472**

– احسب قيمة معامل الارتباط بالطريقة المناسبة مع بيان نوع هذا الارتباط.

الحل:

الجدول تزيد عدد خلاياه عن أربعة خلايا والمتغيران صفات لذا نستخدم معامل التوافق:

$$r_a = \sqrt{\frac{B-1}{B}} \quad /B = \frac{f_{11}^2}{f_{1.}f_{.1}} + \frac{f_{12}^2}{f_{1.}f_{.2}} + \cdots + \frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}}$$

$$B = \frac{f_{11}^2}{f_{1.}f_{.1}} + \frac{f_{12}^2}{f_{1.}f_{.2}} + \cdots + \frac{f_{ij}^2}{f_{i.}f_{.j}} = 1.11$$

$$r_a = \sqrt{\frac{B-1}{B}} = \sqrt{\frac{1.11-1}{1.11}} = 0.32$$

تحديد نوع الارتباط: ارتباط طردي ضعيف

التمرين الثاني:

الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلاب في اختبار تم إجراؤه على نفس الطلاب مرتين متتاليتين والمطلوب حساب قيمة معامل الارتباط لبيرسون بين درجات الاختبارين.

درجة الاختبار الأول	3	5	9	8	2
درجة الاختبار الأول	4	6	7	4	3

الحل:

X	Y	XY	X^2	Y^2
3	4	12	9	16
5	6	30	25	36

49	81	63	7	9
16	64	32	4	8
9	4	6	3	2
126	183	143	24	27

$$r_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{(5*143)-(27*24)}{\sqrt{[5*183-(27)^2]*[5*126-(24)^2]}} = 0{,}668$$

تحديد نوع الارتباط: ارتباط طردي متوسط

التمرين الثالث:

الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلاب في اختبار تم إجراؤه على نفس الطلاب مرتين متتاليتين والمطلوب حساب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين درجات الاختبارين.

2	8	9	5	3	**درجة الاختبار الأول**
3	4	7	6	4	**درجة الاختبار الأول**

الحل:

نفترض أن درجات الاختبار الأول هي X ودرجات الاختبار الثاني هي Y ثم نكون الجدول أدناه مع ملاحظة أنه إذا تم ترتيب قيم X تصاعديا لابد من ترتيب قيم Y تصاعديا والعكس بالعكس.

وهنا سوف نرتب القيم تصاعديا.

مع ملاحظة أنه إذا تساوى عددان أو أكثر في القيمة يأخذ كل منهم متوسط ترتيبهم.

فمثلا المتغير Y يوجد به رقمان متساويان هما (4،4) وترتيبهما (2،3) إذا يأخذ كل منهم متوسط الترتيب 2.5 = 2/5 = 2/(3+2).

$[R(X)-R(Y)]^2$	$R(X)-R(Y)$	$R(Y)$	$R(X)$	Y	X
0.25	0.5−	2.5	2	4	3
1	1−	4	3	6	5
0	0	5	5	7	9
2.25	1.5	2.5	4	4	8
0	0	1	1	3	2
3.5	**المجموع**				

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}[R(x_i)-R(y_i)]^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6*3{,}5}{5*24} = 0.825$$

تحديد نوع الارتباط: ارتباط طردي قوي

<u>التمرين الرابع:</u>

البيانات التالية تبين الكميات المعروضة من سلعة معينة y وسعر السلعة x.

– تقدير معادلة انحدار الكمية المعروضة على السعر.

الكمية المطلوبة y	10	15	5	4	3	13
السعر X	7	10	4	3	2	8

<u>الحل:</u>

لتقدير معادلة انحدار الكمية المعروضة على السعر نكون الجدول التالي:

y	x	x y	x^2
10	7	70	49
15	10	150	100
5	4	20	16
4	3	12	9
3	2	6	4
13	9	117	81
50	35	375	259

$$\widehat{B} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{6,375 - 35,5}{6,259 - (35)^2} = 1.52$$

$$\widehat{\alpha} = \bar{y} - \widehat{B}\bar{x} = \frac{50}{6} - \left(1,52 * \frac{35}{6}\right) = -32$$

معادلة خط الانحدار البسيط تكتب كما يلي:

$$\widehat{Y} = -32 + 1,52X$$

الفصل التاسع

الأرقام القياسية

تمهيد:

الأرقام القياسية واحدة من أهم أدوات التحليل الإحصائي التي تكشف الواقع الحقيقي لمستوى المؤشرات الاقتصادية والمالية والنقدية والاجتماعية كما هو الحال بالنسبة للرقم القياسي لأسعار المستهلك والرقم القياسي للأجور وكذلك الرقم القياسي المتعلق بكل من نسبة التبادل التجاري ومستوى الإنتاج الزراعي والصناعي وقوة المؤشرات النقدية الأخرى الخاصة بالتداول في أسواق المال والتجارة.

وتجدر الإشارة إلى أن تطبيقات الأرقام القياسية لم تعد مقتصرة على الاقتصاديين فقط، بل أصبحت وسيلة في أيدي المهتمين في العلوم الاجتماعية والإدارية والزراعية وغيرها وذلك لعمل المقارنات وقياس التغيرات.

1- تعريف الأرقام القياسية: الرقم القياسي هو عبارة عن مؤشر إحصائي يقيس التغير النسبي الذي يطرأ على ظاهرة معينة مثل: السعر، الكمية، القيمة، الأجر، وغيرها، بالنسبة لأساس معين، قد يكون فترة زمنية أو مكان معين، ويسمى الوقت أو المكان الذي تنسب إليه الظاهرة بفترة أو مكان الأساس، كما يسمى الوقت أو المكان الذي ننسبه بفترة أو مكان المقارنة، والرقم القياسي هو مؤشر ينشأ لبيان وقياس التغيرات أو التغيرات النسبية التي تطرأ على ظاهرة أو مجموعة من الظواهر بالنسبة لأساس محدد (قد يكون الزمان أو المكان)، واستخدام الأرقام القياسية كأساس للمقارنة لا يقتصر فقط على مقارنة التغير في ظاهرة ما زمنيا أو مكانيا، بل يمكن استخدامها للمقارنة بين ظاهرتين مختلفتين أو أكثر، فعلى سبيل المثال يمكن المقارنة بين التغيرات في أسعار سلعة ما والتغيرات في الكميات المستهلكة منها، أو المقارنة بين التغيرات في مستوى المعيشة للعمال ومستويات أجورهم[1].

2- تركيب الأرقام القياسية: من الأمور المهمة عند تركيب الأرقام القياسية اختيار فترة (سنة) ومكان الأساس، كما يتطلب الأمر أيضا تحديد فترة أو مكان المقارنة، فالرقم القياسي قد يكون زمني أو مكاني.

ويعطى الرقم القياسي بالصيغة التالية:

$$\text{الرقم القياسي للظاهرة} = \frac{\text{قيمة الظاهرة فى سنة المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة في سنة الأساس}} \times 100$$

ويسمى هذا الرقم القياسي بالرقم القياسي الزمني.

ويعطى الرقم القياسي أيضا بالصيغة التالية:

$$\text{الرقم القياسي للظاهرة} = \frac{\text{قيمة الظاهرة في مكان المقارنة}}{\text{قيمة الظاهرة في مكان الأساس}} \times 100$$

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 123.

ويسمى هذا الرقم القياسي بالرقم القياسي المكاني.

3- أقسام الأرقام القياسية: من حيث الصيغة يمكن تمييز صيغتين أساسيتين للأرقام القياسية هما الصيغ البسيطة والصيغ التجميعية.

3-1- الصيغ البسيطة للأرقام القياسية: وتتمثل في المناسيب التي تعتبر من أبسط الأرقام القياسية. والمنسوب هو نسبة قيمة المتغير في فترة المقارنة إلى قيمة نفس المتغير في فترة الأساس، ومن أقسام المناسيب ما يلي:

3-1-1- منسوب السعر: ويقصد به إظهار سعر سلعة واحدة معينة في فترة المقارنة منسوبا إلى سعر نفس السلعة في فترة الأساس، ويعبر عنه بالصيغة التالية[1]:

$$I_P = \frac{P_n}{P_o} \times 100$$

مثال (9-1): لو فرضنا أن أسعار المستهلك لمادة معينة (الدقيق) في سنة 2005 هي 800 دينار على اعتبار سنة 2005 هي سنة أساس، وارتفع الى 1200 دينار سنة 2010، على اعتبار سنة 2010 سنة مقارنة، احسب منسوب السعر.

الحل:

$$I_P = \frac{P_n}{P_o} \times 100 = \frac{1200}{800} \times 100 = 150$$

أي أن نسبة زيادة السعر في سنة المقارنة 2010 هو 50 % عن السعر في سنة الأساس 2005.

3-1-2- منسوب الكمية: ويقصد به إظهار كمية سلعة واحدة معينة في فترة المقارنة منسوبا إلى كمية نفس السلعة في فترة الأساس، ويعبر عنه بالصيغة التالية[2]:

$$I_Q = \frac{Q_n}{Q_o} \times 100$$

مثال(9-2): ارتفع انتاج مؤسسة ما إلى 85000 وحدة سنة 2004 في حين كان انتاجها يساوي 70000 وحدة في سنة 2000، أوجد منسوب الكمية إذا أخذنا سنة 2000 كسنة أساس.

الحل:

$$I_Q = \frac{Q_n}{Q_o} \times 100 = \frac{85000}{70000} \times 100 = 121.43$$

وهذا يعني أن إنتاج المؤسسة زاد بنسبة 21.43% في سنة 2004 عما كان عليه سنة 2000.

---

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 123.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 124.

3-1-3- منسوب القيمة: نعرف أن القيمة الاجمالية للسلعة هي عبارة عن كمية هذه السلعة مضروبة في سعرها ($V=P \times Q$)، فإذا كانت P_o وQ_o تعبر عن سعر السلعة والكمية المنتجة منها في سنة الأساس و P_n وQ_n تعبر عن سعر السلعة والكمية المنتجة منها في سنة المقارنة، فإن القيمة الإجمالية خلال سنة الأساس هي V_o وخلال سنة المقارنة هي V_n وعليه فإن منسوب القيمة يعطى بالصيغة التالية[1]:

$$I_v = \frac{V_n}{V_o} \times 100 = \frac{P_n Q_n}{P_o Q_o} \times 100$$

مثال(9-3): بلغت مبيعات وحدة نجارة 1000 وحدة من الكراسي سنة 2005 في حين كانت مبيعاتها في سنة 2004 800 كرسي فقط، فإذا كان سعر البيع في سنتي 2004 و2005 هو 1000 دينار و1200 دينار على التوالي، أوجد منسوب القيمة إذا اعتبرنا سنة 2004 هي سنة الأساس.

الحل:

$$I_v = \frac{V_n}{V_o} \times 100 = \frac{P_n Q_n}{P_o Q_o} \times 100 = \frac{1200 * 100}{1000 * 800} \times 100 = 150$$

وهذا يعني أن قيمة مبيعات المؤسسة زادت بنسبة 50% في سنة 2005 عما كانت عليه في سنة 2004.

3-2- الصيغ التجميعية للأرقام القياسية: الأرقام القياسية البسيطة هي أرقام قياسية تبين تطور ظاهرة واحدة محددة، في بعض الأحيان فإننا نرغب في دراسة تطور بعض الظواهر الأكثر تعقيدا مثل تطور المستوى العام للأسعار، تطور حجم الصادرات أو حجم الواردات وغيرها، والتطور في مثل هذه الظواهر لا يمكن التعبير عنه بالأرقام القياسية البسيطة بل يستخدم في ذلك ما يسمى بالأرقام القياسية التجميعية التي تنقسم إلى قسمين هما:

3-2-1- الأرقام القياسية التجميعية البسيطة: وهي الأرقام القياسية التجميعية التي تتعامل مع أسعار أو كميات أو قيم السلع مباشرة، فيكون الرقم القياسي عبارة عن مجموع أسعار أو كميات أو قيم السلع في سنة المقارنة مقسوما على مجموع أسعارها أو كمياتها أو قيمها في سنة الأساس، ويعبر على النتيجة كنسبة مئوية كما هو الحال بالنسبة للأرقام القياسية البسيطة، وتعطى بالصيغ التالية[2]:

- الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار يعطى بالصيغة التالية:

$$I_P = \frac{\sum P_n}{\sum P_o} \times 100$$

- الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات يعطى بالصيغة التالية:

---

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 123.

[2]. أحمد عبد السميع طبيه، مرجع سابق، ص 76.

$$I_Q = \frac{\sum Q_n}{\sum Q_o} \times 100$$

– الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيم يعطى بالصيغة التالية:

$$I_V = \frac{\sum V_n}{\sum V_o} \times 100$$

مثال(9–4): البيانات التالية توضح الكميات المنتجة من مجموعة من السلع في سنتي 1995 و 2005.

السلعة	وحدة القياس	الكمية المنتجة في 1995	الكمية المنتجة في 2005
سكر	طن	712	2100
سميد	ألف طن	100	430
زيت المائدة	5 لترات	90000	20000

احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط لكميات تلك السلع.

الحل:

$$I_Q = \frac{\sum Q_n}{\sum Q_o} \times 100 = \frac{2100 + 430 + 20000}{712 + 100 + 90000} \times 100 = 223$$

وذلك يعني أن المتوسط العام لإنتاج السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي قد ارتفع في سنة 2005 (سنة المقارنة) عنه في سنة 1995 (سنة الأساس) بنسبة 123%، أو بمعنى آخر فإن المستوى الإنتاجي العام في سنة 2005 بلغ 223% مقارنة بالمستوى الإنتاجي العام لنفس السلع في سنة 1995.

بالرغم من سهولة تطبيق طريقة الرقم القياس التجميعي البسيط إلا أنه يشوبها عيبين أساسيين يؤثران على قيمة الرقم القياسي وهما:

– أن هذه الطريقة لا تأخذ بعين الاعتبار الأهمية النسبية للسلع المختلفة، فهي تعطي جميع السلع أوزانا متساوية في الأهمية.

– أنها لا تعير اهتماما لوحدات القياس المستخدمة مثل: كغ، طن، لتر، متر وغيرها من الوحدات الكمية.

3–2–2– الأرقام القياسية التجميعية المرجحة: للتغلب على عيوب الطريقة التجميعية البسيطة فإن الصيغ المرجحة للأرقام القياسية تعتمد على ترجيح أسعار أو كميات كل سلعة باستخدام معامل معين، ويستخدم عادة كمية السلعة المباعة أو سعرها خلال سنة الأساس أو خلال سنة المقارنة أو خلال سنة نموذجية (قد تكون متوسط عدد من السنوات). وهذه الأوزان تشير إلى الأهمية النسبية للسلعة، أما بالنسبة للأجور فإن إجمالي الأجور المدفوعة في كل قطاع يمكن اعتبارها أوزانا مناسبة.

وهناك ثلاث صيغ للأرقام القياسية المرجحة تعتمد على ما إذا كنا نستخدم كميات أو أسعار سنة الأساس أو المقارنة أو السنة النموذجية.

3-2-2-1- رقم لاسبيرز: وهو الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام سنة الأساس، وقد اقترح هذا المؤشر سنة 1844 من طرف لاسبيرز، وهناك ثلاث صيغ لهذا الرقم وهي[1]:

- **الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار**: تعطى صيغته كالتالي:

$$L_P = \frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o\, Q_o} \times 100$$

مثال(9-5): الجدول التالي يبين أسعار مجموعة من السلع وكذا متوسط الكمية المستهلكة لأسرة متوسطة العدد في كل من سنتي 1990 و2000.

البيان / السلعة	وحدة القياس	السعر في سنة 1990	السعر في سنة 2000	الكمية المستهلكة	الكمية المستهلكة في سنة 2000
سميد	القنطار	2000	3000	10	12
حليب	اللتر	18	18	30	40
سكر	كغ	20	20	15	20
غاز طبيعي	متر مكعب	20	20	5	8
المجموع	/	/	/	**60**	**80**

احسب رقم لاسبيرز للأسعار (الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس).

الحل:

$$L_P = \frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{(3000*10)+(28*30)+(30*15)+(30*5)}{(2000*10)+(18*30)+(20*15)+(20*5)} \times 100$$
$$= 150.14$$

وهذا يعني حدوث زيادة في أسعار السلع بنسبة 50.14% سنة 2000 مقارنة بنسبة 1990.

- **الرقم القياسي التجميعي المرجح للكميات**: تعطى صيغته كالتالي:

$$L_Q = \frac{\sum Q_n P_o}{\sum Q_o\, P_o} \times 100$$

ويفترض في هذه الصيغة ثبات الأسعار في سنتي الأساس والمقارنة بغض النظر عن تغير الكميات المستهلكة في السنتين.

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 128.

– **الرقم القياسي التجميعي المرجح للقيم الكلية:** تعطى صيغته كالتالي:

$$L_{VG} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_o} \times 100$$

مثال(9–6): أحسب رقم لاسبيرز للكميات وللقيم من واقع بيانات المثال السابق.

الحل:

لتسهيل العمليات الحسابية فإننا نقترح أعداد جدول جديد يكون على الشكل التالي:

السلعة	P_0	Q_0	P_n	Q_n	P_0Q_0	Q_nP_0	P_nQ_0	P_nQ_n
سميد	2000	10	3000	12	20000	24000	30000	36000
حليب	18	30	28	40	540	720	840	1120
سكر	20	15	30	20	300	400	450	600
غاز طبيعي	20	5	30	8	100	160	150	240
المجموع	/	/	/	/	**20940**	**25280**	**31440**	**37960**

رقم لاسبيرز للكميات:

$$L_Q = \frac{\sum Q_n P_o}{\sum Q_o\, P_o} \times 100 = \frac{25280}{20940} \times 100 = 120.73$$

رقم لاسبيرز للقيم الكلية:

$$L_{VG} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{37960}{20940} \times 100 = 181.28$$

3–2–2–2– رقم باش: وهو الرقم القياسي التجميعي باستخدام سنة المقارنة، وله أيضا ثلاث صيغ كما في رقم لاسبيرز، كما يلي[1]:

– **الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار:** تعطى صيغته كالتالي:

$$P_P = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_n} \times 100$$

– **الرقم القياسي التجميعي المرجح للكميات:** تعطى صيغته كالتالي:

$$P_Q = \frac{\sum Q_n P_n}{\sum Q_o\, P_n} \times 100$$

– **الرقم القياسي التجميعي المرجح للقيم الكلية:** تعطى صيغته كالتالي:

$$P_{VG} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_o} \times 100$$

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 132.

أي أن رقم باش للقيم الإجمالية يساوي رقم لاسبيرز للقيم الإجمالية.

مثال(9–7): أحسب الصيغ الثلاث للرقم القياسي لباش من واقع بيانات المثال السابق.

الحل:

من الجدول السابق لدينا:

السلعة	PoQo	PoQn	PnQo	PnQn
سميد	20000	24000	30000	36000
حليب	540	720	840	1120
سكر	300	400	450	600
غاز طبيعي	160	160	150	240
المجموع	**20940**	**25280**	**31440**	**37960**

رقم باش للأسعار:

$$P_P = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_n} \times 100 = \frac{37960}{25280} \times 100 = 150.16$$

رقم باش للكميات:

$$P_Q = \frac{\sum Q_n P_n}{\sum Q_o\, P_n} \times 100 = \frac{37960}{31440} \times 100 = 120.74$$

رقم باش للقيم الكلية:

$$P_{VG} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{37960}{20940} \times 100 = 181.28$$

3–2–2–3– رقم فيشر (الرقم القياسي الأمثل): تبين مما سبق أن رقم لاسبيرز يجعل صيغة الرقم القياسي متحيز إلى أعلى بالنظر إلى أنه مبني على الترجيح بأوزان نسبة الأساس، أما رقم باش فيجعل الرقم القياسي متحيز إلى أسفل لأنه يستند على الترجيح بأوزان سنة المقارنة، وعليه فقد اقترحت عدة صيغ لمعالجة الفرق بين الترجحين، وقد كانت صيغة فيشر أهمها، وتأخذ هذه الصيغة بعين الاعتبار رقمي لاسبيرز وباش لتكوين رقم قياسي أمثل الذي يساوي المتوسط الهندسي للرقمين، ويعطى رقم فيشر بالصيغة التالية: $F = \sqrt{L \times P} \times 100$

ومنه يكون لدينا ثلاث صيغ لرقم فيشر هي كالتالي[1]:

– **الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار:** تعطى صيغته كالتالي:

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 135.

$$F_P = \sqrt{L_P \times P_P} \times 100$$

- **الرقم القياسي التجميعي المرجح للكميات:** تعطى صيغته كالتالي:

$$F_Q = \sqrt{L_Q \times P_Q} \times 100$$

- **الرقم القياسي التجميعي المرجح للقيم:** تعطى صيغته كالتالي:

$$F_{VG} = \sqrt{L_{VG} \times P_{VG}} \times 100$$

مثال(9-8): أحسب الصيغ الثلاث للرقم القياسي لفيشر من واقع بيانات المثال السابق.

الحل:

رقم فيشر للأسعار:

$$F_P = \sqrt{L_P \times P_P} \times 100 = \sqrt{1.5014 * 1.5016} \times 100 = 150.15$$

رقم فيشر للكميات:

$$F_Q = \sqrt{L_Q \times P_Q} \times 100 = \sqrt{1.2073 * 1.2074} \times 100 = 120.73$$

رقم فيشر للقيم:

$$F_{VG} = \sqrt{L_{VG} \times P_{VG}} \times 100 = \sqrt{1.8128 * 1.8128} \times 100 = 181.28$$

تمارين الفصل التاسع

التمرين الأول:

الجدول التالي يبين أسعار وكميات ثلاث سلع في سنتي 2000 و2005.

- احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط.
- احسب رقم باش للأسعار.
- احسب رقم فيشر للكميات.

السلعة	سنة 2000		سنة 2005	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
السلعة الأولى	10	14	12	16
السلعة الثانية	6	12	5	18
السلعة الثالثة	8	10	10	8

حل التمرين الأول:

السلعة	P_0	Q_0	P_n	Q_n	P_0Q_0	P_oQ_n	P_nQ_0	P_nQ_n
الأولى	10	14	12	16	140	160	168	192
الثانية	6	12	5	18	72	108	60	90
الثالثة	8	10	10	8	80	64	100	80
المجموع	**24**	**36**	**27**	**42**	**292**	**332**	**325**	**362**

الرقم التجميعي البسيط للأسعار:

$$I_P = \frac{P_n}{P_o} \times 100 = \frac{27}{24} \times 100 = 112.5$$

أي أن الأسعار في سنة 2005 زادت عما كانت عليه في سنة 2000 بنسبة 12.5%.

الرقم التجميعي البسيط للكميات:

$$I_Q = \frac{\sum Q_n}{\sum Q_o} \times 100 = \frac{42}{36} \times 100 = 116.67$$

أي أن الكميات المنتجة من هذه السلع زادت في سنة 2005 بـ 16.67% عما كانت عليه في سنة 2000.

رقم باش للأسعار:

$$P_P = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o Q_n} \times 100 = \frac{362}{332} \times 100 = 109.04$$

رقم فيشر للكميات:

$$F_Q = \sqrt{L_Q \times P_Q} \times 100 = \sqrt{1.13698 * 1.11385} \times 100 = 112.54$$

أي أن الكميات المنتجة من هذه السلع في سنة 2005 زادت بنسبة 12.54% عما كانت عليه في سنة 2000.

<u>التمرين الثاني:</u>

من واقع بيانات التمرين الأول، أحسب الأرقام القياسية الثلاث للاسبيرز.

<u>حل التمرين الثاني:</u>

رقم لاسبيرز للأسعار:

$$L_P = \frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{325}{292} \times 100 = 111.3$$

رقم لاسبيرز للكميات:

$$L_Q = \frac{\sum Q_n P_o}{\sum Q_o\, P_o} \times 100 = \frac{332}{292} \times 100 = 113.7$$

رقم لاسبيرز للقيم:

$$L_{VG} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{362}{292} \times 100 = 123.97$$

<u>التمرين الثالث:</u>

الجدول التالي يبين أسعار والكميات المستهلكة من ثلاث سلع.

- احسب الأرقام القياسية للأسعار للاسبيرز للسنوات الثانية والثالثة.
- احسب الأرقام القياسية للأسعار لباش للسنوات الثانية والثالثة.

السنة	السلعة 1		السلعة 2		السلعة 3	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية	السعر	الكمية
الأولى	6	90	9	60	11	40
الثانية	8	110	10	70	13	75
الثالثة	10	80	80	80	10	80

<u>حل التمرين الثالث:</u>

- **حساب الرقم القياسي للأسعار للاسبيرز للسنة الثانية:**

$$L_P = \frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{1840}{1520} \times 100 = 121.05$$

- **حساب الرقم القياسي للأسعار للاسبيرز للسنة الثالثة:**

$$L_P = \frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{1960}{1520} \times 100 = 128.95$$

- **حساب الرقم القياسي للأسعار لباش للسنة الثانية:**

$$P_P = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_n} \times 100 = \frac{2555}{2115} \times 100 = 120.8$$

- **حساب الرقم القياسي للأسعار لباش للسنة الثالثة:**

$$P_P = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_n} \times 100 = \frac{2480}{2080} \times 100 = 119.23$$

التمرين الرابع:

الجدول التالي يبين أسعار ثلاث سلع والكميات المطلوبة منها خلال سنتي 2004 و2005.

السلعة	سنة 2000		سنة 2005	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
A	120	200	125	250
B	130	180	150	110
C	150	80	150	90

- احسب رقم لاسبيرز للأسعار لسنة 2005 باعتبار سنة 2004 سنة أساس.
- احسب رقم باش للأسعار لسنة 2005 باعتبار سنة 2004 سنة أساس.
- احسب الرقم القياسي للإنفاق (القيم الإجمالية).

حل التمرين الرابع:

- **حساب رقم لاسبيرز للأسعار:**

$$L_P = \frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = 107.74$$

- **حساب رقم باش للأسعار:**

$$P_P = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_n} \times 100 = \frac{61250}{57800} \times 100 = 105.97$$

- **حساب الرقم القياسي للقيم:**

$$L_{VG} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o\, Q_o} \times 100 = \frac{61250}{59400} \times 100 = 103.1$$

قائمة المراجع

1- إبراهيم أبو عقيل، **مبادئ في الإحصاء**، الطبعة الأولى، دار أسامة للنشر والتوزيع، الأردن، 2012.

2- أحمد عبد السميع طبيه، **مبادئ الإحصاء**، دار البداية ناشرون وموزعون، الأردن، 2008.

3- السيد محمد أبو هاشم وأحمد عبد الرحمن إبراهيم، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي باستخدام البرنامج الإحصائيSPSS** ، مكتبة الرشد، السعودية، 2012.

4- إسماعيل بن قانة، **الإحصاء الوصفي والحيوي: دروس وتطبيقات**، دار أسامة للنشر والتوزيع، الأردن، 2011.

5- ثائر فيصل شاهر، **الإحصاء في العلوم الإدارية والمالية**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.

6- خالد المشهداني ورائد العبيدي، **مبادئ الإحصاء متضمن التحليل الإحصائيspss** ، دار الأيام للنشر، الأردن، 2013.

7- راشد عادل الأسمر، **علم الإحصاء بين النظرية والتطبيق**، دار أمجد للنشر والتوزيع، الأردن، 2015.

8- كامل فليفل وفتحي حمدان، **الإحصاء**، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، 2013.

9- محمد النعيمي وعبد الرحمن العودة، **مقدمة في الإحصاء مع تطبيقات على برنامج (SPSS)**، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، الأردن، 2007.

10- محمد القوصي، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، مركز الكتاب الأكاديمي، الأردن، 2014.

11- مؤيد الفضل وحامد الشمرتي، **الأساليب الإحصائية في اتخاذ القرار**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الأردن، 2005.

12- معوض الفلاح عبد السلام، **مقدمة في الإحصاء لاختصاصيي المكتبات والمعلومات باستخدام برنامج SPSS**، مكتبة الرشد، السعودية، 2009.

13- طه حسين الزبيدي، **مبادئ الإحصاء**، دار غيداء للنشر والتوزيع، الأردن، 2013.

14- صالح بن محمد الصغير، **مقدمة في الإحصاء الاجتماعي**، مكتبة الملك فهد الوطنية للطباعة والنشر، السعودية، 2013.

15- عبد الحليم عشماوي وآخرون، **الإحصاء الحيوي وتصميم التجارب**، المكتبة الأكاديمية، مصر، 2008.

16- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **أساليب الإحصاء للعلوم الاقتصادية وإدارة الأعمال مع استخدام برنامجSPSS** ، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.

17- فتحي عبد العزيز أبو راضي، **الطرق الإحصائية في العلوم الاجتماعية**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، لبنان، 1998.

18- وليد إسماعيل السيفو، **أساسيات الأساليب الإحصائية للأعمال**، الطبعة الأولى، منشورات زمزم، الأردن، 2010.