الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
و زارة التعليم العلي و البحث العلمي
جامعة الشهيد الشيخ العربي تبسي- تبسة -
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات و الاعلام الالي

مذكرة تخرج
الحصول على
شهادة الماستر في ميدان الرياضيات و الاعلام الالي
شعبة: الرياضيات
تخصص معادلات تفاضلية جزئية و تطبيقات
تحت عنوان

المشتق الكسري لجوماري خصائص و نتائج

تقديم : قداش زين الدين

أمام اللجنة :

الرئيس :	**زارعي عبد الرحمان**	**أستاذ تعليم عالي**	**جامعة الشهيد العربي التبسي**
الممتحنة:	**مسلوب فتيحة**	**أستاذة محاضرة -أ-**	**جامعة الشهيد العربي التبسي**
المشرف:	**هوام كمال**	**أستاذ تعليم عالي**	**جامعة الشهيد العربي التبسي**

نوقشـــت يوم :2023/06/04

السنة الجامعية :2023/2022

بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحيم

'شهد الله أنه لا إله إلا هو والملائكة
وأولوا العلم قائما بالقسط
لا اله إلا هو العزيز الحكيم'

صدق الله العظيم

الآية 18 من سورة آل عمران

كلمة شكر و عرفان

نتقدم بخالص عبارات الشكر والتقدير والامتنان للأستاذ المشرف المحترمة

الدكتور هوام كمال الذي أنار لي الطريق وشجعني على البحث والاطلاع بتوجيهاته ونصائحه القيمة لي منا جزيل الشكر وخالص الاعتراف بالجميل.

كما نتوجه بالشكر إلى كل الأساتذة الذين نهلت منهم منابعهم العلمية طوال فترة دراستنا بصفة عامة خاصة الاستاذ زارعي والاستاذ زرولية و الاستاذ سالم و ذياب و الاستاذ بوزنادة و الاستاذ حفظ الله والاستاذ دقايشي والاستاذة الفاضلة مسلوب و الاستاذة دقايشية لهم اسمى الاحترام و جامعة العربي تبسي معهد الرياضيات بصفة خاصة وكذا كل عمال الجامعة الذين جعلوه منارا ورائدا في العلم والمعرفة.

كما لا ننسى أن نتوجه بالشكر إلى كل الزملاء الطلبة الذين شجعوني على الاستمرار و المثابرة ولو بكلمة مشجعة أو لفتة طيبة

خاصة طلبة الدفعة على الاخص ايمن و هشام و بدر الدين

و محمد و شريف ومصعب فلهم مني أفضل و أسمى ما يعبر به المحسن إليه للمحسن و المتفضل عليه للمتفضل.

زين الدين

اهداء

قالى تـعالى : " و قل ربي ارحمهما كما ربياني صغيرا "

إلى من أنارا لي درب الحياة ، من كانا السبب في ما وصلت إليه من نجاح

إلى من أطمع في حرصهما و يرفع وجودهما مقامي

إلى من سهرا على توفير لقمة العيش الحلال و غرسا فيا المبادئ الحسان ،

أمي و أبي أطال الله في عمرهما و متعهما بالصحة و الخير

إلى من جمعتني معهم ظلمات رحم واحد و ضمتني معهم جدران بيت

واحـد اخوتي و اخواتي حفظهم الله

الى زوجتي و سندي في الحياة

إلى كـل أفراد العائلـة كبيرا و صغيرا

إلى كل الزملاء الذين عرفت فيهم أسمى معاني الصداقة و الصحبة الصالحة و أخص بالذكر:

الاستاذ خالد رغيس و الاستاذ زين فواد و الاستاذ عماد

الى تلاميذي الاعزاء وفقهم الله

إلى كل من يعرفني و يكن لي الثقة و الإخلاص

إلى كـل ....من يعني وجودي لـه شيئـا في حياته...

إلى كل هؤولاء أهدي ثمرة جهدي

زين الدين

ملخص البحث

إن الهدف من هذا العمل هو إعطاء لمحة موجزة عن موضوع الحساب الكسري و المشتقات الكسرية و خاصة مشتقة جوماري الكسرية و خصائصها و نتائجها و تطبيقاتها ، وذلك بإعطاء التعاريف والنظريات الأساسية بإعتباره موضوعا حديث النشأة ، و هذا من الأهمية نظرا للدور الكبير الذي يلعبه في نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية التي عجزت الرياضيات الكلاسيكية عن التعبير عنها ، وكذا حل العديد من المسائل خاصة ما تتعلق بالدوال غير القابلة للتفاضل ، حيث تم تحويل على العديد من الظواهر الفيزيائية إلى معادلات تفاضلية كسرية حققت نتائج دقيقة.

الكلمات المفتاحية:

المشتق الكسري بمعني جوماري- تحويل لابلاس – المعادلات التفاضلية الكسرية

Résumé

Le but de ce travail est de donner un bref aperçu du sujet de l'arithmétique fractionnaire et des dérivées fractionnaires, en particulier la dérivée fractionnaire de Jumarie, et de ses caractéristiques, résultats et applications, en donnant des définitions et des théories de base en tant que nouveau sujet émergent, et c'est d'importance en raison du grand rôle qu'il joue dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels que les mathématiques classiques n'ont pas pu exprimer, ainsi que la résolution de nombreux problèmes, en particulier ceux liés aux fonctions non différentiables, car de nombreux phénomènes physiques ont été convertis en différentiel fractionnaire équations qui ont obtenu des résultats précis.

les Mots clés

Dérivée fractionnaire au sens de Jumarie - Transformée de Laplace - Équations différentielles fractionnaires

Summary

The purpose of this work is to give a brief overview of the subject of fractional arithmetic and fractional derivatives, in particular the fractional derivative of Jumarie, and its characteristics, results and applications, giving definitions and basic theories in as a new emerging subject, and it is of importance because of the great role it plays in modeling many natural phenomena that classical mathematics could not express, as well as solving many problems, especially those related to non-differentiable functions, since many physical phenomena have been converted into fractional differential equations which have obtained accurate results.

Key words

Fractional derivative in the sense of Jumarie - Laplace transform - Fractional differential equations.

الفهرس

قائمة الجداول

قائمة الاشكال

سوف نستخدم الرموز التالية خلال هذا العمل:

المدلول	الرمز
المجموعات	
مجموعة الاعداد المركبة	□
مجموعة الاعداد الطبيعية	□
مجموعة الاعداد الحقيقية	□
مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة	$□_{+}$
الدوال الخاصة	
الدالة غاما-Gamma -	Γ
الدالة بيتا- Beta-	B
الدالة ميتاج- ليفلر Mittag-Leffler بوسيط وحيد	E_{α}
الدالة ميتاج- ليفلر Mittag-Leffler بوسيطين	$E_{\alpha,\beta}$
دالة الجزء الصحيح للعدد الحقيقي .	$[\cdot]$
المؤثرات	
الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان– لبيوفيل	${}^{RL}D_{\alpha+}^{\alpha}$
الإشتقاق الكسري اليميني	${}_{t}^{R}D_{b}^{\alpha}$
الإشتقاق الكسري اليساري	${}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}$
الإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو	${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}$
المشتق الكسري لجوماري من الرتبة α	D_{x}^{α}
جداء اللف La Convolution	$*$
تحويل لابلاس	$L\{f(t),s\}$
التحويل العكسي للابلاس	L^{-1}
المحدد	Δ

خطة البحث

خطة البحث

المقدمة العامة

المقدمة العامة

يعد الاشتقاق من المفاهيم الهامة في الرياضيات وكذلك العلوم التطبيقية بمختلف مجالاتها، إذ له أهمية كبيرة في نمذجة الظواهر الطبيعية المتغيرة .تعود هذه الأهمية إلى الارتباط الوثيق بين مفهوم الاشتقاق ومفهوم التغير ، فمثلاً، يقترن مفهوم المشتق من المرتبة الأولى بسرعة التغير في النظام الديناميكي، والمشتق من المرتبة الثانية بتسارع ذلك التغير، بينما المشتق من المرتبة الثالثة بالارتجاج (jerk). تعبر عن معدل تغير التسارع . نلاحظ دوماً أن مرتبة الاشتقاق تأخذ قيمة طبيعية .

و يعد حساب التفاضل والتكامل الكسري(التحليل الكسري)من أحد مجالات الرياضيات النظرية الذي يتعامل مع التفاضل والتكامل برتب غير صحيحة، فهو يعد تعميماً لمفهوم التفاضل والتكامل التقليدي .ظهرت الفكرة عام 1695برسالة أرسليها الباحث L'Hopitalإلى Leibniz يسأله عن ملاحظة خاصة ببحثه المتعمق بحساب المشتق من الرتبةn .وكان السؤال" في $\frac{d^n f}{dx^n}$ ماذا يحدث اذا كانت $n = \frac{1}{2}$ ؟ كانت تمك اللحظة التي ولد فيها ما يعرف بالتفاضل الكسري.

وقد قدم العديد من الرياضيين تعاريف مختلفة للاشتقاق من الرتب كسرية أشهرهم ريمان – ليوفيل، كابوتو، جرونوالد-لينيكوف وكذا هادمارد , كوبر، وري و لابلاس و ابل ...الخ ، لكن المشكلة أن معظم هذه الأنواع لا تحقق الصيغ الكلاسيكية للاشتقاق مثل قاعدة الضرب وقاعدة القسمة وقاعدة السلسلة على سبيل المثال. وقد ظهر مؤخرا تعاريف تحقق الخواص السابقة أمثال المشتق الكسري المحافظ (Conformable) وغير المحافظ(non conformable).و أصبح هذا الفرع من الرياضيات في العقود الثلاثة الأخيرة هدفاً لعديد من المؤتمرات التخصصية والبحوث الجامعية حيث في سنة 1974 نظمت جامعة Haven New أول مؤتمر عن حساب التفاضل والتكامل الكسري[1] .

و تطورت الصيغ المشتقات الكسرية بأعمال باحثين ومن بينهم جوماري سنة 2006 (جامعة مونتريال كندا) حيث ادت اعماله الى تطوير صيغة المشتق الكسري لريمان لوفيل ليفتح افاق جديدة في حساب التفاضل والتكامل الكسري الذي بقي نظريا حتى تم التعرف على المعادلات التفاضلية الكسرية التي تعد نماذج لعديد من المسائل التطبيقية في علوم الطبية و تطور الاورام ، والفيزياء- مرونة المزوجة- والهيدرولوجيا .
و الجيولوجيا و الفضاء وبذلك لم يبقي مفهوم الاشتقاق من رتب كسرية حبيس الرياضيات النظرية.

ومن اجل الالمام بالموضوع تم تقسيم هذا العمل الى ثلاثة فصول حيث تناولنا في

الفصل الاول : مفاهيم اساسية في الحساب الكسري و كذا الدوال و العلاقات المتعلقة به و كذا استخداماته على ارض الواقع بأمثلة تطبيقية

الفصل الثاني : المشتق الكسري لجوماري خصائص و نتائج .

الفصل الثالث : مدخل للمعادلات التفاضلية ;إستخدامات المشتق الكسري لجوماري لحل بعض المسائل و المعادلات التفاضلية .

[1] I. Podlubny ; Fractional Di_erential Equations, Academic Press, San Diego, (1999)

الفصل الاول
مفاهيم أساسية في الحساب الكسري

تمهيد :
في هذا الفصل ، قمنا بتقدم أسس الاشتقاق الكسري نشأة و تطورا .سوف نشير إلى اهم ادوات الاشتقاق الكسري و خواصه . ونشير إلى أنه توجد عدة تعاريف و اعمال في مجال الاشتقاق الكسري سنذكر أهمها.
وعليه سنتطرق في هذا الفصل إلى تعريف بعض الدوال الخاصة بالحساب الكسري و كذا بع النمواج للاشتقاق الكسري و خواصها

1.1 الدوال الخاصة في الحساب الكسري

1.1.1 الدالة غاما-Gamma -

تعد دالة غاما**(Gamma function)** من أهم الدوال الخاصة التي لها أهمية كبيرة في التحليل الرياضي ويمكن تعريفها بمتغير معقد باستخدام إما سلسلة أو تكامل مناسب، وتساعد هذه الدالة في إيجاد حل لبعض المعادلات التكاملية والتفاضلية والتطبيقات الفيزيائية والميكانيكية وغيرها، وتعرف بدلالة تكامل معتل متعلق بوسيط وهذا التكامل لايمكن حسابه بدلالة الدوال الأولية ومنها تكامل هانكل المحيطي[1]. [1]

إن أول من استخدم الرمز غاما(Γ) هوالرياضي الفرنسي ليجندر**(Legender)** في عام**1839 م**، وبسبب أهميته الكبيرة تمت دارسته من قبل الرياضيين البارزين أمثال(غوص، جودرمان، ليوفيل،وايرشتراس ، هيرميت)، وقد أعطي منظور تأريخي كامل لدالة غاما في عمل الرياضي(جودي فروي)بالإضافة إلى .العديد من المؤلفين الآخرين.

وسنعرض دالة غاما ودارسة بعضاً من خصائصها من خلال معاملتها كدالة لمتغيرات حقيقية ولدالة لمتغيرات مركبة والتي تعطى بصيغ مختلفة، وهي دالة تحليلية لـ**z** ولها تطبيقات متعددة في المستوي الديكارتي و المركب، ،. ولدالة غاما استخدامات بحل بعض من المعادلات التكاملية، ومنها تكامل هانكل المحيطي، وفقاً لدالة بيسل، من .أجل **n** عدد صحيح.

تعريف 1.1.1. الدالة قاما دالة عقدية ودالة خاصة فهي امتداد للدالة العاملي في مجموعة الأعداد المركبة باستثناء بعض النقط

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{-\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (1.1)$$

[1] Barnes EW. "The Theory of the Double Gamma Function." hilosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, vol. 196, The Royal Society, 1901, pp. 265–387

مع $z \in \mathbb{C}$ من اجل $\operatorname{Re}(z) \succ 0$

حيث $\Gamma(1)=1$ و $\Gamma(0_{+})=+\infty$

و عرف رياضياً باسم العاملي المعمم، تكامل أولر من النوع الثاني وكما يأتي[2] [2]:

$$n = \int_{0}^{-\infty} e^{-t} t^{n} dt \qquad n \neq -1,-2,-3,.... \qquad (1.2)$$

تعريف 2.1.1

الدالة غاما تعد من الدوال الأساسية في حساب التفاضل و التكامل الكسري المحلي،وتسمى أيضا دالة غاما لأولر ، وتعطى بدلالة التكامل من الشكل التالي:

من اجل كل حيث نعرف الدالة غاما ايضا بالنهاية التالية :

$$\Gamma(n) = \lim_{x \to \infty} \frac{n!n^{z}}{z(z+1)(z+2)........(z+n)} \qquad (1.3)$$

اثبات تكافي التعريفين

نستعمل الدالة المساعدة f_n حيث

$$f_n(z) = \int_{0}^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} t^{z-1} dt \qquad 1(1.4)$$

وبوضع $\tau = \frac{t}{n}$ و بتكرار التكامل التجزئة نتحصل على : [2]

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= n^{z} \int_{0}^{1} (1-\tau)^{n} \tau^{z-1} dt \\
&= \frac{n^{z}}{z} n \int_{0}^{1} (1-\tau)^{n-1} \tau^{z} dt \\
&= \frac{n^{z} n!}{z(z+1)(z+2).......(z+n-1)} \int_{0}^{1} \tau^{z+n-1} dt \qquad (1.5) \\
&= \frac{n^{z} n!}{z(z+1)(z+2).......(z+n-1)(z+n)}
\end{aligned}$$

خواص الدالة غاما

ومن المعلوم ان

$$\lim_{x \to \infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} = e^{-t} \qquad (1.6)$$

عند ادخال النهاية على طرفي المعادلة 1 نجد

[2] I. Podlubny ,Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego,1999.

$$\lim_{x\to\infty} f_n(z)=\lim_{x\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1.7}$$

و هو المطلوب في اثبات (1.2)

خاصية1.1.1 التتابع $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \quad \forall z\neq 0$: (1.8)

برهان العلاقة السابقة ِ باستعمال المكاملة بالتجزئة على النحو التالي

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{2}dt=\left[-e^{t}t^{z}\right]_{t=0}^{t=\infty}+z\int_0^\infty e^{-tz-1}dt=z\Gamma(z) \tag{1.9}$$

من الواضح ان $\Gamma(1)=1$ باستخدام العلاقة 3 نجد من اجل كل $z=1,2,3,....$

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1=1!$$

$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2.1!=2! \tag{1.10}$$

$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3.2!=3!$$

$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n.(n-1)!=n!$$

خاصية 2.1.1.التسلسل

إذاكان z عددا صحيحا موجبا فان

$$\Gamma(z+1)=z! \tag{1.11}$$

خاصية 3.1.1.:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}(n!)} \tag{1.12}$$

البرهان:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}(n!)}$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1.13)$$

$$=\frac{(2n)(2n-1)(2n-2).......1}{2^{2n}(2n)(2n-2)(2n-4).......2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}(n!)}$$

ومن النتيجة $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}(n!)}$

اعتمادا على الخاصية السابقة نجد

خاصية:4.1.1 التكرار

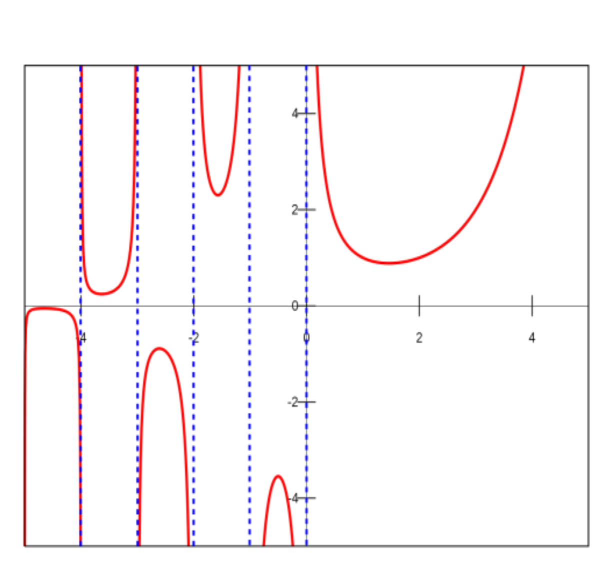
$$\Gamma(1-n)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n) \quad : (1.14)$$

$$\Gamma(1-n)\Gamma(n)=\frac{\pi}{\sin(\pi n)} \quad (1.15)$$

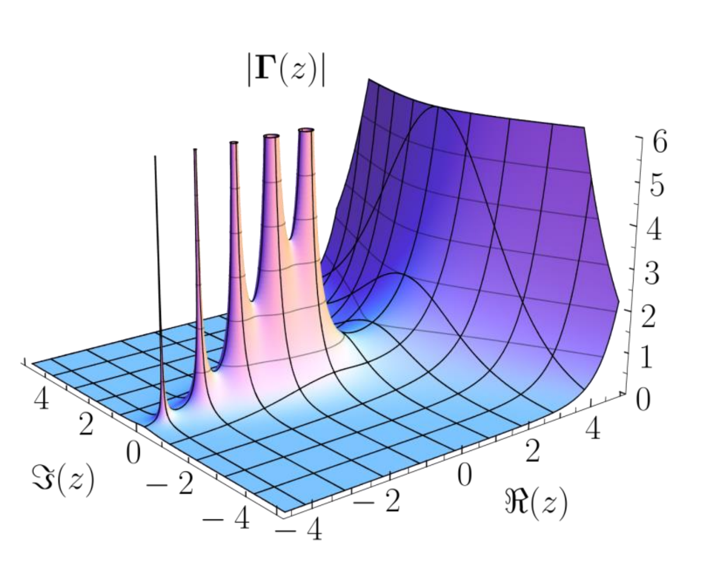
$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{2^{(1-n)}(n-1)!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \quad (1.16)$$

إدا كان n عددا صحيحا سالب فان $\Gamma(n)$ غير موجودة $\Gamma(n)\to\infty$

$\Gamma(n)$ دالة متناقصة من اجل $0\prec n\leq 1$



منحني بياني للدالة غاما ثنائي البعد $2D$



منحني بياني للدالة غاما ثلاثي الابعاد $3D$

الصورة 1.1: منحني بياني للدالة غاما ثنائي البعد $2D$ ثلاثي الابعاد $3D$

1.2.1.الدالة بيتا Beta function

إنها إحدى الدوال الأساسية لحساب التفاضل والتكامل الكسري .تلعب هذه الدالة دورًا مهم عند دمجها مع الدالة جاما.

تعاقب علي دراسة هذه الدالة كل من أويلر وليجاندر والذي أعطاها هذا الاسم هو جاك بينيه يعد الرمز B هوأحد الحروف الكبيرة في الكتابة اليونانية أما الحرف الصغير له فهو β.

تعريف 3.1.1.:

الدالة بيتا المعروفة أيضا باسم تكامل أويلر من النوع الأول[3]، هي دالة خاصة تعطي بالعلاقة التالية[3] :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (1.17)$$

مع $\operatorname{Re}(x)\succ 0$ و $\operatorname{Re}(y)\succ 0$

مثال

[3] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy ,Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, 1999.

$$
\begin{aligned}
B(2,3) &= \int_0^1 t(1-t)^2\,dt \\
&= \int_0^1 t\left(1-2t+t^2\right)dt \qquad (1.18) \\
&= \int_0^1 t^3-2t^2+t\,dt \\
&= \left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

تعريف 4.1.1

و تعرف الدالة ايضا كما يلي [3].

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(Sin(\theta)\right)^{2x-1}\left(Cos(\theta)\right)^{2y-1}d\theta \qquad (1.19)$$

مع $\operatorname{Re}(x)\succ 0$ و $\operatorname{Re}(y)\succ 0$

اثبات التكافئ بين التعريفين بوضع $t=Sin^2(\theta)$ نجد

$$
\begin{aligned}
B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(Sin(\theta)\right)^{2x-2}\left(Cos(\theta)\right)^{2y-2}Sin(\theta)Cos(\theta)d\theta \qquad (1.20) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(Sin(\theta)\right)^{2x-1}\left(Cos(\theta)\right)^{2y-1}d\theta
\end{aligned}
$$

بعض خواص الدالة بيتا

من اجل كل $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ حيث $\operatorname{Re}(x)\succ 0$ و $\operatorname{Re}(y)\succ 0$ لدينا

$$B(u,v)=B(v,u)$$

$$B(u,v+1)=\frac{v}{u}B(u+1,v) \qquad (1.21)$$

$$B(u+1,v)=\frac{u}{u+v}B(u,v)$$

$$B(u,N+1)=\frac{N}{u(u+1).....(u+n)},n\in\mathbb{N}^*$$

العلاقة بين الدالة بيتا و غاما

من اجل كل $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ حيث $\operatorname{Re}(x)\succ 0$ و $\operatorname{Re}(y)\succ 0$ لدينا الدالتان غاما و بيتا تحقيقان العلاقة :

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (1.22)$$

البرهان لدينا

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{y-1}ds$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(t+s)}t^{x-1}s^{y-1}dtds$$

باستعمال تغيير المتغير $t=uv$ و $s=u(1-v)$

ومنه ينتج $t+s=u$ حيث $0\prec t\prec+\infty$ و $0\prec s\prec+\infty$ هدا يستلزم ان $0\prec u\prec+\infty$ و $0\prec v\prec 1$

باستعمال المصفوفة اليعقوبية لهدا التحويل ينتج

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} v & u \\ (1-v) & -u\end{vmatrix}=-uv-u+uv=-u$$

وبمان $u\succ 0$ فاءن المحدد يختلف عن الصفر وهذا ينتج

ومنه نجد $$dtds=\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}\right|dudv=u\cdot dudv$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}v^{x-1}u^{y-1}(1-v)^{y-1}u\cdot du dv$$

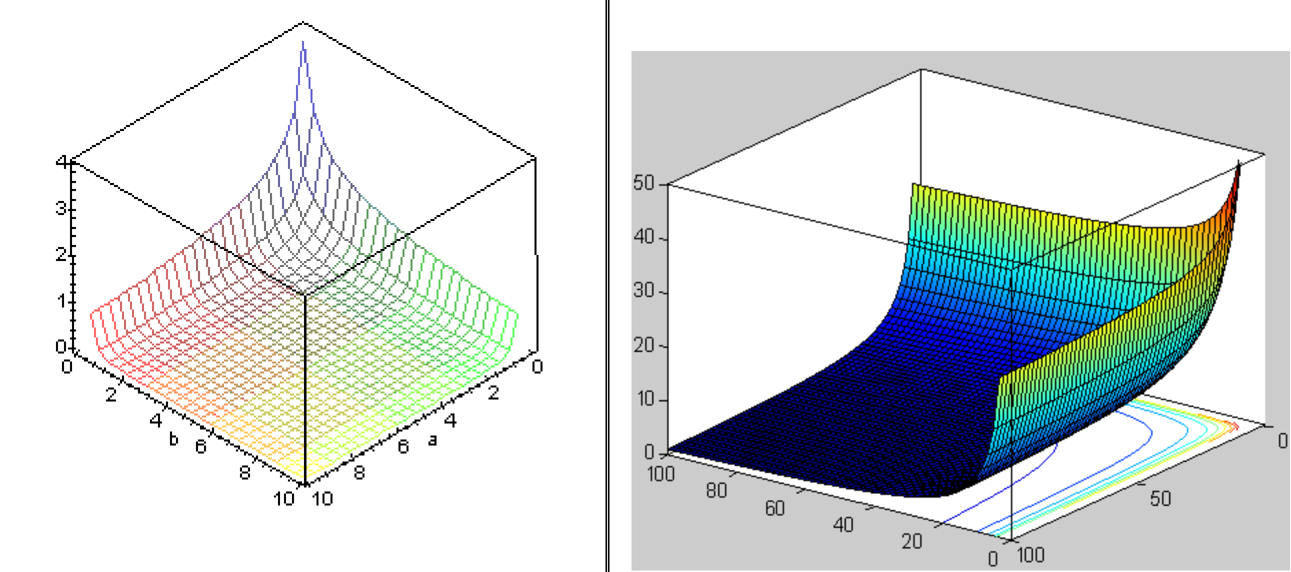
$$=\int_0^{+\infty} u^{x+y-1}e^{-u}du\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv$$

$$=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

ومنه العلاقة (1.23)

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

مثال: $B(3,4)=\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)}=\dfrac{2!3!}{6!}=\dfrac{1}{60}$



منحني بياني للدالة بيتا ثلاثي الابعاد $3D$ خلفي | منحني بياني للدالة بيتا ثلاثي الابعاد $3D$ امامي

الصورة 2.1: منحني بياني للدالة بيتا ثنائي البعد $2D$ ثلاثي الابعاد $3D$

3.1.1.الدالة : ميتاج- ليفلر Mittag-Leffler

الدالة ميتاج -ليفلر Mittag-Leffler هي أيضا من الدوال الأساسية في الحساب الكسري المحلي، والمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية،وهي عبارة عن تعميم للدالة الأسية e^x هذه الدالة قدمها العالم السوسري ميتاج[4]-ليفلر Mittag-Leffler 1903

تعريف 5.1.1.:من اجل كل $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Re}(z) \succ 0$ نعرف الدالة Mittag-Leffler [4] كما يلي[5]

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \qquad (1.23)$$

حيث تعطى بدلالة المجموع بالشكل التالي:

في حالة وسيط واحد

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},(\alpha \succ 0) \qquad (1.24)$$

- في حالة وسيطين: (حدين) $((\alpha,\beta)$ من طرف أغاروال[5] Agarwal:[6]

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},(\alpha \succ 0,\beta \succ 0) \qquad (1.25)$$

نتائج [4]

$$E_{1,1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

$$E_{1,2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^x-1}{x}$$

$$E_{1,3}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

---

[4]ماجونس جوستاف ميتاج – ليفلر- 1846-1927 رياضي سويدي له اسهامات تتعلق بالدوال الرياضية

[5] H.Hadjar Problème aux limites pour équations dieérentielles fractionnaires ,Mémoire de Master, Tlemcen, 2014-2015.

[6] D.Ziane méthode combinée des pertubations HPM et VIM pour la résolution des équation différentielles ordinaires et EDP d'ordre fractionnaire ,THESE DE DOCTORAT,universite d'oran 1, 2016.

وبصفة عامة[7]:

$$E_{1,m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{\Gamma(k+m)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{(k+m-1)!}=\frac{1}{x^{m-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+m-1}}{(k+m-1)!}=\frac{1}{x^{m-1}}\left[e^{x}-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{x^{k}}{k!}\right]$$

خواص

$$E_{\alpha}(x^{\alpha})E_{\alpha}(y^{\alpha})=E_{\alpha}(x^{\alpha}+y^{\alpha})$$

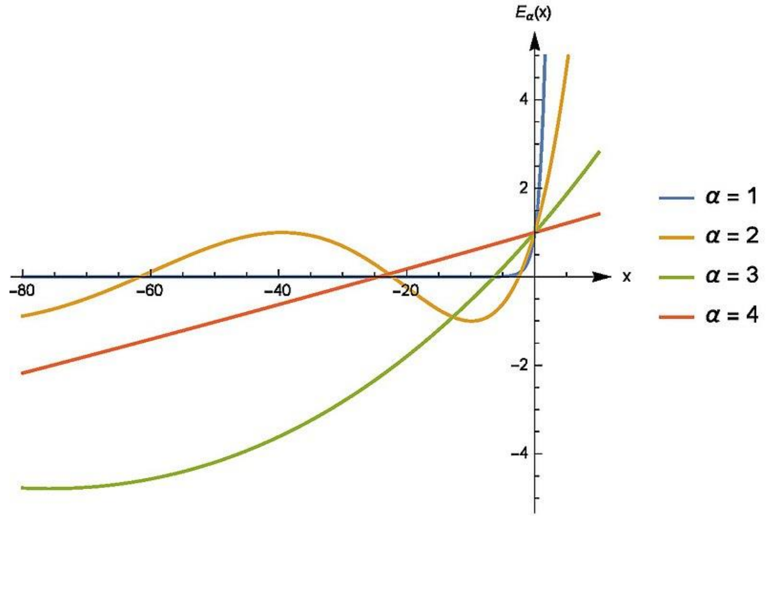
$$E_{\alpha}(x^{\alpha})E_{\alpha}(-y^{\alpha})=E_{\alpha}(x^{\alpha}-y^{\alpha})$$

$$E_{\alpha}(x^{\alpha})E_{\alpha}(i^{\alpha}y^{\alpha})=E_{\alpha}(x^{\alpha}+i^{\alpha}y^{\alpha})$$ مع i عدد تخيلي

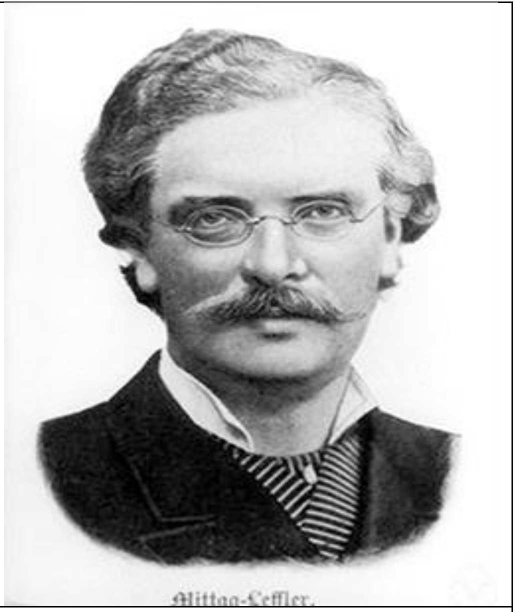
$$E_{\alpha}(i^{\alpha}x^{\alpha})E_{\alpha}(i^{\alpha}y^{\alpha})=E_{\alpha}(i^{\alpha}x^{\alpha}+i^{\alpha}y^{\alpha})$$

$$\left[E_{\alpha}(x^{\alpha}+i^{\alpha}y^{\alpha})\right]^{n}=E_{\alpha}(n^{\alpha}x^{\alpha}+i^{\alpha}n^{\alpha}y^{\alpha})$$

$$E_{\alpha}(i^{\alpha}x^{\alpha})=Cos_{\alpha}(x^{\alpha})+i^{\alpha}Sin_{\alpha}(x^{\alpha})$$



منحني بياني لدوال **Mittag-Leffler** $E_{\alpha}(x)$ من اجل $\alpha=1,2,3,4$



Gösta Mittag-Leffler (1846–1927)

الصورة 3.1: منحني بياني للدالة $E_{\alpha}(x)$ من اجل قيم $\alpha=1,2,3,4$

[7] Mittag-Leffler, G. M.. Sur la nouvelle fonction *Eα (x)*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (Ser. II) 137, 554-558 (1903).

2.1. الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان[8] -ليوفيل[9] Riemann-Liouville

في هذا الجزء نقدم ثلاث تعريفات مختلفة للمشتقات الكسرية,وهي تعريف الاشتقاق الكسري حسب ريمان-ليوفيل, وتعريف الاشتقاق الكسري حسب كابوتو, والعلاقة بين الإشتقاق الكسري لريمان ليوفيل و كابوتو

تعريف 6.2.1.:الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان– لبيوفيل ${}^{RL}D^{\alpha}_{\alpha+}f$ من الرتبة $\left(R(\alpha)\geq 0\right),\alpha\in\mathbb{C}$ يعرف كتالي [6][10]

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{\alpha+}f\right)(t)=\frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}_{\alpha+}f\right)(t)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds,\quad \left(n=\left[R(\alpha)\right]+1,t\succ\alpha\right) \tag{1.26}$$

حيث $[.]$ تعبر عن دالة الجزء الصحيح للعدد الحقيقي . لما $\alpha=n\in\mathbb{N}$, نجد :

$$\left({}^{RL}D^{0}_{\alpha+}f\right)(t)=f(t),\qquad \left(D^{n}f\right)(t)=f^{(n)}(t).$$

حيث تمثل $f^{(n)}(t)$ الاشتقاق الاشتقاق الالعادي للدالة f من الرتبة n

1.2.1.. خصائص الاشتقاق الكمسري بمفهوم ريمان –لبيوفيل [6]

خاصية الخطية

$$D^{\alpha}\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right)=\lambda\left(D^{\alpha}f(t)\right)+\mu\left(D^{\alpha}g(t)\right),\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

الخاصية الاكثر اهمية في الاشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل [6]

$$\left(D^{\alpha}_{\alpha+}I^{\alpha}_{\alpha+}f\right)(t)=f(t),\qquad (\alpha\succ 0)$$

[8] جوزيف ليوفيل 1809-1882 علم رياضيات فرنسي له العديد من الاعمال الرياضية خاصة و في مجلات نظرية الاعداد و الطوبولوجيا و الهندسة التفاضلية و التحليل العقدي من اهم اعماليه نظرية ليوفيل

[9] برنارد ريمان -1826-1866 علم رياضيات الماني ساهم في العديد من الاعمال في التحليل الرياضي خاصة نظرية الاعداد و الهندسة التفاضلية حيث تعتبر فرضية ريمان و تكامل ريمان من اشهر اعماله على الاطلاق

[10] A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of frac- tional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,(2006).

* اذاكان $R(\alpha)\succ R(\beta)\succ 0$ و $f(t)\in L_p(a;b)$ مع $1\leq p\leq\infty$ فان العلاقة:

$$\left(D^{\beta}_{\alpha+}I^{\alpha}_{\alpha+}f\right)(t)=\left(I^{\alpha-\beta}_{\alpha+}f\right)(t) \qquad (1.27)$$

محققة من اجل كل مجال $[a;b]$ يحقق $\int_a^b |f(t)|^p dt\prec\infty$ او f تكون قابلة للقياس على $[a;b]$

$L_p[a;b]=\{f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R};\}$

- لتكن $m\in\mathbb{N}$ و $\alpha\geq 0$ و $D=\dfrac{d}{dt}$
- ولتكن المشتقات الكسرية $\left(D^m f\right)(t)$ ، $\left(D^{\alpha}_{\alpha+}f\right)(t)$ موجودة اذن معناه

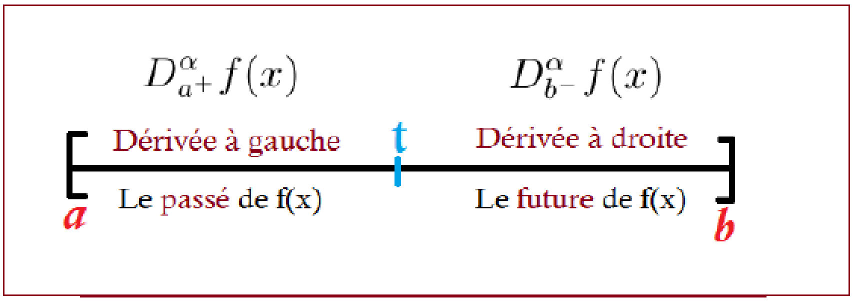
$$\left(D^m D^{\alpha}_{\alpha+}f\right)(t)=\left(D^{\alpha+m}_{\alpha+}f\right)(t)$$

الإشتقاق الكسري اليميني:[6]

$$\left({}^{R}_{t}D^{\alpha}_{b}f\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n\int_t^b(\tau-t)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad(\forall t\prec b)$$

الإشتقاق الكسري اليساري[6] **:**

$$\left({}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t}f\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^b(\tau-t)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau,\qquad(\forall t\succ a)$$



الاشتقاق الكسري على يمين ويسار الدالة $f(x)$

مثال 1.2.1 : لتكن لدينا الدالة $f(t)=(t-a)^{\beta}$ مع $(\beta\succ-1)$ لدينا :

$${}^{RL}D^{\alpha}_{\alpha+}(t-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{\alpha}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\beta}ds,$$

نغير المتغير نضع $s=a+\tau(t-a)$ فينتج

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_{\alpha+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{t}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta}ds \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+1-\beta)B(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}
$$

من اجل $\alpha=1$ الشكل العام للمشتقة يعطي بالعلاقة

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_{\alpha+}^{1}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\
&= \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^{\beta}
\end{aligned}
$$

في حالة $\beta=0$ الشكل العام للمشتقة في المثال السابق تعطي بالعلاقة

$$
{}^{RL}D_{\alpha+}^{1}1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}
$$

وبذلك المشتق الكسري بمفهوم لريمان-ليوفيل للعدد الثابت لا يساوي الصفر ولدينا

$$
{}^{RL}D_{\alpha+}^{1}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}
$$

خاصية2.2.1 : التركيب المشتقات الكسريية بمفهوم لريمان- ليوفيل

لتكن لدينا $m-1\leq\alpha\prec m$ و $n-1\leq\beta\prec n$

$$
D_{\alpha+}^{\alpha}D_{\alpha+}^{\beta}f(t) = D_{\alpha+}^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[D_{\alpha+}^{\beta-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)} \qquad (1.28)
$$

و

$$D_{\alpha+}^{\beta}D_{\alpha+}^{\alpha}f(t)=D_{\alpha+}^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left[D_{\alpha+}^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)} \qquad (1.29)$$

وفقًا للعلقتين السابقتين ، يمكننا استنتاج أن المشتقات الكسرية بمعنى R-L غير تبديلية .

3.1. الإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو

تعريف 7.3.1.:يعرف المشتق الكسري بمفهوم كابوتو كمايلي[6]:[11]

$$D^{\alpha}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^{n}}{dt^{n}}\displaystyle\int_{0}^{x}\dfrac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}}dt, & n-1\prec\alpha\prec n, \quad n\in\mathbb{N}\\ \dfrac{d^{n}}{dx^{n}}f(x), & \alpha=n\in\mathbb{N}\end{cases} \qquad (1.30)$$

حيث $\alpha\succ 0$ هي رتبة المشتق و n اصغر عدد صحيح اكبر من α

لمشتق كابوتو لدينا:

$$D^{\alpha}c=0 \qquad c=cte$$

مثال: مشتقة اللدالة $f(t)=(x-a)^{\beta}$ بمفهوم كبوتو

ليكن α عدد غير صحيح و $0\prec n-1\prec\alpha\leq n$ مع $\beta\succ n-1$ اذن لدينا

$$f^{(n)}(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(t-a)^{\beta-n}$$

مع

$${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}dt$$

نغير المتغير نضع $t=a+\tau(x-a)$ فينتج

[11] H.Hadjar Problème aux limites pour équations dieérentielles fractionnaires ,Mémoire de Master, Tlemcen, 2014-2015.

$$
{}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta-n}d\tau
$$

$$
=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}
$$

ملاحظة : العلاقة بين المشتق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل و كابوتي يعطي بـ[7]:[12]

$$
{}^{RL}D^{\alpha}f(x)={}^{C}D^{\alpha}f(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a) \qquad (1.31)
$$

4.1.تحويل لابلاس

1.4.1 لمحة تاريخية و تعاريف

[12] M. Caputo and F.Mainardi ; Fractional Sub-Equation Method and its Applications to the Space{Time Fractional Di_erential Equations in Mathematical Physics, Linear models of dissipation in an elastic solids, Riv.Nuovo Cimento (Ser. II), vol.1, (1971), pp. 161-198.

تحويل لابلاس تاريخ طويل؛ إذ تعدّ مقالة أولر Eulerعن حلِّ المعادلات، والتي نشرها في العام 1737 الأساس الذي ارتكز عليه تحويل لابلاس. وأسهم على مر العقود العديد من أشهر علماء الرياضيات في الوصول إلى تحويل لابلاس بالصيغة المتداولة في الوقت الراهن، وعلى الأخص لاغرانج Lagrange بدراسته لتوابع الكثافة الاحتمالية وبعض الصيغ التكاملية، وسبيتزر Spitzer بتطويره لأعمال أولر. وقد قادت أعمال بيير -سيمون لابلاس Pierre- Simon Laplace (1749-1827)في حساب التفاضل والتكامل calculus واستخدامه تحويلاً لحل المعادلات ذات الفروق المنتهية في نهاية المطاف؛ إلى وضع تحويل لابلاس وتطويره؛ لذا أطلق اسمه على هذا التحويل تكريماً لمساهمته .أما الصيغة الحديثة لتحويل لابلاس فيعود الفضل في وضعها إلى دويتش Doetsch في العام[13] 1973.

تعريف 8.4.1: : لتكن الدالة $f(t)$معرفة من اجل القيم الموجبة t تحويل لابلاس لدالة يعطى بالعلاقة

$$F(s)=L\{f(t),s\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \qquad t\succ 0 \tag{1.32}$$

تعريف 9.4.1.: جداء اللف la convolution

جداء اللف للدالتين $f(t)$ و $g(t)$ يعطي بالعلاقة

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx \tag{1.33}$$

نظرية1.4.1: اذا كانت الدالة $f(t)$مستمرة بتقطع في المجال $0\leq t\prec\infty$ وإذا كانت من مرتبة اسية فاءن تحول لابلاس لـ$f(t)$ موجود

نظرية 2.4.1.: اِذا كان التكامل متقارب مطلقا من اجل $s=s_0$فهو متقارب مطلقا من جل جميع القيم s التي تكبر s_0 حيث $s\succ s_0$

[13] I. Podlubny ; Fractional Di_erential Equations, Academic Press, San Diego, (1999)

2.4.1.التحويل العكسي للابلاس

تعريف.10.4.1 : يرمز للتحويل العكسي للابلاس بالرمز L^{-1} حيث يحول دالة بمتغير مركب الى دالة بمتغير حقيقي ويمكن التعبير عليه بالعلاقة [14]

$$(1.33) \qquad F(t)=L^{-1}\{f(s),t\}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds, \qquad c=Re(s)\succ c_0$$

مع c_0 من نصف المستوي الايمن للتقارب المطلق لتكامل لابلاس.

خواص تحويل لابلاس 2.4.1.

لتحويل لابلاس العديد من الخواص المهمة من اجل تحليل النظم الخطية و لعل الهمها لا للحصر مايلي :

اذاكان $F(s)=L\{f(t)\}$ و $G(s)=L\{g(t)\}$ ومهما يكن $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ و $n\in\mathbb{N}$ ينتج لدينا

$$L\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha F(s)+\beta G(s)$$

$$L\{f(t)*g(t)\}=F(s).G(s)$$

تحويل لابلاس للمشتقة من الرتبة n يعطب بالعلاقة : [8]

$$(1.34) \qquad L\left\{f^{(n)}(x)\right\}=s^n.F(s)-\sum_{K=0}^{n-1}s^{n-k-1}\left[f^{k}(t)\right]_{t=0}$$

$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c+i\infty}^{c-i\infty}F(s)e^{st}ds$	$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

[14] X.J. Yang, D. Baleanu, J.A.T. Machado, *"On Analytical Methods for Differntial Equation withLocal Fractional Derivative Operators", 26 April 2017.*

$\delta(t)$	1
$\hbar(t)$	$\frac{1}{s}$
t^{n}	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^{n}e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$Cos(w_0 t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$Sin(w_0 t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}Cos(w_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}Sin(w_0 t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$
$tCos(w_0 t)$	$\frac{s^2-w_0^2}{\left(s^2+w_0^2\right)^2}$
$tSin(w_0 t)$	$\frac{2w_0 s}{\left(s^2+w_0^2\right)^2}$

الجدول 1.1 :.تحويل لابلاس للاشتقاق الكسري لبعض الدوال الشهيرة

3.4.1..تحويل لابلاس للاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان -ليوفيل

صيغة تحويل لابلاس للاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان -ليوفيل من الرتبة α تعطى كالتالي:

$$L\left\{\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(t)\right\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{K=0}^{n-1}s^{k}\left[\left(D_{0+}^{\alpha-k-1}f\right)(t)\right]_{t=0}\qquad (n-1\leq a\prec n)$$

4.4.1. تحويل لابلاس للاشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو [8]

صيغة تحويل لابلاس للاشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو من الرتبة α تعطى كالتالي[15]:

$$L\left\{\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha}f\right)(t);s\right\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{K=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\qquad (n-1\prec a\leq n)$$

$F(s)$	$f(t)=L^{-1}\{F(s),t\}$
$\dfrac{1}{s^{\alpha}}$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\dfrac{1}{s^{\alpha}-a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$
$\dfrac{1}{(s+a)^{\alpha}}$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{(at)}$
$\dfrac{a}{s\left(s^{\alpha}+a\right)}$	$1-E_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)$
$\dfrac{s^{\alpha}}{s\left(s^{\alpha}+a\right)}$	$E_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{(at)}-e^{(bt)}\right)$
$\dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\alpha}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\alpha}\right)$

الجدول 2.1: تحويل لابلاس للاشتقاق الكسري لبعض الدوال الشهيرة

5.1. تطبيقات الاشتقاق الكسري

[15] Xiaohua Liu, The Traveling Wave Solutions of Space-Time Fractional Di_erential Equation Using Fractional Riccati Expansion Method Journal of Applied Mathe- matics and Physics,vol.6,(2018) , pp. 1957-1967.

لا يظهر حساب التفاضل والتكامل الكسري بشكل متكرر في حقول البحث الرياضيات فقط ولكن أيضًا الفيزياء .ومع ذلك ، فإن المشكلة المطروحة في البداية هي التفسير المادي للاشتقاق الكسري .تم تناول مشكلة نقص هذا التفسير في المؤتمر الدولي الأول في عام 1974 التي عقدت في نيوهافن وكذلك خلال المؤتمرات الأخرى التي تلت عام 1984 في إنجلترا في جامعة ستراثكلايد وطوكيو .في الآونة الأخيرة ، العديد من الدراسات النظرية والتجريبية تم تكريسه لهذا السؤال .وجدوا أن بعض الأنظمة الحرارية الكهروكيميائية ، تُحكم اللزوجة المطاطية بواسطة معادلات تفاضلية جزئية .على سبيل المثال ، أصبحت مجالات تطبيق حساب التفاضل والتكامل الكسري أكثر وأكثر عددًا الكيمياء الكهربائية ، المالية ، الميكانيكا ، الطب الحيوي[16] ، إلخ . فيما يلي نستشهد ببعض النماذج الفيزياء و البيولوجية الموصوفة بالاشتقاق الكسري.

1.5.1.الريولوجيا

يوفر المشتق الكسري أداة ممتازة لوصف خصائص العديد المواد والعمليات .يتدخل أثناء النمذجة الميكانيكية للثة والمطاط ، تشكل مواد الذاكرة بشكل عام ، وذلك بفضل التكامل المرتبط بها .

كمثال[17] ، في [12] قدم المؤلفون الاشتقاق الجزئي لنمذجة التخميد في معادلات الحركة حيث تستخدم المواد كعوازل أو ممتص للصدمات لزج مطاطي .الحداثة هي أن إدخال الاشتقاق الكسري يقلل من العدد معلمات النموذج ، على سبيل المثال لنمذجة سلوك الإجهاد والانفعال من صلب ، قدم Bagley و [12] Torvik نموذجًا بأربعة معلمات بدلاً من عشرة .

2.5.1.العلوم البيولوجية

إن العديد من الأنظمة المركبة، مثل السائل داخل الخلايا البيولوجية والمواد البوليميرية المنصهرة، أو الأغشية ثنائية الصبغة الدهنية تكون لزجة، وتبعاً للتردد الذي يتم من خلاله فحص هذه الأنظمة، تكون استجابتها أكثر مرونة أو أكثر لزوجة[18] .تأخذ جسيمات التتبع في هذه السائل المركبة سلوكاً غير منتظم، إذ تنتشر جزيئات المادة بحيث يكون متوسط مربع الإزاحة عن مركز الانتشار متناسب مع قوى كسرية بالنسبة للزمن $r^2(t) \succ t^{\alpha}$ حيث يكون لدينا انتشار منخفض subdiffusion من أجل $0 \prec \alpha \prec 1$ وانتشار فائق من أجل superdiffusion $\alpha \succ 1$ توصف هذه الحركة في الانتشار تعبر ايضا على سرعة الاستجابات المناعية للجسم الغريب داخل الخلايا بعذ التماس الاول و تشكيل الذاكرة حيث تكون السرعة متغيرة برتب

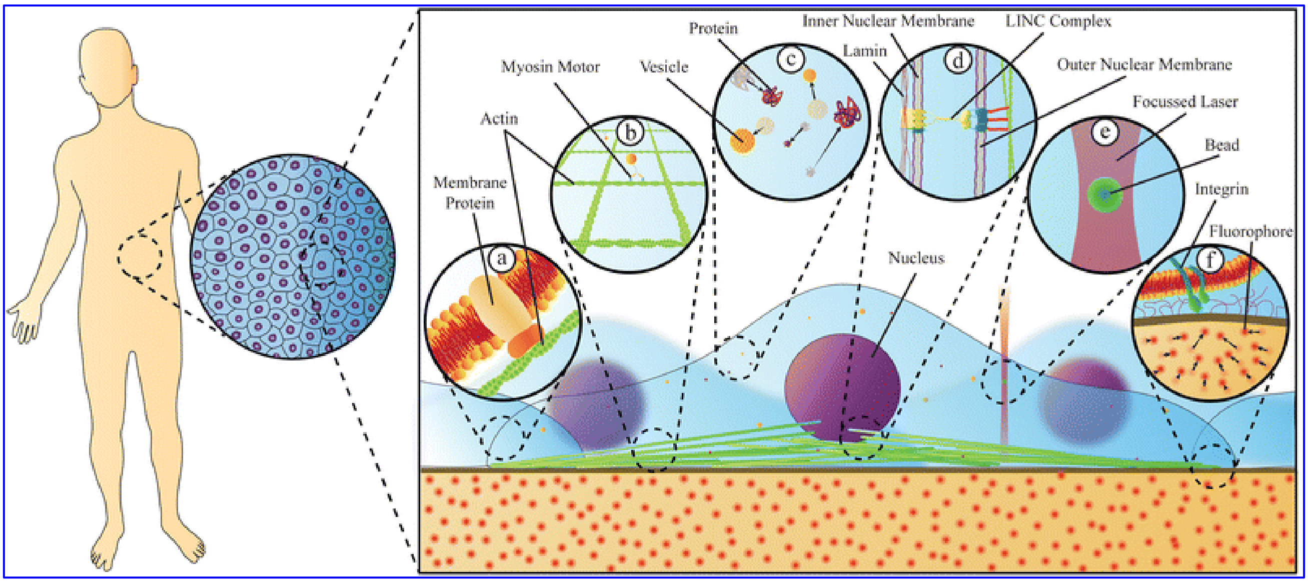
---

[16] S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das. “*Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patients”,* Submitted on 7 Nov 2017

[17] HOCHSTADT, H., Special Functions of Mathematical Physics, HOLT, RINEHART and WINSTON, New York,2007.

[18] د .سامي انجروبعض تطبيقات الاشتقاق الكسر ي قسم الرياضيات ، جامعة تشري نمجلة جامعة المنارة - مجلد (2) العدد 1 السنة2022

كسرية رياضياً توصف بمعادلةLangevin équation [19] كما ثبت أن الكاشفات داخل الخلايا البيولوجية أو في السوائل المركبة ومكونات الأغشية البيولوجية .تظهر هذا النوع من الحركة ا للزجة المرنة[20]



الصورة 4.1: اليات النقل الغشائي داخل العضوية البيولوجية

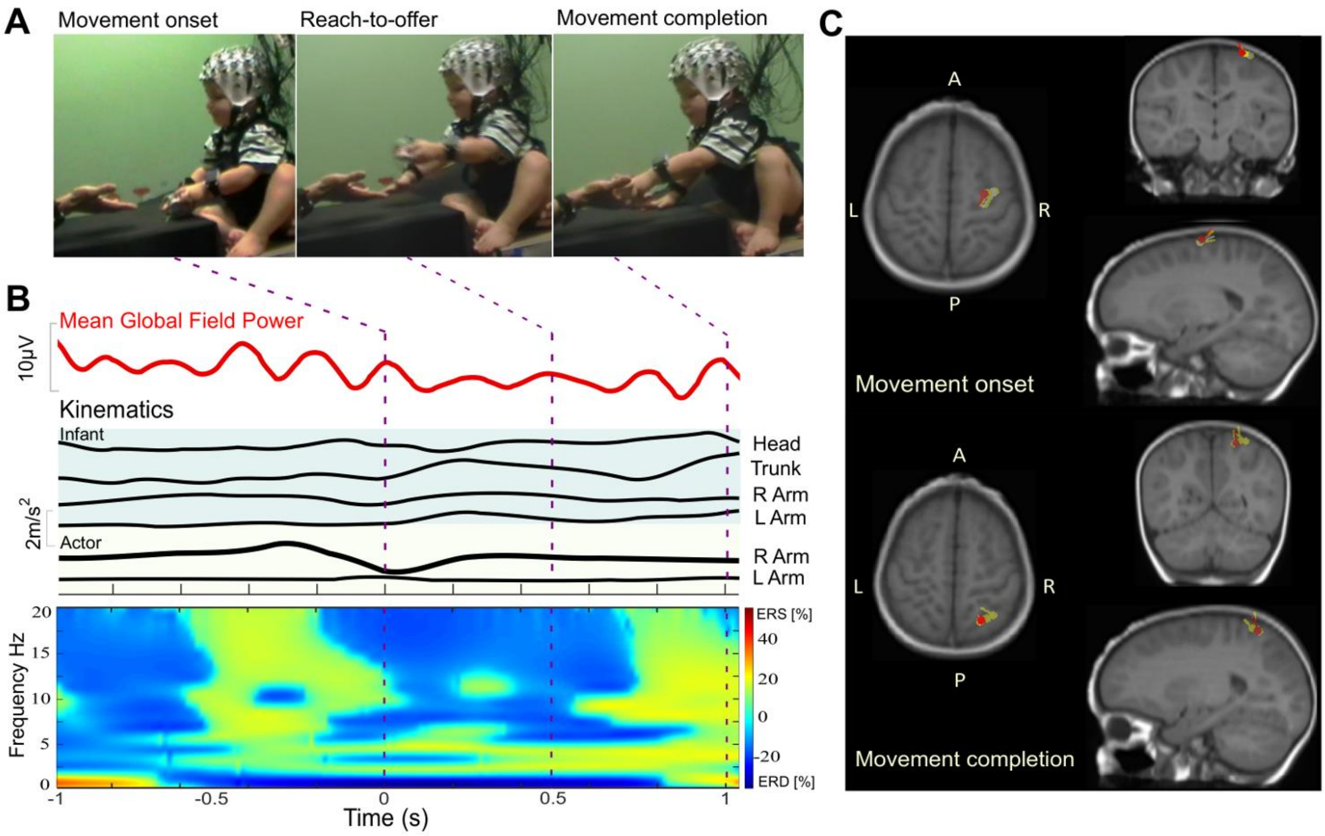
3.5.1.الممانعة الطيفية الكهربائية

تلعب تقنية الممانعة الطيفية الكهربائية دورا مهماً من وجهة النظر التجريبية للحصول على معلومات حول الخصائص الكهربائية للعديد من المواد المختلفة ولاسيما السوائل[19] يتم -Poissonالتحقق من ذلك نظرياً باستخدام نموذج الا نتشار او الدارت المكافئة .في حد التردد (Nernst-Planck)المنخفض، تعد هذه الأساليب مع اعتبارات بسيطة(كالشروط الحدية او عناصر الدارة)غير قادرة على وصف السلوك التجريبي، وإن هذه الخلافات تكون ملاحظة فقط بشكل خاص في حد التردد المنخفض . مع ذلك من خلال استخدام أدوات حساب التفاضل والتكامل الكسري وبإجراء تغيرارت مناسبة على الشروط الحدية من الممكن التغلب على هذه المشكلة ووصف السلوك التجريبي في جميع نطاقات التردد ، علاوة على ذلك يمكن استخدام هذا النهج للبحث في انتشار الأيونات في خلية كهربائية من خلال الناقلية الكهربائية التي ترتبط مباشرة بسلوك الاستجابات عند الاطفال الذين يعانون من التخلف الادراكي او التوحد و كذا كيفية انتشار الرسالة العصبية

[19] Hilal, N., Injrou, S., Karroum, R. (2020).Exponential finite difference methods for solving Newell–Whitehead–Segel equation. *Arabian Journal of Mathematics*

[20] Injrou, S., Karroum, R., Moualla, M. (2020). Study on Oscillation for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with Delay and Neutral using Riccati Transformation. *Albaath University Journal*, 42

الحسية و الحركية في القوس الانعكاسي المناطق التي تتحكم في الاستجابة بهدف تنشطها وبذلك تحسن سلوك الاستجابات الحصول على نتائج جيدة [21]

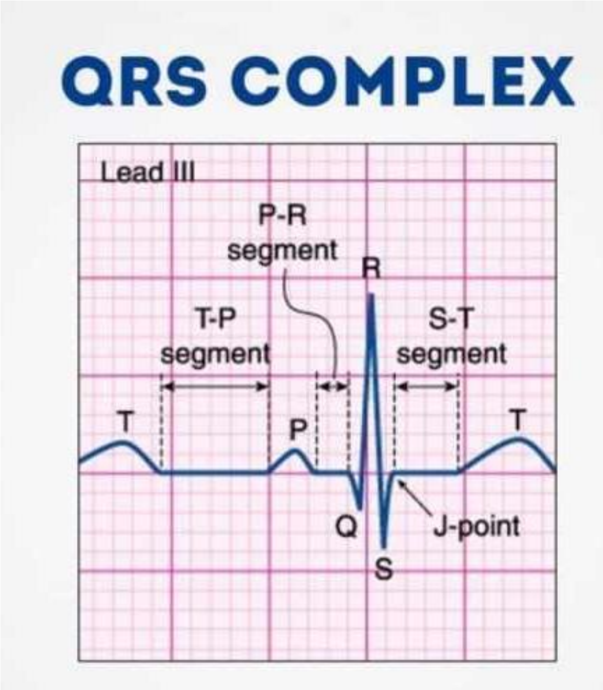


الصورة 5.1: دراسة الناقلية الكهربائية للقوس الانعكاسي لدي اطفال التوحد

4.5.1. الطب

[21] Hernandez, Z. R., Cruz-Garza, J., Tse, T., Contreras-Vidal, J. L.Decoding of intentional actions from scalp electroencephalography (EEG) in freely-behaving infants. *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc*. , 2115-2118 (2014).

يستخدم حساب التفاضل والتكامل الكسري لمقارنة ECG (Electro-Cardiogram) مخططات تخطيط القلب للمرضى[22] ، إذ تكون هذه المخططات على شكل بيان لتوابع مستمرة لكن غير قابلة للمفاضلة في بعض أو في كل النقاط، حيث يفشل حساب التفاضل والتكامل الكلاسيكي في توصيفه لأنه يتعذر إيجاد المشتقات في نقاط الانقطاع، لكن باستخدام حساب التفاضل والتكامل الكسري يمكن إيجاد المشتقات الكسرية في تلك النقاط.



الصورة 6.1: تخطيط القلب ECG

[22] S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das. "*Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patients*", Submitted on 7 Nov 2017.

خلاصة

هذا الفصل هو مقدمة لأساسيات الاشتقاق الكسري .و لقد استشهدنا ببعض المفاهيم المتعلقة بهذه الأداة الرياضية ، والتطرق قليلة لها تم تقديم المشتقات الكسرية وهي نهج ريمان ليوفيل و كابوتو، وهم خصائصهما ، وبعض الأمثلة على عملية حسابية و كذا تحويل لابلاس على المشتقات الكسرية و كذا اهم تطبيقاته في مجلات الطب و الفيزياء و الكيمياء سيهدف الفصل التالي إلى تعميق تطبيقات المشتق الكسري بمفهوم جوماري و تطبيقاته و خواصه.

الفصل الثاني

المشتق الكسري لجوماري خصائص و نتائج

تمهيد :

في هذا الفصل سنتطرق الى المفهوم الاشتقاق الكسري لجوماري و خصائصه و علاقته بالمشتق الكسري لريمان ليوفيل و كذا نتائجه من خلال تحويل لابلاس

1.2. المشتق الكسري بمفهوم جوماري

تعريف 1.1.2 : لتكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و α عدد حقيق سالب تماما . نسمي التكامل الكسري بمعني جوماري (Jumarie) من الرتبة α من f اجل و نكتب $D_x^{\alpha}f(x)$ الدالة المعرفة بـ[1]:

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha-1}f(t)dt \qquad (2.1)$$

مع $x\succ 0$

مثال.1.1.2: لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=k$

و k عدد حقيقي ثابت من اجل $\alpha\prec 0$ و $x\succ 0$ لدينا

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha-1}kdt$$

اذن :

$$D_x^{\alpha}f(x)=k\frac{\left[-(x-t)^{-\alpha}\right]_0^x}{(-\alpha)\Gamma(-\alpha)}=\frac{k}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}$$

تعريف2.1.2: لتكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و$0\prec\alpha\prec 1$

نسمي المشتق الكسري من الرتبة α لـ f بمفهوم جوماري ونكتب $D_x^{\alpha}f(x)$ الدالة المعرفة بـ

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\left(f(t)-f(0)\right)dt \qquad (2.2)$$

ملاحظات2.1.1 :

- اذا كانت $f(0)=0$ إذن $D_x^{\alpha}f(x)$ هي المشتق الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة α لـ f
- المشتق الكسري لجوماري هو تعريف غير محلي
- المشتق الكسري لجوماري من اجل$0\prec\alpha\prec 1$ للعدد الثابت يكون معدوم

---

[1] G. Jumarie. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non- differentiable functions Further results, Computers and Mathematics with Applications, 2006. (51), 1367-1376.

مثال2.1.2. : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^{\alpha k}$

مع $0\prec\alpha\prec1$ و $K\in\mathbb{N}$

من اجل $x\succ0$ لدينا

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{-\alpha}\left(t^{\alpha k}-0\right)dt$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{-\alpha}t^{\alpha k}dt$$

بوضع $t=xv$

اذن

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{1+\alpha k-\alpha}\int_0^1(1-v)^{-\alpha}v^{\alpha k}dv$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}x^{1+\alpha k-\alpha}\beta(1-\alpha,\alpha k+1).$$

ومنه نصل الى

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+1-\alpha+1)}\frac{d}{dx}x^{1+\alpha k-\alpha}$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+1)}x^{\alpha k-\alpha}.$$

تعريف3.1.2.: لتكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة . من اجل $n\prec\alpha\prec n+1$ المشتق الكسري لجوماري يعرف بـ[2]

$$D_x^{\alpha}\left[f(x)\right]=\left(D_x^{\alpha-n}f(x)\right)^{(n)}. \tag{2.3}$$

[2] G. Jumarie. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non- differentiable functions Further results, Computers and Mathematics with Applications, 2006. (51), 1367-1376.

مثال3.1.2: لتكن[7] الدالة f المعرفة على ب

$$f(x)=x^{\lambda} \text{ مع } n \prec \alpha \prec n+1 \text{ و } \lambda \succ 0$$

حساب $D_x^{\alpha} f(x)$ من اجل $x \succ 0$

بوضع $\theta=\alpha-n$

إذن $0 \prec \theta \prec 1$

معناه

$$D_x^{\theta+\alpha}\left[f(x)\right]=\left(D_x^{\theta} f(x)\right)^{(n)}.$$

ومن جهة اخري لدينا

$$\begin{aligned} D_x^{\theta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\theta}\left(t^{\lambda}-0\right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\theta} t^{\lambda} dt. \end{aligned}$$

بوضع $t=xv$

اذن

$$\begin{aligned} D_x^{\theta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{dx} x^{1+\lambda-\theta} \int_0^1 (1-v)^{-\theta} v^{\lambda} dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)} \frac{d}{dx} x^{1+\lambda-\theta} \beta(1-\theta,\lambda+1). \end{aligned}$$

ومنه يمن الوصل الى

$$\begin{aligned} D_x^{\theta} f(x) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(1+\lambda-\theta+1)} \frac{d}{dx} x^{1+\lambda-\theta} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\theta+1)} x^{\lambda-\theta}. \end{aligned}$$

ومنه

$$D_x^{\theta+n}\left[f(x)\right]=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\theta+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\lambda-\theta}$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\theta-n+1)}x^{\lambda-\theta-n}.$$

وبالتالي
$$D_x^{\alpha}\left[f(x)\right]=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x^{\lambda-\alpha}.$$

نظرية1.1.2: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة بفرض ان f الدالة تقبل مشتق كسري لجوماري من الرتبة αk مع $0\prec\alpha\prec1$ و $k\in\mathbb{N}$ إذن شكل Taylor-Young من رتبة كسرية يعطي بالعلاقة[3]:

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k1)}D_x^{\alpha k}f(x)+h^{\alpha n}\varepsilon(h). \qquad (2.4)$$

مع $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0.$

نتيجة1.1.2: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة و $0\prec\alpha\prec1$

$$D_x^{\alpha}f(x)=\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}}. \qquad (2.5)$$

البرهان :

من اجل $n=1$ لدينا

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h^{\alpha}D_x^{\alpha}f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}+h^{\alpha}\varepsilon(h).$$

ومنه ينتج
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}}=\frac{D_x^{\alpha}f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}+\varepsilon(h).$$

[3] G. Jumarie, On the solution of the stochastic di¤erential equation of exponential growth driven by fractional Brownian motion, Appl. Math.Lett.18 (2005), 817.826.

وبذلك
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}}=\frac{D_x^{\alpha}f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

ومنه ينتج
$$D_x^{\alpha}f(x)=\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\alpha}}$$

نظرية 2.1.2 :[4]

ليكن u و v من □ → □ دالتان مستمرتان غير قابلتان لتفاضل و $0\prec\alpha\prec 1$ اذن لدينا

$$D_x^{\alpha}(uv)(x)=v(x)D_x^{\alpha}u(x)+u(x)D_x^{\alpha}v(x) \qquad (2.6)$$

البرهان :

$$D_x^{\alpha}(uv)(x)=\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h^{\alpha}}$$
$$=\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-(uv)(x)}{h^{\alpha}}$$

من خلال النتيجة السابقة لدينا

$$D_x^{\alpha}(uv)(x)=\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\left[v(x+h)-v(x)\right]}{h^{\alpha}}$$
$$+\Gamma(\alpha+1)\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)-u(x)\right]v(x)}{h^{\alpha}}$$
$$=v(x)D_x^{\alpha}u(x)+u(x)D_x^{\alpha}v(x)$$

نظرية 3.1.2:

ليكن u و v من □ → □ دالتان مستمرتان و v غير قبلة لتفاضل و $u\circ v$ قابل للتفاضل اذن لدينا

$$D_x^{\alpha}\left[u(v(x))\right]=u'(v)D_x^{\alpha}v(x). \qquad (2.7)$$ مع $0\prec\alpha\prec 1$

[4] Jumarie, G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions Further results, Computers and Mathematics with Applications, 2006. (51), 1367-1376.

البرهان : لدينا

$$D_x^\alpha\left[u\left(v\left(x\right)\right)\right]=\Gamma\left(\alpha+1\right)\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v\left(x+h\right)\right)-u\left(v\left(x\right)\right)}{h^\alpha}$$

$$=\Gamma\left(\alpha+1\right)\lim_{h\to 0}\left[\frac{u\left(v\left(x+h\right)\right)-u\left(v\left(x\right)\right)}{h^\alpha}\left(\frac{v\left(x+h\right)-v\left(x\right)}{h^\alpha}\right)\right]$$

ومنه ينتج

$$D_x^\alpha\left[u\left(v\left(x\right)\right)\right]=\left[\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v\left(x+h\right)\right)-u\left(v\left(x\right)\right)}{v\left(x+h\right)-v\left(x\right)}\right]$$

$$\times\left[\Gamma\left(\alpha+1\right)\lim_{h\to 0}\frac{v\left(x+h\right)-v\left(x\right)}{h^\alpha}\right].$$

$$=u'\left(v\right)D_x^\alpha v\left(x\right).$$

نظرية.4.1.2:

ليكن u و v من $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالتان مستمرتان و v قابلة لتفاضل و $u\circ v$ قابل للتفاضل اذن لدينا

$$D_x^\alpha\left[u\left(v\left(x\right)\right)\right]=D_v^\alpha u\left(v\right)\left(v'\left(x\right)\right)^\alpha \qquad (2.8)$$

مع $0\prec\alpha\prec 1$

البرهان :

لدينا

$$D_x^\alpha\left[u\left(v\left(x\right)\right)\right]=\Gamma\left(\alpha+1\right)\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v\left(x+h\right)\right)-u\left(v\left(x\right)\right)}{h^\alpha}$$

$$=\Gamma\left(\alpha+1\right)\lim_{h\to 0}\left[\frac{u\left(v\left(x+h\right)\right)-u\left(v\left(x\right)\right)}{\left(v\left(x+h\right)-v\left(x\right)\right)^\alpha}\left(\frac{\left(v\left(x+h\right)-v\left(x\right)\right)^\alpha}{h^\alpha}\right)\right]$$

ومنه ينتج

$$D_x^{\alpha}\left[u\left(v\left(x\right)\right)\right]=\left[\Gamma\left(\alpha+1\right)\lim_{h\to 0}\frac{u\left(v\left(x+h\right)\right)-u\left(v\left(x\right)\right)}{\left(v\left(x+h\right)-v\left(x\right)\right)^{\alpha}}\right]$$
$$\times\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{v\left(x+h\right)-v\left(x\right)}{h}\right)^{\alpha}\right].$$
$$=D_v^{\alpha}u\left(v\right)\left(v'\left(x\right)\right)^{\alpha}$$

2.2..تحويل لابلاس للمشتق الكسري لجوماري

تعريف3.2.2 : لتكن $f^{(\alpha)}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ دالة المشتق الكسري بمعني جوماري [5]

دالة تحويل لابلاس للمشتق الكسري لجوماري يعطي بالعلاقة

$$L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_s=F_{\alpha}\left(s\right)=\int_0^{\infty}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}\left(x\right)\left(dx\right)^{\alpha} \tag{2.9}$$
$$=\lim_{M\to\infty}\int_0^{M}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}\left(x\right)\left(dx\right)^{\alpha}.$$

مع E_{α} تعبر عن دالة Mittag-Leffler و $s\in\mathbb{R}$

نتيجة1.2.2 : لتكن الدالتين $f^{(\alpha)}$ و $g^{(\alpha)}$ دوال المشتق الكسري بمعني جوماري حيث $f^{(\alpha)}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ و $g^{(\alpha)}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ و E_{α} تعبر عن دالة Mittag-Leffler و $0\prec\alpha\prec 1$ مهما يكن العددين الحقيقيين a و b من $\mathbb{R}$ لدينا [8]

$$L\left\{af^{(\alpha)}\left(x\right)+bg^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_s=aL\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_s+bL\left\{g^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_s \tag{2.10}$$

$$L\left\{x^{\alpha}f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_s=-D_s^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_s \tag{2.11}$$

$$\forall\alpha\succ 0;L\left\{f^{(\alpha)}\left(\alpha x\right)\right\}_s=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{\frac{s}{a}} \tag{2.12}$$

$$\forall b\succ 0;L\left\{f^{(\alpha)}\left(x-b\right)\right\}_s=L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_sE_{\alpha}\left(-S^{\alpha}b^{\alpha}\right) \tag{2.13}$$

[5] G. Jumarie, Table of some basic fractional calculus formulae derivedfrom a modi.ed Riemann.Liouville derivative for non-di¤erentiable functions, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 378.385.

$$\forall c \succ 0, L\left\{f^{(\alpha)}(x)E_{\alpha}\left(-c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s} = L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s+c} \quad (2.14)$$

$$L\left\{-x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} = D_{s}^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} \quad (2.15)$$

$$L\left\{D_{x}^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} = s^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} - \Gamma(\alpha+1)f^{(\alpha)}(0) \quad (2.16)$$

$$L\left\{\int_{0}^{x} f^{(\alpha)}(u)(du)^{\alpha}\right\}_{s} = \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} \quad (2.17)$$

$$\forall k \succ 0, L\left\{x^{\alpha k}\right\}_{s} = \Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(1+k\alpha)}{s^{(k+1)\alpha}} \quad (2.18)$$

برهان النتيجة (2.10)

$$L\left\{af^{(\alpha)}(x)+bg^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} = \int_{0}^{\infty}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)\left[af^{(\alpha)}(x)+bg^{(\alpha)}(x)\right](dx)^{\alpha}$$

ومنه ينتج

$$\begin{aligned} L\left\{af^{(\alpha)}(x)+bg^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} &= a\int_{0}^{\infty}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha} \\ &+b\int_{0}^{\infty}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)g^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha} \\ &= aL\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} + bL\left\{g^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} \end{aligned}$$

$$L\left\{x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} = -D_{s}^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s}$$

برهان النتيجة (2.11)

$$L\left\{x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_{s} = \int_{0}^{\infty}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}$$

ونعلم ان $D_{s}^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right) = -x^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)$

ومنه ينتج

$$L\left\{x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_s=-\int_0^{\infty}D_s^{\alpha}E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}$$
$$=-D_s^{\alpha}\int_0^{\infty}E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}$$
$$=-D_s^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_s .$$

برهان النتيجة (2.12)

$$L\left\{f^{(\alpha)}(\alpha x)\right\}_s=\lim_{M\to\infty}\int_0^{M}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(\alpha x)(dx)^{\alpha}.$$
$$=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{M}(M-x)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(\alpha x)dx .$$

بفرض ان $u=\alpha x$ ينتج

$$L\left\{f^{(\alpha)}(\alpha x)\right\}_s=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{M}(M-x)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(\alpha x)dx$$
$$=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{aM}\left(M-\frac{u}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}\frac{u}{a^{\alpha}}^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(u)\frac{du}{a}$$
$$=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{aM}\left(\frac{aM-u}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}\frac{u}{a^{\alpha}}^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(u)\frac{du}{a}$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_{\frac{s}{a}}$$

برهان النتيجة (2.13)[8]

$$L\left\{f^{(\alpha)}(x-b)\right\}_s=\lim_{M\to\infty}\int_0^{M}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x-b)(dx)^{\alpha}$$
$$=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{aM}(M-x)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x-b)dx$$

بوضع $u=x-b$

$$L\left\{f^{(\alpha)}(x-b)\right\}_s=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{M}(M-x)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x-b)dx$$

ينتج

$$=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_0^{M-b}(M-b-u)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}(b+u)^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(u)du$$

وبما ان

$$E_{\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(\lambda y^{\alpha}\right)=E_{\alpha}\left(\lambda\left(x+y\right)^{\alpha}\right)$$

ينتج

$$L\left\{f^{(\alpha)}\left(x-b\right)\right\}_{s}=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_{0}^{M-b}\left(M-b-u\right)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}\left(b+u\right)^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}\left(u\right)du$$

$$=\lim_{M\to\infty}\alpha\int_{0}^{M-b}\left(M-b-u\right)^{\alpha-1}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}b^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}u^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}\left(u\right)du$$

وعليه

$$\forall b\succ 0;L\left\{f^{(\alpha)}\left(x-b\right)\right\}_{s}=L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{s}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}b^{\alpha}\right)$$

برهان النتيجة (2.14)

لدينا

$$L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)E_{\alpha}\left(-c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=\int_{0}^{\infty}E\left(-c^{\alpha}x^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}\left(x\right)\left(dx\right)^{\alpha}.$$

وبما ان :

$$E_{\alpha}\left(-x^{\alpha}c^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(-x^{\alpha}s^{\alpha}\right)=E_{\alpha}\left(-x^{\alpha}\left(c+s\right)^{\alpha}\right).$$

ينتج $\forall c\succ 0,L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)E_{\alpha}\left(-c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{s+c}$

برهان النتيجة (2.15)

لدينا

$$L\left\{-x^{\alpha}f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{s}=-\int_{0}^{\infty}E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}x^{\alpha}\right)x^{\alpha}f^{(\alpha)}\left(x\right)\left(dx\right)^{\alpha}.$$

و من خلال العلاقة استعمال (2.12) نجد :

$$L\left\{-x^{\alpha}f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{s}=-\left(-D_{s}^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{s}\right).$$

$$=D_{s}^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}\left(x\right)\right\}_{s}$$

برهان النتيجة (2.16)

لدينا $D_x^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)=-s^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)$

و بما ان $D_x^{\alpha}(uv)(x)=v(x)D_x^{\alpha}u(x)+u(x)D_x^{\alpha}v(x)$

اذن

$$D_x^{\alpha}\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)\right)=\left(D_x^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right)f^{(\alpha)}(x)+E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)D_x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)$$
$$=-S^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)+E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)D_x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)$$

باستعمال التكامل على الطرفين نتحصل على:

$$\int_0^t D_x^{\alpha}\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)\right)(dx)^{\alpha}=-S^{\alpha}\int_0^t E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}$$
$$+\int_0^t\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)D_x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right)(dx)^{\alpha}.$$

ومن جهة احري لدينا

$$\int_0^t D_x^{\alpha}\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)\right)(dx)^{\alpha}=\int_0^t\frac{d^{\alpha}\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)\right)}{(dx)^{\alpha}}(dx)^{\alpha}$$
$$=\Gamma(\alpha+1)\int_0^t d\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)\right).$$

اذن

$$\Gamma(\alpha+1)\left[E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}t^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(t)-f^{(\alpha)}(0)\right]=-S^{\alpha}\int_0^t E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}$$
$$+\int_0^t E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)D_x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)(dx)^{\alpha}.$$

وبما ان t يوال الى ∞ ينتج

$$-\Gamma(\alpha+1)f^{(\alpha)}(0)=-S^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_S+-S^{\alpha}L\left\{D_x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_S$$

معناه

$$L\left\{D_x^{\alpha}f^{(\alpha)}(x)\right\}_s = s^{\alpha}L\left\{f^{(\alpha)}(x)\right\}_s - \Gamma(\alpha+1)f^{(\alpha)}(0)$$

برهان النتيجة (2.17)

بوضع : $g(x)=\int_0^x f(u)(du)^{\alpha}$

ومنه $D_x^{\alpha}g(x)=\Gamma(\alpha+1)f(x)$

من خلال العلاقة (2.16) ينتج

$$\begin{aligned} L\left\{D_x^{\alpha}g^{(\alpha)}(x)\right\}_s &= -\Gamma(\alpha+1)g^{(\alpha)}(0)+s^{\alpha}L\left\{g^{(\alpha)}(x)\right\}_s \\ &= \Gamma(\alpha+1)L\left\{g^{(\alpha)}(x)\right\}_s \end{aligned}$$

وبما ان $g^{(\alpha)}(0)=0$ اذن $L\left\{D_x^{\alpha}g^{(\alpha)}(x)\right\}_s = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)L\left\{g^{(\alpha)}(x)\right\}_s}{s^{\alpha}}$

معناه

$$L\left\{\int_0^x g^{(\alpha)}(u)(du)^{\alpha}\right\}_s = \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}L\left\{g^{(\alpha)}(x)\right\}_s$$

برهان النتيجة (2.18)

لدينا $D_x^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)=-s^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)$

ومنه $d^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)=-s^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha}$ وبما ان

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t d^{\alpha}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)=\Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to\infty}\int_0^t d\left(E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right).$$

اذن

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}E_{\alpha}\left(-S^{\alpha}x^{\alpha}\right)(dx)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{S^{\alpha}} \\ &= L\{1\}_s . \end{aligned}$$

إذن من اجل تكون صحيحة ومن خلال استعمال مبدا الاستدلال بالتراجع بفرض ان العلاقة (2.17) صحيحة

من اجل كل k و نبرهن صحة العلاقة 7 من اجل $k+1$ لدينا :

$$L\left\{x^{\alpha(k+1)}\right\}_s=\int_0^{+\infty}E_\alpha\left(-S^\alpha x^\alpha\right)x^{\alpha(k+1)}(dx)^\alpha .$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد

بفرض

$$u(x)=x^{\alpha(k+1)} \text{ و } D_x^\alpha v(x)=x^{\alpha(k+1)}E_\alpha\left(-S^\alpha x^\alpha\right)$$

إذن : $$v(x)=\frac{-1}{S^\alpha}E_\alpha\left(-S^\alpha s^\alpha\right) \text{ و } D_x^\alpha u(x)=\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{\Gamma(\alpha k+1)}x^{\alpha(k+1)}$$

وبما أن

$$\int_a^b\left(D_x^\alpha v(x)\right)u(x)(dx)^\alpha=\Gamma(\alpha+1)\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b v(x)\left(D_x^\alpha u(x)\right)(dx)^\alpha .$$

لإذن :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t E_\alpha\left(-S^\alpha x^\alpha\right)x^{\alpha(k+1)}(dx)^\alpha&=-\lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{S^\alpha}\left[E_\alpha\left(-S^\alpha x^\alpha\right)x^{\alpha(k+1)}\right]_0^t\\&+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{S^\alpha}\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{\Gamma(\alpha k+1)}\times\int_0^t E_\alpha\left(-S^\alpha x^\alpha\right)x^{\alpha k}(dx)^\alpha\\&=\frac{1}{S^\alpha}\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{\Gamma(\alpha k+1)}L\left\{x^{\alpha k}\right\}_s\\&=\Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)}{S^{\alpha(k+2)}}.\end{aligned}$$

نتيجة 2.2.2. : اذا كانت الدالة المعرفة كمايلي : $f(x)=Cos_\alpha\left(c^\alpha x^\alpha\right)$ فإن

$$L_\alpha\left\{Cos_\alpha\left(c^\alpha x^\alpha\right)\right\}_s=\frac{\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}{c^{2\alpha}+s^{2\alpha}} \quad (2.19)$$

نتيجة3.2.2..[6] : اذا كانت الدالة المعرفة كمايلي: $f\left(x\right)=Sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)$ فإن

$$L\left\{Sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)c^{\alpha}}{c^{2\alpha}+s^{2\alpha}} \qquad (2.20)$$

$$L\left\{Sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)c^{\alpha}}{c^{2\alpha}+s^{2\alpha}} \qquad (2.20)$$

مثال4.2.2:

لتكن لدينا الدالة المعرفة كمايلي

$$f\left(x\right)=E_{\alpha}\left(ic^{\alpha}x^{\alpha}\right)$$

احسب $L\left\{f\left(x\right)\right\}_{s}$

لدينا

$$L\left\{\left(f_{\alpha}\right)\left(x\right)\right\}_{s}=L\left\{E_{\alpha}\left(ic^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}=L\left\{Cos_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}+iL\left\{Sin_{\alpha}\left(c^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s}$$

ومن خلال (2.19) و (2.20) ينتج

$$\begin{aligned} L\left\{E_{\alpha}\left(ic^{\alpha}x^{\alpha}\right)\right\}_{s} &=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)s^{\alpha}}{c^{2\alpha}+s^{2\alpha}}+i\,\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)c^{\alpha}}{c^{2\alpha}+s^{2\alpha}} \\ &=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{s^{\alpha}-ic^{\alpha}}. \end{aligned} \qquad (2.21)$$

مع $0\prec\alpha\prec1$

[6] Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal et transformée de Laplace fractionnaire ausens de JumarieBenaissa Mohamed el AmineUniversité Abou Bekr Belkaïd TlemcenMémoire de MasterAnnée universitaire : 2014-2015 page 56-57

خلاصة

من خلال هذا الفصل نستخلص ان المشتق الكسري بمفهوم لجوماري هو امتداد للاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل مع الحفاظ على خواص الاشتقاق الكلاسيكي وقد فتح هذ الانموذج من الاشتقاق الى فتح افاق جديد لحل المعادلات التفاضلية من الرتب الكسرية و هذا ما سنتطرق اليه في الفصل الثالث

الفصل الثالث
استخدامات المشتق الكسري لجوماري
لحل بعض المسائل

تمهيد

يتم نمذجة معظم الظواهر الفيزيائية و البيولوجية على شكل معادلات تفاضلية و تختلف هذه الاخيرة حسب طبيعة التوابع و الرتب الاشتقاق و لقد زاد الاهتمام في العشرية الاخيرة على تعين حلول لمعادلات تفاضلية منمذجه لظواهر واقعية برتب كسرية بهدف التقدير و التنبؤ بالظواهر و لهذا سنتطرق في هذا الفصل الى بعض النماذج من المعادلات التفاضلية و طرق حلبها باستخدام المشتق الكسري لجوماري.

1.3. مقدمة حول المعادلات التفاضلية من رتب كسرية

تعريف 1.3:المعادلة التفاضلية هي معادلة تحوي مشتقات وتفاضلات لبعض التوابع الرياضية وتظهر فيها بشكل متغيرات للمعادلة.و يكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه التوابع الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات .تبرز المعادلات التفاضلية بشكل كبير في تطبيقات الفيزياء والكيمياء، وحتى النماذج الرياضية المتعلقة بالعمليات الحيوية والاجتماعية والاقتصادية[1]

و تعرف رتبة المعادلة التفاضلية على أنها أعلى رتبة لمشتق موجود في هذه المعادلة : فإذا إحتوت المعادلة مشتقا أولا ومشتقا ثانيا فقط تعتبر من الرتبة الثانية وهكذا .المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى تحتوي [2] على مشتقات أولى فقط .

تعريف 2.3 : المعادلات التفاضلية العادية

المعادلات التفاضلية العادية هي علاقة بين المتغير التابع و المتغير المستقل تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات ,

كل من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية حيث ان المعادلات التفاضلية الخطية هي المعادلة الخطية في المتغير التابع و مشتقاته جميعا ,وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:

- إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط أو ثوابت.

---

[1] Lions, Jacques Louis. Optimal control of systems governed by partial differential equations (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften).Vol. 170. Berlin: Springer, .1971

2 Pierre Grisvard , calcul Differential of Equations Differential ,office des publications universitaires,2 eme Edition ,Alger ,1980.

- إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس، أي كلها من الدرجة الأولى.

وتكون غير خطية فيما عدا ذلك .

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الدرجة الأولى، بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى هي خطية، لأن الدرجة تتحدد حسب أس التفاضل الأعلى، ومن الممكن أن تكون التفاضلات الأقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون أن يؤثر ذلك على الدرجة، وهذا يخل بشرط المعادلة الخطية.

حيث ان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة [3] n

$$P_n(x)y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+..+P_1(x)y'+P_0(x)y=Q(x)$$

حيث المتغير y وجميع مشتقاته مرفوعة للأس واحد و لاتوجد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها .

والمعاملات $P_i(x)$ هي دوال في x خطية ام غير خطية و كذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$

تعريف 3.3: المعادلات التفاضلية الكسرية :

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية ذات رتب صحيحة حيث ان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الكسرية متعددة الترتيب تعرف بالشكل التالي

$$D^{\alpha}y(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i D^{\beta i}y(x)+a_{k+1}y(x)+g(x)$$

مع الشروط الإبتدائية

[3] Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989

$$y^{(i)}(0)=d_i \quad i=0,1,2,.....,n-1$$

حيث $a_j\ (j=1,.....,k+1)$ هي معاملات ثابتة حقيقية

وأيضا $n-1\prec\alpha\leq n$ و $\beta_1\prec\beta_2\prec\beta_0\prec......\prec\beta_k\prec\alpha$

و D^{α} تدل على المشتقات الكسرية لريمان ليوفيل من رتبة α

2.3.تطبيقات تحويل لابلاس كسور بمعنى جوماري لحل مشاكل كوشي

نتطرق في هذا الجزء الى لتطبيق بعض النتائج و الخصائص تحويل لابلاس الكسري بمعني جوماري في حل بعض نماذج من مشاكل كوشي[4]

الحالة 01 : ليكن لدينا مشكلة كوشي التالية:

$$\begin{cases} D_x^{\alpha}y(x)+y(x)=0 \\ y(0)=k,k\in\mathbb{R}^* \end{cases} \quad (3.1)$$

مع $0\prec\alpha\prec1$

لدينا $D_x^{\alpha}y(x)+y(x)=0$

من خلال تطبيق تحويل لابلاس الجزئي بمعنى جوماري على طرفي المعادلة (3:19) نحصل عليها

$$L\{D_x^{\alpha}y(x)\}_s+L\{y(x)\}_s=0$$

ومن خلال (2.16) ينتج لدينا

$$L\{D_x^{\alpha}y(x)\}_s=s^{\alpha}L\{y(x)\}_s-\Gamma(\alpha+1)y(0)$$

وبذلك

[4] G. Jumarie, On the solution of the stochastic di¤erential equation of exponential growth driven by fractional Brownian motion, Appl. Math. Lett.18 (2005), 817.826.

$$L\left\{D_x^{\alpha}y(x)\right\}_s+L\left\{y(x)\right\}_s=s^{\alpha}L\left\{y(x)\right\}_s-\Gamma(\alpha+1)k++L\left\{y(x)\right\}_s$$

$$=0$$

معناه ان

$$L\left\{y(x)\right\}_s=\frac{k\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}+1}.$$

ومنه

$$y(x)=kL^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}+1}\right\}.$$

إذن من خلال (2.21) نحصل على $y(x)=kE_{\alpha}\left(-x^{\alpha}\right)$ مع E_{α} هي دالة Mittag-Leffler

الحالة 02: ليكن لدينا مشكلة كوشي التالية:

$$\begin{cases} D_x^{\alpha}y(x)=y(x-1)=0 \\ y(0)=c,c\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad (3.2)$$

مع $0\prec\alpha\prec1$

من خلال تطبيق تحويل لابلاس الجزئي بمعنى جوماري على طرفي المعادلة (3.2) ؛ نحصل على :

$$L\left\{D_x^{\alpha}y(x)\right\}_s=L\left\{y(x-1)\right\}_s.$$

من خلال (2.13) و (2.15) ؛ لدينا

$$s^{\alpha}L\left\{y(x)\right\}_s-\Gamma(\alpha+1)c=E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}\right)L\left\{y(x)\right\}_s.$$

ومنه

$$\left(s^{\alpha}-E_{\alpha}\left(-s^{\alpha}\right)\right)L\left\{y(x)\right\}_s+\Gamma(\alpha+1)c.$$

معناه

$$L\{y(x)\}_s=\frac{\Gamma(\alpha+1)c}{\left(s^\alpha-E_\alpha\left(-s^\alpha\right)\right)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)c}{s^\alpha\left(1-\frac{E_\alpha\left(-s^\alpha\right)}{s^\alpha}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)c}{s^\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{E_\alpha\left(-s^\alpha\right)}{s^\alpha}\right)^k.$$

وبما ان

$$E_\alpha^K\left(-s^\alpha\right)=E_\alpha^K\left(-k^\alpha s^\alpha\right).$$

معناه

$$y(x)=\Gamma(\alpha+1)c\sum_{k=0}^{+\infty}L_\alpha^{-1}\left\{\frac{E_\alpha\left(-k^\alpha s^\alpha\right)}{s^{\alpha(k+1)}}\right\}\left(\frac{E_\alpha\left(-s^\alpha\right)}{s^\alpha}\right)^k.$$

وبما ان

$$L\left\{(x-k)^{\alpha k}\right\}_s=E_\alpha\left(-k^\alpha s^\alpha\right)L\left\{x^{\alpha k}\right\}_s.$$

اذن ينتج

$$y(x)=c\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-k)^{\alpha k}}{\Gamma(1+k\alpha)}.$$

الحالة 03: ليكن لدينا مشكلة كوشي التالية:

$$\begin{cases}D_x^\alpha y(x)+y(x)=\sin_\alpha\left(x^\alpha\right)\\ y(0)=0\end{cases}\qquad(3.3)$$

مع $0\prec\alpha\prec1$

لدينا

$$D_x^\alpha y(x)+y(x)=\sin_\alpha\left(x^\alpha\right)$$

من خلال تطبيق تحويل لابلاس الجزئي بمعنى جوماري إلى المعادلات (3.3)في هذا النظام ، نحصل علي

$$L\left\{D_x^\alpha y(x)\right\}_s+L\{y(x)\}=L\left\{\sin_\alpha\left(x^\alpha\right)\right\}_s$$

من خلال (2.16)و (2.20) ينتج

$$L\left\{D_x^{\alpha}y(x)\right\}_s+L\left\{y(x)\right\}_s=s^{\alpha}L\left\{y(x)\right\}_s-\Gamma(\alpha+1)y(0)+L\left\{y(x)\right\}_s$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{2\alpha}+1}.$$

معناه

$$L\left\{y(x)\right\}_s=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(s^{2\alpha}+1\right)\left(s^{2\alpha}+1\right)}$$
$$=\Gamma(\alpha-1)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s^{\alpha}+1}-\frac{(i+1)}{4}\frac{1}{s^{\alpha}+i}+\frac{(i+1)}{4}\frac{1}{s^{\alpha}+i}\right].$$

ومنه

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(s^{2\alpha}+1\right)\left(s^{2\alpha}+1\right)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}+1}\right\}-\frac{(i+1)}{4}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}-i}\right\}+\frac{(i-1)}{4}L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}+i}\right\}.$$

من خلال تطبيق (2.21) ينتج

$$y(x)=\frac{1}{2}E_{\alpha}\left(-x^{\alpha}\right)-\frac{(i+1)}{4}E_{\alpha}\left(ix^{\alpha}\right)+\frac{(i-1)}{4}E_{\alpha}\left(-ix^{\alpha}\right).$$

و بمان

$$E_{\alpha}\left(ix^{\alpha}\right)=\cos_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)+i\sin_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)$$

اذن

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[-\cos_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)+i\sin_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)+E_{\alpha}\left(-x^{\alpha}\right)\right].$$

مع E_α هي دالة Mittag-Leffler

الحالة 04: لدينا النظام التالي:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} D_x^\alpha y_1(x)+y_2(x)=0 \\ D_x^\alpha y_2(x)+y_1(x)=0 \\ y_1(0)=1, \\ y_2(0)=-1, \end{cases}$$

مع $0 \prec \alpha \prec 1$

من خلال تطبيق تحويل لابلاس الجزئي بمعنى جوماري إلى المعادلات(3.4) في هذا النظام ، نحصل عليها

$$\begin{cases} s^\alpha L\{y_1(x)\}_s-\Gamma(\alpha+1)y_1(0)+L\{y_2(x)\}=0. \\ L\{y_1(x)\}_s+s^\alpha L\{y_2(x)\}_s-\Gamma(\alpha+1)y_2(0)=0. \end{cases}$$

ذلك بالقول

$$\left\{\begin{pmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_\alpha\{y_1(x)\}_s \\ L_\alpha\{y_2(x)\}_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Gamma(\alpha+1) \\ -\Gamma(\alpha+1) \end{pmatrix}\right.$$

نحسب المحدد Δ للجملة $\begin{pmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{pmatrix}$ نجد

لدينا

$$\Delta=\det\begin{pmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} s^\alpha & 1 \\ 1 & s^\alpha \end{vmatrix}=s^{2\alpha}-1$$

معناه

$$\begin{aligned} L\{y_1(x)\}_s &= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma(\alpha+1) & 1 \\ -\Gamma(\alpha+1) & s^\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha-1}. \end{aligned}$$

ولدينا
$$L\{y_2(x)\}_s=\frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha} & \Gamma(\alpha+1) \\ 1 & -\Gamma(\alpha+1)\end{vmatrix}}{\Delta}$$
$$=-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}-1}$$

معناه
$$y_1(x)=L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^{\alpha}-1)}\right\},$$

و
$$y_2(x)=-L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s^{\alpha}-1)}\right\},$$

إذن في الاخير نتحصل على

$$y_2(x)=-E_{\alpha}(x^{\alpha}) \text{ و } y_1(x)=E_{\alpha}(x^{\alpha})$$

مع E_{α} هي دالة Mittag-Leffler

الحالة 05: لدينا النظام التالي

$$\begin{cases} D_x^{\alpha}y_1(x)+y_1(x)=y_2(x)+E_{\alpha}(x^{\alpha}), \\ D_x^{\alpha}y_2(x)+y_2(x)=y_1(x)+E_{\alpha}(x^{\alpha}), \\ y_2(0)=y_1(0)=1, \end{cases} \qquad (3.5)$$

مع $0\prec\alpha\prec1$

من خلال تطبيق تحويل لابلاس الجزئي بمعنى جوماري إلى المعادلات(3.5) في هذا النظام ، نحصل عليها

$$\begin{cases} s^{\alpha}L\{y_1(x)\}_s-\Gamma(\alpha+1)y_1(0)+L\{y_2(x)\}_s=L\{y_2(x)\}_s\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}-1}. \\ L\{y_2(x)\}_s+s^{\alpha}L\{y_2(x)\}_s-\Gamma(\alpha+1)y_2(0)=L\{y_1(x)\}_s\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}-1}. \end{cases}$$

معناه ان

$$\left\{\begin{pmatrix} s^{\alpha}+1 & -1 \\ -1 & s^{\alpha}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L\{y_1(x)\}_s \\ L\{y_2(x)\}_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{s^{\alpha}-1} \\ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{s^{\alpha}-1} \end{pmatrix}\right.$$

نحسب المحدد Δ للجملة $\begin{pmatrix} s^{\alpha}+1 & -1 \\ -1 & s^{\alpha}+1 \end{pmatrix}$ نجد

لدينا
$$\Delta=\det\begin{pmatrix} s^{\alpha}+1 & -1 \\ -1 & s^{\alpha}+1 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1 & -1 \\ -1 & s^{\alpha}+1 \end{vmatrix}=s^{\alpha}\left(s^{\alpha}+2\right),$$

معناه
$$L\{y_1(x)\}_s=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{s^{\alpha}-1} & -1 \\ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{s^{\alpha}-1} & s^{\alpha}+1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}-1}.$$

معناه
$$y_1(x)=L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(s^{\alpha}-1\right)}\right\},$$

و
$$y_2(x)=-L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(s^{\alpha}-1\right)}\right\},$$

في الاخير نتحصل على $y_1(x)=E_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)$ و $y_2(x)=-E_{\alpha}\left(x^{\alpha}\right)$

مع E_{α} هي دالة Mittag-Leffler

3.3. حل المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية من الدرجة الثانية

النظرية 1.3: المعادلة التفاضلية الكسرية[5]

$$(3.6).........(D^{\alpha}-a)(D^{\alpha}-b)y(t)=0$$

لديها حل من الشكل $y=AE_{\alpha}(at^{\alpha})+BE_{\alpha}(bt^{\alpha})$ مع A و B ثوابت. و $-\alpha$ يتعلق بـ t،

$0\prec\alpha\prec 1$ مع D^{α} مشتق Jumarie و E_{α} تعبر عن دالة Mittag-Leffler.[7]

البرهان :[6]

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $(D^{\alpha}-a)(D^{\alpha}-b)y(t)=0$ بفرض ان المعادلة لها حل من الشكل

$y=AE_{\alpha}(at^{\alpha})+BE_{\alpha}(bt^{\alpha})$ مع A و B ثوابت

معناه $D^{\alpha}y=AaE_{\alpha}(at^{\alpha})+BbE_{\alpha}(bt^{\alpha})$

تكافئ $D^{\alpha}y-ay=AaE_{\alpha}(at^{\alpha})+BbE_{\alpha}(bt^{\alpha})-ay$

ومنه

$$\begin{aligned}D^{\alpha}y-ay&=AaE_{\alpha}(at^{\alpha})+BbE_{\alpha}(bt^{\alpha})-a\left(AE_{\alpha}(at^{\alpha})+BE_{\alpha}(bt^{\alpha})\right)\\&=B(b-a)E_{\alpha}(bt^{\alpha})\end{aligned}$$

بالتفاضل عن طريق مشتق جوماري نتحصل على

$$D^{2\alpha}y-aD^{\alpha}y=Bb(b-a)E_{\alpha}(bt^{\alpha})$$

معناه

$$D^{2\alpha}y-(a+b)D^{\alpha}y+aby=0$$

[5] Jumarie, “On the derivative chain-rules in fractional calculus via fractional difference and their application to systems modelling,” *Central European Journal of Physics*, vol. 11, no. 6, pp. 617-633, 2013.
[6] G. Jumarie, Laplace.s transform of fractional order via the Mittag-Le- er function and modi.ed Riemann-Liouvillle derivative, Appl.Math.Lett.22 (2009), 1659,1664.

يمكن التعبير عن المعادلة الاخيرة بالشكل $(D^{\alpha}-a)(D^{\alpha}-b)y(t)=0$

وبذلك $y=AE_{\alpha}(at^{\alpha})+BE_{\alpha}(bt^{\alpha})$ هو حل للمعادلة التفاضلية (3.6)

تعميم : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $(D^{\alpha}-a)(D^{\alpha}-b)y(t)=0$

بوضع $(D^{\alpha}-b)y(t)=x(t)$ المعادلة تصبح من الشكل $(D^{\alpha}-a)x(t)=0$ او $D^{\alpha}x(t)=ax(t)$ نعلم ان حلها من الشكل $x(t)=A_1E_{\alpha}(at^{\alpha})$

معناه
$$(D^{\alpha}-b)y(t)=A_1E_{\alpha}(at^{\alpha})$$

ومنه
$$D^{\alpha}y-by=A_1E_{\alpha}(at^{\alpha})$$

تكافئ
$$E_{\alpha}(-bt^{\alpha})(D^{\alpha}y-by)=A_1E_{\alpha}(at^{\alpha})E_{\alpha}(-bt^{\alpha})$$

ومنه
$$D^{\alpha}\left(yE_{\alpha}(-bt^{\alpha})\right)=\frac{A_1}{a-b}D^{\alpha}\left(E_{\alpha}(at^{\alpha})E_{\alpha}(-bt^{\alpha})\right)$$

نكامل الطرفين نتحصل على

$$yE_{\alpha}(-bt^{\alpha})=\frac{A_1}{a-b}\left(E_{\alpha}(at^{\alpha})E_{\alpha}(-bt^{\alpha})\right)+B$$

تكافئ $y=AE_{\alpha}(at^{\alpha})+BE_{\alpha}(bt^{\alpha})$

مع $A=\dfrac{A_1}{a-b}$ و E_{α} هي دالة Mittag-Leffler

ومنه يمكن تعميم حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية من الشكل

$$(D^{\alpha}-a_1)(D^{\alpha}-a_2)(D^{\alpha}-a_3)\dots(D^{\alpha}-a_n)y(t)=0$$

هو $y=\sum_{i=1}^{n}A_iE_{\alpha}(a_it^{\alpha})$

مع A_i ثابت اعتباري و $E_\alpha\left(a_i t^\alpha\right)$ هي دالة **Mittag-Leffler** ذات وسيط واحد

النظرية 2.3: المعادلة التفاضلية الكسرية

$$(3.7)\ldots\ldots D^{2\alpha}y-2aD^\alpha y+a^2y=0$$

لديها حل من الشكل $y=\left(At^\alpha+B\right)E_\alpha\left(at^\alpha\right)$ مع A و B ثوابت.

البرهان :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $D^{2\alpha}y-2aD^\alpha y+a^2y=0$ بفرض ان االمعادلة لها حل من الشكل $y=\left(At^\alpha+B\right)E_\alpha\left(at^\alpha\right)$ مع A و B ثوابت

معناه $D^\alpha y=\Gamma(1+\alpha)AE_\alpha\left(at^\alpha\right)+\left(At^\alpha+B\right)\alpha E_\alpha\left(at^\alpha\right)$

تكافي $D^\alpha y-ay=\Gamma(1+\alpha)AE_\alpha\left(at^\alpha\right)+\left(At^\alpha+B\right)\alpha E_\alpha\left(at^\alpha\right)-ay$

ومنه

$$\begin{aligned}D^\alpha y-ay&=\Gamma(1+\alpha)AE_\alpha\left(at^\alpha\right)+\left(At^\alpha+B\right)\alpha E_\alpha\left(at^\alpha\right)\\&-a\left(\left(At^\alpha+B\right)E_\alpha\left(at^\alpha\right)\right)\\&=\Gamma(1+\alpha)AE_\alpha\left(at^\alpha\right)\end{aligned}$$

بالتفاضل عن طريق مشتق جوماري نتحصل على

$$D^{2\alpha}y-aD^\alpha y=a\Gamma(1+\alpha)AE_\alpha\left(at^\alpha\right)=a\left(D^\alpha y-ay\right)$$

معناه $D^{2\alpha}y-2aD^\alpha y+a^2y=0$

وبذلك $y=\left(At^\alpha+B\right)E_\alpha\left(at^\alpha\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية (3.7)

مع A و B ثوابت اعتبارية و $E_\alpha\left(a_i t^\alpha\right)$ هي دالة **Mittag-Leffler** ذات وسيط واحد[7]

تعميم :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $D^{2\alpha}y-2aD^{\alpha}y+a^2y=0$

تكافي $\left(D^{2\alpha}-2aD^{\alpha}+a^2\right)y=0$ ومنه $\left(D^{\alpha}-a\right)^2y=0$

بوضع $\left(D^{\alpha}-a\right)^2y=x\left(t\right)$ المعادلة تصبح من الشكل

$$\left(D^{\alpha}-a\right)x\left(t\right)=0 \text{ او } D^{\alpha}x\left(t\right)=ax\left(t\right)$$

نعلم ان حلها من الشكل $x\left(t\right)=A_1E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$

معناه $\left(D^{\alpha}-a\right)y\left(t\right)=A_1E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$

ومنه $E_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)\left(D^{\alpha}y-ay\right)=A_1E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)$

تكافي $D^{\alpha}\left[yE_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)\right]=A_1=D^{\alpha}\left[\dfrac{A_1t^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\right]$

نكامل الطرفين نتحصل على

ومنه $yE_{\alpha}\left(-at^{\alpha}\right)=\dfrac{A_1t^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}+B$

$$y=\left(At^{\alpha}+B\right)E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right) \quad \text{مع} \quad A=\frac{A_1}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}$$

مع A و B ثوابت اعتبارية و $E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)$ هي دالة **Mittag-Leffler** ذات وسيط واحد

النظرية 3.3: المعادلة التفاضلية الكسرية

$$(3.8)..........D^{2\alpha}y-2aD^{\alpha}y+\left(a^2+b^2\right)y=0$$

لديها حل من الشكل $y = E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)\left[A\cos_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right) + B\sin_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right)\right]$ مع A و B ثوابت.

البرهان :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $D^{2\alpha}y - 2aD^{\alpha}y + \left(a^2 + b^2\right)y = 0$

يمكن كتابتها على الشكل $\left(\left(D^{\alpha} - a\right)^2 + b^2\right)y = 0$

تكافئ $\left(D^{\alpha} - a + ib\right)\left(D^{\alpha} - a - ib\right)y = 0$

باستخدام النظرية 2.3 نحصل عى الحل الذي يمكن كتابته من الشكل

$$y = A_1E_{\alpha}\left(\left(a+ib\right)t^{\alpha}\right) + B_1E_{\alpha}\left(\left(a-ib\right)t^{\alpha}\right)$$

ومنه $y = A_1E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(ibt^{\alpha}\right) + B_1E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)E_{\alpha}\left(-ibt^{\alpha}\right)$

ومنه

$$y = E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)\left[A_1\left(\cos_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right) + i\sin_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right)\right)\right] + \left[B_1\left(\cos_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right) - i\sin_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right)\right)\right]$$

ومنه $y = E_{\alpha}\left(at^{\alpha}\right)\left[A\left(\cos_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right) + iB\sin_{\alpha}\left(bt^{\alpha}\right)\right)\right]$

مع $A = A_1 + B_1$ و $B = A_1 - B_1$

خلاصة

هناك عدة طرق لحل المعادلات التفاضلية الكسرية ، ويعتمد الحل على نوع المشتق الكسري المستخدم. هنا نقوم بتطوير طريقة تحليلية لإيجاد حلول المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية ، المكونة من مشتق Jumarie الكسري من حيث دالة Mittag-Leffler ذات وسيط واحدة. تم استخدام بعض الخصائص المعروفة لـ Mittag-Leffler لإيجاد حل للمعادلات التفاضلية الكسرية. حيث تمكننا المعادلات التفاضلية الكسرية في

العديد من المشكلات الفيزيائية و البيولوجية التي تم ذكرها سابقا

الخاتمة

الخاتمة

قدمنا في هذه المذكرة بتقديم التعاريف والنظريات الأساسية لحساب الاشتقاق الكسري و كذا اسهامات الحساب الكسري في التقدم العلمي في جميع المجالات لا سيمي الطب و الفيزياء و الكيمياء في الفصل الأول، كما استعرضنا المشتق الكسري لجوماري واهم خصائصه و نتائجه و علاقته بتحويل لابلاس في الفصل الثاني وفي الأخير اشرنا الى تقديم مدخل للمعادلات التفاضلية و طبقنا ما درسناه في الفصلين السابقين، حيث رأينا بعض الأمثلة لتطبيقات الحساب الكسري لمشتق جوماري في إعطاء نتائج لحل بعض المعادلات التفاضلية لاسيما مشكلة كوشي .

وختاما نرجوا أن نكون قد وفقنا ولو بالقليل في تسليط الضوء على أهمية هذا الموضوع، آملين أن نفتح بهذا العمل آفاقا جديدة للراغبين في دراسته والتوسع فيه.

و نقترح في الاخير تطبيق مشتق جوماري على نوع اخر من المعادلات التفاضلية بمشتقات كسرية لاسيما التي تعبر عن التصادم و التخامد و مقارنتها مع الحلول الناتجة بالطرق العددية للوصول أكثر دقة لا سيمي المعادلة

$$(I)\begin{cases} D_t^{\alpha} y(t) + Ay(t) = f(t) & n-1 \prec \alpha \leq n \\ y^{(k)}(0) = 0 & k = 1, 2, 3, \ldots.. n-1 \end{cases}$$

ونسأل اللهّ التوفيق والسداد، فإن أصبنا فمن اللهّ تعالى وإن أخطأنا فذلك من أنفسنا والشيطان فلنا شرف المحاولة والتعلم، ولكل شيء إذا ما تم نقصان.

قائمة المراجع و المصادر

قائمة المراجع و المصادر

1) د .سامي انجرو بعض تطبيقات الاشتقاق الكسر ي قسم الرياضيات ، جامعة تشرين مجلة جامعة المنارة - مجلد (2) العدد 1 السنة2022
2) Barnes EW. “The Theory of the Double Gamma Function.” hilosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, vol. 196, The Royal Society, 1901, pp. 265–387
3) I. Podlubny ,Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego,1999.
4) G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy ,Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, 1999.
5) H.Hadjar Problème aux limites pour équations dieérentielles fractionnaires ,Mémoire de Master, Tlemcen, 2014-2015.
6) D.Ziane méthode combinée des pertubations HPM et VIM pour la résolution des équation différentielles ordinaires et EDP d’ordre fractionnaire ,THESE DE DOCTORAT,universite d’oran 1, 2016.
7) Mittag-Leffler, G. M.. Sur la nouvelle fonction Eα (x), C. R. Acad. Sci. Paris, (Ser. II) 137, 554-558 (1903).
8) A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of frac- tional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,(2006).
9) M. Caputo and F.Mainardi ; Fractional Sub-Equation Method and its Applications to the Space{Time Fractional Di_erential Equations in Mathematical Physics,
10) Linear models of dissipation in an elastic solids, Riv.Nuovo Cimento (Ser. II),vol.1, (1971), pp. 161-198.
11) X.J. Yang, D. Baleanu, J.A.T. Machado, "On Analytical Methods for Differntial Equation withLocal Fractional Derivative Operators", 26 April 2017.
12) S. Sengupta, U. Ghosh, S. Sarkar, and S. Das. “Application of Fractional Derivatives in Characterization of ECG graphs of Right Ventricular Hypertrophy Patients”, Submitted on 7 Nov 2017
13) HOCHSTADT, H. Special Functions of Mathematical Physics, HOLT,RINEHART and WINSTON, New York,2007.
14) Hilal, N., Injrou, S., Karroum, R. (2020).Exponential finite difference methods for solving Newell–Whitehead–Segel equation. Arabian Journal of Mathematics
15) Injrou, S., Karroum, R., Moualla, M. (2020). Study on Oscillation for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with Delay and Neutral using Riccati Transformation. Albaath University Journal, 42
16) Hernandez, Z. R., Cruz-Garza, J., Tse, T., Contreras-Vidal, J. L.Decoding of intentional actions from scalp electroencephalography (EEG) in freely-behaving infants. Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc. , 2115-2118 (2014).

17) G. Jumarie. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions Further results, Computers and Mathematics with Applications, 2006. (51), 1367-1376.
18) G. Jumarie, On the solution of the stochastic di¤erential equation of exponential growth driven by fractional Brownian motion, Appl. Math.Lett.18 (2005), 817.826.
19) G. Jumarie, Table of some basic fractional calculus formulae derivedfrom a modi.ed Riemann.Liouville derivative for non-di¤erentiable functions, Appl. Math. Lett. 22 (2009), 378.385.
20) Dérivée fractionnaire locale au sens de Kolwankar-Gangal et transformée de Laplace fractionnaire ausens de JumarieBenaissa Mohamed el AmineUniversité Abou Bekr Belkaïd Tlemcen Mémoire de MasterAnnée universitaire : 2014-2015 page 56-57
21) Lions, Jacques Louis. Optimal control of systems governed by partial differential equations (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften).Vol. 170. Berlin: Springer, .1971
22) Pierre Grisvard , calcul Differential of Equations Differential ,office des publications universitaires,2 eme Edition ,Alger ,1980.
23) Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989
24) G. Jumarie, Laplace.s transform of fractional order via the Mittag-Le- er function and modi.ed Riemann-Liouvillle derivative, Appl.Math.Lett.22 (2009), 1659.1664.