

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي - تبسة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات والإعلام الآلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة الماستر

ميدان الرياضيات والإعلام الآلي

فرع: الرياضيات

تخصص: معادلات تفاضلية جزئية وتطبيقاتها

الموضوع:

## دراسة نظام فوضوي برتبة كسرية

من إعداد الطالبة:

سلاطني سهير

لجنة المناقشة:

رئيسا

أستاذة محاضرة-أ في جامعة العربي التبسي -تبسة

أ - دقايشية حكيمة

مؤطرا

أستاذة محاضرة-أ في جامعة العربي التبسي -تبسة

أ - قصري أحلام

ممتحنا

أستاذ محاضر-ب في جامعة العربي التبسي -تبسة

أ - طوالبية عبد اللطيف

تاريخ المناقشة: 2023/06/04

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# شكر و عرفان

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله المعطاء، الذي سقانا من كأس العلم و العلماء، فرفعنا من بساط الأرض إلى منبر يضاوي عنان السماء، وأهدانا هوية العلم للبقاء، في عصر لا يرحم الجهل والجهلاء وبعد:

✓ على ضفة الامتنان ومن على منبر مصنوع من لوح الإقرار بالمعروف، أقف لألقي كلمة شكر **الأساتذة** رموز الفخر وأصحاب سمو الفكر، من يُذكرون فيطيب الذكر ولا يزرعون إلا ويثمر البذر، رفيعي المقام ومنابع العلم والإلهام، لن نوفيهم حقهم مهما خطت الأقلام، بكل أمانة نعتزف وبكل إنصاف نقول بأنكم الأصالة وأنكم العلم، وأنكم فوق الرأي مميّزون وفوق الاعتراف رائعون. ✓ وأخص بالشكر للأستاذة المؤطرة \* قصري أحلام \* على مجهوداتها المبذولة

والنصائح المقدمة

وتوجيهاتها لي وأقول سقاك الله من بحر علمه المزيد .

# اهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله المعطاء المرجو سخاؤه، خالق القضاء المضمون بقاؤه، رافع السماء المستحق فداؤه،  
مشرف العلم والعلماء الذي شمل العالمين إنعامه وعمّ جميع المخلوقات إكرامه وبعد:  
فأهدي ثمرة سنيني وجهدها

إلى أغلى الحبايب أعظم نعم الله ، إلى التي تستحق أن أنخي لأجل حبها

## أمي الغالية

إلى من واراها التراه .. إلى أعز الناس .. الذي لا يجزيه مني كلام .. إلى من رحل  
ولن يعود

## أخي رحمه الله

إلى سندي إن سقطت يوما إلى من به أكبر وعليه أعتمد ، إلى من بوجوده  
أكسبته قوة

## أخي الأكبر

إلى طفلتنا المدللة و بسمه العائلة

## صغيرتنا سلسبيل

إلى أصحاب المعروف ومعنى السند، نعم الموصوف ونعم العصد، أبطال الأخوة وملوك النخوة،  
رموز النجاح ومعاني الصلاح.

## صديقاتي

إلى من ساندني وساهم في دعمي وكان مصدر قوة لي

## الملخص

في هذه المذكرة قدمنا دراسة لنظام فوضوي ذو رتبة كسرية، قمنا بداية بعرض بعض المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية ونظرية الفوضى، ثم تطرقنا كذلك للأنظمة ذات الرتب الكسرية، كما قدمنا بعض الأمثلة عن أنظمة فوضوية ذات رتبة كسرية، ومن ثم ركزنا على تحليل نظام فوضوي كسري.

شملت الدراسة البحث عن النقاط الثابتة ونقاط الاستقرار من خلال إيجاد ثوابت ليابونوف لها أين ظهرت العديد من السلوكيات، زيادة على ذلك فقد ظهر السلوك الفوضوي مع رتب كسرية أقل من ثلاثة وهذا غير ممكن مع الرتب الصحيحة، لذلك فإن الرتب الكسرية مفيدة جدا وكذا الاعتماد والاستناد على المخططات في الدراسة.

**كلمات مفتاحية:** الأنظمة الديناميكية، الفوضى، الحساب الكسري، استقرار ليابونوف.

---

# Résumé

Dans cette note, nous avons présenté une étude d'un système chaotique d'ordre fractionnaire. Nous avons d'abord présenté quelques concepts de base des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos, puis nous avons également traité des systèmes d'ordre fractionnaire, et nous avons également fourni quelques exemples de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Par conséquent, nous nous sommes concentrés sur l'analyse d'un système chaotique fractionnaire.

L'étude comprenait la recherche de points fixes et de points de stabilité en leur trouvant des constantes de Lyapunov, Là où de nombreux comportements sont apparus. en plus de cela, un comportement chaotique est apparu avec des rangs fractionnaires inférieurs à trois, et cela n'est pas possible avec les rangs corrects, donc les rangs fractionnaires sont très utiles. Ainsi que le recours et le recours aux graphiques dans l'étude.

**Mots clés** : systèmes dynamiques, chaos, calcul fractionnaire, stabilité de Lyapunov.

---

# Abstract

In this note, we presented a study of a fractional-order chaotic system. We first presented some basic concepts of dynamical systems and chaos theory, and then we also dealt with fractional-order systems, and we also provided some examples of fractional-order chaotic systems. Hence, we focused on analyzing a fractional chaotic system.

The study included searching for fixed points and stability points by finding Lyapunov constants for them, Where many behaviors appeared. moreover, chaotic behavior appeared with fractional ranks less than three and this is not possible with the correct ranks, so the fractional ranks are very useful, As well as reliance and reliance on charts in the study.

**Key words:** dynamical systems, chaos, fractional calculation, Lyapunov stability

---

## قائمة الأشكال

- 1.1 مبدأ قسم بوانكاريه ..... 3
- 2.1 مخطط مفارقة لنظام Hénon من أجل  $b = 0.3$  ..... 4
- 3.1 تطور حالات  $x$  ،  $y$  و  $z$  لنظام لورنز بمرور الوقت..... 9
- 4.1 جاذب لورنز الفوضوي..... 10
- 5.1 جاذب لورنز الغريب في البعد 3..... 10
- 6.1 الجاذب الفوضوي لروسلر..... 11
- 7.1 السلاسل الزمنية للجاذب الفوضوي لروسلر..... 12
- 8.1 جاذب لوزي من أجل  $(a, b) = (1.7, 0.5)$  مع الشرط الابتدائية  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ..... 13
- 9.1 صور لحالات النظام (22.1)..... 23
- 10.1 مخطط المفارقة الحرجة في نظام أحادي البعد..... 23
- 11.1 صور الحالات للنظام (23.1) من أجل  $\mu < 0$  و  $\mu = 0$  و  $\mu > 0$  ..... 24
- 12.1 مخطط مفارقة عقدة العنق في نظام أحادي البعد..... 24
- 13.1 صور الحالات للنظام (24.1) من أجل  $\mu < 0$  و  $\mu = 0$  و  $\mu > 0$  ..... 25
- 14.1 مخطط مفارقة fourche في نظام أحادي البعد..... 25
- 1.2 الجاذبات الفوضوية للنظام الكسري ثنائي الدينامو..... 28  
للقيم  $(\alpha, \beta) = (2, 1)$  و  $(p_1, p_2, p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$
- 2.2 جاذبات فوضوية للنظام الكسري الموحد..... 29
- 3.2 جاذب النظام الكسري الفوضوي لنظام LIU المتأخر..... 30
- 4.2 الجاذب الفوضوي الكسري لنظام Chen المتأخر..... 31



- 5.2 التطور بمرور الوقت للحالات  $x$  و  $y$  و  $z$  للنظام الكسري الفوضوي لـ Chen.....31
- 6.2 التطور بمرور الوقت للحالات  $x$  و  $y$  و  $z$  للنظام الكسري الفوضوي لـ  $L\ddot{U}$ .....32
- 7.2 جاذب النظام الكسري الفوضوي لـ  $L\ddot{U}$ .....33
- 1.3 تطور الحالات  $z, y, x$  للنظام (3.1) مع مرور الوقت  $t$  .....35
- 2.3 الجاذبات الفوضوية للنظام الكسري لـ Lorenz .....35
- 3.3 الجاذبات الفوضوية للنظام الكسري (1.3).....45
- 4.3 ثوابت ليابونوف للنظام الكسري (1.3).....46
- 5.3 ثوابت ليابونوف للنظام الكسري (2.3).....46
- 6.3 مخطط المفارقة للنظام (1.3) من أجل لـ  $Y$  بدلالة  $c$  .....47
- 7.3 نظام Lorenz من أجل  $r = 0.5$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 1$  الحالة (b) .....48
- 8.3 نظام Lorenz من أجل  $r = 5$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 10$  الحالة (b).....49
- 9.3 نظام Lorenz من أجل  $r = 13.926$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 20$  الحالة (b).....49
- 10.3 جاذب Lorenz من أجل  $r = 24.74$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 28$  الحالة (b).....49
- 11.3 مخطط المفارقة لنظام Lorenz من أجل  $\sigma = 10$  و  $b = \frac{8}{3}$  .....50
-

# الفهرس

## مقدمة

### 1. عموميات في الأنظمة الديناميكية الفوضوية

- 1.1.1 مقدمة.....1
- 2.1 الأنظمة الديناميكية.....1
- 1.2.1 الأنظمة الديناميكية المتقطعة.....1
- 2.2.1 الأنظمة الديناميكية المستمرة.....2
- 3.1 فضاء الحالة.....2
- 4.1 قسم بوانكاريه.....3
- 5.1 نظرية المفارقات.....3
- 1.5.1 مخطط المفارقات.....4
- 6.1 تاريخ الفوضى.....4
- 7.1 نظرية الفوضى.....6
- 1.7.1 النظام الفوضوي.....7
- 2.7.1 بعض التعاريف المتعلقة بالفوضى.....7
- 8.1 خصائص الأنظمة الفوضوية.....8
- 1.8.1 الحساسية للشروط الابتدائية.....8
- 2.8.1 الحتمية.....8
- 3.8.1 الجاذب الفوضوي.....8
- 4.8.1 أمثلة عن الأنظمة الفوضوية.....9
- 9.1 الاشتقاق الكسري.....13
- 1.9.1 تعريف Riemann-Liouville.....13
- 2.9.1 تعريف Caputo.....13
- 3.9.1 تعريف Grunwald – Litnikov.....13

- 10.1. دوال خاصة بالاشتقاق الكسري.....15
- 1.10.1. دالة قاما.....15
- 2.10.1. خواص.....15
- 3.10.1. دالة ميتاغ-ليفير.....16
- 4.10.1. خواص.....16
- 11.1. دالة ليابونوف.....16
- 12.1. الاستقرار بمفهوم ليابونوف.....17
- 13.1. خطية الأنظمة الديناميكية.....18
- 1.13.1. الطريقة الغير مباشرة لـ ليابونوف.....18
- 2.13.1. الطريقة المباشرة لـ ليابونوف.....18
- 3.13.1. ثوابت ليابونوف.....19
- 14.1. استقرار الأنظمة الكسرية.....20
- 1.14.1. استقرار الأنظمة الكسرية الخطية.....20
- 2.14.1. استقرار الأنظمة الكسرية الغير خطية.....21
- 15.1. المفارقات في نظام أحادي البعد.....22
- 1.15.1. المفارقة الحرجة.....22
- 2.15.1. مفارقة عقدة العنق.....23
- 3.15.1. مفارقة fourche.....24
- 16.1. خاتمة.....26
- 2. أمثلة عن الأنظمة الفوضوية الكسرية**
- 1.2. مقدمة.....27
- 2.2. النظام الفوضوي الكسري ثنائي الدينامو.....27
- 3.2. النظام الفوضوي الكسري الموحد.....28
- 4.2. الأنظمة الفوضوية الكسرية ذات تأخير.....29
- 1.4.2. النظام الفوضوي الكسري المتأخر لـ LIU.....30
- 2.4.2. النظام الفوضوي الكسري المتأخر لـ Chen.....30
- 3.4.2. النظام الفوضوي الكسري المتأخر لـ LÜ.....32

33.....	5.2. خاتمة.....
	<b>3. دراسة نظام فوضوي برتبة كسرية</b>
34.....	1.3. مقدمة.....
34.....	2.3. وصف نظام فوضوي برتبة كسرية.....
36.....	3.3. دراسة حل النظام.....
36.....	1.3.3. الوجود والوحدانية.....
38.....	4.3. تحليل النقاط الثابتة للنظام.....
39.....	1.4.3. استقرار النقاط الثابتة.....
43.....	5.3. التشتت.....
45.....	1.5.3. الحد الأدنى للرتبة الكسرية لظهور الفوضى.....
45.....	6.3. ثوابت ليابونوف وبعد ليابونوف.....
45.....	1.6.3. ثوابت ليابونوف.....
46.....	2.6.3. بعد ليابونوف.....
47.....	3.6.3. تحليل المفارقة.....
50.....	7.3. خاتمة.....

خاتمة

المراجع

---

## مقدمة

كانت دراسة الأنظمة الديناميكية في الآونة الأخيرة موضوع بحث واستكشاف مكثف إذ تعتبر نظرية الأنظمة الديناميكية فرعاً مهماً من فروع الرياضيات التي قدمها نيوتن حوالي عام 1665 وهي توفر نماذج رياضية من أجل الظواهر التي تتطور بمرور الوقت وتتبع القواعد، يمكن التعبير عن هذا التطور من خلال مجموعة محدودة من المعادلات التي يمكن أن تكون معادلات تفاضلية عادية، معادلات أو تطبيقات تفاضلية جزئية هذه النماذج تسمى الأنظمة الديناميكية. نحن نعلم أنه ليست كل الأنظمة الديناميكية متطابقة هناك نوعان: أنظمة مستقرة وأنظمة غير مستقرة.

إلى جانب ذلك تهتم نظرية الفوضى بالظواهر التي تبدو غير منتظمة وعشوائية ولكنها تحكمها قوانين حتمية، كان هنري بوانكاريه أول من لاحظ هذه الظاهرة في بداية القرن التاسع عشر. في عام 1961 لاحظ لورنز نوع جديد من السلوك يسمى الفوضى عندما استخدم ثلاث معادلات تفاضلية لنمذجة بعض مكونات الأرصاد الجوية وسمي هذا الأخير بنظام الفراشة.

بعد ذلك أصبح العديد من الباحثين مهتمين بشدة بنظرية الفوضى وكذلك طرق السيطرة عليها تعرف الظاهرة الفوضوية بأنها الظاهرة التي لها بشكل عام سلوك خاص وغير متوقع لنظام ديناميكي حتمي غير خطي.

الفوضى لها عدد من الخصائص بما في ذلك الحساسية للشروط الأولية أو الابتدائية وعدم القدرة على التنبؤ بها على المدى الطويل مما يجعل الأنظمة الفوضوية جذابة للغاية لتشفير البيانات، لا يمكن التنبؤ بالنظام الفوضوي لكن تم وصفه بشكل مثالي بواسطة المعادلات البسيطة والحتمية.

وتجدر الإشارة إلى أنه عند دراسة هذا النظام نجد أن العلماء انقسموا إلى قسمين، القسم الأول عمل على الحفاظ على الفوضى في هذا النظام، على عكس الشق الثاني الذي عمل على التخلص منه وإزالته. تظل الفوضى مجالاً مهماً للبحث على وجه الخصوص من حيث السيطرة ومكافحة السيطرة.

تم تطبيق الفوضى على نطاق واسع في العديد من التخصصات العلمية في الرياضيات، والبرمجة، وعلم الأحياء الدقيقة، علوم الكمبيوتر، والاقتصاد، والهندسة، الفلسفة، والفيزياء، السياسة،

---

ديناميات السكان، علم النفس، الروبوتات، والكيمياء الحيوية وكيمياء الليزر والاتصالات، تشفير البيانات والأنظمة المالية.

حساب التفاضل والتكامل الكسري هو موضوع رياضي يعود تاريخه إلى أكثر من 300 عام تم تقديمه في 30 سبتمبر 1695، في مثل هذا اليوم كتب جوتفريد فيلهلم ليبنيز رسالة إلى ويليام فرانسوا أنطوان، ماركيز دو لوبيتال، يستحضر إمكانية تعميم معنى المشتقات من مشتق برتبة عدد صحيح إلى مشتق رتبة عدد غير صحيح. أراد أوبيتال أن يعرف نتيجة مشتق الرتبة  $n = 1/2$  أجاب ليبنيز "في يوم من الأيام سيتم استخلاص استنتاجات مفيدة" وفي الواقع لقد تحققت رؤيته.

نجد مساهمات أعظم علماء رياضيات مثل أويلر أو لاغرانج في القرن السادس عشر، لابلاس، فورييه، وليفيل (1832 ؛ 1837)، ريمان (1847) في القرن التاسع عشر، وكذلك جرونوالد (1867) و ليتنيكوف (1868) في النصف الثاني من نفس القرن. اهتمام كبير تم جلبه إلى حساب التفاضل والتكامل الكسري من خلال تطبيق هذه المفاهيم في مجالات مختلفة الفيزياء والهندسة، معالجة الإشارات، معالجة الصور، التحكم الآلي والروبوتات.

في الآونة الأخيرة، أثارت الأنظمة الديناميكية ذات الرتب الكسرية الفوضوية انتباه الباحثين وأصبحت دراسة الأنظمة التفاضلية ذات الرتبة الكسرية مجال بحث نشط. لقد لاحظ العديد من الباحثين أن عدة أنظمة يمكن أن تولد القيم الكسرية غير الخطية سلوكيات فوضوية. وقد أثبتوا أن أنظمة الرتب الكسرية يمكن أن تظهر سلوكا فوضويا على سبيل المثال نظام لورنز الكسري، النظام الكسري لروسلر.

علاوة على ما سبق، تقدم هذه الأطروحة دراسة نظام فوضوي برتبة كسرية، العمل يركز على ثلاثة فصول:

الفصل الأول مخصص للأنظمة الديناميكية في عمومياتها مع التركيز بشكل خاص على نظام الوقت المستمر والمتقطع، مثل المفاهيم الأساسية وفضاء الحالة ثم التطرق إلى نظرية المفارقات، وتناول أيضا تعريفات للأنظمة الفوضوية من خلال معالجة تعريفات المشتقات الكسرية وخصائصها الأساسية والمفاهيم الأساسية للأنظمة الكسرية واستقرارها.

من أجل التوضيح الجيد للفوضى في الأنظمة الكسرية نستشهد في الفصل الثاني ببعض الأمثلة للأنظمة الفوضوية الكسرية.

أخيراً، في الفصل الثالث سوف نقترح نظام كسري فوضوي ونعمل على دراسته من حيث النقاط الثابتة واستقرارها، التشتت، وكذا ثابت ليابونوف.

---

## الفصل الأول

### عموميات حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية

#### 1.1. مقدمة

قبل سبعينات القرن الماضي، كانت دراسة الأنظمة الديناميكية محصورة في مجال متعلق ومحدد بالرياضيات والفيزياء الرياضية. منذ ذلك الحين أصبح تخصص يعد اليوم أحد أهم التخصصات في الفيزياء الرياضية وكذلك النظرية والتجريبية، والذي يتضمن أيضا تطبيقات إلى مجالات أخرى تتراوح من الكيمياء إلى إحصائيات السكان إلى نظرية الأنظمة الديناميكية غير الخطية مع الظواهر الفيزيائية التي تنتمي إلى ما اتفق عليه الآن على أنه فيزياء الأنظمة الفوضوية أو الفوضى الحتمية.

النظام الديناميكي هو النظام الذي تتطور حالته بمرور الوقت  $t$ ، التطور تحكمه مجموعة من القواعد التي تحدد حالة النظام للقيم المتقطعة أو المستمرة لـ  $t$ ، يتم وصف تطور الزمن المنقطع بشكل عام بواسطة نظام المعادلات الجبرية بينما الوقت المستمر بواسطة نظام المعادلات التفاضلية.

#### 2.1. الأنظمة الديناميكية

بشكل عام يصف النظام الديناميكي الظواهر التي تتطور بمرور الوقت وهذا في الفيزياء الكيمياء، البيولوجيا والاقتصاد وما إلى ذلك.

رياضيا، يمكن وصف هذا التطور بواسطة المعادلات التفاضلية العادية، المعادلات التفاضلية الجزئية.

تصنف الأنظمة الديناميكية إلى فئتين:

- أنظمة ديناميكية متقطعة.
- أنظمة ديناميكية مستمرة.

#### 1.2.1. الأنظمة الديناميكية المتقطعة

يمكن تمثيل النظام الديناميكي المتقطع بمتتالية تراجعية من الشكل:



$$x(k+1) = f(x(k), k) \quad x(k) \in \mathbb{R}^n$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{حيث:}$$

### 2.2.1. الأنظمة الديناميكية المستمرة

يمكن تمثيل النظام الديناميكي المستمر بمعادلة تفاضلية من الشكل:

$$x \in \mathbb{R} \quad \frac{dx}{dt} = f(x(t), t)$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{حيث:}$$

### 3.1. فضاء الحالة

فضاء الحالة هو فضاء رياضي متعدد الأبعاد يسمح بالتفسير الهندسي لحركة النظام الديناميكي الموصوف بواسطة المعادلات التفاضلية فيما يتعلق بالوقت، المسار الذي يسلكه النظام يسمى بالمنحنى. [7]

#### 1.3.1. مثال

• حالة النظام المستمر ( *L'oscillateur de Duffing* ) [8]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

حيث  $\delta, \gamma, \omega$  متغيرات حقيقية فيزيائية (متغيرات إحصائية)، فضاء الحالات هو  $\mathbb{R}$ .

فضاء المتغيرات هو  $\mathbb{R}^3$  هذا النظام غير خطي وغير مستقل، يمكن أن يكون ثنائياً أو متحفظاً (اعتماداً على الحركة مع الاحتكاك أو بدونه)

• حالة النظام المتقطع ( *l'application de Hénon* ) [9]

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

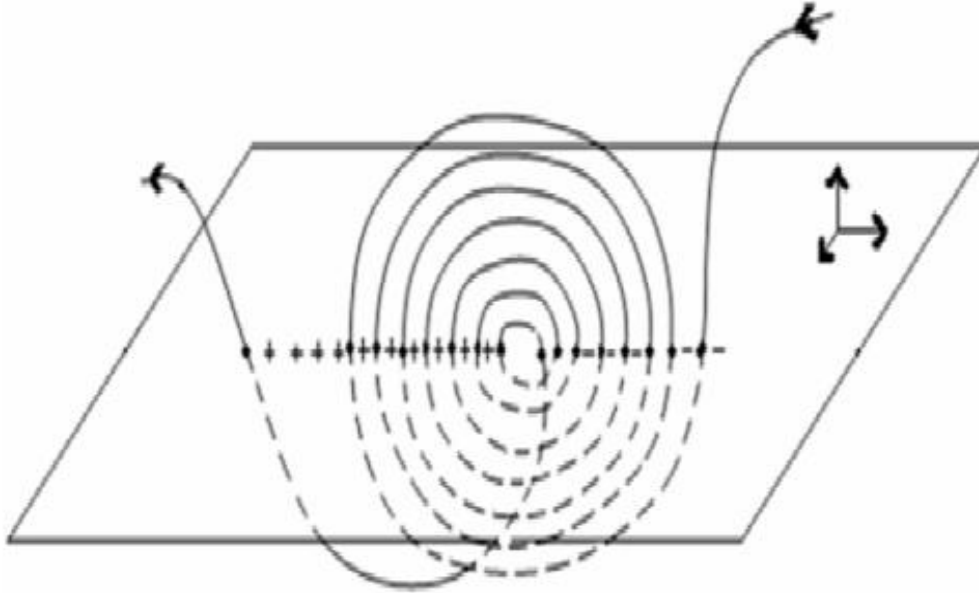
حيث  $a, b$  متغيرات حقيقية، فضاء الحالات هو  $\mathbb{R}^2$  ، فضاء المتغيرات هو  $\mathbb{R}^2$ .

#### 4.1. قسم بوانكاريه

تطبيق بوانكاريه هو أداة رياضية بسيطة تسمح بتحويل نظام ديناميكي مستمر إلى نظام ديناميكي متقطع، يحدث هذا التحويل عن طريق التقليل من رتبة النظام.

ليكن نظام ديناميكي مستمر موصوف في فضاء الحالة ذو بعد  $n$  ومسار حله في  $x_0$  ، نعرف في هذا الفضاء سطح ذو بعد  $n-1$  .

تطبيق بوانكاريه هو النظام الديناميكي في وقت متقطع والذي يتوافق فيه متتالية التكرارات مع إحداثيات نقاط تقاطع المسار مع هذا السطح. [10]



الشكل 1.1: مبدأ قسم بوانكاريه

تسمى مجموعة نقاط التقاطع الموجودة على السطح قسم بوانكاريه.

#### 5.1. نظرية المفارقات

نظرية المفارقات هي الدراسة الرياضية للتغيرات النوعية أو الطوبولوجية في بنية النظام تحدث المفارقة عندما يولد التباين الكمي لوسيط النظام تغييرا نوعيا في خصائص نظام مثل الاستقرار أو عدد النقاط الثابتة أو طبيعة الحالات المستقرة. تسمى قيم المتغيرات في وقت التغيير قيم المفارقات. [10]

#### تعريف 1.5.1.

المفارقة هو تغيير في النقاط الثابتة أو المدارات الدورية أو في خصائص الاستقرار لنظام غير خطي عندما تختلف متغيرة النظام، تسمى هذه المتغيرة متغيرة المفارقة والقيم التي تتغير فيها النوعية في سلوك النظام الذي يحدث تسمى نقاط المفارقة.

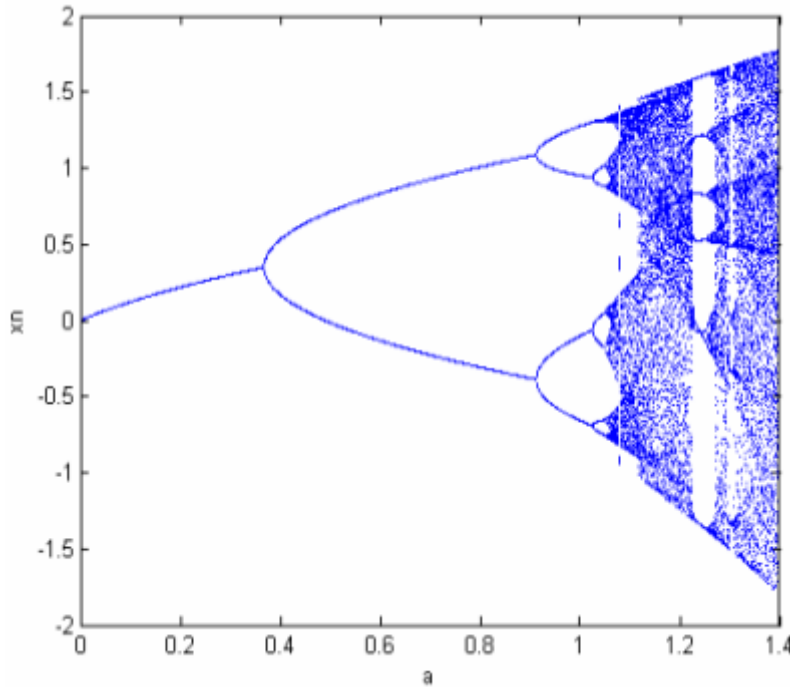
### 2.5.1. مخطط المفارقات

هو تمثيل النقاط الثابتة كدالة لمعامل المفارقة، مخطط المفارقة أحادي البعد هو مخطط يحدد طبيعة الحلول المختلفة للنظام واستقرارها عندما يختلف الوسيط، يتكون من مجالات التي تتطور خلالها الحلول المقاربة (أو مجموعات الحدود التي تتوافق معها) بشكل مستمر مع الوسيط ويتم فصل المجالات بنقاط المفارقة. يعد مخطط المفارقة أداة فعالة للتقييم السريع لمجموعة الحلول الممكنة لنظام ما وفقا لتغيرات إحدى وسائطه، يجعل من الممكن تحديد القيم الخاصة للمعامل الذي يؤدي إلى المفارقة. إنه رسم بياني يحمل قيم الوسيط على الإحداثي والقيم الخاصة لأحد متغيرات الحالة على الإحداثي عند الوصول إلى نظام التقارب. في حالة النظام المستقل يمكن الحصول على هذه القيم الخاصة من خلال العمل مع قسم بوانكاريه. [10]

#### مثال 1.5.1.

#### مخطط مفارقة لنظام Hénon

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$



الشكل 2.1: مخطط مفارقة لنظام Hénon من أجل  $b = 0.3$

#### 6.1. تاريخ الفوضى

ظهرت كلمة الفوضى Chaos أول مرة في العصر اليوناني عام 700 ق.م لدى الشاعر الإغريقي هسيود Hesiod في قوله: "الفوضى لا شيء سوى الخلاء، والهبولي والفراغ غير المحدد"، ثم وردت في "الفردوس" المفقود لموتون Lmetton في قوله: "برزت السماوات والأرض من الفوضى [1]".

واكتشاف نيوتن لقوانين الحركة Motion في أواخر القرن السابع عشر يحيلنا إلى أن العالم يحتوي على نظام محكم بمعنى أي حركة يكون لها سبب أو تفسير، أي أن العالم يتحرك وفق آلة ميكانيكية وقوانين ثابتة لا تتغير [2]، وجاء لابلاس 1814 ليؤكد فكرة أن وضع الكون في الوقت الحالي هو نتيجة واضحة في الماضي وأنه يسبب في وضعه المستقبل وعلى أنه من الذكاء أنك في لحظة معينة تستطيع التعرف على القوة المؤثرة في الطبيعة، أو وضع الكائنات عند تأثير هذه القوة التي تشمل حركة الأجسام الكبيرة والصغيرة، ومن خلال هذه المعادلة المستقبل يبقى شيء مؤكد والماضي مفتوح وواضح للحاضر وهذا معناه مبدأ الحتمية Déterminisme حيث بين نيوتن أنه لا توجد فروق في النتائج [3]، وفي عام 1876 جاء ماكسويل Maxwell وقال: إن الفروق البسيطة في الأوضاع المبدئية سوف تؤدي إلى الفرق في الوضع النهائي لكن فرق بسيط وليس بدرجة كبيرة [3]، لكن جاء هنري بوانكاريه 1854 Henri ليؤكد خاصة عام 1889 حينما أعلن ملك النرويج عن جائزة لمن يجد حلا لمشكلة هل الأنظمة الشمسية مستقرة أم لا؟ حيث وجد بوانكاريه حلا وفاز بالجائزة، ليكتشف زميله لاحقا أن ثمة خطأ في الحسابات مانحا بوانكاريه مدة ستة أشهر لكي يعالج المشكلة فوجد شيئا ذهل منه أنه لا يوجد حل للمشكلة أصلا منذ البداية، وتوصل إلى نتائج أن الكون حتمي خالص التي سلم بها منذ عصر نيوتن الرياضيات الخطية Machination an Line حيث وضح بوانكاريه في بحثه هذا عام 1890 أن قوانين نيوتن ليس لها علاقة في مشكلة الأجسام الثلاثة أي كيفية التنبؤ بحركات الشمس والأرض والقمر، ووجد أن تباينات طفيفة في الشروط الابتدائية تحدث تباينات هائلة في الظواهر النهائية وتتحدى حالة التنبؤات، وهكذا نجد أن إكتشافات بوانكاريه من خلال النظر في النموذج الخطي لنيوتن الذي كان يهمل التغيرات الطفيفة التي تبرز اللامتوقع. [1]

وقد كانت أفكار بوانكاريه نسبة مجرد طرح ميتافيزيقي لم تحظ بالاهتمام خاصة في فكرة عدم إمكانية التنبؤ التي تعتبر الإرهاصات الأولى لنظرية الفوضى، والتي بدأت فعليا بداية علمية بحثة بعيدة عن تنظير في مستهل الستينيات من القرن الماضي من خلال الأعمال المتخصصة في علم الأرصاد الجوية لمكتشفها إدوارد لورنز Edward Lorenz محاولا تطويرها وأن يجمع بين علم الرياضيات والأرصاد وعلم الفيزياء، و يعمل نموذج للتنبؤ بالطقس هو ببساطة المعادلات التفاضلية التي تمثل التغيرات في درجة الحرارة وضغط السرعة [3].

حاول إدوارد لورنز إدخال أنماط حركة الطقس في حاسوب محدود الذاكرة يعمل على تحليل البيانات من خلال أرقام ذات ست منازل عشرية، وتلك الحواسيب لم تكن تظهر في الرسوم البيانية إلا المنازل الثلاث الأولى غفلة على الثالث الأخير. قام لورنز أولا بإدخال بيانات لتخطيط رسومات بيانية لها مكونة من سلسلة من اثنتي عشر معادلة مستعملا في عملية الإدخال كل المنازل العشرية وبعد فترة عاد لتشغيل البرنامج لاسترجاع تلك الرسومات البيانية ولكنه بدلا من أن يبدأ بالمعادلة أولا بدأ بمنتصف السلسلة مدخلا منازل الأرقام الثلاثة الأولى فقط، فوجد تغييرا كبيرا إذ حدث تباعد ثم انحراف كبير في الرسومات البيانية، وقد استوعب لورنز سبب وجود اختلاف في المعطيات و البيانات المخزنة تمثل في غياب منزلة الأرقام الثلاثة الأخيرة معتقدا أن الفرق الواحد من ألف ليس ذو أهمية ولكن هذا الاختلال بسيط تطور مع تطور تسلسل البيانات مؤديا إلى وجود اضطراب وحركة غير خطية لا متوقعة وعندما طبع تلك الرسومات البيانية بدت على شكل فراشة. ومن هنا جاء أحد معالم هذه النظرية هو تأثير الفراشة [3].

في عام 1964 م عالم الرياضيات الروسي " إيه إن تشاركوفسكي Iyh Ina Sharkwfsky " النظرية اللافتة حول الأنماط السلوكية للعديد من الخرائط (المنحى واحد ) وهي إن إكتشافات وجود حلقة دورية واحدة تشير إلى وجود حلقات أخرى، وكان إكتشاف وجود حلقة الدورة 16 القيمة محددة المعلم يشير ضمنا إلى وجود حلقات دورة ثامنة ورابعة والثامنة و أولى عن تلك القيمة، بينما كان يعني إكتشاف وجود دورة حلقة ثالثة لكل دورة محتملة وجود حلقة وهو يعتبر دليل آخر غير بناء، فهو يدلنا على موضع الحلقات ولكنه يعد النتيجة متقنة تماما بعد أحد عشر عاما من العمل، أشار "كوفسكي" عام 1975م لنشر من خلال العالمان " لي " LI و " يورك " York و رقتهما البحثية الواسعة التأثير تحت عنوان (الدورة الثالثة) تستلزم الفوضى، و من وقتها مصطلح الفوضى Choas إستقر في الأذهان. وقد إستخدم البيولوجي والرياضي " روبرت ماي May Robert " مصطلح الفوضى في البحوث العلمية إلى أن إشتهر بنظرية الفوضى، و دخلت نظرية "الفوضى" " Choas " إلى عالم الدراسات البيولوجية، رغم هذا لم تكن النظرية قانونا كما كان الحال في الترموديناميكا أو الفيزياء الكوانتية، لكنها مكنت الباحثين من تحليل الحوادث ذات التشابك اللاشكلي [1].

### 7.1. نظرية الفوضى

كمفهوم رياضي، تم استخدام مصطلح الفوضى لأول مرة في عام 1975 من قبل Li و yorke في مقالهم [11]. ولكن حتى قبل أن يتم ملاحظتها على أنها دوال بسيطة للغاية يمكن أن تؤدي إلى ديناميكيات معقدة للغاية. أحد ركائز تطور الديناميكيات الفوضوية هو مقال 1964 " تعيش دورات رسم الخرائط المستمر للخط في حد ذاته (بالروسية) بواسطة شاركوفسكي. خلال السبعينات والثمانينات انفجر الاهتمام بالديناميكيات الفوضوية وبذلت محاولات مختلفة لإعطاء فكرة الفوضى معنى رياضيا دقيقا. الأعمال البارزة في هذا السياق هي كتاب 1980 " الخرائط المتكررة على الفاصل الزمني كنظم ديناميكية " الكوليت وإيكمان، كتاب 1989 " Dynamics of one Dimension Mappings " من تأليف Sarrkovoskii ، Kolyada ، Sivak و Fedorenko ( بالروسية) وملاحظات محاضرة 1992 " ديناميكيات في بعد واحد " لـ Block coppel's . بينما كان موضوع الديناميكيات الفوضوية حتى أواخر الثمانينات مقتصرًا في المقام الأول على المنشورات الموجهة نحو البحث، فإن كتاب ديفاني لعام 1986 مقتصرًا في المقام الأول على المنشورات الموجهة نحو البحث ، فإن كتاب ديفاني لعام 1986 " مقدمة إلى الأنظمة الديناميكية الفوضوية " حدد النقطة التي أصبحت فيها الفوضى ( كمفهوم رياضي) شائعة وبدأت في دخول الكتب المدرسية الجامعية مثل [12] " دورة أولى في الأنظمة الديناميكية المنفصلة " بواسطة Holngren (1994) أو " Discrete Chaos " لـ Elaydi (1999) [13].

### ➤ الفوضى في مفهوم Devaney

اقترح Devaney التعريف التالي للفوضى: النظام الديناميكي يكون فوضويا إذا وفقط إذا:

- إذا كان متعددي طوبولوجيا.
- لديه مجموعة كثيفة من المدارات الدورية.
- يعرض ظاهرة الحساسية للشروط الابتدائية.

### 1.7.1 ملاحظة

تعني كلمة الانتقال ببساطة أنه إذا أخذنا في الاعتبار صورتين من حالتين مختلفين لنظام ديناميكي فهناك مسار ينتقل من أحدهما إلى الآخر. لاحظ أن الفرضيتين الأوليين تدلان على الفرضية الثالثة دون أن يكون العكس صحيحا. [14]، [15].

### ➤ الفوضى بمفهوم Li-Yorke :

قدم Li-Yorke أول تعريف رياضي للفوضى، لقد وضعوا معيارا بسيطا جدا " وجود ثلاث فترات يعني الفوضى " يلعب هذا المعيار دورا مهما للغاية في تحليل الأنظمة الديناميكية الفوضوية [15].

### 1.7.1 النظام الفوضوي

#### تعريف 1.7.1.

نسمي نظام ديناميكي فوضوي كل نظام يعتمد على عدة معاملات ويتميز بحساسية شديدة للشروط الابتدائية لم يتم تحديدها أو نمذجتها بواسطة أنظمة المعادلات الخطية أو قوانين الميكانيكا الكلاسيكية.

### 2.7.1. بعض التعاريف المتعلقة بالفوضى [16]

#### تعريف 2.7.1.

نقول أن الدالة  $f : I \rightarrow I$  متعدية طوبولوجيا إذا كانت كل ثنائية من المجموعات المفتوحة  $U, V \subset I$  يوجد  $K > 0$  حيث  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$

#### تعريف 3.7.1.

لتكن  $X$  مجموعة و  $Y$  مجموعة جزئية من  $X$ . كثيفة في  $X$ ، إذا كان من أجل كل عنصر  $x \in X$  يوجد عنصر  $y \in Y$  قريب من  $x$  أي  $\bar{Y} = X$ . وعليه نقول أن  $Y$  كثيفة في  $X$  إذا كان من أجل كل  $x \in X$  يمكن إيجاد متتالية نقاط  $\{y_n\} \in Y$  تتقارب نحو  $x$ .

#### تعريف 4.7.1.

نقول أن الدالة  $f : I \rightarrow I$  لها حساسية للشروط الابتدائية إذا وجد  $\delta > 0$  حيث من أجل  $x \in I$  و  $V \subset I$  جوار لـ  $x$  يوجد  $y \in I$  حيث  $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$

### 8.1. خصائص الأنظمة الفوضوية

لكي يتم تصنيف النظام على أنه فوضوي يجب أن يشتمل على الخصائص التالية:

#### 1.8.1. الحساسية للشروط الابتدائية Sensibilité aux conditions initiales

في نهاية القرن التاسع عشر اكتشف العالم المشهور هنري بوانكاريه لأول مرة الحساسية للشروط الابتدائية، وفي سنة 1963 بعد اختراع الحواسيب أكد عالم الأرصاد الجوية الرياضي إدوارد لورنز هذا الاكتشاف بحسابات دقيقة جدا. لعب هذا الاكتشاف دورا فعالا جدا في عدة ميادين علمية، خاصة في ميدان الرياضيات. تنص هذه الخاصية على أن تغيير جد طفيف في قيم متغيرات الحالات الابتدائية لنظام فوضوي يمكن أن يؤدي إلى حالات نهائية غير متوقعة على المدى الطويل. [17]، [18]

#### 2.8.1. Le déterminisme الحتمية

يقال أن النظام حتمي عندما يكون من الممكن التنبؤ (حساب) تطوره بمرور الوقت. المعرفة الدقيقة بحالة النظام في لحظة معينة اللحظة الأولية سمح بالحساب الدقيق لحالة النظام في أي وقت آخر. في الظواهر العشوائية من المستحيل تماما التنبؤ بمسار أي جسيم لذا النظام الفوضوي لديه قواعد أساسية حتمية وغير احتمالية تحكمها بشكل عام معادلات تفاضلية غير خطية معروفة ومن ثم يتم تقديمها بواسطة قوانين صارمة وحتمية تماما. [19]

#### 3.8.1. الجاذب الفوضوي

مجموعة من الحلول التي يتطور من خلالها النظام مهما كانت شروطه الابتدائية.

#### تعريف 1.8.1. [20]

تسمى المجموعة الجزئية المحدودة من فضاء الحالات  $A$  جاذب فوضوي من أجل تحويل  $T$  للفضاء إذا وجد جوار  $V$  ، بمعنى من أجل كل نقطة من  $A$  يوجد كرة محتواة في  $\mathbb{R}$  تحوي هذه النقطة والتي تحقق الخصائص التالية:

1-  $V$  هي منطقة التقاط، بمعنى كل مدار بالتحويل  $T$  محتوي كليا في  $V$  من أجل نقطة ابتدائية من  $V$  .

2- المسارات جد حساسة للشروط الابتدائية من أجل نقطة ابتدائية من  $\mathbb{R}$  .

3-  $A$  هو كائن كسري.

4- من أجل كل نقطة من  $A$  ، يوجد مسارات تبدأ من  $\mathbb{R}$  والتي تمر من جوار هذه النقطة.

5.8.1. أمثلة عن الأنظمة الفوضوية

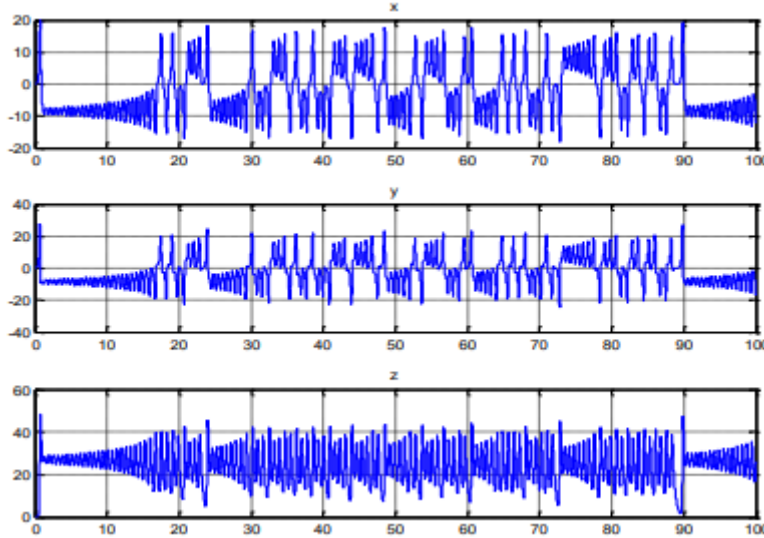
نظام لورنز [21]:

في عام 1963 اكتشف لورنز أنه يمكن للمرء الحصول على سلوك فوضوي بثلاثة متغيرات فقط أي نظام غير خطي يتمتع بثلاث درجات من الحرية. لذلك برهن أن ديناميكية معقدة للغاية يمكن أن تظهر في نظام رسمي بسيط للغاية، هذا هو نظام لورنز.

نحصل على نظام لورنز كمثال للأنظمة الفوضوية المستمرة المعرف بـ:

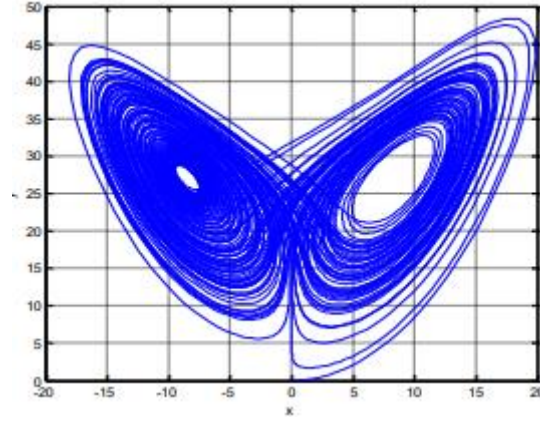
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

تمثل الأشكال التالية السلوك الفوضوي لنظام لورنز، ويمثل الشكل (3.1) تباين الحالات  $x$ ،  $y$  و  $z$  بطريقة غير منتظمة.



الشكل 3.1: تطور حالات  $x$ ،  $y$  و  $z$  لنظام لورنز بمرور الوقت



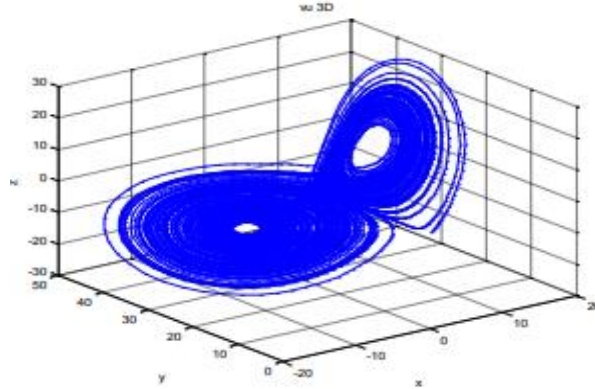


الشكل 4.1: جاذب لورنز الفوضوي

يمثل جاذب لورنز الفوضوي تطور الحالات الثلاث بشرط أولي، يبدو الهيكل مثل جناحي فراشة.

### ملاحظة 1.8.1.

إذا أخذنا حالة أخرى قريبة جدا من النقطة السابقة، فإننا نلاحظ أن التطورين سوف ينفصلان ولكن المسارات تتراكم على نفس الفراشة.



الشكل 5.1: جاذب لورنز الغريب في البعد 3

### جاذب روسلر: L'attracteur de Rossler

جاذب روسلر هو الجاذب المرتبط بنظام روسلر والذي تم تقديمه بواسطة العالم الألماني روسلر في السبعينات كمعادلات نموذجية مع الحد الأدنى من المكونات الفوضوية في وقت مستمر.

## الفصل الأول: عموميات حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية

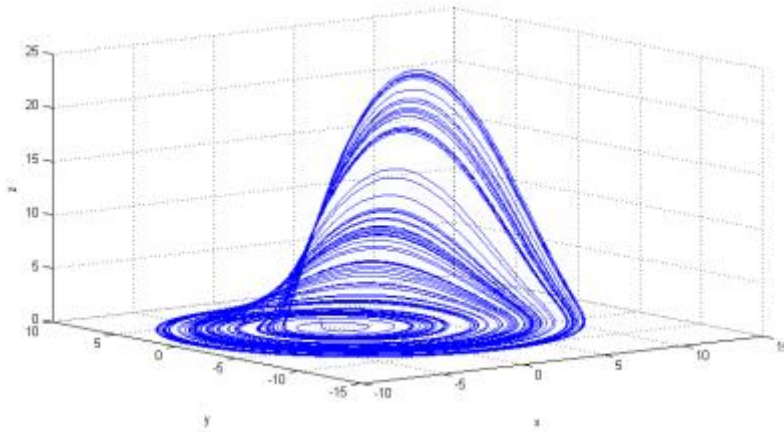
نظرا لأن نظرية بوانكاريه تستبعد الجاذبات غير المستقرة أو الدورية أو شبه الدورية في الأنظمة المستقلة التي تعرف بأنها مفارقات أحادية البعد أو ثنائية الأبعاد (مثل الخط أو الدائرة أو المستوى أو الكرة) فإن أصغر بعد فوضوي ثلاثة.

على هذا الأساس اقترح أوتو روسلر سلسلة من أنظمة النماذج الأولية للمعادلات التفاضلية العادية في فضاءات طور ثلاثية الأبعاد مفرطة التماثل، أي فوضوي مع العديد من الأسس الإيجابية لليابونوف [22].

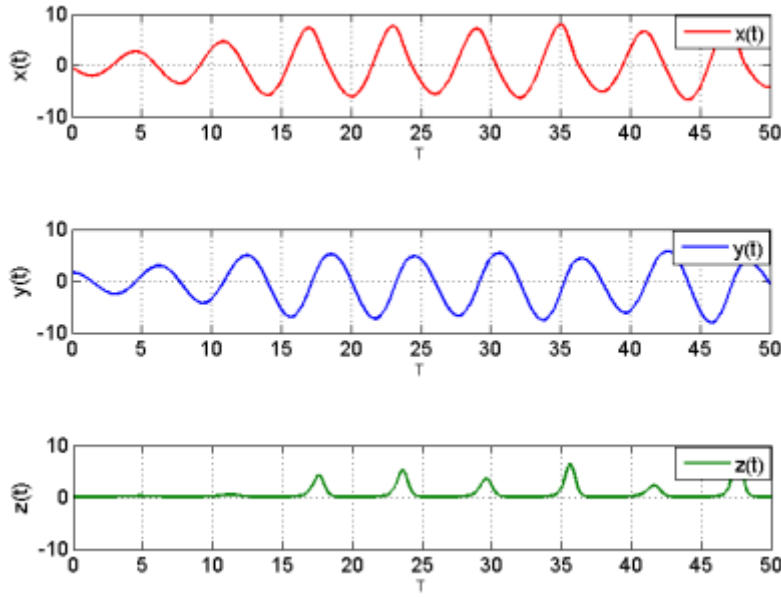
النظام عبارة عن ثلاث معادلات تفاضلية عادية تحتوي على مصطلح غير خطي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

حيث  $a$  ،  $b$  ،  $c$  وسائط و  $x$  ،  $y$  ،  $z$  متغيرات الحالات، النظام يملك حالة فوضوية من أجل قيم الوسائط:  $a=0.2$  ،  $b=0.6$  ،  $c=5.25$  [23].



الشكل 6.1: الجاذب الفوضوي لروسلر



الشكل 7.1: السلاسل الزمنية للجاذب الفوضوي لروسلر

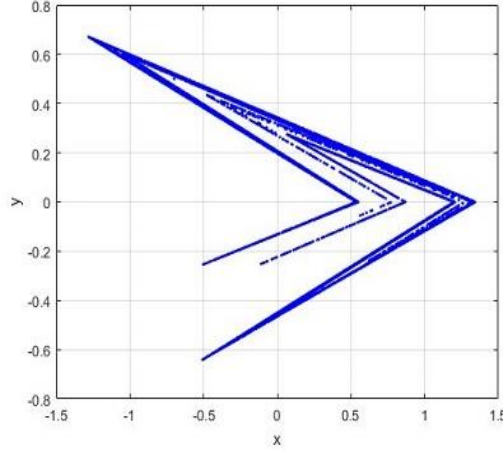
نظام لوزي [24] :

في سنة 1978، قدم لوزي في ملاحظة قصيرة خريطة فوضوية جديدة ثنائية الأبعاد تشبه المعادلات والجاذبات تلك الموجودة في خريطة هينون الشهيرة. ببساطة يتم استبدال الحد التربيعي بالقيمة المطلقة في المعادلة الأولى وهذا يسمح بإثبات صارم للطابع الفوضوي لبعض الجاذبات وتحليل مفصل لأحواض جاذبيتها.

نظام لوزي معرف بـ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - a|x_n| \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

حيث  $a$  و  $b$  وسائط حقيقية غير معدومة. داخل المنطقة التي تظل فيها المدارات محدودة، يمكن أن تعرض خريطة لوزي سلوكيات منتظمة وفوضوية اعتمادا على قيم المتغيرين  $a$  و  $b$ .



الشكل 8.1: جاذب لوزي من أجل  $(a,b) = (1.7, 0.5)$  مع الشرط الابتدائية  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

## 9.1 الاشتقاق الكسري

### 1.9.1 تعريف Riemann-Liouville

ليكن  $m-1 < \alpha < m$  ،  $m \in \mathbb{N}^*$

نسمي المشتقة الكسرية من الدرجة  $m$  بمفهوم ريمان ليوفيل الدالة المعرفة بـ:

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

### 2.9.1 تعريف Caputo [27] [28]

المشتق الكسري بمفهوم كابوتو للدالة  $f(t)$  على المجال  $[a, b]$  يعرف بالعلاقة التالية:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau$$

حيث  $m \in \mathbb{N}$  و  $m = [\alpha] + 1$  ،  $[\alpha]$  يعني الجزء الصحيح لـ  $\alpha$ .

### 3.9.1 تعريف Grunwald – Litnikov [29]

الفكرة الأساسية للإشتقاق الكسري لـ Grunwald – Litnikov هي إعطاء تعميم للتعريف الكلاسيكي لمشتقة دالة برتبة كيفية:

مشتقة الدالة  $f(t)$  من الرتبة 1:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.1)$$

بتطبيق التعريف مرتين نتحصل على مشتقة الدالة  $f(t)$  من الرتبة 2:

$$f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(t) - f''(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (2.1)$$

من (1.1) و (2.1) نتحصل على:

$$f'''(t) = \frac{d^3f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (3.1)$$

بالاشتقاق المتتالي:

$$f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (4.1)$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad \text{حيث}$$

العلاقة (4.1) تمثل الاشتقاق من الرتبة  $n$  إذا كان  $n$  صحيح موجب.

بفضل الخاصية:  $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$  نستطيع الحصول على عبارة أكثر تعميم في حالة  $n$  سالب أو معدوم

$$\begin{aligned} (-1)^r \binom{n}{r} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

**تعريف 3.9.1 [26]**

نعرف على التوالي الاشتقاق الكسري من الرتبة  $\alpha$  (غير صحيح) ومن الرتبة  $-\alpha$  بمفهوم Grunwald – Litnikov

للدالة  $f$  حيث  $f \in C[a, t]$  :-

$$\begin{aligned} {}^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.1)$$

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (7.1)$$

### تعريف 3.9.1

إذا كانت  $f$  من الصنف  $C^m$  التكاملي بالتجزئة لـ (6.1) و (7.1) تسمح لنا بكتابة :

$${}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (8.1)$$

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (9.1)$$

الصيغة المتحصل عليها (8.1) بفرض أن  $r = (1, 2, \dots, n)$  ،  $f^{(r)}(t)$  مستمرة على المجال المغلق  $[a, t]$  حيث  $m$  عدد صحيح يحقق الشرط  $m > \alpha$  أصغر قيمة ممكنة لـ  $m$  معطاة بالعلاقة التالية  $m-1 < \alpha < m$  .

## 10.1 دوال خاصة بالاشتقاق الكسري

### 1.10.1 الدالة قاما

الدالة قاما أويلر دالة عقدية ودالة خاصة فهي امتداد للدالة العاملي في مجموعة الأعداد المركبة (باستثناء بعض النقط).

#### 1.10.1 تعريف

من أجل كل  $z \in \mathbb{C}$  حيث  $\text{Re}(z) > 0$  ، الدالة قاما تعطى بالعلاقة التالية:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (10.1)$$

### 2.10.1 خواص [25]

• من الخواص المهمة لدالة قاما العلاقة التراجعية التالية:  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n \times n!} \quad : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma(0_+) = +\infty \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \bullet$$

• الدالة قاما ليست لها أقطاب بسيطة من أجل النقط  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

### 3.10.1. الدالة ميتاغ – ليفر ( Mittag- Leffler )

الدالة ميتاغ – ليفر تعميم للدالة الأسية، وهذا ما يعطينا أهمية كبيرة في الحساب الكسري.

#### تعريف 2.10.1 الدالة بوسيط واحد [26]

عرفت الدالة ميتاغ– ليفر لأول مرة بالسلسلة:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C} \quad (11.1)$$

#### تعريف 3.10.1 الدالة بوسيطين [26]

التعميم إلى متغيرين قدم من طرف أغاروال ( Agarwal ) بالعبارة :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C} \quad (12.1)$$

تسمى دالة بوسيطين من صنف ميتاغ – ليفر .

#### 4.10.1. خواص [26]

من الخصائص المهمة نذكر:

- $E_{1,1}(z) = e^z$
- $E_{2,1}(z^2) = \cos sh(z)$
- $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sin sh(z)}{z}$
- $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$
- $E_{\frac{1}{2},1}(z) = e^{z^2} erfc(-z)$

### 11.1. دالة ليابونوف

#### تعريف 2.11.1. [30]

ليكن  $x^*$  نقطة ثابتة و  $U$  جوار لـ  $x^*$  و  $L: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  مستمرة  $L$  دالة ليابونوف عند  $x^*$  إذا حققت ما يلي:

$$-1 \quad L(x) = L(x^*) \quad \text{من أجل } x \neq x^* \quad \text{في } U .$$

2- من أجل جميع الحلول  $x(\cdot)$  ،  $t \rightarrow L(x(t))$  متناقصة:

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in I_0$$

دالة ليابونوف  $L$  رتيبة عند  $x^*$  إذا كان أيضا:

3- من أجل جميع الحلول  $x(.)$  ،  $t \rightarrow L(x(t))$  متناقصة تماما:

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) < 0 \quad \forall t \in I_0$$

### 12.1. الاستقرار بمفهوم ليابونوف

ليكن النظام الديناميكي التالي:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (13.1)$$

حيث  $f$  دالة غير خطية.

نقول أن النقطة الثابتة  $x^*$  للنظام (13.1) أنها:

**1- مستقرة:** [28] يعني أن المسار  $x(t)$  مع الشروط الابتدائية قريب من النقطة الثابتة  $x^*$  بمعنى  $\|x(t_0) - x^*\| < \delta$  ، يبقى قريبا من النقطة الثابتة  $x^*$  من أجل كل  $t > t_0$  . لهذا يجب أن تبقى الحلول  $x(t)$  داخل المنطقة المحددة بواسطة  $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$  (تظل في أنبوب نصف قطره  $\varepsilon$  وحول المسار  $x(t) = x_0$ )

تكون النقطة الثابتة  $x^*$  مستقرة إذا كانت:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \forall t > t_0$$

**2- مستقرة بشكل مقارب:** [31] يعني أن  $x^*$  ليست مستقرة فقط، ولكننا قادرون أيضا على تحديد مجال قريب من النقطة الثابتة بحيث يميل أي مسار ينتمي إلى هذا المجال إلى  $x_0$  عندما يؤول  $t$  إلى  $\infty$  .

تكون النقطة الثابتة مستقرة بشكل مقارب إذا كانت:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

**3- مستقرة بشكل أسي:** [32] يعني أن شعاع الحالة يتقارب نحو النقطة الثابتة  $x^*$  أسرع من دالة أسية.



تكون النقطة الثابتة  $x^*$  مستقرة بشكل أسي إذا وجد عدنان حقيقيان موجبان  $a$  و  $b$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < a \|x(t_0) - x^*\| e^{-bt}, \forall t > t_0$$

4- غير مستقرة: إذا لم يتحقق شرط الاستقرار.

### 13.1. خطية الأنظمة الديناميكية

[33] نعرف النظام الديناميكي الغير خطي كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (14.1)$$

حيث  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  و  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  و  $x^*$  نقطة ثابتة لهذا النظام.

نفرض اضطراب صغير  $\varepsilon(t)$  يتم تطبيقه بجوار النقطة الثابتة  $x^*$ . يمكن توسيع الدالة  $f$  إلى سلسلة تايلور بجوار النقطة  $x^*$  كالتالي:

$$\varepsilon(t) + x^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \approx f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t)$$

و  $J_f(x^*)$  المصفوفة اليعقوبية للدالة  $f$  معرفة بـ:

$$J_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^*}$$

لما  $f(x^*) = x^*$  فإن المعادلة تكون من الشكل:

$$\varepsilon(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (15.1)$$

الكتابة (15.1) تعني أن النظام خطي.

#### 1.13.1. الطريقة الغير مباشرة لـ ليابونوف

تعتمد هذه الطريقة على اختبار الخطية حول النقطة الثابتة للنظام بتعبير أدق نقوم باختبار القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية عند النقطة الثابتة.

### مبرهنة 1.13.1. [32]

1- إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية تحتوي على أجزاء حقيقية سالبة أو سالبة تماما فإن  $x^*$  مستقرة بشكل مقارب.

2- إذا كانت المصفوفة اليعقوبية تحتوي على الأقل على قيمة ذاتية واحدة مع جزء حقيقي موجب تماما فإن  $x^*$  غير مستقرة.

3- إذا كانت جميع القيم الذاتية تحتوي على أجزاء حقيقية معدومة أو سالبة فإن  $x^*$  مستقرة .

### 2.13.1. الطريقة المباشرة لـ ليابونوف

#### مبرهنة 2.13.1

ليكن  $x^* = 0$  نقطة ثابتة للنظام الديناميكي المعرف بـ

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad (16.1)$$

و  $D \subset \mathbb{R}^n$  مجال يحتوي على الأصل. إذا وجد دالة  $L$  من الصنف  $C^1$  معرفة موجبة في الجوار  $V \subset D$  إذن:

1- إذا كان  $L(x) \leq 0$  ،  $\forall x \in V - \{x^*\}$  فإن النقطة الثابتة  $x^*$  مستقرة .

2- إذا كان  $L(x) < 0$  ،  $\forall x \in V - \{x^*\}$  فإن النقطة الثابتة  $x^*$  مستقرة بشكل مقارب.

تسمى دالة ليابونوف للنظام (16.1).

### 3.13.1. ثوابت ليابونوف

ثوابت ليابونوف هي أداة تمكن من قياس التباعد بين المدارات التي تنشئ من شروط ابتدائية متجاورة. ثوابت ليابونوف تسمح بتأكيد الحساسية للشروط الابتدائية لنظام فوضوي. في حالة نظام ديناميكي متقطع ذو بعد  $n$  يوجد  $n$  ثابت ليابونوف [34]. نعتبر النظام الديناميكي المتقطع الغير الخطي التالي:

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (17.1)$$

### مبرهنة 3.13.1. [32]

ثوابت ليابونوف للنظام (17.1) معرفة بالعلاقة التالية:

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18.1)$$

## الفصل الأول: عموميات حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية

حيث  $J_K = DF(x_{K-1}) \dots DF(x_0)$  و  $DF(x_i)$  هي المصفوفة اليعقوبية للدالة  $F$  المعرفة عند  $x_i$  كالتالي:

$$DF(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{ni}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{ni}} \end{pmatrix}$$

### مبرهنة 4.13.1 [33]

بحساب ثوابت ليايرونوف للنظام (17.1) يمكن استنتاج استقراره كما يلي:

- 1- إذا كان  $\lambda_L^{(n)} < \dots < \lambda_L^{(1)} < 0$  فإنه يوجد نقاط ثابتة مستقرة بشكل مقارب .
- 2- إذا كان  $\lambda_L^{(n)} < \dots < \lambda_L^{(2)} < 0$  ،  $\lambda_L^{(1)} = 0$  فإن الجاذب هو دورة حدية مستقرة بشكل مقارب .
- 3- إذا كان  $\lambda_L^{(n)} < \dots < \lambda_L^{(k+1)} < 0$  ،  $\lambda_L^{(n)} = \dots = \lambda_L^{(k)} = 0$  فإن الجاذب عبارة عن توروس ذو بعد  $k$  أي شبه دوري .
- 4- إذا كان  $\sum_i \lambda_L^{(i)} < 0$  ،  $\lambda_L^{(1)} > 0$  فإن الجاذب فوضوي .
- 5- إذا كان  $\sum_i \lambda_L^{(i)} < 0$  ،  $\lambda_L^{(1)} > \dots > \lambda_L^{(k)} > 0$  فإن الجاذب فوضوي مفرط .

### 14.1. استقرار الأنظمة الكسرية

#### 1.14.1. استقرار الأنظمة الكسرية الخطية

ليكن النظام الكسري الخطي التالي:

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19.1)$$

حيث  $i$  عدد ناطق بين 0 و 1 و  ${}^c D_t^{\alpha_i}$  المشتق الكسري لكابوتو من الرتبة  $i$  ، من أجل  $i = 1, 2, \dots, n$

ليكن  $M$  المضاعف المشترك لمقامات  $i$  .

**مبرهنة 1.14.1.** [37]

إذا كان  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$  فإن النظام يكون مستقرا بشكل مقارب إذا كان  $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ .

**مبرهنة 2.14.1.** [37]

إذا كان  $\alpha_i$  أعداد ناطقة مختلفة، فإن النظام يكون مستقرا بشكل مقارب إذا كانت جميع الجذور  $\lambda$  من

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M_{\alpha_1}}, \lambda^{M_{\alpha_2}}, \dots, \lambda^{M_{\alpha_n}}) - A) = 0 \quad \text{تحقق} \quad |\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$$

مع  $A = (\alpha_{ij})_{i \leq 1, j \leq n}$ .

**2.14.1. استقرار الأنظمة غير الخطية**

ليكن النظام الكسري غير الخطي التالي:

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20.1)$$

حيث  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  المشتقات الجزئية الثانية المستمرة في كرة تتمركز عند نقطة ثابتة  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  وهذا يعني  $f_i(x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$  إذن لدينا النتائج التالية:

**مبرهنة 3.14.1.** [37]

إذا كان  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$  عندئذ تكون النقطة الثابتة للنظام  $x^*$  مستقرة بشكل مقارب يكافئ:

$$|\arg(\text{spec}(J(x^*)))| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{حيث} \quad J \quad \text{هي المصفوفة اليعقوبية للنظام.}$$

**مبرهنة 4.14.1.** [37]

إذا كانت  $\alpha_i$  أعداد ناطقة مختلفة فإن النقطة الثابتة  $x^*$  للنظام تكون مستقرة بشكل مقارب إذا كانت

$$\text{جميع الجذور } \lambda \text{ من معادلة} \quad \det(\text{diag}(\lambda^{M_{\alpha_1}}, \lambda^{M_{\alpha_2}}, \dots, \lambda^{M_{\alpha_n}}) - A) = 0 \quad \text{تحقق} \quad |\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$$

### 15.1. المفارقات في الأنظمة أحادية البعد

إن الديناميكيات في الأنظمة أحادية البعد التي تعتمد على الوسائط مثيرة للاهتمام ولها تطبيقات واسعة في العلوم والهندسة. نعرف نظام مستمر أحادي البعد كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (21.1)$$

اعتمادا على الوسيط  $\mu$  حيث  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  دالة معرفة بـ  $x$  و  $\mu$ . النقاط الثابتة لهذا النظام هي حلول المعادلة  $f(x, \mu) = 0$  تشير المعادلة إلى أن النقاط الثابتة لهذا النظام تعتمد على المعامل  $\mu$ ، وقد يغيرون استقرارهم بتغيير  $\mu$ . هكذا ترتبط مفارقات نظام أحادي البعد باستقرار نقاط توازنه. تعرف هذه المفارقات بالمفارقات المحلية لأنها تحدث في جوار النقاط الثابتة، تمت مناقشة ثلاث مفارقات: المفارقة الحرجة، مفارقة عقدة العنق، مفارقة fourche. [38].

#### 1.15.1. المفارقة الحرجة

هناك العديد من الأنظمة الفيزيائية التي تعتمد على الوسائط والتي يجب أن توجد لها نقطة ثابتة لجميع قيم وسائط النظام ولا يمكن أن تختفي أبدا، لكنها قد تغير طابع الاستقرار الخاص بها مع اختلاف الوسيط. المفارقة الحرجة هو أحد أنواع المفارقات الذي يتم فيه تغيير أحرف الاستقرار للنقاط الثابتة لقيم متغيرة للوسائط.

ليكن النظام أحادي البعد [38]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (22.1)$$

مع  $\mu \in \mathbb{R}$  وسيط، يتم الحصول على النقاط الثابتة لهذا النظام كما يلي:

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow \mu x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \mu$$

وبالتالي فإن النظام يحتوي على نقطتين ثابتتين  $x^* = 0$ ،  $\mu$ .

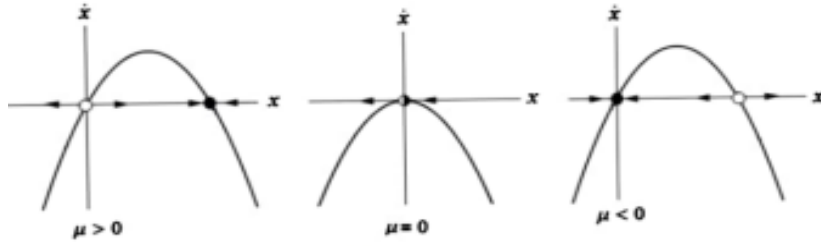
$$\text{لدينا} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, x) = \mu - 2x \quad \text{إذن:} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) = \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, \mu) = -\mu$$

وهذا يوضح أنه من أجل  $\mu = 0$  فإن النظام لديه نقطة ثابتة وحيدة فقط  $x^* = 0$ .

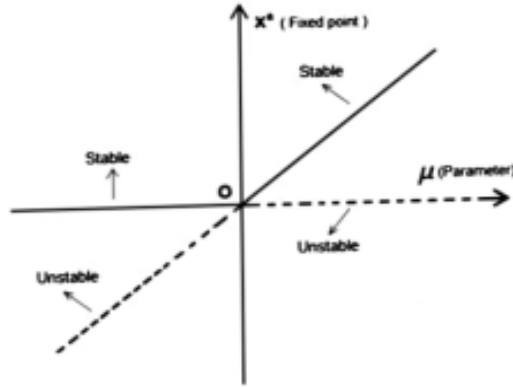
وهي نقاط ثابتة غير زائدية.

من أجل  $\mu \neq 0$  يحتوي على نقطتين ثابتتين متميزتين  $x^* = 0$ ،  $\mu$ ، حيث يكون أصل نقطة (غير مستقر) من أجل  $\mu > 0$  وهو حوض (مستقر) من أجل  $\mu < 0$ .

نقطة التوازن الأخرى  $x^* = \mu$  غير مستقرة إذا كان  $\mu < 0$  ومستقرة من أجل  $\mu > 0$ .



الشكل 9.1: صور لحالات النظام (22.1)



الشكل 10.1: مخطط المفارقة الحرجة في نظام أحادي البعد

هذا النوع من المفارقات يسمى مفارقة حرجة. في هذه المفارقة حدث تبادل للاستقرار بين نقطتين ثابتتين في النظام.

### 2.15.1. مفارقة عقدة العنق

نعتبر نظام أحادي البعد [38]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) = \mu + x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (23.1)$$

حيث  $\mu$  وسيط، نحصل على النقاط الثابتة كما يلي:

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow \mu + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\mu$$

اعتماداً على إشارة الوسيط  $\mu$ ، لدينا ثلاث احتمالات:

لما  $\mu < 0$  يكون للنظام نقطتين ثابتتين ثابتتين  $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-\mu}$ .

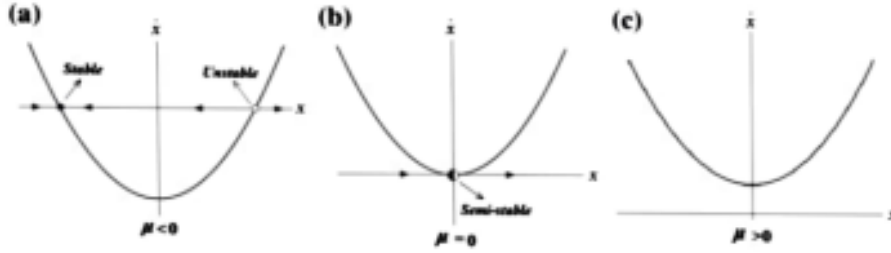
تندمج عندما  $x^* = 0$  وتختفي عندما  $\mu = 0$ .

النقطة الثابتة  $x^* = +\sqrt{-\mu}$  غير مستقرة، بينما النقطة الثابتة  $x^* = -\sqrt{-\mu}$  مستقرة.

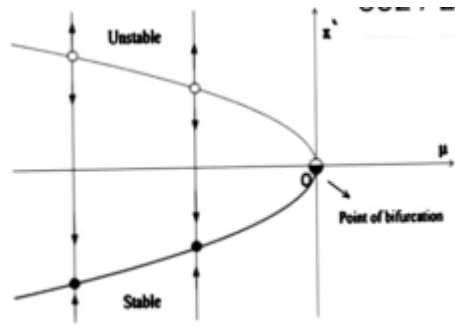
## الفصل الأول: عموميات حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية

من الشكل (11.1) نرى أيضًا أنه عندما تقترب من الصفر يتحرك القطع المكافئ للأعلى وتتحرك النقطتان الثابتتان تجاه بعضهما البعض وتندمجان عند  $x^* = 0$ .

عندما تكون  $\mu = 0$  لا توجد نقاط ثابتة للنظام من أجل  $\mu > 0$ ، كما هو موضح في الشكل (11.1). هذا نظام بسيط للغاية ولكن ديناميكيته مثيرة للاهتمام للغاية. حدثت المفارقة في الديناميكيات عند  $\mu = 0$ ، لأن حقول المتجه من أجل  $\mu < 0$  و  $\mu > 0$  مختلفة نوعياً.



الشكل 11.1: صور الحالات من أجل  $\mu < 0$  و  $\mu = 0$  و  $\mu > 0$



الشكل 12.1. مخطط مفارقة عقدة العنق في نظام أحادي البعد

هذا مثال على مفارقة عقدة العنق على الرغم من أن النظام أحادي البعد. في الواقع، إنها مفارقة عقدة العنق دون الدرجة، حيث توجد نقاط ثابتة لقيم الوسيط أسفل نقطة المفارقة.

### 3.15.1 مفارقة fourche

نناقش الآن مفارقة في نظام أحادي البعد يظهر عندما يكون للنظام تناظر بين الاتجاهين الأيسر والأيمن. في مثل هذا النظام، تميل النقاط الثابتة إلى الظهور والاختفاء في زوج متماثل.

على سبيل المثال نعرف نظام أحادي البعد [38] كما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (24.1)$$

نعوض  $x$  بـ  $-x$  نحصل على:

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 - \frac{dx}{dt} = -\mu x + x^3 = -(\mu x - x^3)$$

## الفصل الأول: عموميات حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية

وبالتالي فإن النظام ثابت في ظل التحويل  $x \rightarrow -x$  يتم الحصول على النقاط الثابتة للنظام كما يلي:

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow \mu x - x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{\mu}$$

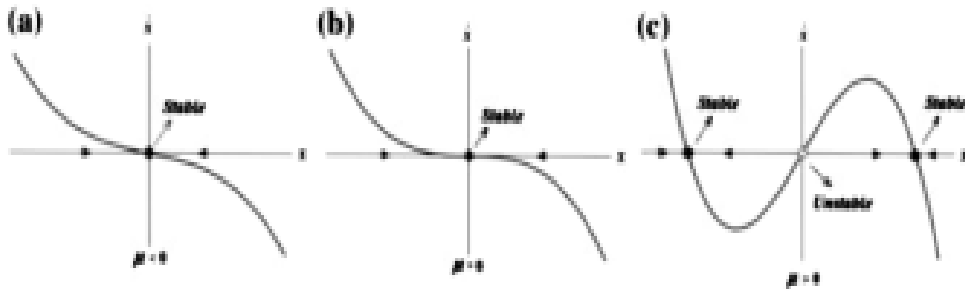
$$\text{من أجل } f(x, \mu) = \mu x - x^3$$

$$\frac{df}{dx} = \mu - 3x^2, \frac{df}{dx}(0, \mu) = \mu, \frac{df}{dx}(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu$$

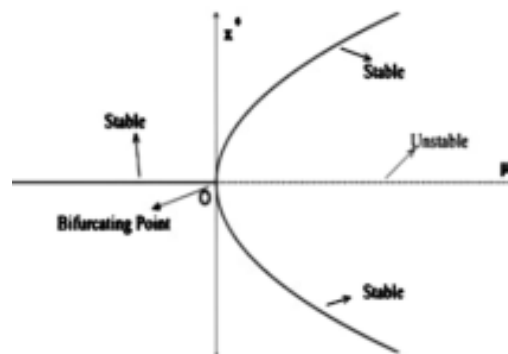
1- عندما تكون  $\mu = 0$ ، يكون للنظام نقطة ثابتة واحدة فقط  $x^* = 0$  وهي نقطة مستقرة في الطبيعة، حيث  $\frac{df}{dx}(0, 0) = 0$ .

2- عندما تكون  $\mu > 0$  توجد ثلاث نقاط ثابتة  $x^* = 0, \pm\sqrt{\mu}$ ، حيث تكون النقطة الثابتة  $x^* = 0$  غير مستقرة والنقطتين الثابتين الآخرين مستقرتين.

3- عندما تكون  $\mu < 0$  يحتوي النظام على نقطة ثابتة واحدة فقط مستقرة في الأصل. تم توضيح مخطط الطور في المستوى  $x$  في الشكل (13.1).



الشكل 13.1: صور الحالات من أجل  $\mu < 0$  و  $\mu = 0$  و  $\mu > 0$



الشكل 14.1: مخطط مفارقة fourche في نظام أحادي البعد



### 16.1. خاتمة

قدمنا في هذا الفصل ملخص عن الأنظمة الديناميكية من تعريفات للأنظمة الديناميكية وأنواعها وتعداد خصائصها مرورا بنظرية الفوضى وتقديم أمثلة عن الأنظمة الفوضوية ومن ثم التذكير بمفهوم الاشتقاق الكسري واستقرار الأنظمة الكسرية.

## الفصل الثاني

### أمثلة عن الأنظمة الفوضوية الكسرية

#### 1.2. مقدمة

لقد جذب تحديد الأنظمة ذات رتب كسرية انتباه العديد من المجتمعات العلمية وكان موضوع جد نشط للبحث منذ بداية التسعينات، إذ توفر الأنظمة الديناميكية ذات رتب كسرية أفضل نماذج رياضية لبعض الأنظمة الفيزيائية والهندسية الحقيقية. لديهم العديد من السلوكيات الديناميكية التي تشبه أنظمة برتب صحيحة مثل الفوضى والمفارقة والجاذب. تنمذج الأنظمة ذات رتب كسرية بواسطة معادلات تفاضلية كسرية تحتوي على مشتقات برتب غير صحيحة.

#### 2.2. النظام الفوضوي الكسري ثنائي الدينامو

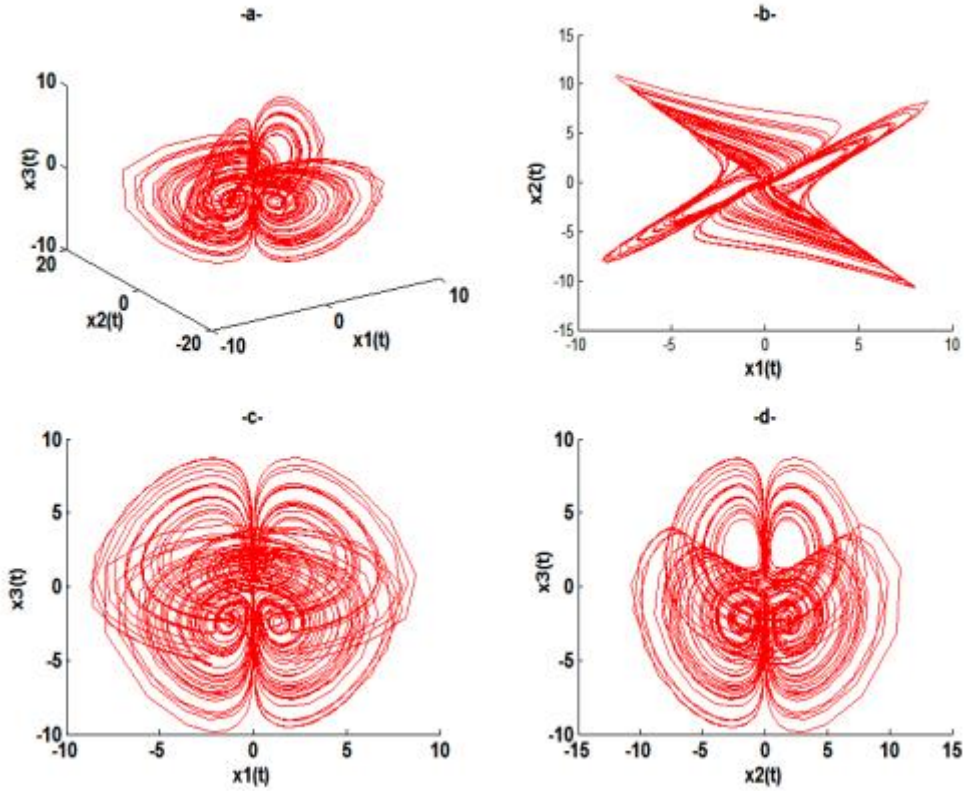
النظام الفوضوي الكسري ثنائي الدينامو معرف بـ:

$$\begin{cases} D^{p_1}x_1 = -\alpha x_1 + (x_3 + \beta)x_2 \\ D^{p_2}x_2 = -\alpha x_2 + (x_3 - \beta)x_1 \\ D^{p_3}x_3 = x_3 - x_1x_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

يظهر هذا النظام سلوكيات فوضوية عندما  $(p_1, p_2, p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$  و  $(\alpha, \beta) = (2, 1)$

[46].

يوضح الشكل (1.2) الجاذبات الفوضوية للنظام (1.2):



الشكل 1.2: الجاذبات الفوضوية للنظام الكسري ثنائي الدينامو للقيم  $(p_1, p_2, p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$

$$(\alpha, \beta) = (2, 1) \text{ و}$$

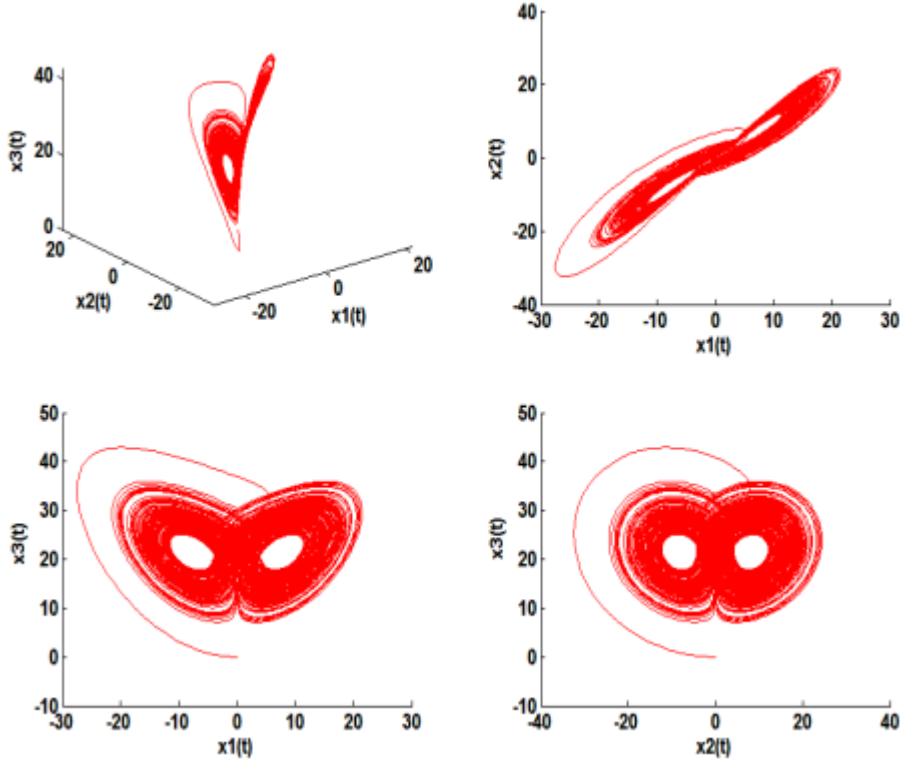
### 3.2. النظام الفوضوي الكسري الموحد

نعرف النظام الفوضوي الكسري الموحد بـ:

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1 = (25a + 10)(x_2 - x_1) \\ D^{q_2} x_2 = (28 - 35a)x_1 + (29a - 1)x_2 + x_1 x_3 \\ D^{q_3} x_3 = \frac{-(a + 8)}{3}x_3 + x_1 x_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

يظهر هذا النظام سلوكيات فوضوية عندما  $(q_1, q_2, q_3) = (0.95, 0.85, 0.9)$  و  $a = 1$ . [47]

يوضح الشكل (2.2) الجاذبات الفوضوية للنظام (2.2):



الشكل 2.2: جاذبات فوضوية للنظام الكسري الموحد

#### 4.2 الأنظمة الفوضوية الكسرية المتأخرة

التأخير الزمني هو ظاهرة مألوفة جدا في إشارة الانتقال، بسبب سرعة الإرسال وكذلك الازدحام [39] في عام 1977، Mackay and Glass [40] حدد أول نموذج رياضي لنظام التأخير الفوضوي. هذا المجال تمت دراسته على نطاق واسع من قبل العديد من الباحثين في العديد من المجالات. في الآونة الأخيرة، بدأت الأنظمة الكسرية الفوضوية المتأخرة في تلقي اهتمام كبير خاصة في الاتصالات الأمانة وذلك بفضل نظامهم الكسري الذي يستخدم كمفتاح سري وعدم الاستقرار الناجم عن التأخير الذي يؤدي إلى تعزيز الأمن. يمكن وصف هذا النوع من النظام بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + Bf(t) \\ x(t) = \phi(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

من أجل  $t \in [0, \tau]$ .

حيث  $\phi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  دالة شعاعية و  $\tau$  زمن تأخر موجب.

نقدم بعض أنظمة الكسور الفوضوية المتأخرة المقدمة بواسطة Jianeng Tang :

#### 1.4.2. النظام الكسري الفوضوي المتأخر لـ LIU

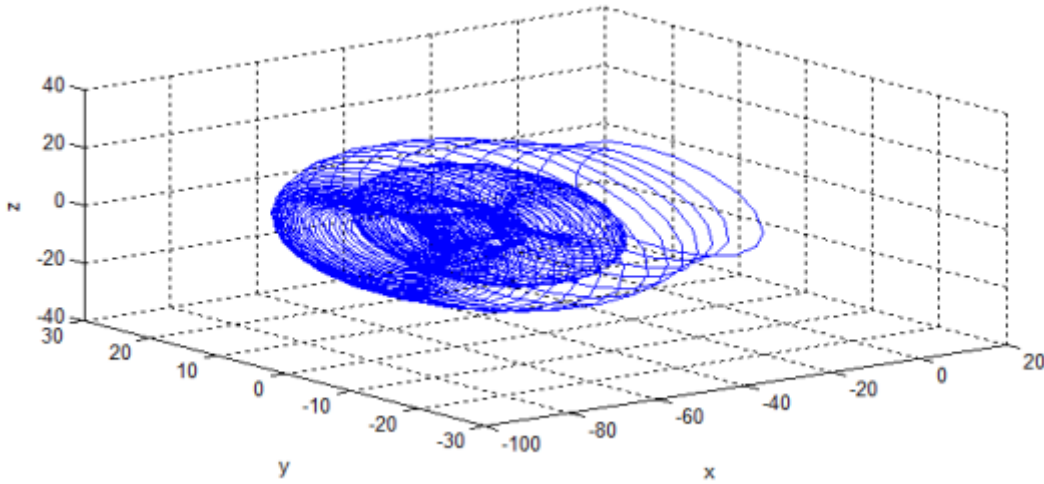
تم اختراع النموذج الفوضوي لـ LIU بواسطة LIU و AL في عام 2009 [41]، درس Bhalekar و Daftardar-Gejji [42] نسخته الكسرية لاحقاً.

النظام الكسري المتأخر LIU معرف بـ [43]:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -ax(t) - ey^2(t) \\ D^\alpha y(t) = bx(t) - kz(t) \\ D^\alpha z(t) = mx(t)y(t) - cz(t - \tau) \end{cases} \quad (4.2)$$

$a=1$  ،  $b=2.5$  ،  $c=5$  ،  $e=1$  ،  $m=5$  ،  $k=4$  ، مع  $\tau=0.02$  و  $\alpha=0.985$

يظهر الشكل (3.2) جاذب LIU في ثلاث أبعاد  $x(t)$  ،  $y(t)$  ،  $z(t)$ .



الشكل 3.2: جاذب النظام الكسري الفوضوي لنظام LIU المتأخر

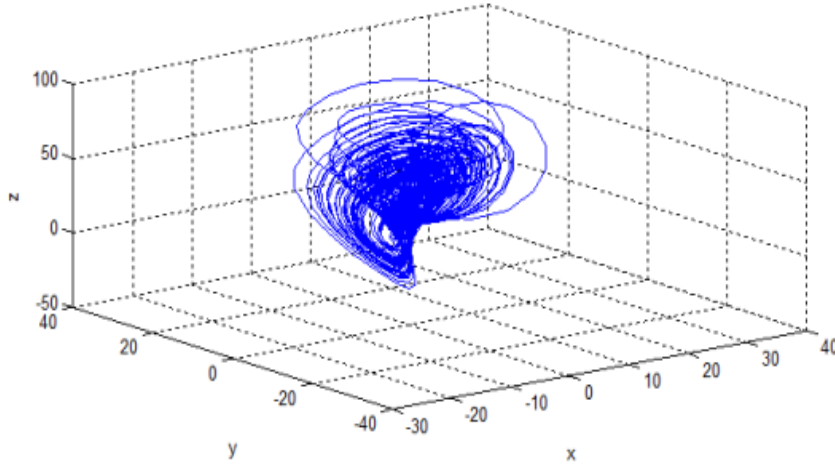
#### 2.4.2. النظام الكسري الفوضوي المتأخر لـ Chen

تم تقديم نظام Chen الفوضوي في عام 1999 من قبل Chen و Ueta وهو معرف بـ:

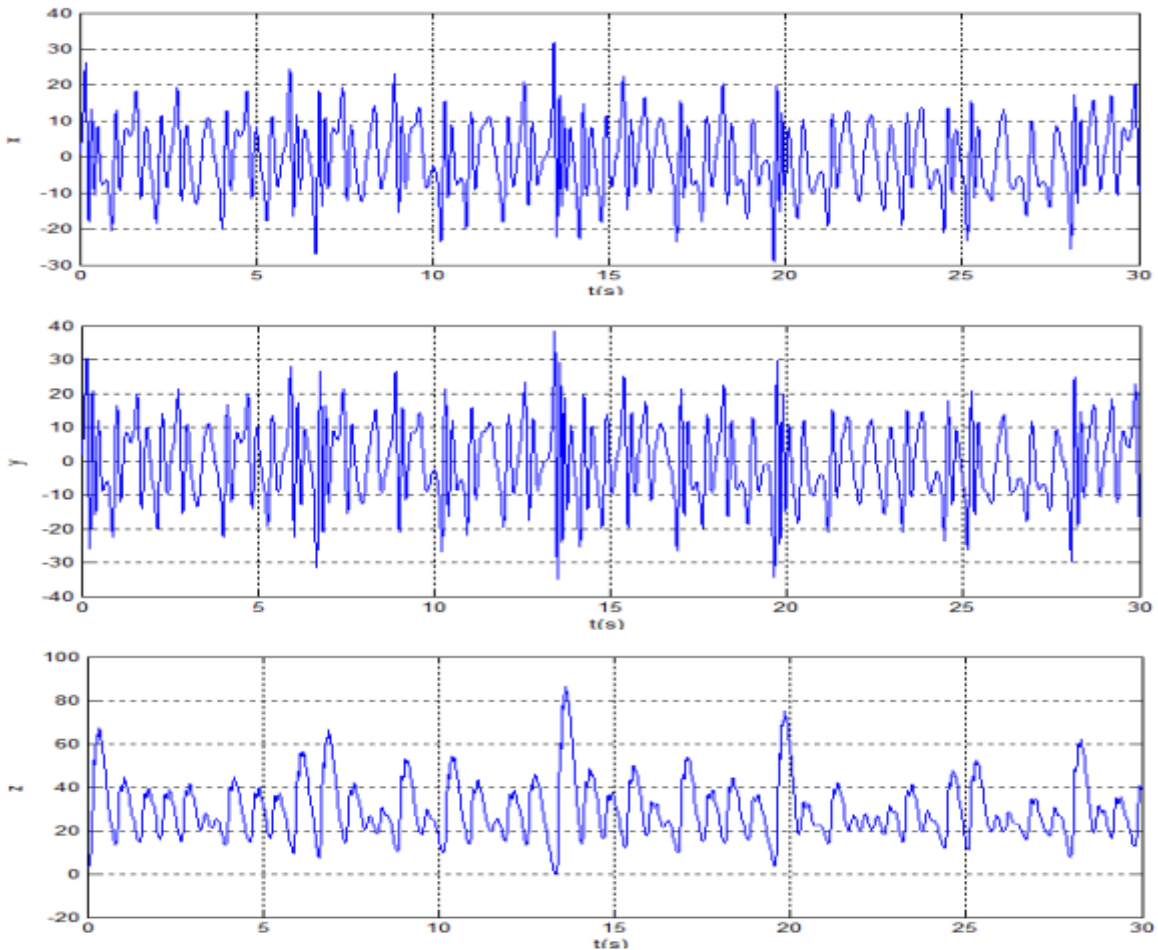
$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = a(y(t) - x(t)) \\ D^\alpha y(t) = (c - a)x(t) + cy(t) - x(t)z(t) \\ D^\alpha z(t) = x(t)y(t) - bz(t - \tau) \end{cases} \quad (5.2)$$

$a=35$  ،  $b=3$  ،  $c=28$  مع  $\tau=0.2$  ،  $\alpha=0.98$

توضح الأشكال أدناه (الشكل (2.4) ، الشكل (2.5) ) السلوك الفوضوي للنظام (5.2).



الشكل 4.2: الجاذب الفوضوي الكسري لنظام Chen المتأخر



الشكل 5.2: التطور بمرور الوقت للحالات  $x$  و  $y$  و  $z$  للنظام الكسري الفوضوي لـ Chen

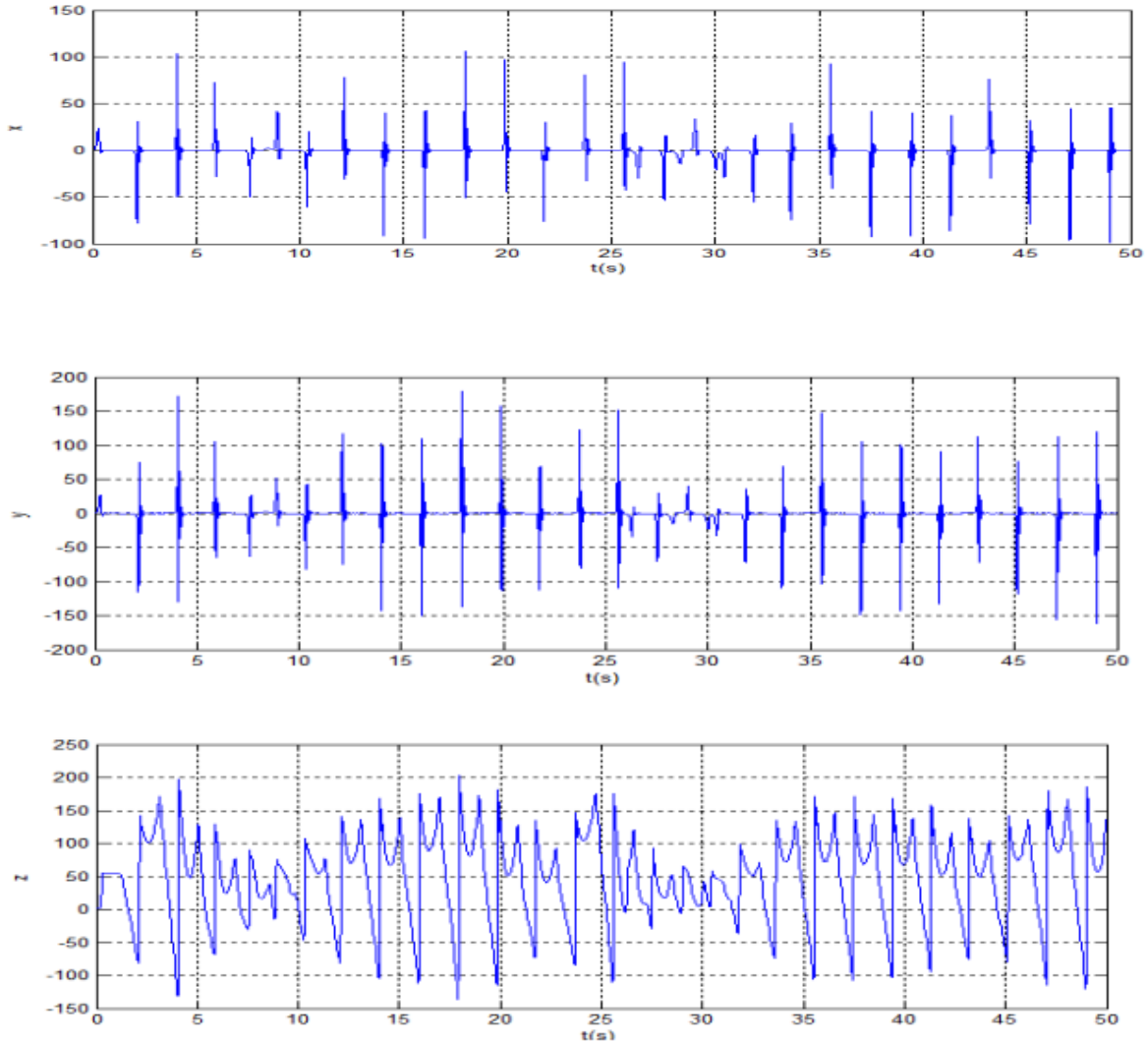
### 3.4.2. النظام الكسري الفوضوي المتأخر لـ $L\ddot{U}$

في عام 2014، أضاف Jianeng Tanga مصطلح التأخير إلى النظام الكسري الفوضوي لـ  $L\ddot{U}$  ومن هنا أصبح النظام على النحو التالي:

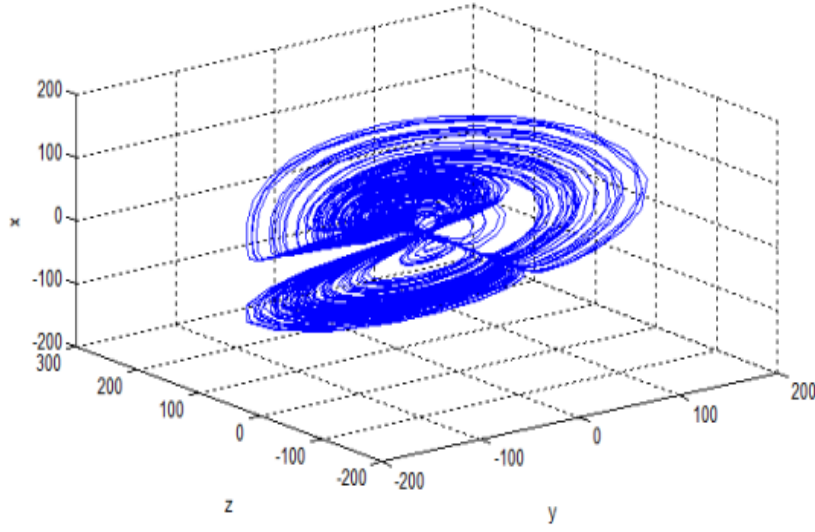
$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = a(y(t) - x(t)) \\ D^\alpha y(t) = cx(t) + x(t)z(t) \\ D^\alpha z(t) = x(t)y(t) - bz(t - \tau) \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\alpha = 0.78 \text{ مع } \tau = 1, \text{ و } c = 28, \text{ } b = 3, \text{ } a = 35$$

توضح الأشكال أدناه (الشكل (2.6)، الشكل (2.7)) السلوك الفوضوي للنظام (6.2).



الشكل 6.2: التطور بمرور الوقت للحالات  $x$  و  $y$  و  $z$  للنظام الكسري الفوضوي لـ  $L\ddot{U}$



الشكل 7.2: جاذب النظام الكسري الفوضوي لـ  $L\dot{U}$

## 5.2. خاتمة

في هذا الفصل قمنا بتسليط الضوء على بعض الأمثلة للأنظمة الكسرية الفوضوية مع تقديم تمثيل للجاذب الفوضوي لهذه الأنظمة.



## الفصل الثالث

### دراسة نظام فوضوي برتبة كسرية

#### 1.3. مقدمة

في الأيام الأخيرة، تلعب تطبيقات الأنظمة الديناميكية ذات الرتب الكسرية دوراً أكثر حيوية في الحياة الواقعية على سبيل المثال التحكم في نظام التشفير والتشفير الرقمي. وبالتالي فإن التحقيق في الأنظمة الديناميكية الكسرية ليس مفيداً فقط في النظرية ولكنه مهم في الممارسة.

و تم اقتراح العديد من الأمثلة لا سيما نظام Liu ونظام Lorenz المعقد، وتم تقديم الشروط التحليلية اللازمة لنظام ما لإظهار السلوك الفوضوي.

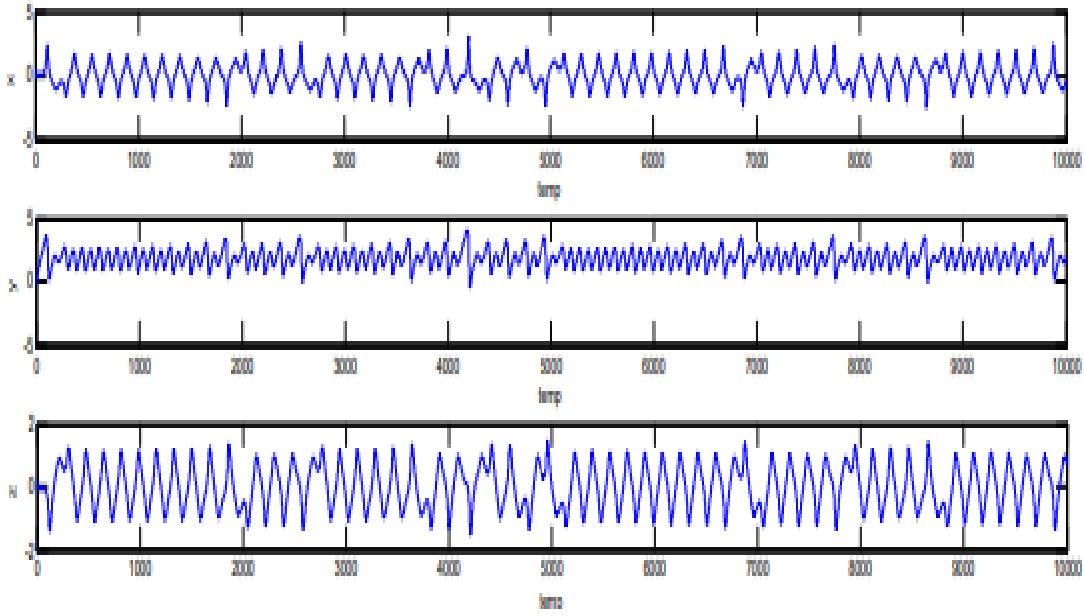
في هذا الفصل نقترح نظام فوضوي كسري ومحاولة دراسة سلوكه الديناميكي من خلال النقاط الثابتة، مخطط المفارقة وكذا إيجاد أدنى رتبة توجد بها الفوضى.

#### 2.3. وصف نظام فوضوي برتبة كسرية

- نعتبر النظام الفوضوي Finance برتبة كسرية [48] [49] المعروف بـ:

$$\begin{cases} D^q x = z + (y - a)x \\ D^q y = 1 - by - x^2 \\ D^q z = -x - cz \end{cases} \quad (1.3)$$

من أجل قيم الوسائط  $a=1$ ،  $b=0.1$ ،  $c=1$  والشروط الابتدائية  $(x, y, z) = (0.2, -0.1, 0.1)$  ورتبة كسرية  $q = 0.95$  يعرض النظام الجاذبات الفوضوية التالية كما هو موضح في الشكل (1.3).

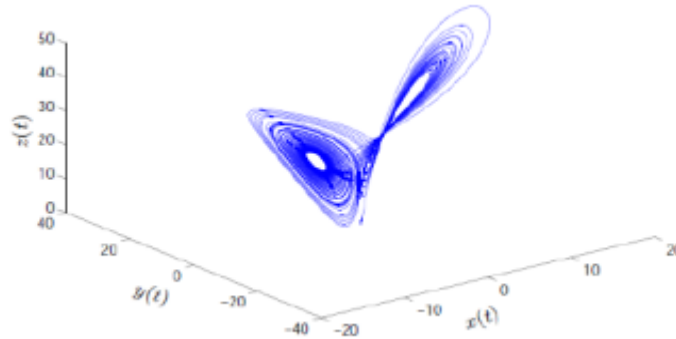


الشكل 1.3: تطور الحالات  $z, y, x$  للنظام (1.3) مع مرور الوقت  $t$

- نعتبر النظام الفوضوي Lorenz برتبة كسرية [37] المعروف بـ:

$$\begin{cases} D^q x = \sigma(y - x) \\ D^q y = rx - y - xz \\ D^q z = xy - bz \end{cases} \quad (2.3)$$

من أجل قيم الوسائط  $\sigma = 10$ ،  $b = \frac{8}{3}$ ،  $r = 28$  والشروط الابتدائية  $(x, y, z) = (0.1, 0.1, 0.1)$ .  
ورتبة كسرية  $q = 0.991$  يعرض النظام الجاذبات الفوضوية التالية كما هو موضح في الشكل (2.3).



الشكل 2.3: الجاذبات الفوضوية للنظام الكسري لـ Lorenz

### 3.3. دراسة حل النظام

#### 1.3.3. وجود الحل و وحدانيته

لتكن المعادلة التفاضلية الكسرية من صنف كابوتو  ${}^c D_t^p$  Caputo التالية:

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}; k = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.3)$$

حيث  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  و  $p > 0, p \notin \mathbb{N}, n = [p] + 1$

في نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية تعد خصائص الوجود وتفرد الحل ضرورية لأنه في النمذجة يجب أن يعترف النظام بحل وحيد لتكون قادرًا على التنبؤ بالحالة المستقبلية للنظام من حالته الحالية يكون للمشكلة حل وحيد إذا تحقق شرط ليبشيتز على  $f(t, y(t))$ .

#### تعريف 1.3.3 [65]

نقول أن دالة ليبشيتز بالنسبة لـ  $y$  إذا وجد  $L > 0$  حيث من أن أجل كل  $t$

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$$f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, y) \rightarrow f(t, y)$$

#### مبرهنة 1.3.3 [79]

ليكن  $y_0^{(k)}, \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}, k > 0$ ، نعرف:

$$G = \left\{ (t, y) \in [0, h^*], \left| y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} \right| \leq k \right\}$$

ولتكن الدالة المستمرة  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  دالة ليبشيتز بالنسبة لـ  $y$ ، ومنه يوجد حل وحيد  $y$  للمشكلة (3.3)

حيث  $y \in C[0, h^*]$ .

الدالة  $y \in C[0, h]$  حل للمشكلة (3.3) إذا و فقط إذا كانت حل للمعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيرا:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

$$M = \sup_{(t,y) \in G} |f(t,y)| \quad \text{حيث} \quad h = \min \left\{ h^*, \left( \frac{k \Gamma(p+1)}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \quad \text{من أجل } p \in (0,1) \text{ يعطى } h$$

### مبرهنة 2.3.3.

النظام (1.3) يكتب من الشكل:

$$\begin{cases} D^q X(t) = G_1 X(t) + x(t) G_2 X(t) + y(t) G_3(t) X(t) + G_4 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad 0 < t \leq \tau$$

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \quad \text{و}$$

$$q = (q_1, q_2, q_3)^T, \quad q_i < 1 \quad i = 1, 2, 3$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

من أجل  $\tau > 0$  النظام يملك حل وحيد.

**البرهان:**

بما أن:

$$F(X) = G_1 X(t) + x(t) G_2 X(t) + y(t) G_3(t) X(t) + G_4$$

مستمرة على  $\mathbb{R}^3$  إذن محدودة على  $[X_0 - \delta, X_0 + \delta]$  من أجل  $\delta > 0$  اعتمادا على استمرارية

ليشيتز على  $[X_0 - \delta, X_0 + \delta]$ :

$$|F(X) - F(Y)| = |G_1 X(t) + x(t) G_2 X(t) + y(t) G_3(t) X(t) + G_4 - G_1 Y(t) + x_1(t) G_2 Y(t) + y_1(t) G_3(t) Y(t) + G_4|$$

وبما أن:

$$|y - y_1| \leq |X - Y| \quad \text{و} \quad |x - x_1| \leq |X - Y|$$

نحصل على:

$$|x G_2 X - x_1 G_2 Y| = |G_2(x - x_1)X + G_2(x_1(X - Y))| \leq \|G_2\| \cdot (|X| + |x_1|) (|X - Y|)$$

$$\text{و} \quad |y G_3 X - y_1 G_3 Y| = |G_3(y - y_1)X + G_3(x_1(X - Y))|$$

$$\leq \|G_2\| \cdot (|X| + |x_1|) (|X - Y|)$$

ومنه:

$$\begin{aligned} |F(X) - F(Y)| &\leq \|G_1\| \cdot |X - Y| + \|G_2\| (2|X_0| + 2\delta) (|X - Y|) + \|G_3\| (2|X_0| + 2\delta) (|X - Y|) \\ &\leq (\|G_1\| + \|G_2\| 2|X_0| + 2\delta) |X - Y| \leq P |X - Y| \end{aligned}$$

$$P = \|G_1\| + \|G_2\| 2|X_0| + 2\delta \text{ حيث:}$$

اعتمادا على نظرية الوجود والوحدانية فإن النظام يملك حل وحيد.  $Y(t) \in \mathbb{R}^3$  ،  $\| \cdot \|$  نظيم المصفوفة و  $\| \cdot \|$  النظيم الشعاعي نحصل على  $F(X)$  تحقق شرط ليبشيتز

#### 4.3 تحليل النقاط الثابتة للنظام

لإيجاد النقاط الثابتة للنظام (1.3) نستعمل التعريف  $D^q x_i = 0$  و  $i = 1, 2, 3$  يكافئ حساب:

$$\begin{cases} z + (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \end{cases}$$

بعد حساب بسيط، نجد:

• إذا كان  $c - b - abc \leq 0$  النظام (1.3) يملك نقطة ثابتة وحيدة وهي:  $p_1 = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$

• إذا كان  $c - b - abc > 0$  النظام يملك (1.3) ثلاث نقاط ثابتة وهي:

$$p_2 = \left( \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{ac + 1}{c}, -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}} \right), p_1 = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$$

$$p_3 = \left( -\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{ac + 1}{c}, \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}} \right)$$

من أجل قيم الوسائط  $a = 1, b = 0.1, c = 1$  النظام (1.3) يملك ثلاث نقاط ثابتة وهي:

$$p_3 = (-0.89443, 2, 0.89443), p_2 = (0.89443, 2, -0.89443), p_1 = (0, 10, 0)$$

بنفس الكيفية نجد النقاط الثابتة للنظام (2.3) ويكافئ حساب:

$$\begin{cases} \sigma(y-x) = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \sigma(y-x) = 0 \\ r(x-z) - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma y = \sigma x \\ r(x-z) = y \\ y^2 - b(r-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = r-1 \\ y = \pm\sqrt{b(r-1)} \end{cases}$$

1- إذا كان  $r < 1$  توجد نقطة ثابتة وحيدة:  $p = (0,0,0)$

2- إذا كان  $r > 1$  توجد ثلاث نقاط ثابتة:

$$p_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1)) \quad p_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)), \quad p_1 = (0,0,0)$$

### 1.4.3. استقرار النقاط الثابتة

من أجل التحقق من استقرار النقاط الثابتة نحسب المصفوفة اليعقوبية عند النقطة  $(x, y, z)$  من النظام

(1) تعطى المصفوفة اليعقوبية عند النقطة  $(x, y, z)$  للنظام (1.3) بـ:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} y-a & x & 1 \\ -2x & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

1- عند  $p_1(0,10,0)$  يكون لدينا:

$$J_{p_1} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

لإيجاد القيم الذاتية نحسب كثير الحدود المميز:  $p(\lambda) = \lambda^3 - 7.9\lambda^2 - 8.8\lambda - 0.8$

القيم الذاتية  $J_{p_1}$  للمصفوفة هم جذور كثير الحدود  $p(\lambda)$ :  $\lambda_1 = -0.1$ ,  $\lambda_2 = 8.8990$ ,  $\lambda_3 = -8.8990$

وعليه  $|\arg(\lambda_2)| = 0 < q \frac{\pi}{2}$  إذن  $p_1$  غير مستقرة.

2- عند  $p_2 = (0.89443, 2, -0.89443)$  يكون لدينا :

$$J_{p_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.89443 & 1 \\ -1.78886 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

لإيجاد القيم الذاتية نحسب كثير الحدود المميز:  $p(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\lambda^2 + 1.6\lambda + 1.6$

القيم الذاتية  $J_{p_1}$  للمصفوفة هم جذور كثير الحدود  $p(\lambda)$  :

$$\lambda_3 = 0.3304 - 1.4120i, \lambda_2 = 0.3304 + 1.4120i, \lambda_1 = -0.1$$

وعليه  $|\arg(\lambda_1)| = \pi$  ،  $|\arg(\lambda_{2,3})| = 1.3409$  ، إذن  $p_2$  غير مستقرة.

3- عند  $p_3 = (-0.89443, 2, 0.89443)$  يكون لدينا :

$$J_{p_3} = \begin{pmatrix} 1 & -0.89443 & 1 \\ 1.78886 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

لإيجاد القيم الذاتية نحسب كثير الحدود المميز:  $p(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\lambda^2 + 1.6\lambda + 1.6$

القيم الذاتية  $J_{p_3}$  للمصفوفة هم جذور كثير الحدود  $p(\lambda)$  :

$$\lambda_3 = 0.3304 - 1.4120i, \lambda_2 = 0.3304 + 1.4120i, \lambda_1 = -0.1$$

وعليه  $|\arg(\lambda_1)| = \pi$  ،  $|\arg(\lambda_{2,3})| = 1.3409$  ، إذن  $p_3$  غير مستقرة.

(2) تعطى المصفوفة اليعقوبية عند النقطة  $(x, y, z)$  من النظام (2.3) بـ:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

-1 عند  $p = (0,0,0)$  يكون لدينا:

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix}$$

كثير الحدود المميز  $P(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2} \\ \lambda_3 = -b \end{array} \right.$$

- إذا كان  $r < 1$  جميع القيم الذاتية سالبة ومنه  $p(0,0,0)$  مستقرة.
- إذا كان  $r = 1$  القيم الذاتية هي:  $\lambda_1 = 0$  ،  $\lambda_2 = -(\sigma + 1)$  ،  $\lambda_3 = -b$  ومنه  $p(0,0,0)$  نقطة هامشية.
- إذا كان  $r > 1$   $\lambda_1 > 0$  ،  $\lambda_2 < 0$  ،  $\lambda_3 < 0$   $p(0,0,0)$  غير مستقرة.
- من أجل الوسائط  $\sigma = 10$  ،  $b = \frac{8}{3}$  ،  $r = 28$  القيم الذاتية هي :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 11.828 \\ \lambda_2 = -22.828 \\ \lambda_3 = -2.67 \end{cases}$$

-2 عند  $p_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$  يكون لدينا:

$$J_{p_2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$



$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

[69] اعتمادا على قيم الوسيط  $r$ ، يمكن أن يكون لهذا كثير الحدود ثلاث جذور حقيقية سالبة أو جذر حقيقي واحد وجذران مركبان مترافقان.

يمكننا تبسيط هذا الحساب باستخدام حقيقة أن هناك قيمة ذاتية  $\lambda_1 = 0$  إذا كان  $r = 1$  لذلك يمكننا فرض أن  $|\lambda_1| \ll 1$  إذا كان  $|r - 1| \ll 1$  وبالتالي يمكننا إهمال  $\lambda_1^2$  و  $\lambda_1^3$  من المعادلة، القيم الذاتية هي:

$$\lambda_1 = -\frac{2b\sigma(r-1)}{b(\sigma+r)} < 0 \quad \text{من أجل } r > 1.$$

القيمتان الأخريان لا تعتمدان على  $r$  يعني أن:

$$\lambda_{2,3}(r) \approx \lambda_{2,3}(1) + \sigma(r-1)$$

يكفي تحديد قيمتها عند  $r = 1$  ومنه :

$$\lambda_2 = -\frac{(\sigma + b + 1) + \sqrt{(\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = -\frac{(\sigma + b + 1) - \sqrt{(\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0$$

3- عند  $p_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$  يكون لدينا:

$$J_{p_3} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

نفس الحساب من أجل  $p_3$  ونجد نفس النتيجة، إذن النقطتين  $p_2$  و  $p_3$  مستقرتين من أجل  $|r - 1| \ll 1$ .

الآن سنبرهن أن القيم الثابتة  $p_2$  و  $p_3$  غير مستقرة من أجل قيمة  $r_c$ .

نحن نعلم أن هناك حلولا خيالية بحتة  $\lambda_{1,2} = \pm iw$  عندما نفترض  $r$  قيمتها الحرجة  $r_c$ .

بأخذ الأجزاء الحقيقية والخيالية من المعادلة المميزة ( مع  $\lambda = iw$  ,  $w \in \mathbb{R}$  ) سنجد معادلتين

مستقلتين تسمحان بتحديد  $w$  وقيمة  $r_c$ .

$$-(\sigma + \lambda)((1 + \lambda)(b + \lambda) + b(r - 1)) = 0$$

$$-(\sigma + \lambda)(br + \lambda + \lambda b + \lambda^2) - \sigma(br - 2b - \lambda) = 0$$

$$(iw)^3 + (\sigma + b + 1)(iw)^2 + b(a + r_c)(iw) + 2ba(r_c - 1) = 0$$

$$\begin{cases} w^2(\sigma + b + 1) - 2\sigma b(1 + r_c) = 0 \\ w^3 - w(\sigma b + br_c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w^2 = \frac{2\sigma b(1 + r_c)}{\sigma + b + 1} \\ w^2 = \sigma b + br_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + 3 + b)}{\sigma - b - 1} \\ w = \pm((\sigma b + b)r_c) \end{cases}$$

من أجل  $\sigma = 10$  و  $b = \frac{8}{3}$  نحصل على:

$$\begin{cases} r_c = 24.74 \\ w = \pm 92.64 \end{cases}$$

حيث النقاط الثابتة  $p_2$  و  $p_3$  بؤر مستقرة من أجل  $r < r_c$  تصبح بؤر غير مستقرة من أجل  $r > r_c$  (وهي مراكز من أجل  $r = r_c$ ).

### 5.3. التشتت

النظام الديناميكي ثلاثي الأبعاد المعبر عنه بواسطة متغيرات الحالة  $x$ ،  $y$ ،  $z$  يجب أن يفى بالشرط العام للتشتت.

لنفترض أن  $V(t)$  هو عنصر الحجم لتدفق مسارات نظام غير خطي، يكون هذا النظام مشتتا إذا كان

$\nabla F$  المعرف بـ  $\nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$  سالبا. فإن النظام غير الخطي يكون مشتتا ويمكن أن

يظهر سلوكا فوضويا. هذا يعني أن هذا النظام يتقارب نحو المعدل الآسي  $e^{-pt}$  وبالتالي في لحظة

معينة  $t$  يكون الحجم  $V(t)$  مساويا لـ  $V(t) = V_0 e^{-pt}$  ومع  $V_0$  حجم ابتدائي متناقص وبالتالي عندما

تميل نحو اللانهاية فإن الحجم الأولي  $V_0$  الذي يحتوي على مسارات النظام يميل نحو الصفر. وبالتالي

فإن جميع المسارات الديناميكية للنظام غير الخطي محدودة ومحدودة في مجموعة فرعية معينة تسمى الجاذب الغريب.

(1) يمكن التعبير عن النظام (1.3) بـ:  $D^q X = F(X)$

حيث  $X = (x, y, z)^T$  ومنه:

$$\begin{pmatrix} D^q x \\ D^q y \\ D^q z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + (y - a)x \\ 1 - by - x^2 \\ -x - cz \end{pmatrix}$$

إذا:

$$\nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -(a + b + c) + y$$

من أجل القيم  $a = 1$ ،  $b = 0.1$ ،  $c = 1$  يكون  $a + b + c > 0$

وبالتالي يكون النظام (1.3) مشتتاً لما  $\nabla F < 0$  من أجل  $y < 2.1$ .

(2) يمكن التعبير عن النظام (2.3) بـ:

$$D^q X = F(X)$$

حيث  $X = (x, y, z)^T$

ومنه:

$$\begin{pmatrix} D^q x \\ D^q y \\ D^q z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

إذا:

$$\nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b)$$

يكون الحجم مساوياً لـ:

$$V(t) = V_0 e^{-(\sigma + 1 + b)t}$$

من أجل القيم  $\sigma = 10$ ،  $b = \frac{8}{3}$ ، يكون  $-(\sigma + 1 + b) = -13.67 < 0$

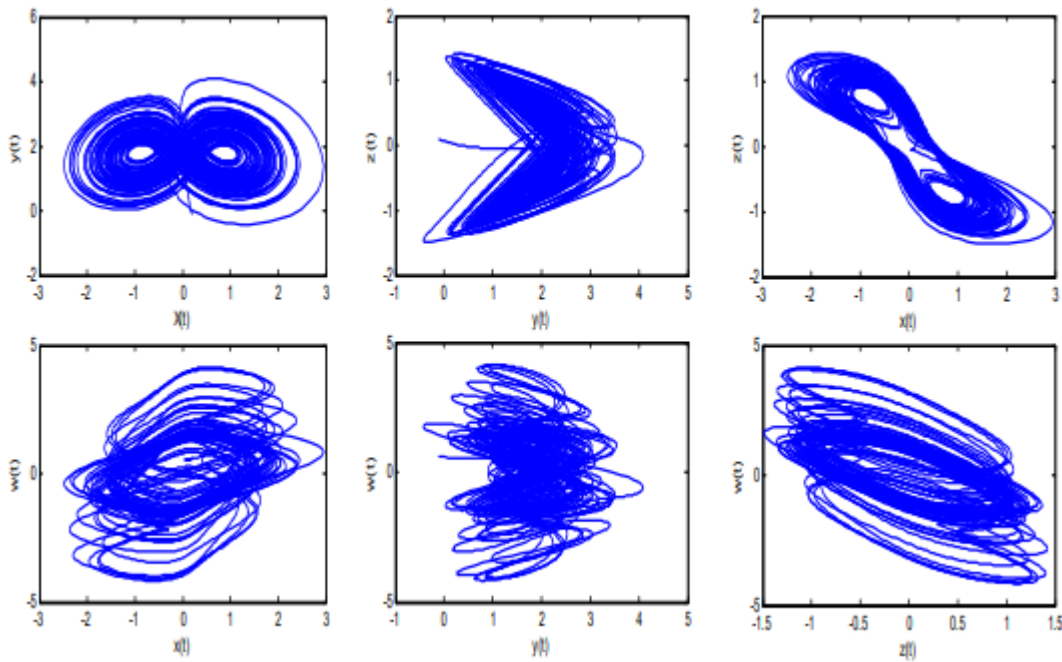
وبالتالي النظام (2.3) مشتت.

### 1.5.3. الحد الأدنى للرتبة الكسرية لظهور الفوضى

الشرط الضروري بحيث يمكن للنظام الكسري أن يكون له سلوك فوضوي هو الحفاظ على القيمة الذاتية في المنطقة غير المستمرة مما يؤدي إلى:

$$q > \frac{2 \min_i |\arg \lambda_i|}{\pi}$$

في النظام (1.3) وباستعمال القيم الذاتية المتحصل عليها سابقا يكون  $q > 0.854$ .



الشكل 3.3: الجاذبات الفوضوية للنظام الكسري (1.3)

6.3. ثوابت ليابونوف وبعد ليابونوف

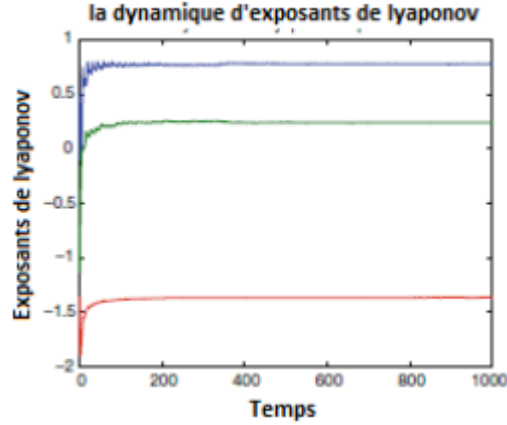
1.6.3. ثوابت ليابونوف

في النظام (1.3) من أجل قيم الوسائط  $a=3$ ،  $b=0.1$ ،  $c=1$  والشروط الابتدائية

$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 2)$$

نحصل على ثوابت ليابونوف [50] كما يلي:

$$L_3 = -1.3332, \quad L_2 = 0.2260, \quad L_1 = 0.7848$$

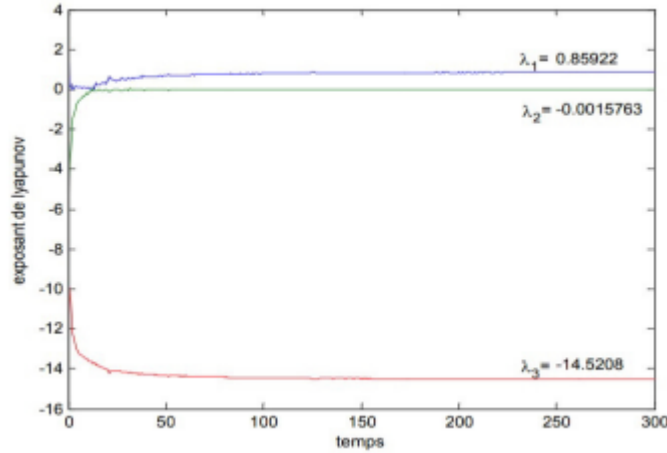


الشكل 4.3: ثوابت ليابونوف للنظام الكسري (1.3)

في النظام (2.3) من أجل قيم الوسائط  $\sigma = 10$ ،  $b = \frac{8}{3}$ ،  $r = 28$

تكون ثوابت ليابونوف [62] هي:

$$L_3 = -14.52 \text{ ، } L_2 = 0 \text{ ، } L_1 = 0.86$$



الشكل 5.3: ثوابت ليابونوف للنظام الكسري (2.3)

وفقا لثوابت ليابونوف نرى أن النظام (2.3) فوضوي.

### 2.6.3. بعد ليابونوف

لتكن  $L_1 > L_2 > \dots > L_n$  ثوابت ليابونوف لجاذب النظام الديناميكي  $z$  أكبر عدد صحيح يحقق:

$$L_1 + L_2 + \dots + L_j \geq 0$$

بعد ليايونوف الذي حدده Kaplan و Yorke معرف بـ:  $D_L = j + \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_j}{|L_{j+1}|}$

• في النظام (1.3):

باستعمال النتائج المتحصل عليها سابقا  $L_1 = 0.7848$  ،  $L_2 = 0.2260$  ،  $L_3 = -1.3332$

$$D_L = 2 + \frac{L_1 + L_2}{|L_3|} = 2.7582$$

• في النظام (2.3):

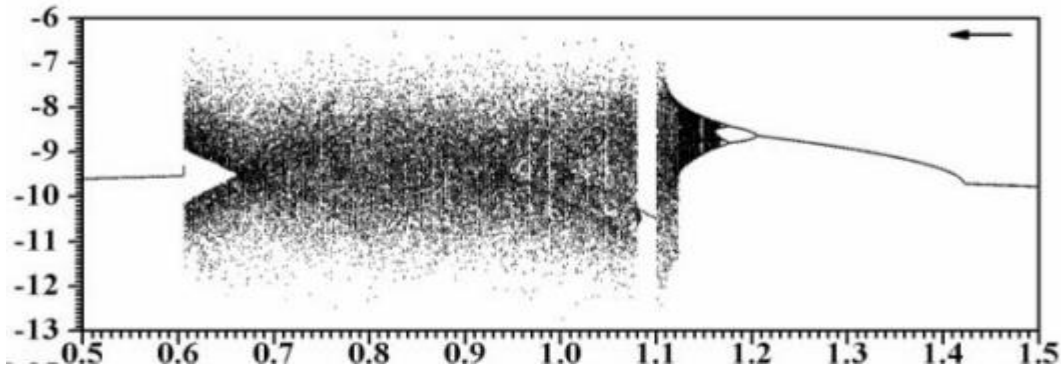
باستعمال النتائج المتحصل عليها سابقا  $L_1 = 0.86$  ،  $L_2 = 0$  ،  $L_3 = -14.52$

$$D_L = 2 + \frac{L_1 + L_2}{|L_3|} = 2.05923$$

### 3.6.3. تحليل المفارقة

1- من أجل دراسة ديناميكيات النظام (1.3) لما  $q=1$  وكذلك نوع المفارقة وطبيعته، تم استخدام المحاكاة العددية لهذا النظام.

يتم تقديم مخطط المفارقة لـ  $Y$  بدلالة  $c$  (وسيط المفارقة) حيث  $Y = y - \frac{1}{b}$  ومن أجل  $a=0$  و  $b=0.1$ ، تم إنتاج هذا المخطط عددياً عن طريق تقليل الوسيط  $c$  بدءاً من  $c=0.500$  إلى  $c=1.500$  بخطوة  $c=0.001$  وخطوة زمنية  $\Delta t = 0.001$ ، باستخدام قسم بوانكاريه عند  $x=0$  تم ضبط الشروط الأولية على  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$  بالتفصيل يتم تمييز ظواهر النظام (1.3) المتعلقة بالنظرية الديناميكية غير الخطية في مخطط التشعب في الشكل (6.3). [81]



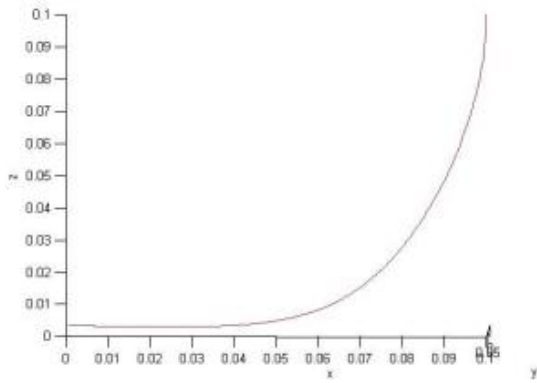
الشكل 6.3: مخطط المفارقة للنظام (1.3) من أجل لـ  $Y$  بدلالة  $c$

## الفصل الثالث: دراسة نظام فوضوي برتبة كسرية

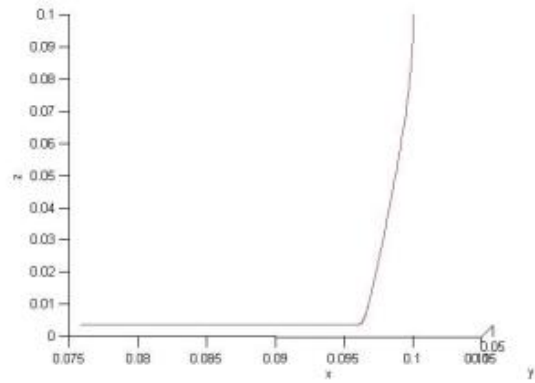
2- سننظر في مختلف المفارقات أو التغيرات في السلوك النوعي للنظام (2.3) والتي تنشأ عندما نضع

$$\sigma=10 \text{ و } b = \frac{8}{3} \text{ ونغير قيم } r \text{ لذلك لدينا الحالات التالية: [80]}$$

- لما  $0 < r < 1$  فإن النقطة الثابتة الوحيدة للنظام هي الأصل، وهي مستقرة كما يمكن ملاحظته في الشكل (7.3) الحالة (a).
- لما  $r = 1$  ينتقل النظام من نقطة ثابتة وحيدة إلى ثلاثة مما يؤدي إلى مفارقة *fourche* الأصل غير مستقرة ونقطتي الثبات الأخرى مستقرة، يمكن ملاحظة تغيير طفيف في سلوك النظام في الشكل (7.3) الحالة (b).
- لما  $1 < r < 24.7$  الأصل تظل غير مستقرة والنقطتين الثابتتين الأخرين تظلان مستقرتين، كما يمكن ملاحظته في الشكل (8.3) الحالة (a) والشكل (9.3) الحالة (b).
- لما  $r \approx 24.7368$  تصبح نقطتي الثبات المستقرتان غير مستقرتين مما يؤدي إلى مفارقة Hopf كما يمكن ملاحظته في الشكل (10.3) الحالة (a).
- لما  $r = 28$  لدينا جاذب Lorenz كما يمكن ملاحظته في الشكل (10.3) الحالة (b).

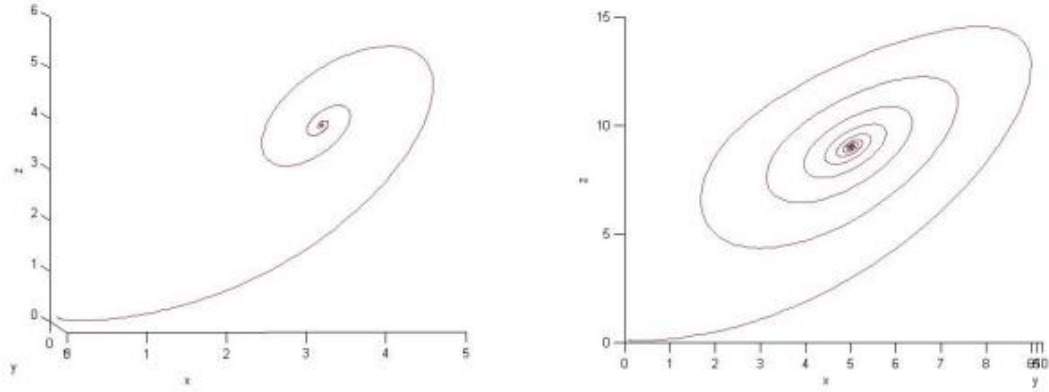


(a)  $r = 0.5, \sigma = 10, b = 8/3, ; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$



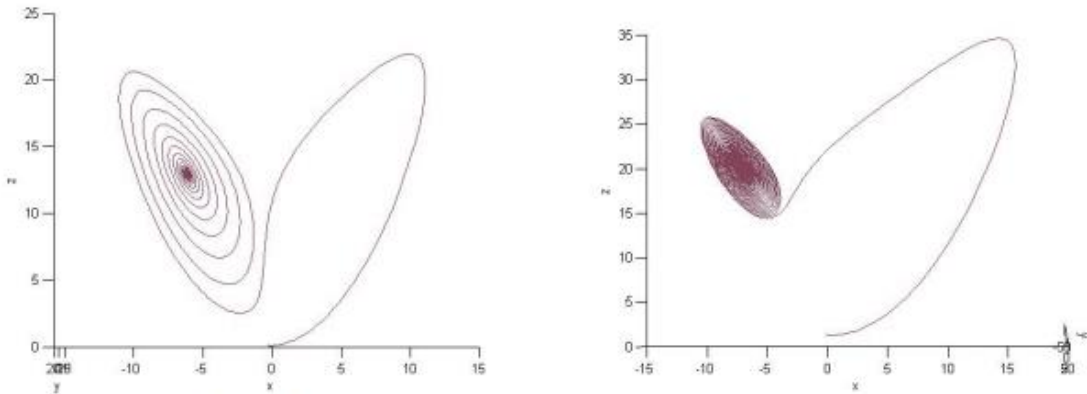
(b)  $r = 1, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$

الشكل 7.3: نظام Lorenz من أجل  $r = 0.5$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 1$  الحالة (b)



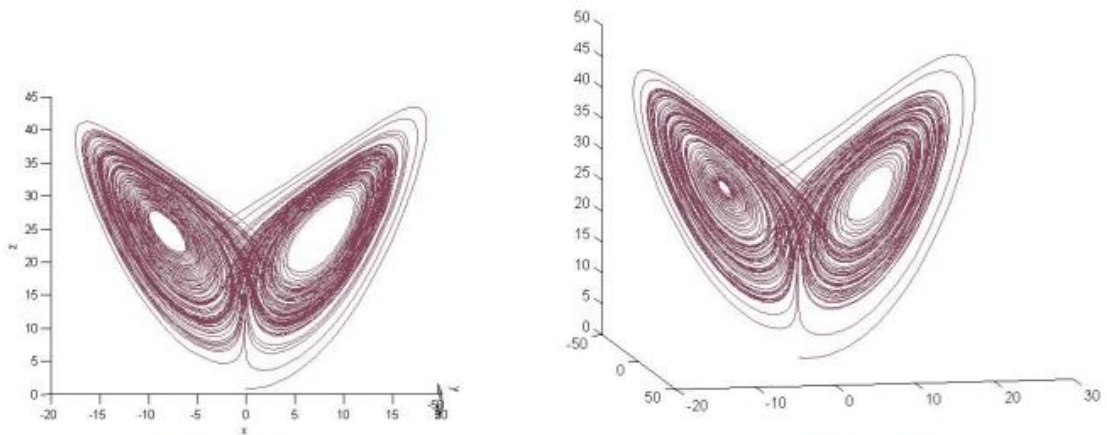
(a)  $r = 5, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$  (b)  $r = 10, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$

**الشكل 8.3:** نظام Lorenz من أجل  $r = 5$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 10$  الحالة (b)



(a)  $r = 13.926, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$  (b)  $r = 20, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$

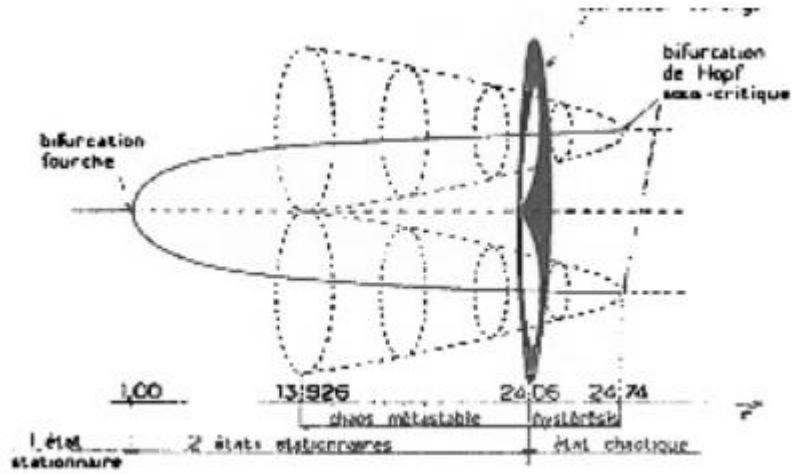
**الشكل 9.3:** نظام Lorenz من أجل  $r = 13.926$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 20$  الحالة (b)



(a)  $r = 24.74, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$  (b) Lorenz Attractor:  $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3; x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1.$

**الشكل 10.3:** جاذب Lorenz من أجل  $r = 24.74$  الحالة (a) ومن أجل  $r = 28$  الحالة (b)





الشكل 11.3: مخطط المفارقة لنظام Lorenz من أجل  $\sigma = 10$  و  $b = \frac{8}{3}$

### 7.3. خاتمة

في هذا الفصل تم دراسة نظام ثلاثي الأبعاد برتبة كسرية معرف بوسائط وبشروط ابتدائية من خلال إيجاد النقاط الثابتة ودراسة استقرارها، تشتت النظام، المفارقة وكذا تحديد الحد الأدنى لرتبة النظام لحدوث الفوضى والتوضيح أكثر من خلال المخططات المقدمة.

## خاتمة

فكرة الفوضى مفيدة جدا في عدة مجالات في الواقع، في الفيزياء، في علم الأرصاد الجوية بشكل واضح ولكن أيضا في علم الأحياء والكيمياء، في الاقتصاد في تقدير معاملات التوزيعات، وكذلك دراسة سلوكهم على المدى الطويل، وفي العلوم الاجتماعية. في علم التشفير يمكن لاكتشاف الإشارات الفوضوية أن يصعب من عمليات التعقب وأيضا إتلافها في حال تم التسلل إليها وأحدثت أيضا ثورة كبيرة في عالم الاتصالات، فهذه الإشارات التي لا يمكن التنبؤ بطبيعتها والتي ليس السهل التحكم فيها ولكنها حساسة للغاية للشروط الابتدائية وتقدم مظهرا شبه عشوائي، مما يجعل الفوضى ظاهرة مهمة جدا لإخفاء إشارات المعلومات من أجل نقلها بطريقة آمنة.

لقد قمنا في هذه المذكرة بإمطاة اللثام عن محور أساسي في شتى العلوم وهو الفوضى في الأنظمة الديناميكية الكسرية والتي تعتبر مجالا مهما لتطبيق التفاضل والتكامل الكسري فهي ظاهرة غير خطية مثيرة للاهتمام تمت دراستها على نطاق واسع على مدى العقود الماضية.

لقد قدمنا بعض المفاهيم الأساسية للأنظمة الديناميكية الفوضوية وكشفنا عن نظرية الاشتقاق الكسري بمختلف المفاهيم (ريمان-ليوفيل، جرونوالد-ليتينكوف وكابتو) وكشفنا معايير الاستقرار المختلفة للأنظمة الكسرية ومن ثم طبقنا مختلف هذه الأدوات اللازمة لدراسة نظام فوضوي برتبة كسرية. على وجه الخصوص، يمكننا تقديم وجهات النظر التالية:

1- من المعروف أن الفوضى ترتبط ارتباطاً وثيقاً بأمان الاتصالات وتشفير البيانات، سيركز عملنا المستقبلي إن شاء الله على إنشاء معايير المزامنة الجديدة لأنها تدخل ضمن هذا الميدان والتي تلعب دورا فاعلا في التكلفة.

2- تعديل وتطبيق الأساليب المستخدمة في المزامنة الفوضوية المستمرة بطريقة فعالة في حالة الأنظمة المنفصلة.

3- تطبيق الامتداد الجديد لطريقة ليابونوف المباشرة للأنظمة الكسرية وذلك للتحكم في الفوضى والتزامن.

---

## خاتمة

---

في الأخير نتمنى أن نكون قد ساهمنا ولو بقدر بسيط في توفير معلومات لزملائنا الطلبة ونرجو أن نكون قد وفقنا ولو بقدر بسيط في إنجاز هذا العمل وأن يضيف إلى مكتبة جامعتنا مرجعا متواضعا جيدا حول هذا الموضوع.

والله ولي التوفيق

---

## المراجع

- [1] سعاد علي، محمد الجلال، تدريس نظرية الفوضى لطلبة في مرحلة الثانوية من وجهة نظر معلمي الرياضيات، مجلة الجامعة علوم الإنسانية و الإجتماعية، مقالة بحثية اليمن، 2020/10/7.
- [2] رشيدة شرقي، مذكرة مقدمة لنيل الماستر، السنة الجامعية 2016/2015.
- [3] أثر الفراشة ونظرية الفوضى نظرة عامة، 03/ 08/ 2015، 2021/04/22.
- [4] بركاتي و داد، الأبعاد الإيستيمولوجية لنظرية الفوضى وتطبيقاتها العلمية ، مذكرة ماستر جامعة بسكرة ، 2021.
- [5] طالب هارون، عون الله رضوان، مزامنة الأنظمة الديناميكية الفوضوية، مذكرة ماستر جامعة تبسة ، 2021.
- [6] يوسف صفية، بعض الطرق العددية لحل معادلات تفاضلية برتب كسرية، مذكرة ماستر، جامعة قالمة ، جويلية 2021.
- [7] Gasri, Ahlem. (12/07/2018). Chaos et synchronisation (gèneralisè) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Frères Mentouri Constantine-1.
- [8] C. M. Marle, P. Pilibossian, Systèmes dynamiques une introduction, Ellipse, (2003).
- [9] Senouci Assia, Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation , Thèse de Doctorat, Université de Biskra, 2020 .
-

- [10] Lakhdari Khouloud, Analyse et contrôle de systèmes dynamiques chaotiques, mémoire de Master, Université de Biskra ,Septembre 2020 .
- [11] Li, T. Y., & Yorke, J. A. (2004). Period three implies chaos. In *The Theory of Chaotic Attractors* (pp. 77-84). Springer, New York, NY.
- [12] Brown, R., & Kocarev, L. (2000). A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(2), 344-349.
- [13] Aulbach, B, & Kieninger, B. (2001). On three definitions of chaos. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 1(1), 23-37.
- [14] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., & Stacey, P. (1992). On Devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4), 332-334.
- [15] Devaney, R. (2008). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Westview press.
- [16] Elhadj Zeraoulia , Etude de quelques types de systèmes chaotiques : Généralisation d'un modèle issu du modèle de chen, Thèse, constantine, février, (2006).
- [17] Mira, C., Gardini, L., Bugola, A., Cathala, J-C. ,(1996) *Chaotic dynamics in twodimensional noninvertible maps*. World Scienii...c Publishing Company.
- [18] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. ,(1996) *Chaos : an Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag édition.
-

- [19] Messaouda Labid ,Contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques , Thèse de Doctorat , Université de Mila , 2021.
- [20] Guckenheimer, J., Holmes, P. ,(1986) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, New York Springer-Verlag.
- [21] Hank Amina et Younsi Rofia ,Systemes Chaotiques pour la transmission securisee de donnees, mémoire de Master , Université de jijel, 2020.
- [22] P. Gaspard, Rössler systems, Encyclopedia of Nonlinear Science, V(231), p (808-811), (2005).
- [23] A. Karimov, A. Tutueva, T. Karimov, O. Druzhina, D. Butusov, Adaptive Generalized Synchronization between Circuit and Computer Implementations of the Rössler System. Applied Sciences,V(11), p 81, (2021).
- [24] Abdellah Menasri, chaos et bifurcations dans les systemes dynamiques en dimensions  $n$  ( $n > 1$ ), These de doctorat, Universite d'oum el Bouaghi, 2016.
- [25] Stegun I.A.Abramowitz M.Handbook of Mathematical Functions. 9 edition,1964.
- [26] Ignor Podlubny and Kenneth V. Thimann (Eds). Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Mathematics in science and engineering 198. Academic Press, 1st edition, 1999.
-

- [27] Igor Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation”, fractional calculus and applied analysis, vol.5, number 4, 2002.
- [28] H Eduardo Roman and Massimiliano Giona. Fractional diffusion equation on fractals: three-dimensional case and scattering function. Journal of Physics A : Mathematical and General, 25(8) :2107, 1992.
- [29] Tellab Brahim. Résolution des équations différentielles fractionnaires. Université des Frères Mentouri Constantine -1, faculté des sciences exactes édition, 2018.
- [30] Nadjat Hala et Nora Kerchou, Fonction de Lyapunov et stabilité, mémoire de Master ,Université d'oued ,2016.
- [31] Hasan Alkhatib, "Etude de la stabilité aux petites perturbations dans les grands réseaux électriques", Université Paul Cézanne Marseille 2, 2010.
- [32] Merabti Nesrine Lamya, Etude de quelques systèmes dynamiques chaotiques , mémoire de Master ,Université d'oum el Bouaghi , 2020.
- [33] Chouat Soumia, Synchronisation Identique des Systèmes Chaotiques, mémoire de Master, Université de Biskra, Juin 2019.
- [34] Rosenstein, M., Collins, J., DeLuca, C.,(1993) A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets, Physica, Vol. ,(2 - 1)65 pp. .134 -117 .
- [35] Wofl, A., Swfit, J., Swinney, H., Vastano, J. ,(1985) Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica, Vol. ,(3)16 pp. .317 -28
-

- [36] Parker, T.S., Chua, L.O. ,(1989) Pratical Numerical Algorithms For Chaotic Systems. Edition Springer-Verlay.
- [37] Bouslah Ikram et Maamar Oussama, Sur l’analyse des systèmes fractionnaires chaotiques, mémoire de Master, Université de Tébessa,2021.
- [38] G.C.Layek, dynamics Book, An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, University of Burdwan
- [39] CAO, Jinde, HO, Daniel WC, et Yang, Yong qing, — Projective synchronization of a class of delayed chaotic systems via impulsive controll, Physics Letters A, vol 373, no 35, p. 3128-3133, 2009.
- [40] Mackey, Michael C. et Glass, Leon, —Oscillation and chaos in physiological control systems, Science, vol. 197, no 4300, p. 287-289, 1997.
- [41] C. Liu, L. Liu, and T. Liu, —A novel three-dimensional autonomous chaos system, Chaos, Solitons and Fractals, vol.39, no.4, pp.1950–1958, 2009.
- [42] V. Daftardar-Gejji and S. Bhalekar, —Chaos in fractional ordered Liu system, Computers & Mathematics with Applications, vol.59, no. 3, pp. 1117–1127, 2010.
- [43] J. Tang, —Synchronization of different fractional order time-delay chaotic systems using active controll, Math. Probl.Eng, vol. 2014, 2014.
- [44] G. Chen and T. Ueta, —Yet another chaotic attractor, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol.9, no.7, pp.1465–1466, 1999.
-



[45] Zouad Fadia, Élaboration et implémentation de nouvelles approches pour la sécurisation des transmissions à base des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, Thèse de Doctorat, Université de Jijel, 2019.

[46] Wang MJ, Wang XY (2010) Dynamic analysis of the fractional order Newton-Leipnik system. ACTA PHYS SIN 59(3) :01583-7.

[47] Deng W, Li C (2008) The evolution of chaotic dynamics for fractional unified system. Phys Lett A 372(4) :401–407.

[48] J. H. Ma and Y. S. Chen, Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (I), Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(11): 1240-1251.

[49] DS. Huang, Li HQ. Theory and method of the nonlinear economics publishing. Chengdu (China): House of Sichuan University;1993.

[50] Haoues Moussa, étude qualitative d'un système dynamique de finance, mémoire de master, Université d'oum el Bouaghi, 2017.

[51] Ouahabi Rabiaa, Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation, Thèse de Doctorat, Université de Constantine, 2018.

[52] Djemmal halima, Application de la bornitude d'un nouveau système hyperchaotique à la synchronisation, mémoire de Master, Université D'oum el Bouaghi, 2020.

[53] Abdelkrim Boukabou, Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation, Thèse de Doctorat Université de Constantine, Juin 2006.

---

- [54] Fekhr El Islam Khelil, Les systèmes chaotiques pour le chiffrement, mémoire de Master, Université D'oum el Bouaghi, Juillet 2021
- [55] Saadi Alima, Les systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication, mémoire de Master, Université de Biskra, Juin 2021.
- [56] Dib Karima et Kechkar Sara ,Synchronisation des systèmes chaotiques , mémoire de Master ,Université de Mila , 2022.
- [57] Asma Djerrai,Étude des systèmes dynamiques Tridimensionnels , Thèse de Doctorat , Université de Annaba , 2017 .
- [58] Bouchakour Fatima, La stabilité du système hyperchaotique le plus général de dimension quatre, mémoire de Master, Université D'OUM EL BOUAGHI, 2018.
- [60] KRAMA Abir, Solution explicite du système de Lozi en 3-D , mémoire de Master ,Université D' OUARGLA,2019.
- [61] AIT HOCINE Kahina et AIMEUR Lamia, Etude des systèmes chaotiques et leurs potentialités sur les systèmes de télécommunication, mémoire de Master, Université de Tizi-Ouzou,2008.
- [62] Ababsa Nour El Houda,Solutions bornées d'un nouveau système hyperchaotique de dimension quatre, mémoire de Master ,Université D'OUM EL BOUAGHI , Juillet 2021.
- [63] Hank Amina et Younsi Rofia ,systemes chaotiques pour la transmission securisee de donnees, mémoire de Master, Universite de jijel,2020.
-

- [64] Adel Ouannas, Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets, Thèse de Doctorat, Université de Constantine, 2015.
- [65] Zoulikha Chougui, Quelques schémas de synchronisation chaotique dans les systèmes dynamiques fractionnaires, Thèse de Doctorat, Université de Tébessa, 2021.
- [66] Herissi Belgacem, Identification et commande des systèmes basés sur les équations d'ordre fractionnaire, Thèse de Doctorat, Université de Guelma 2021.
- [67] Senouci Assia, Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation, Thèse de Doctorat, Université de BISKRA, 2020.
- [68] Jean-Marc Ginoux. Stabilité de Systèmes Dynamiques Chaotiques et Variétés Singulières. Physique [physics]. Université du Sud Toulon Var, 2005.
- [69] Chouat Soumia, Synchronisation Identique des Systèmes Chaotiques mémoire de Master, Université de BISKRA, Juin 2019.
- [70] Messaouda Labid, Contrôle et synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques, Thèse de Doctorat, Université de Mila, 2021.
- [71] Amel Benkhelifa et Aicha Ghoul, Synchronisation des Systèmes Chaotiques Fractionnaires, mémoire de Master, Université de Tébessa, 2016.
- [72] Bouchenine Houssam et Guermache Oussama, Etude de la dynamique et chaotique du système de Lorenz, mémoire de Master, Université de Mila, 2021.
-

- [73] Hafiane Islam et Brahmi oualid, Synchronisation des Systèmes Dynamiques Continus Chaotiques, mémoire de Master , Université de Tébessa,2022 .
- [74] Bouslah Ikram et Maamar Oussama, Sur l'analyse des systèmes fractionnaires chaotiques, mémoire de Master, Université de Tébessa,2021.
- [75] Non-integrability of the Huang–Li nonlinear financial model Wojciech Szuminski ´ Institute of Physics, University of Zielona Gora, Licealna 9, PL-65-407, Zielona G'ora, Poland.
- [76] BOUDJELLAL Imadeddine, Commande Robuste Adaptative Floue des Systèmes d'Ordre Fractionnaire, mémoire de Master, Université de M'SILA,2013.
- [77] ABDELHADI Samir et MERADJI Abderrahim et DIB Baha Eddine Haythem , étude qualitative et numerique de quelques systèmes dynamiques deterministes , mémoire de Master ,Université de Constantine, Juin 2019
- [78] Houmor Tarek, Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires, Thèse de Doctorat, Université de Constantine,2014.
- [79] M. Weilbeer "Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background", Thèse de Doctorat, CarlFriderich-Gauss Facultat fur Mathematik und Informatik, der Technischen Universitat Braunschweig (2005).
- [80] Report submitted to Prof. P. Shipman for Math 540, Fall 2014, Calculating Fractal Dimension of Attracting Sets of the Lorenz System, Colorado State University.
-

[81] Nonlinear Financial Dynamics from an Engineer's Point of View C. K. Volos<sup>1</sup>, I. M. Kyprianidis<sup>2</sup>, S. G. Stavriniades<sup>2</sup>, I. N. Stouboulos<sup>2</sup>, L. Magafas<sup>3</sup> and A. N. Anagnostopoulos<sup>2</sup>