République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Hypothèse de Riemann et quelques critères équivalents

Présenté Par:
Guennez Ranya

Devant le jury :

Mr, Saib Elssadek	PROF Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr, Boukhalfa Elhafsi	MCA Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr, Degaichi Nouar	PROF Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 05 / 06 / 2023

Table des matières

Remerciements

Avant tous nous remercions Dieu ALLAH tout puissant de nous avoir aidés à accomplir ce travail et de nous avoir guidés vers ce chemin du savoir et de la science.

Tout d'abord, nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à M :

Noir. DEGAICHI, mon directeur de thèse pour le sujet intéressant qui m'a été proposé, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture m'ont aidé à faire ce travail.

Je lui suis également reconnaissant de la confiance qu'il nous accorde. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en quelques lignes.

Nous adressons nos plus vifs remerciements à Monsieur : Abdessadek Saib

maitre de conférences à l'université de Larbi Tebessi qui ma fait l'honneur d'être président de mon jury.

A Monsieur : Elhafsi Boukhalfa maitre de conférences à l'université de Larbi Tebessi pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématiques et informatique et tous ceux qui m'a aidé de près et de loin pour achever ce travail.

Dédicaces

Avec tous mes sentiments de respect, avec l'expérience de ma reconnaissance, je dédie ma remise de diplôma et ma joie.

À *mon paradis, à la prunelle de mes yeux à la source de ma joie et mon bonheur,*

Ma mère.

À *celui qui m'a fait une femme, ma source de vie, à mon support qui était toujours a mes cotés pour me soutenir et m'encourager,* ***Mon Père*** *le roi.*

À *celui qui m'a pris la main vers ce que je voulais , mon cher mari* **Pedro** *que dieu le protégé.*

À *ma deuxième famille, papa* **B,** *mama* **M**, *Ma soeur* **Wafa** *et mon frère* **Khairouch.**

À *l'étoile de la famille ma grand soeur* **Sihem.**

À *mes chers amies* **khouloud** *&* **Aicha**.

À *mon bon exemple, Monsieur* : **Nouar. DEGAICHI**.

Finalement,

À *Moi, je me remercier d'avoir crue en moi,*

d'avoir fait cet effort, d'être patiente et responsable.

Abstract

The Riemann zeta function is a famous function that plays a very essential role in most areas of math. The problem of zeros in this function, known as the Riemann hypothesis, is a major problem. The main objective of this thesis is to study the Riemann hypothesis and present different approaches for this hypothesis.

First, we present an entry to complex analysis and number theory.

Next, we study the Riemann zeta function ; its extension, increase, zeros and poles.

Finally, we approached the Riemann hypothesis and Hardy's theorem which complements it, and present criteria equivalent to this hypothesis.

Keywords : Prime numbers, zero, pole, Riemann hypothesis, zeta function, critical band, meromorph, holomorph.

Résumé

La fonction zêta de Riemann et une fonction celebre et qui joue un role tres essentiel dans la plupart des domaines de maths le probleme de zeros de cette fonction dit hypothese de Riemann est un probleme majeur. L'objectif principal de ce mémoire est de faire une étude sur l'hypothèse de Riemann et presenter des approches differentes pour cette hypothese.

Premièrement, On présente une entrée à l'analyse complexe et à la théorie des nombres.

Ensuite, On étude la fonction zeta de Riemann ; sa prolongement, majoration, ses zéros et poles.

Enfin,On abordé l'hypothèse de Riemann et le théorème de Hardy qui lui complémentaire, et presenter des critères équivalents à cette hypothese .

Mots clés : Nombres premiers, zéro, pôle, hypothèse de Riemann, fonction zêta, bande critique, méromorphe, holomorphe.

Introduction

Les nombres premiers ont une longue histoire depuis les anciens mathématiciens Grecs à l'école pythagoricienne, où ces nombres représentaient l'esprit d'idéalisme et de sainteté. Et puis avec le mathématicien Euclide depuis 300 ans avant JC, où il a donné sa première preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers et a montré que si n un nombre premier alors $(2^n - 1)$ est aussi premier et $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait. Puis en 200 avant JC, Eratosthenes a posé un algorithme appelé le tamis pour calculer les nombres premiers dans une plage donnée. Et aprés Euler les a liés et les fonctions zêta dans une relation qui est apparue pour la premiére fois dans un document de recherche en 1737 et a été appelée le produit d'Euler, où la fonction zêta est une fonction créée par Riemann il y a environ un siécle et demi ; avec une variable complexe dont la partie réelle est complétement supérieure à 1 et a définie pour tous les nombres complexes différents de 1, et tous les nombres pairs négatifs sont les racines de cette fonction et sont appelés les zéros triviaux de zêta. D'où l'hypothèse de Riemann en 1859 ([5]), qui est liée aux zéros non triviaux de zêta et cela dit : la partie réelle des zéros non triviaux de la fonction zêta est $1/2$.

L'hypothèse de Riemann constitue l'un des problèmes non résolus les plus importants des mathématiques du début du xxie siècle : elle est l'un des vingt-trois fameux problèmes de Hilbert proposés en 1900, l'un des sept problèmes du prix du millénaire et l'un des dix-huit problèmes de Smale. Le problème est considéré comme l'un des plus utiles et applicables non seulement en mathématiques pures, mais aussi dans de nombreux autres domaines scientifiques tels que physique et ingénierie. On dit que la solution de (RH) impliquerait immédiatement les solutions de nombreux autres problèmes non résolus en théorie des nombres.

L'un des progrès les plus significatifs concernant l'hypothèse de Riemann est du à Hardy, qui a montré qu'il existe une infinité de zéros non-triviaux sur cette droite. En plus il existe de nombreuses critères équivalentes pour l'exactitude de RH, comme le critère de Robin, Lagarias..., nous en parlerons dans le chapitre 3. Pour de plus amples recherches sur la distribution des nombres premiers et de Riemann hypothèse renvoient à des références telles que , ([7]), ([6]), ([8]).

Chapitre 1

Prelimenaire

1.1 Fonctions holomorphes et fonctions méromorphes

1.1.1 Fonctions holomorphes

La $\mathbb{C}$-dérivabilité

U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable au point $z_0 \in U$ lorsqu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \alpha \tag{1.1}$$

On note alors $f'(z_0) = \alpha$: c'est la dérivée (au sens complexe) de f en z_0.

Dans cette définition. l'accroissement h prend des valeurs complexes. De façon équivalente, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec $f'(z_0) = \alpha$ si et seulement si :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + o(h).$$

La notation de Landau $o(h)$ signifie que :

$$\frac{|o(h)|}{|h|} \to_{h \to 0} 0.$$

Holomorphie

Définition 1.2 *La fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de U, et si sa dérivée $f' : U \to \mathbb{C}$ est continue.*

Les fonctions holomorphes sont donc les fonctions continûment dérivables aux sens complexe sur tout leur domaine de définition.

On note $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Exemple 1.1 *1- La fonction polynomiale $z \to \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ est holomorphe.*
2- La fonction $z \to 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
3- Plus généralement une fraction rationnelle P/Q avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ est holomorphe en dehors des zéros de Q.
4- Une fonction $x + iy \in \mathbb{C} \to P(x, y) \in \mathbb{C}$ pour $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ ne sera en général pas holomorphe.

1.1.2 Fonctions méromorphes

Singularité isolées

Définition 1.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(U)$. Un poit isolé du complémentaire de U, i.e. tel qu'il existe un disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\} \subset U$, est appelée une singularité isolée de f.*

Remarque 1.1 *L'ensemble $U \cup \{a\}$ est aussi un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Soit $a \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(U)$. On dit qu'elle est :
1) éliminable s'il existe une fonction $\hat{f} \in \mathcal{O}(U \cup \{a\})$ telle que : $f(z) = \hat{f}(z)$ pour tout $z \in U$,
2) polaire si elle n'est pas éliminable et s'il existe une fonction $\hat{g} \in \mathcal{O}(U \cup \{a\})$ et un entier $p \geq 1$, tels que :

$$f(z) = \frac{\hat{g}(z)}{(z-a)^p}, \ z \in U.$$

Théorème 1.1 (Riemann) *Soit a une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(U)$. Si f est bornée sur un voisinage épointé de a, la singularité a est éliminable.*

Preuve On suppose d'abord que f a une limite $l \in \mathbb{C}$ quand $z \to a$ et on prolonge f en une fonction $\hat{f} : U \cup \{a\} \to \mathbb{C}$, en posant $\hat{f}(a) = l$. Il s'agit de montrer que $\hat{f}$ est holomorphe ;le problème se pose seulement au voisinage de a.

La fonction définie par $z \to g(a) = (z-a)\hat{f}(z)$ est holomorphe sur U, mais elle est aussi $\mathbb{C}-$dérivable en a :

$$\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = f(z) \to_{z\to a} \hat{f}(a).$$

Elle est donc holomorphe sur $U \cup \{a\}$. Au voisinage de a, elle a un développement de la forme :

$$g(z) = (z-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

car $g(a) = 0$. En divisant les deux membres par $(z-a)$, on obtient que $\hat{f}$ est analytique sur $D(a,r)$, donc sur $U \cup \{a\}$.

Dans le cas général, où f est supposée bornée au voisinage épointé de a, on applique le résultat préliminaire à la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) = (z-a)f(z),$$

qui tend vers 0 quand $z \to a$.On termine comme dans la première partie de la d´émonstration. ■

Théorème 1.2 *Une singularité isolée a de $f \in \mathcal{O}(U)$ est polaire si et seulement si :*

$$f(z) \to_{z\to a} \infty. \tag{1.2}$$

i.e. pour tout $R > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que d'aprés (1.2) $|f(z)| > R$ si $0 < |z-a| < \varepsilon$.

Preuve on suppose que f vérifie (1.2). En particulier, f ne s'annule pas au voisinage épointé de a. Il existe donc $r > 0$ tel que $z \to 1/f(z)$ est définie et holomorphe sur $D(a,r) \setminus \{a\}$ et tend vers 0 quand $z \to a$. D'après le théorème de Riemann, a est une singularité éliminable de $1/f$. Il existe donc une fonction $u \in \mathcal{O}(D(a,r))$ telle que $u(z) = 1/f(z)$ si $z \neq a$. On a $u(a) = 0$. Comme u ne s'annule pas en dehors de a, on peut écrire $u(z) = (z-a)^p v(z)$ avec $p \geq 1$ et $v \in \mathcal{O}(D(a,r))$ sans zéro. La fonction g sur U définie par :

$$g(z) = (z-a)^p f(z),$$

si $z \neq a$ et $g(a) = 1/v(a)$ est holomorphe sur U et au voisinage de a car elle coïncide avec $1/v$ au voisinage de a. On en déduit que a est une singularité polaire de f. ■

Méromorphie

Définition 1.4 *Un ensemble $P \subset \mathbb{C}$ est discret si tous ses points sont isolés dans* P, *(i.e) si pour tout $a \in P$, il existe $r > 0$ tel que :*

$$D(a,r) \cap P = \{a\}. \tag{1.3}$$

Définition 1.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction méromorphe f sur U est une fonction définie et holomorphe sur un ouvert $U \backslash P(f)$ telle que :*

1) $P(f) \subset U$ est un ensemble discret, fermé dans U.
2) Tout $a \in P(f)$ est une singularité polaires de f.

Les éléments de $P(f)$ sont les pôles de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

1.2 Fonctions analytiques

Ce sont les fonctions qui sont localement développables en série entière.

Définition 1.6 *Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique lorsque, pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque $D(z_0,r) \subset U$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels qu'on ait, pour tout $z \in D(z_0,r)$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{1.4}$$

où les coéfficients a_n de la série entière sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_n &= a_n(z_0) \\ &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

1.3 Indice d'un chemin fermé

Définition 1.7 *Soit γ un chemin fermé dans le plan $\mathbb{C}$, et soit a un point de $\mathbb{C}$ n'appartenant pas à l'image de γ.*
On appelle indice de γ par rapport à a et on note $I(\gamma, a)$, la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\tau} \frac{dz}{z-a}. \tag{1.5}$$

1.4 Formule integrale de Cauchy

Théorème 1.3 (de Cauchy) *soit f une fonction holomorphe dans un ouvert D.*
Soit $a \in D$, et soit γ un chemin fermé de D, ne passant pas par a et homotope a un point dans D
On a alors

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a} = I(\gamma, a)f(a), \tag{1.6}$$

où $I(\gamma, a)$ désigne l'indice du chemin fermé γ par rapport au point a .

Preuve Pour la preuve voir ([1]). ■

La fonction $\dfrac{1}{t-z}$ qui figure sous le signe d'intégration peut être développée en série, compte tenu du fait que $\mid z \mid \leq \mid t \mid$.

D'une façon précise on a :

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = \frac{1}{t}\left(1+\frac{z}{t}+...+\frac{z^n}{t^n}+...\right), \tag{1.7}$$

par suite

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\sum_{n\geq 0} z^n\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt. \tag{1.8}$$

La série converge normalement pour $\mid z \mid \leq r$ et $\mid t \mid = r_0$. On peut donc l'intégrer terme à terme, et obtient une série normalement convergente pour $\mid z \mid \leq r$;

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \tag{1.9}$$

où les coefficients sont données par les intégrales

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=r_0}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}}. \tag{1.10}$$

1.5 Théorème des résidus

Considérons d'abord une fonction $f(z)$ holomorphe dans une couronne $p_2 < |z| < p_1$ centrée à l'origine.

Proposition 1.1 *Si γ est un chemin fermé contenu dans une telle couronne, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz = I(\gamma, 0)a_{-1}, \tag{1.11}$$

où $I(\gamma, 0)$ désigne l'indice du chemin γ par rapport à l'origine 0, et a_{-1} est le coéfficient de $1/z$ dans le développement de f.

1.5.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.8 *Pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$, on définit la fonction Gamma noté Γ sur le demi plan $\Omega = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(s) > 0\}$ par :*

$$\Gamma : s \to \int_{0}^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt \tag{1.12}$$

Lemme 1.1 *soit s un nombre complexe. La fonction $t \to t^{s-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.*

Preuve La fonction $t \to t^{s-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour s de $\mathbb{C}$. Par le critère de comparaison, $|t^{s-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-t} \approx_{t\to 0^+} t^{\mathrm{Re}(s)-1}$ (l'intégral de $t^{s-1}e^{-t}$ converge si $\mathrm{Re}\,(s) > 0$) et :

$$\left|t^{s-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-t} =_{t\to+\infty} o\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

■

Proposition 1.2 *Pour tout s dans Ω on a :*

$$\Gamma\,(s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^s}{s\,(s+1)\,...\,(s+n)} \tag{1.13}$$

Preuve considérons d'abord le cas des s réels strictement positifs. Par des intégrations par partie successive, on établit la relation :

$$\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt = \frac{n!n^s}{s\,(s+1)\,...\,(s+n)}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

D'autre part, on a pour $t : 0 \leq t \leq n$,

$$\left[1-\frac{t^2e^t}{2n}\right]e^{-t} \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

La deuxiéme inégalité vient de ce que la fonction $f_n\left(t\right) = \int_0^t f_n'\left(\zeta\right)d\zeta \leq \dfrac{t^2e^t}{2n}$

En par suite, compte tenu de ce que $\int_0^{+\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt$ converge uniformement pour tout $s > 0$, on peut intervertir les opérateurs limite et intégrales, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{s-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt &= \int_0^n \lim_{n\to+\infty}\left\{\chi_{]0,n]}\left(t\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{s-1}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\Gamma\left(s\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^s}{s\left(s+1\right)...\left(s+n\right)}.$$

■

Proposition 1.3 *La fonction* $\dfrac{1}{\Gamma\left(s\right)}$ *est une fonction entière, i.e. pour tout nombre réel* x*, la fonction entière notée* $E(x)$ *est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à* x*, ayant pour zéro les entiers* $s = -n$*,* $n \geq 0$*, qui sont des zéros simples.*
La décomposition en produit infini de $\dfrac{1}{\Gamma\left(s\right)}$ *relativement à ces zéros est :*

$$\frac{1}{\Gamma\left(s\right)} = ze^{\gamma s}\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

Où γ est la constante d'Euler égale à la somme de la série de terme général

$$x_n = \frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Proposition 1.4 *Pour tout* $s \in \Omega$*, la fonction* Γ *satisfait la relation :*

$$\Gamma\left(s+1\right) = s\Gamma\left(s\right) \tag{1.14}$$

Prolongement analytique de la fonction gamma

Soit $s \in \Omega$ et n un entier positif, en utilisant successivement la relation (1.14) pour $s+n, s+n-1, ...s+1$, on obtient :

$$\Gamma(s+n) = s(s+1)(s+2)...(s+n-1)\Gamma(s)$$

D'où :

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)(s+n-2)...(s+1)s} \tag{1.15}$$

D'apres (1.15) la fonction Γ possède des poles simples aux points $0, -1, -2, ..., 1-n$.

Cette dernière propriété nous permet de prolonger la fonction Gamma pour tous les nombres réels s sauf les entiers non positifs, il suffit de procéder de la façon suivante :

- Si $-1 < s < 0$, alors on pose $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ car $s+1 > 0$.

- Si $-2 < s < -1$, alors on pose encore $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$ dans laquelle le numérateur n'est autre que le prolongement de $\Gamma(s)$; et on continue ce processus.

Proposition 1.5 *a)*

$$\Gamma(1) = 1$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

b) Si $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

c) Si $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Formule des compléments

Théorème 1.4 *([11])*$\forall s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ *:*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \tag{1.16}$$

Preuve Toutes les justifications de convergence d'intégrales sont élémentaires dans cette preuve et les justification de permutation des symboles d'intégrations se font en invoquant le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{s-1}v^{-s}e^{-u}e^{-v}dudv \\ &= \int_0^\infty v^{-s}e^{-v}\left(\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du\right)dv\end{aligned}$$

on effectue le changement de variable $u' = \dfrac{u}{v}$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^\infty e^{-v}\left(\int_0^\infty u^{s-1}e^{-uv}du\right)dv \\ &= \int_0^\infty u^{s-1}e^{-uv}du\int_0^\infty e^{-v}e^{-uv}dv \\ &= \int_0^\infty u^{s-1}du\left(\int_0^\infty e^{-v(1+u)}dv\right) \\ &= \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{1+u}du + \int_1^\infty \frac{u^{s-1}}{1+u}du\end{aligned}$$

par le changement de variable $u' = \dfrac{1}{u}$ dans la seconde intégrale on obtient

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{1+u}du + \int_0^1 \frac{u^{-s}}{1+u}du$$

Si l'on pose :

$$f(s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{1+u}du$$

l'égalité précédente montre que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = f(s) + f(1-s).$$

Pour simplifier l'expression de f, on est tenté de développer en série entière $\dfrac{1}{1+u}$ et de permuter les symboles séries intégrales. Malheureux, ce n'est pas possible en utilisant la convergence normale sur un segment ou les théorèmes de convergence dominée...

Conclusion, on va mettre les mains dans le cambouis(qui n'est pas trop sale quand même).

Quelque soit l'entier naturel n, on

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k + \frac{(-1)^n u^n}{1+u}$$

donc

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 u^{k+s-1} du + (-1)^n \int_0^1 \frac{u^{n+s-1}}{1+u} du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+s} + (-1)^n \int_0^1 \frac{u^{n+s-1}}{1+u} du \end{aligned}$$

L'intégrale tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ car

$$0 \leq \left| \int_0^1 \frac{u^{n+s-1}}{1+u} du \right| \leq \int_0^1 u^{n+\mathrm{Re}(s)-1} du = \frac{1}{n+\mathrm{Re}(s)} \leq \frac{1}{n} \to_{n\to 0} 0$$

D'ou

$$\forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \mathrm{Re}(s) < 1, f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+s}$$

On utilise ce développement en série pour donner une autre expression à $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$,

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s-n} \\ &= \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n s}{s^2-n^2} \end{aligned}$$

Cette fonction est paire, continue et de C^1 sur $]-\pi, \pi[$, continue et de C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc elle est développable en série de Fourier et la somme de la série de Fourier est égale à f sur $]-\pi, \pi[$ on calcule uniquement les coéfficients a_n.

$$a_n = \frac{2\sin(\pi s)}{\pi} \frac{(-1)^n s}{s^2-n^2} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

D'ou la formule

$$\begin{aligned}\cos(st) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)\\ &= \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\pi s)}{\pi}\frac{(-1)^n s}{s^2-n^2}\cos(nt)\end{aligned}$$

pour tout $t \in]0,1[$

En fixant $t = 0$ on obtient

$$1=\frac{\sin(\pi s)}{\pi}\left[\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n s}{s^2-n^2}\right].$$

Donc $\forall s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n s}{s^2-n^2}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi s)}\end{aligned}$$

■

1.6 Théorie des nombres

1.6.1 Fonctions arithmétiques

Définition 1.9 *Une fonction arithmétique f est une application définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

Nous noterons $A = \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.

Définition 1.10 *La fonction diviseur $\tau(n)$ est définie comme le nombre de positifs diviseurs de n*

$$\tau(n)=\sum_{d/n}1.$$

Définition 1.11 *La fonction φ d'Euler est définie par :*

$$\varphi(n)=\sum_{1\leq k\leq n}1,$$

avec $PGCD(k,n) = 1$.

Définition 1.12 *La fonction μ de Möbius est définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, si\ n = 1 \\ (-1)^r,\ si\ n = p_1 p_2 ... p_r \\ 0\ sinon \end{cases}$$

où p_i sont des nombres premiers distincts.

Définition 1.13 *La fonction Λ de Von Mangoldt est définie par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p,\ si\ n = p^k\ et\ k \geq 1, \\ 0\ si\ non \end{cases}$$

avec p est un nombre premier.

Définition 1.14 *Une fonction arithmétique f qui n'est pas identiquement nulle est dite multiplicative si,*

$$f(mn) = f(m) f(n),$$

avec $(m, n) = 1$.

1.6.2 Formule sommation d'Abel

Définition 1.15 *La formule de sommation d'Abel est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1})\ pour\ tout\ N \in \mathbb{N} \tag{1.17}$$

Théorème 1.5 (Critère d'Abel) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :*
-La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit réelle, décroissante et de limite nulle.
-La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et doit telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée.

Alors $\sum a_n b_n$ converge .

Preuve On effectue une transformation d'Abel :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n &= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \left(B_n - B_{n-1}\right) \\
&= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_0 b_0 + a_N B_N - a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(a_n - a_{n+1}\right) B_n \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n - a_{n+1}\right) B_n + a_N B_N
\end{aligned}
$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc $a_N B_N$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infinie. Par conséquent, $\sum a_n b_n$ converge si et seulement si $\sum \left(a_n - a_{n+1}\right) B_n$ converge.

Soit M un majorant de $(|B_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left|\left(a_n - a_{n+1}\right) B_n\right| \leq \left|a_n - a_{n+1}\right| M$$

(i.e)

$$0 \leq \left|\left(a_n - a_{n+1}\right) B_n\right| \leq \left(a_n - a_{n+1}\right) M$$

car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Or, la série $\sum \left(a_n - a_{n+1}\right)$ est de même nature que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc convergente. Donc $\sum \left(a_n - a_{n+1}\right) M$ est une série à termes positifs convergente.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \left(a_n - a_{n+1}\right) B_n$ est absolument convergente.

Donc $\sum a_n b_n$ converge. ■

1.6.3 Les nombres premiers

Définition 1.16 *les nombres premiers sont les nombres entiers (supérieur ou égal à 2) qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et par 1.*

Exemple 1.2 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots.$

Théorème 1.6 (théorème fondamental de l'arithmétique) *Tout entier $n \geq 2$ s'écrit de maniére unique :*

$$n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$$

où $p_1 < p_2 < ... < p_r$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont dans $\mathbb{N}^*$.

Par récurrence On va procéder pa récurrence sur n.

Pour $n \geq 2$, on a :

$$\mathcal{P}(n) : n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$$

$\mathcal{P}(2)$ est vraie puisque $2 = 2^1$ et que 2 est premier.

Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $2 \leq k \leq n$, et prouvons $\mathcal{P}(k+1)$.

Si $n+1$ est premier, c'est gagné.

Sinon, $n+1$ admet un diviseur premier $2 \leq p < n+1$.

Posons $k = (n+1)/p$, alors $2 \leq k \leq n$ et on sait que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Donc :

$$k = p_1^{\beta_1} ... p_r^{\beta_r}$$

et

$$\begin{aligned} n+1 &= pk \\ &= p \times p_1^{\beta_1} ... p_r^{\beta_r} \end{aligned}$$

Quitte à réorganiser les termes, $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvé.

Soit $n \geq 2$ admettant deux décompositions

$$n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1} ... q_s^{\beta_s}$$

où $p_1 < p_2 ... < p_r$ et $q_1 < q_2 < ... < q_s$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, ..., \alpha_r$, $\beta_1, ..., \beta_s$ sont dans $\mathbb{N}^*$.

Supposons que l'un des q_i n'est pas dans $\{p_1, ..., p_r\}$ ou un des p_i n'est pas dans $\{q_1, ..., q_s\}$.

Par exemple, $p_1 \notin \{q_1, ..., q_s\}$. Alors :

$$p_1 \backslash q_1^{\beta_1} ... q_s^{\beta_s}$$

Donc, d'apres le théorème de Gauss p_1 divise un des q_i, ce qui est absurde puisque $p_1$et q_i sont deux nombres distincts. Cette supposition est donc fausse.

On en déduit que $p_1, ..., p_r$ et $q_1, ..., q_s$ désigne la meme liste de nombres premiers et on peut réécrire

$$n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r} = p_1^{\beta_1}...p_s^{\beta_s}$$

Supposons qu'il existe i avec $\alpha_i \neq \beta_i$. Par exemple $\alpha_1 > \beta_1$

$$p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r} = p_2^{\beta_2}...p_r^{\beta_r}$$

Donc p_1 divise $p_2^{\beta_2}...p_r^{\beta_r}$. Comme p_1 est premier , p_1 divise un des p_i pour $i \geq 2$. C'est l'absurd cette supposition est donc fausse et on a aussi prouvé que pour tout $i = 1, ..., r$, $\alpha_i = \beta_i$. ∎

Théorème 1.7 (théorème d'Euclide) *il existe une infinité de nombres premiers.*

Par l'absurd supposons qu'il existe un nombre fini $n \geq 1$ de nombres premiers, qu'on range par ordre croissant et qu'on note $p_1 < ... < p_n$ .Remarquons que $p_1 \geq 2$, on considère l'entier naturel $N = p_1 \times ... \times p_n + 1$ alors $N \geq 3$. Ainsi d'aprés la proprieté 2 , N admet un diviseur premier ; il existe donc un entier i compris entre 1 et n tel que p_i divise N. Comme $N-1 = p_1 \times ... \times p_n$, en particulier p_i divise $N-1$. Alors p_i divise $N-(N-1)$, donc $p_i = 1 < 2 \leq p_1$ (contraduction). On conclu qu'il existe une infinité de nombres premiers. ∎

Chapitre 2

La fonction Zêta de Riemann

2.1 Introduction

Au dix-huitième siécle, Euler a découvert la célèbre formule (produit d'Euler) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^{-1}, \ k \in]1, +\infty[$$

grâce à cette relation, Euler a prouvé que la fonction zêta,

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}, \ k \in]1, +\infty[$$

détermine la distribution des nombres premiers. D'où l'idée de Riemann d'inverter la fonction zêta de Riemann, qui est consiste à prolonger la fonction zêta en une fonction du variable complexe. Dans ce chapitre nous allons établir le prolongement de zêta au plan complexe, ainsi que certaines propriétés de celle-ci.

2.2 La fonction Zêta

2.2.1 Problème de Bâle

Le problème de Bâle est un problème d'analyse mathématique proposé par Pietro Mangoli en 1644, qui consiste en :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+... \\ &= \ ?\end{aligned}$$

En 1735, Euler a annoncé la solution de ce problème, où il a été trouvé que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

La question, Comment Euler a-t-il obtenu cette valeur ?

La réponce : Soit la série de Taylor pour la fonction sinus,

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

par la division sur x, on obtient,

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+... \tag{2.1}$$

et puis on utilise le théorème de Weiestrass tel que :

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \pi z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)... \\ &= \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

on pose $x=\pi z$, alors :

$$\sin(x)=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)...$$

on divise aussi sur x,

$$\frac{\sin(x)}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)... \tag{2.2}$$

après avoir publié (2.2), simplifier et comparer terme à terme avec (2.1), on obtient :

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}$$

D'où la solution du problèéme.

Si nous remplaçons le nombre 2 dans la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ par k, où $k\in]1,+\infty[$, on obteint la fonction zêta,

$$\zeta(k)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^k}.$$

2.2.2 Zêta et les nombres de Bernoulli

Nombres et polynômes de Bernoulli

Nous connaissons sans doute tous l'existence des trois formules suivantes :

$$\begin{aligned}
1+2+3+4+...+n &= \frac{n(n+1)}{2}\\
1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Une question naturelle à se poser est : existe-t-il une formule générale pour ce type de somme :

$$1^m+2^m+3^m+4^m+...+n^m=?\quad m\geq 1$$

Réponce : **oui**

Jacob Bernoulli, dans son ouvrage Ars Conjectandi publié en 1713, a obtenu la formule générale :

$$1^m+2^m+3^m+...+n^m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} \tag{2.3}$$

où B_k est déterminé par la formule de récurrence

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k=\delta_{m,0}$$

tq

$$\delta_{m,k}=\begin{cases}1 & \text{Si } m=k\\ 0 & \text{Si } m\neq k\end{cases} \tag{2.4}$$

Les nombres rationnels B_k sont *les nombres de* Bernoulli.

Calculons les premiers nombres de Bernoulli :

on a pour $m = 0$:

$$\begin{aligned} \binom{1}{0} B_0 &= 1 \Rightarrow \\ B_0 &= 1 \end{aligned}$$

pour $m = 1$:

$$\begin{aligned} \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 &= 0 \Rightarrow \\ B_0 + 2B_1 &= 0 \Rightarrow \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

pour $m = 2$:

$$\begin{aligned} \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 &= 0 \Rightarrow \\ B_0 + 3B_1 + 3B_2 &= 0 \Rightarrow \\ B_2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

...et ainsi de suite, Les premiers nombres de Bernoulli sont donnés par la table suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	$\cdots$

Lien entre Zêta et les nombres de Bernoulli

On résume la relation entre la fonction zêta et les nombres de Bernoulli dans les deux formules suivantes :

Pour $k > 0$,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2n)!} \tag{2.5}$$

et,

$$\zeta(-k) = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1} \tag{2.6}$$

Remarque 2.1 *La formule de $\zeta(2k+1)$ n'y a pas encore.*

1 : $\zeta(0) = B_1 = -\dfrac{1}{2}$.
2 : $\zeta(-1) = -\dfrac{B_2}{2} = -\dfrac{1}{12}$.
3 : $\zeta(2) = B_2\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Définition 2.1 *On appelle fonction Zêta de Riemann la fonction définie sur le demi-plan,*

$\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1\}$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.7}$$

La fonction Zêta de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe.

La fonction Zêta ,comme la fonction Gamma, ont été le sujet d'une énorme quantité de recherches mathématique, depuis apparition.

L'analyse de la fonction Zêta a en effet profond sur la théorie des nombres et cela à son tousinspiré un travail en plus sur Zêta ,en fait l'un des célèbres problèmes non encore résolus est la localisation des zéros de la fonction zêta.

Lemme 2.1 *Si z un complexe tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *la série* $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^s}$ *converge.*

Preuve La série converge en fait absolument puisque le module de son terme général,

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

n'est autre que le terme général d'une série de Riemann convergente. ■

Proposition 2.1 *Pour* $\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 1\}$ *on a :*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^t - 1} t^s \frac{dt}{t}$$

cette fonction apparait également dans des formules incluant la fonction Zêta de Riemann.

Preuve Il suffit d'écrire $\dfrac{1}{e^t - 1}$ sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$. ■

2.2.3 Produit Eulerien

Dans cette section, nous allons démontrer la fameuse formule d'Euler évoquée dans l'introduction, mais dans un cadre plus général.

Théorème 2.1 (Produit d'Euler) *Pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}\,(s) < 1$*, on a :*

$$\zeta\,(s) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Preuve Soit $s = \sigma + i\tau$, avec $\sigma > 1$. On a pour tout p premier :

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\upsilon s}}.$$

en prenant le produit pour $p \in P$, $p \leq N$ $(N \geq 2)$ dans les deux membres de cette dernière, on obtient :

$$\begin{aligned}
\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \prod_{p \leq N} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\upsilon s}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\upsilon s}} \\
&= \sum_{\upsilon_1,\ldots\upsilon_n} \frac{1}{\left(p_1^{\upsilon_1} \ldots p_n^{\upsilon_n}\right)^s},
\end{aligned}$$

où, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ désignent les nombres premiers $\leq N$.

On obtient grâce à l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premier, et en notons $P^+\,(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier n,

$$\prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{p^+(n) \leq N} \frac{1}{n^s}.$$

Mais comme $\{1, \ldots, N\} \subset \{n \in \mathbb{N},\ \text{tel que } p^+\,(n) \leq N\}$, ona :

$$\left|\zeta\,(s) - \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\sigma},$$

en faisant tendre N vers l'infini, on obtient la formule d'Euler complexe. La démonstration est achevée. ■

Corollaire 2.1 *La fonction* ζ *est analytique sur le demi-plan* $\mathrm{Re}\,(s) > 1$.

Preuve La convergence de la suite des produits partiels,

$$\left\{\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}\right\}_{N\geq 2}$$

vers $\zeta(s)$ est uniforme sur tout demi-plan $\mathrm{Re}(s)\geq\delta$ avec $\delta>1$, ceci découle directement de l'inégalité,

$$\begin{aligned}\left|\zeta(s)-\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}\right| &\leq \sum_{n\geq N}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}\\ &\leq \sum_{n\geq N}\frac{1}{n^{\delta}},\ \forall\,\mathrm{Re}(s)\geq\delta.\end{aligned}$$

Donc la convergence uniforme a lieu sur tous les sous ensembles compacts du demi-plan $\mathrm{Re}(s)>1$. Or, les produits partiels $\left\{\prod_{p\leq N}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}\right\}_{N\geq 2}$ sont analytiques, d'où l'on déduit que la fonction ζ est analytique sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>1$. ■

2.2.4 Prolongement analytique de la fonction Zêta de Riemann :

Nous allons tout d'abord prolonger $\zeta(s)$ au demi-plans $\mathrm{Re}(s)>0$ par deux méthode :

On a pour $\mathrm{Re}(s)>1$:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s}}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}s\int_{n}^{+\infty}\frac{dt}{t^{s+1}}\\ &= s\int_{1}^{+\infty}\left(\sum_{1\leq n\leq t}1\right)\frac{dt}{t^{s+1}}\\ &= s\int_{1}^{+\infty}\frac{[t]}{t^{s+1}}dt\\ &= \frac{s}{s-1}-s\int_{1}^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^{s+1}}dt.\end{aligned}$$

Comme $\{t\}\in[0,1[$, la dernière intégrale est analytique sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>0$. Le dernier membre définit donc un prolongement de $\zeta(s)$ au demi- plan $\mathrm{Re}(s)>0$, privé de $s=1$.

Proposition 2.2 *ζ se prolonge méromorphiquement au demi plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *avec un unique pole simple de résidu* 1 *en* $s = 1$, *et elle satisfait l'équation fonctionnelle :*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) \Gamma\left(1-s\right) \zeta(1-s) \tag{2.8}$$

Preuve Introduisons une certaine modification de la fonction ζ, appelée fonction ξ, définie pour $\mathrm{Re}\left(s\right) > 1$ par :

$$\xi\left(s\right) = \frac{1}{\pi^{\frac{s}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \tag{2.9}$$

Le prolongement méromorphe de $\zeta(s)$ est fournit par la formule :

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \frac{\xi(s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

Mais comme $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ est une fonction entière avec des zéros simples en $s = 0, -2, -4, ...$, le pôle simple de $\xi(s)$ en $s = 0$ est annulé par le zéro correspondant de $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$.
Par conséquent, il ne reste comme singularité pour $\zeta(s)$, que le pôle simple de ξ en $s = 1$.

Ensuite, l'équation fonctionnelle pour $\xi(s)$ est :

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \xi(s) \\ &= \xi(1-s) \\ &= \pi^{\frac{-1+s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \end{aligned}$$

donne :

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

et il faut encore remplacer z par $\dfrac{1-s}{2}$ dans la formule suivante :

$$\Gamma\left(z\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-2z} \frac{\Gamma\left(2z\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^s \frac{\Gamma\left(1-s\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}$$

Nous pouvons donc remplacer, réorganiser et appliquer au final la formule des complément :

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^s \Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s) \\
&= 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) \\
&= 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\pi \frac{s}{2}\right) \Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).
\end{aligned}$$

■

2.2.5 Majoration de la fonction zêta de Riemann

Proposition 2.3 *soit $s = \sigma + i\tau$ et $\varepsilon > 0$, on a uniformément des* $\mathrm{Re}(s) \geq \varepsilon$.

$$\zeta(s) << \varepsilon,$$

$$1 + |\tau||s-1| \geq \varepsilon. \Longleftrightarrow |\zeta(s)| \leq C_\varepsilon(1+|\tau|).$$

Preuve

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} + 1 + |s| + \int_1^{+\infty} t^{-s-1} dt \\
&= 1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{|s|}{\sigma} \\
&\leq 1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{|s|}{\varepsilon} \\
&\ll \sigma + |\tau| \\
&< 1 + |\tau| \text{ si } \sigma \leq 2
\end{aligned}$$

d'autre part si $\sigma \geq 2$

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &\leq \sum_{u \geq 1} \frac{1}{u^2} \\
&\ll 1
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2 *si* $\operatorname{Re}(s) \leq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{t\}t^{-s-1}dt &= \int_0^1 t^{-s}dt \\ &= \frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

donc $0 \leq \operatorname{Re}(s) < 1$,

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= -s\int_0^1 \{t\}t^{-s-1}dt - s\int_0^{+\infty} \{t\}t^{-s-1}dt \\ &= -s\int_0^{+\infty} \{t\}t^{-s-1}dt\end{aligned}$$

2.2.6 Les pôles et zéros de zêta

Proposition 2.4 *La fonction* ζ *ne s'annule pas sur* $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Preuve Comme $(1-p^{-s})^{-1} \neq 0$ pour tout $p \in P$ et que le produit converge, on voit que $\zeta(s) \neq 0$. ■

Théorème 2.2 *La fonction Zêta peut être définie comme méromorphe dans le plans avec seulement un pôle simple, en* $s = 1$ *et* $\operatorname{Re}(\zeta, 1) = 1$.

Preuve Pour $s \neq 1$, ζ satisfait l'équation fonctionnelle de Riemman. Puisque $\Gamma(1-s)$ a un pôle en $s = 1, 2, ...$ et puisque ζ est analytique en $s = 2, 3...$ nous le savons on sait, d'après l'équation fonctionnelle de Riemman que :

$$\zeta(1-zs)\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) = 0$$

De plus, de puis le pôle de $\Gamma(1-s)$ à $s = 2, 3, ...$ est simple, chacun des zéros doit etre simple, depuis :

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi s\right) = 0$$

Quand s est entier pair, $\zeta(1-s) = 0$ pour $s = 3, 5, ...$ c'est-a-dire $\zeta(s) = 0$ pour $z = -2, -4, ...$ Raisonnement similaire donne que ζ n'a pas des zéros en dehors de la bande fermée $\{s, 0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1\}$. ■

Définition 2.2 *Les points* $s = -2, -4, -6, ...$ *sont appelés les zéros triviaux de la fonction zêta, et la bande* $\{s, 0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1\}$ *est appelée la bande critique.*

Chapitre 3

LHypothèse (ou conjecture) de Riemann

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons défini les zéros triviaux de la fonction zêta de Riemann, mais qu'en est-il des zéros non triviaux de cette fonction ?. Et de là a émergé l'hypothèse de Riemann (1859), qui est liée aux zéros non triviaux de la fonction zêta, où Riemann a conjecturé que les zéros non triviaux de la fonction zêta sont tous de parties réelles égales à $\frac{1}{2}$. Dans ce chapitre, nous verrons quelques critères équivalentes à l'hypothèse de Riemann et la théorème la plus importante liée à cette conjecture (théorème de Hardy).

3.2 La fonction Thêta

Définition 3.1 *La fonction Thêta est une fonction spéciale qui apparaît dans plusieurs domaines, comme l'étude des variétés abéliennes, des espaces de modules et les formes quadratiques. Thêta définie pour un réel $t > 0$ par :*

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} \tag{3.1}$$

qui est absolument convergente.

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définie θ par :

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\end{aligned}$$

où $q = e^{-\pi z}$.

Proposition 3.1 *1)* $\theta(z+2i) = \theta(z)$.
2) $\theta(z+i) = 2\theta(4z) - \theta(z)$.
3) $\theta(z) = z^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{z}\right)$.
4) $\theta(z) = 1+\theta_\epsilon\left(e^{-n\,\mathrm{Re}(z)}\right),\ \theta(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}} + \theta(1) \to 0$, $\mathrm{Re}(z) > \epsilon > 0$ *non tengentielle.*
5) $\theta(z+i) = O(1),\ z \to z+i,\ q \to -q = \bar{e},\ \theta(z) = 1+2\sum_{n>1} q^{n^2}$
6) Pour tout $t > 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

3.3 Transformation de Mellin

Définition 3.2 *La transformation de Mellin* M *fait correspondre à la fonction* $f(x)$*, définie pour* $x \in \mathbb{R}^+$*. La fonction analytique* $F(s)$*, avec* $s \in \mathbb{C}$*, selon la relation suivante :*

$$\begin{aligned}F(s) &= M[f(x)] \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)\,x^{s-1}dx.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Généralement, cette intégrale (3.2) ne converge que pour des valeurs de s situées dans la bande $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Proposition 3.2 *([11]) On suppose que :*

1) f est définie et continue pour $x > 0$.

2) L'intégrale (??) converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ et $\mathrm{Re}(s) = \beta$. Alors elle converge absolument pour $\alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \beta$. De plus la fonction $s \to M[f](s)$ est continue et bornée dans cette bande fermée et holomorphe à l'intérieur.

Exemple 3.1 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = e^{-x},$$

on trouve que, pour $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\begin{aligned} M[f(x)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= \Gamma(s). \end{aligned}$$

Exemple 3.2 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = (1+x)^{-j} \text{ avec } \mathrm{Re}(j) > 0.$$

Alors, on a :

$$M[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} (1+x)^{-j} x^{s-1} dx,$$

on pose $1 + x = \dfrac{1}{1-t}$, par suite pour $0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(j)$:

$$\begin{aligned} M[f(x)](s) &= \int_0^1 (1-t)^j \frac{t^{s-1}}{(1-t)^{s-1}} \frac{dt}{(1-t)^2} \\ &= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{j-s-1} dt \\ &= \beta(s, j-s) \\ &= \frac{\Gamma(s)\Gamma(j-s)}{\Gamma(j)}. \end{aligned}$$

En par ticulier pour $j = 1$, et pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Alors,

$$M\left[(1+x)^{-1}\right](s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

car

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}.$$

3.3.1 Proprietés

La transformation de Mellin possède les propriétés suivantes :

Proprieté 1 (Linéarité) :

Sot $f, g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettent des transformées de Mellin $M\left[f\right](s)$ et $M\left[g\right](s)$, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; on a :

$$\begin{aligned}
M\left[\alpha f+\beta g\right](s) &= \int_{0}^{+\infty} (\alpha f+\beta g)(x)\, x^{s-1}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \alpha f(x)\, x^{s-1}dx + \int_{0}^{+\infty} \beta g(x)\, x^{s-1}dx \\
&= \alpha \int_{0}^{+\infty} f(x)\, x^{s-1}dx + \beta \int_{0}^{+\infty} g(x)\, x^{s-1}dx \\
&= \alpha M\left[f\right](s) + \beta M\left[g\right](s).
\end{aligned}$$

Proprieté 2 :

Pour $\alpha - a < \mathrm{Re}(s) < \beta - a$, et $a > 0$, on a

$$M\left[x^{a} f(x)\right](s) = M\left[f(x)\right](s+a).$$

En effet, pour tout a réel positif et $\mathrm{Re}(s+a) \in \left]\alpha, \beta\right[$, i.e. $s \in \langle \alpha - a, \beta - a \rangle$ on a

$$\begin{aligned}
M\left[x^{a} f(x)\right](s) &= \int_{0}^{+\infty} x^{s-1} x^{\alpha} f(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^{s+a-1} f(x)\, dx \\
&= M\left[f(x)\right](s+a).
\end{aligned}$$

Proprieté 3 : Pour $a > 0$, et $s \in \langle \alpha, \beta \rangle$, alors,

$$M\left[f(ax)\right](s) = a^{-s} M\left[f(x)\right](s).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
M\left[f(ax)\right](s) &= \int_{0}^{+\infty} f(ax)\, x^{s-1}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^{s-1} f(t)\, \frac{dt}{a} \\
&= a^{-s} M\left[f(x)\right](s).
\end{aligned}$$

Proprieté 4 : Pour un nombre réel positif a et $s \in \langle a\alpha, a\beta\rangle$, alors,

$$M\left[f\left(x^{a}\right)\right](s)=\frac{1}{a}M\left[f\left(x\right)\right]\left(\frac{s}{a}\right).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
M\left[f\left(x^{a}\right)\right](s) &= \int_{0}^{+\infty} f\left(x^{a}\right)x^{s-1}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f\left(t\right)\left(t^{\frac{1}{a}}\right)^{s-1}\frac{dt}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty} f\left(t\right)\left(t^{\frac{1}{a}}\right)^{s-1}dt \\
&= \frac{1}{a}M\left[f\left(x\right)\right]\left(\frac{s}{a}\right).
\end{aligned}$$

Proprieté 5 : Pour $s \in \langle 1-\beta, 1-\alpha\rangle$, alors,

$$M\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s)=M\left[f(x)\right](1-s).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
M\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right](s) &= \int_{0}^{+\infty}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]x^{s-1}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(t)(t)^{-s+2}\frac{dt}{t^{2}} \\
&= M\left[f(x)\right](1-s).
\end{aligned}$$

Proprieté 6 : Pour $s \in \langle \alpha, \beta\rangle$, alors,

$$M\left[f\left(x\right)\left(\ln x\right)\right](s)=\frac{d}{ds}M\left[f\left(x\right)\right](s).$$

D'une manière similaire, et pour n un entier, alors nous obtenons par induction :

$$M\left[f\left(x\right)\left(\ln x\right)^{n}\right](s)=\frac{d^{n}}{ds^{n}}M\left[f\left(x\right)\right](s).$$

Proposition 3.3 *Pour $s \in \langle \alpha-1, \beta-1\rangle$, alors on a*

$$M\left[\int_{0}^{x} f(t)dt\right](s)=-\frac{1}{s}M\left[f\right](s+1).$$

D'une manière similaire, et pour $s \in \langle \alpha - n, \beta - n \rangle$, nous obtenons par induction :

$$M[I_n f](s) = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} M[f](s+n).$$

Preuve Pour $s \in \langle \alpha - n, \beta - n \rangle$, alors on a :

$$\begin{aligned} M\left[\int_0^x f(t)dt\right](s) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f(t)dt\right) x^{s-1}dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_t^{+\infty} x^{s-1}dx\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{-t^s}{s}\right) dt \\ &= -\frac{1}{s} M[f](s+1). \end{aligned}$$

■

3.3.2 Formule D'inversion de Mellin

Théorème 3.1 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, une fonction continue et F sa transformée de Mellin. Alors, la formule d'inversion est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) x^{-s} ds. \tag{3.3}$$

Preuve Pour $s = c + i\beta$ avec $c > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{s \log x} \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{c \log x} e^{i\beta \log x} \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

par le changement de variable $\log x = u$, on obtient

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^u) e^{cu} e^{i\beta u} du,$$

et avec le changement $u = -2\pi x$, on a

$$F(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-2\pi x}) e^{-2i\beta\pi x} e^{-2\pi cx} dx,$$

de sorte que $\beta \in \mathbb{R}$ t d'après la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ on déduit que :

$$F(s) = 2\pi \mathfrak{F}\left[f\left(e^{-2\pi x}\right) e^{-2\pi cx}, \beta\right].$$

On utilise la formule inverse de Fourier,

$$e^{-2\pi cx} f\left(e^{-2\pi x}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{2i\pi\beta x} d\beta,$$

si on pose $e^{-2\pi x} = t$, on trouve :

$$f(t) = t^{-c} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) t^{-i\beta} d\beta,$$

d'autre part

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) t^{-(c+i\beta)} i d\beta,$$

finalement, la formule d'inversion est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) t^{-s} ds.$$

■

3.4 Le théorème de Hardy (1914)

Suite à la conjecture de Riemann, Hardy établit en 1914 que la fonction ζ possède une infinité de zéros sur la droite critique $\mathrm{Re}\,(s) = \dfrac{1}{2}$. Dans cette section nous allons présenter l'une des démonstrations du théorème de Hardy.

L'idée de Hardy consiste à construire une fonction réelle $\Psi\,(t)$ qui s'annule au même temps que la fonction $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$

et de montrer ensuite que $\Psi\,(t)$ s'annule une infinité de fois sur la droite réelle.

On définit les deux fonction $\Xi\,(t)$ et $\xi\,(s)$ commee suite :

$$\xi\,(s) = \frac{1}{2} s\,(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\,(s)\,, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\Xi(t) &= \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous savons que la fonction $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$) est méromorphe dans le plan complexe et qu'elle est invariante par la transformation $s \to 1-s$, elle admet deux pôles simples en 0 et 1. Cela implique que la fonction $\xi(s)$ est entière et on a $\xi(s) = \xi(1-s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. Puisque $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$ pour tout s, il s'ensuit que $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$ pour tout s, de sorte que :

$$\begin{aligned}\Xi(t) &= \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \\ &= \overline{\xi\left(\frac{1}{2}-it\right)} \\ &= \overline{\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)} \\ &= \overline{\Xi(t)}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que la fonction $\Xi(t)$ est à valeurs réelles.

La fonction $\Psi(t)$ est d´efinie comme suit :

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \left(t^2+\frac{1}{4}\right)^{-1}\Xi(t)\,e^{\frac{1}{4}\pi t} \\ &= -\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}}e^{\frac{1}{4}\pi t}\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right).\end{aligned}$$

Lemme 3.1 *Pour tout $\delta > 0$ et $y \in \mathbb{C}$ tel que* $\operatorname{Re}(y) > 0$, *on a :*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} y^{-s}\Gamma(s)\,ds = e^{-y}. \tag{3.6}$$

La preuve de ce lemme utilise la formule de Mellin que nous rappelons :

Si on d´efinit $\wp(s)$ comme suit :

$$\wp(s) = \int_0^{+\infty} y^{s-1}f(y)\,dy, \tag{3.7}$$

alors,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \wp(s)\, y^{-s} ds. \tag{3.8}$$

La preuve de cette formule se trouve dans ([13]).

Théorème 3.2 *La fonction $\Psi(t)$ s'annule une infinité de fois sur la droite réelle.*

Preuve L'idée essentielle de la preuve consiste à étudier le comportement des deux intégrales :

$$\int_T^{2T} \Psi(t)\, dt \tag{3.9}$$

$$\int_T^{2T} |\Psi(t)|\, dt \tag{3.10}$$

quand T tend vers l'infini.

Raisonnant par l'absurde, en supposant que Ψ ne possède qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{R}$. Cela entraine (vu que Ψ est continue sur $\mathbb{R}$) que $\Psi(t)$ garde un signe constant pour t assez grand. Donc pour T assez grand le module de l'intégrale (3.9) est égale à l'intégrale (3.10). Nous allons voir comment ceci fournit une contradiction.

Ona pour $\mathrm{Re}(y) > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)\, y^{-\frac{1}{2}s} ds &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\left(n^2 y\right)^{-\frac{1}{2}s} ds \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(\omega)\left(n^2 y\right)^{-\omega} d\omega \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 y}.
\end{aligned}$$

La derni'ere égalité est justifiée par le lemme précédent.

On intègre maintenant la fonction

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)\, y^{-\frac{1}{2}s}$$

le long du rectangle de sommets $\frac{1}{2} \pm iA$, $2 \pm iA$, avec $A > 0$. Puisque on dispose de la formule de Stirling suivante :

$$|\Gamma(\sigma + it)| \sim e^c e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}\, |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} \quad (|t| \to +\infty)$$

et d'après la relation

$$\zeta\left(1+it\right)=O\left(\log\left|t\right|\right),$$

cela implique que :

$$\Gamma\left(1+i\frac{t}{2}\right)\zeta\left(1+it\right)y^{-1-i\frac{t}{2}}=O\left(t^{\alpha}e^{-\frac{\pi}{4}t}\right),$$

pour une certaine constante $\alpha>0$. 0. Donc les intégrales sur les cotés horizontaux tend vers zéro quand A tend vers $+\infty$. La fonction

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta\left(s\right)y^{-\frac{1}{2}s},$$

possède un seul pôle simple (inclus dans le contour d'intégration) au point $s=1$ dont le résidu vaut $\sqrt{\frac{\pi}{y}}$ (à savoir que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$), on en déduit que :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta\left(s\right)y^{-\frac{1}{2}s}ds=2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^{2}y}-\sqrt{\frac{\pi}{y}}=\phi\left(y\right).$$

Ce que l'on peut exprimer en fonction de $\Psi\left(t\right)$ comme suit :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi\left(t\right)\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it}dt=-\phi\left(y\right).$$

Pour

$$y=\pi e^{i\left(\frac{1}{2}\pi-\delta\right)}$$

avec $\delta>0$ très petit, en utilisant le fait que la fonction

$$e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi\left(t\right)$$

est paire on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cosh\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\frac{t}{2}\right\}e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi\left(t\right)dt &= -e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\delta}{4}\right)}\phi\left(\pi e^{i\left(\frac{1}{2}\pi-\delta\right)}\right)\\ &= O\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^{2}\pi\sin\delta}\right)+O\left(1\right).\end{aligned}$$

Et puisque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi\sin\delta} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} e^{-u^2\pi\sin\delta} du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2\pi\sin\delta} du,$$

en posant $x = u\sqrt{\pi\sin(\delta)}$ dans cette dernière intégrale on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi\sin\delta} = O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right).$$

D'où,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cosh\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\frac{t}{2}\right\} e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)\,dt = O\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Si $\Psi(t) \neq 0$ pour $t \geq t_0$, alors pour $T \geq t_0$ on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} |\Psi(t)|\,dt &= \left|\int_T^{2T} \Psi(t)\,dt\right| \leq e\left|\int_T^{2T} e^{\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{T}\right)\frac{t}{2}\right\}} e^{-\frac{\pi t}{4}}\Psi(t)\,dt\right| \\
&\leq 2e\left|\int_{t_0}^{+\infty} \cosh\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{T}\right)\frac{t}{2}\right\} e^{-\frac{1}{4}\pi t}\Psi(t)\,dt\right| \\
&= O\left(\sqrt{T}\right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Et d'autre part, la formule de Stirling montre que :

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)| &= \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}\pi t}\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\right|\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \\
&= Ct^{-\frac{1}{4}}(1+o(1))\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|,
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$. De sorte qu'il existe une constante $A > 0$, telle que pour t assez grand on a :

$$|\Psi(t)| \geq At^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} |\Psi(t)|\,dt &\geq A'T^{-\frac{1}{4}}\int_T^{2T}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| dt \\
&\geq A'T^{-\frac{1}{4}}\left|\int_T^{2T}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) dt\right|.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
i\int_{T}^{2T}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)dt &= \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+i2T}\zeta(s)\,ds \\
&= \int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+i2T}\zeta(s)\,ds+\int_{2+iT}^{2+i2T}\zeta(s)\,ds+\int_{2+i2T}^{\frac{1}{2}+i2T}\zeta(s)\,ds \\
&= iT-\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{s}\log(n)}\right]_{2+iT}^{2+i2t}+O\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{T}d\sigma\right) \\
&= iT+O\left(\sqrt{T}\right).
\end{aligned}$$

Ici le terme $\sqrt{T}$ provient des majorations de ζ, on a en fait

$$\zeta(\sigma+it)=O\left(|t|^{1-\sigma}\right).$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante $A''>0$ telle que :

$$\int_{T}^{2T}|\Psi(t)|\,dt\geq A''T^{\frac{3}{4}}.$$

Ce qui est en contradiction avec (3.11). ■

3.5 Critères équivalents necessaires et suffisants

3.5.1 Nymann-Beurling (1950)

Notation 3.1 *Soit la fonction*

$$\rho(x)=x-[x], \tag{3.12}$$

et $\chi=\chi_{(0,1]}$ la fonction caractéristique de $(0,1]$.

Pour tout $a>0$ l'opérateur K_a est donné par :

$$K_a f(x)=f(ax). \tag{3.13}$$

A est l'espace vectoriel des fonctions f de la forme :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\rho\left(\frac{\theta_k}{x}\right), \tag{3.14}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\theta_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Dénoté par A_E le sous espace de A où $\theta \in E$.

Soit $B = A_{(0,1]}$ (l'espace linéaire généré par la fonction $x \to \rho(\theta/x)$ avec $\theta \in (0,1]$), et $C \subset B$, en deduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \theta_k = 0. \tag{3.15}$$

Théorème 3.3 *La fonction zêta de Riemann est exempte de zéros dans le demi-plan $\sigma > 1/p$, $1 < p < \infty$ si et seulement si C est dense dans $L^P(0,1)$.*

Preuve Pour prouver ce théorème, Beurling a d'abord noté que C est dense dans L^p si et seulement si $-\chi \in \overline{C}^{L^p}$,a ensuite montré tout simplement que $-\chi \in \overline{C}^{L^p}$ implique $\zeta(s) \neq 0$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1/p$.

La preuve de la réciproque, qui, selon ses propres termes, est moins triviale, est par contradiction.

Si $-\chi \notin \overline{C}^{L^p}$, alors C n'est pas dense dans $L^P(0,1)$.

La mesure dans laquelle la profondeur apparente des deux côtés de la preuve est si fortement contrastée a conduit certains auteurs à douter de l'utilité de l'approche de Nyman-Beurling (voir ([14])), mais cela a conduit d'autres à tenter de se stabiliser. les deux faces de la preuve.

On dit que ϕ est un générateur si $\phi \in L^p(0,\infty)$ pour tout $p \in (0,\infty)$ et

$$L^P(0,1) \subseteq span_{L^p}\{K_a\phi\}_{a\geq 1}, \ (1 < p < \infty). \tag{3.16}$$

Ces générateurs sont appelés générateurs forts , et le terme générateur est appliqué lorsque a est autorisé à s'étendre dans $(0,\infty)$ dans (3.16). $-\chi$ est l'exemple le plus simple d'un générateur (le signe moins est sans importance, mais plus pratique). La fonction λ tel que

$$\lambda(x) = \chi(x)\log x,$$

est aussi un générateur, depuis

$$\frac{1}{a-1}(k_a - I) \to^{L^p} \chi, \ (a \downarrow 1), \ (1 \leq p < \infty).$$

Clairement, tout générateur ϕ peut très bien prendre la place de $-\chi$ dans le théorème de N-B. Ces considérations, jointes au fait que

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} c_k \theta_k, \ (x > 1),$$

pour tout $f \in B$ permettre l'extension mineure suivante du théorème , où la référence à la densité de C ou B est abandonnée. ■

3.5.2 Lagarias (2001)

Nous considérons le problème suivant :

$$\sum_{d/n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n), \tag{3.17}$$

avec égalité seulement pour $n = 1$.

La fonction $\sigma(n) = \sum_{d/n} d$ est la somme des fonctions de division. Le nombre H_n est appelé le nième nombre harmonique i.e. $H_n = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}$.

Exemple 3.3 *Les diviseurs de 6 sont :1,2,3,6.*
Alors $\sigma(6) = 12$.

Théorème 3.4 *le problème (3.17) est équivalent à l'hypothèse de Riemann.*

Ce théorème sera déduit des deux résultats suivants de Robin ([3]).

Théorème 3.5 (Robin) *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors pour tout* $n \geq 5041$,

$$\sum_{d/n} d \leq e^{\gamma} n \log n, \tag{3.18}$$

où γ est la constante d'Euler.

Preuve C'est le théorème 1 de Robin ([3]). Son principal avantage par rapport aux résultats antérieurs est qu'il établit la borne explicite 5041 au-delà de laquelle (3.18) est valable. La preuve contient des estimations d'inégalité très prudentes utilisant des "formules explicites" pour les fonctions de comptage premier en termes de zéros de la fonction zêta. Il utilise également des estimations d'erreur explicites pour les fonctions de comptage premier en raison de Rosser et Schoenfeld ([4]). ■

Théorème 3.6 (Robin) *Si l'hypothèse de Riemann est fausse, alors il existe des constantes* $0 < \beta < 1/2$ *et* $C > 0$ *tel que :*

$$\sum_{d\backslash n} d \geq e^{\gamma} n \log\log n + \frac{Cn \log\log n}{(\log n)^{\beta}}, \tag{3.19}$$

vaut pour une infinité de n.

Preuve Cela découle de la proposition 1 de la section 4 de Robin ([3]) La constante β peut être choisie pour avoir n'importe quelle valeur satisfaisant $1 - b < \beta < 1/2$, où $b = \mathrm{Re}\,(\rho)$ pour un certain zéro ρ de $\zeta\,(s)$ avec $\mathrm{Re}\,(\rho) > 1/2$, et $C > 0$ doit être choisi suffisamment petit, en dépendant de ρ. La preuve utilise les côtés d'un résultat de Nicolas ([2]), qui lui-même utilise une méthode de Landau. ■

La réduction du Théorème 3.4 à ces résultats découle des inégalités élémentaires données dans les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2 *Pour* $n \geq 3$,

$$\exp\,(H_n) \log\,(H_n) \geq e^{\gamma} n \log\log n. \tag{3.20}$$

Preuve soit $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t, et $\{t\}$ la partie fractionnaire de t, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt &= \int_1^n \frac{1}{t^2} \left(\sum_{1 \leq r \leq t} 1 \right) dt \\ &= \sum_{1 \leq r \leq t} \int_r^n \frac{1}{t^2} dt \\ &= \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) \\ &= H_n - 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \int_1^n \frac{t - \{t\}}{t^2} dt \\ &= \log n + 1 - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2} dt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

De cela on obtient :

$$H_n = \log n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt, \tag{3.22}$$

où nous avons mis

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

C'est la constante d'Euler $\gamma = 0.57721...$, Quand $n \to \infty$,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(H_n - \log n\right),$$

qui est sa définition habituelle. Maintenant (3.22) donne :

$$H_n > \log n + \gamma,$$

qui, en exponentielle, donne :

$$\exp(H_n) \geq e^\gamma n. \tag{3.23}$$

Finalement $H_n \geq \log n$, donc $\log(H_n) \geq \log\log n > 0$ pour $n \geq 3$. Combinant cela avec (3.22) donne (3.20). ■

Lemme 3.3 *Pour* $n \geq 3$,

$$H_n + \exp(H_n)\log(H_n) \leq e^\gamma n \log\log n + \frac{4n}{\log n}. \tag{3.24}$$

Preuve Pour $n \geq 1$, on défini R_n par :

$$\begin{aligned} R_n &= H_n - \log(n+1) \\ &= \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{1}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

L'expression à l'extrême droite révèle que les quantités R_n sont non négatives et augmentent de manière monotone avec n. Depuis $\lim_{n\to\infty}\left(H_n - \log(n+1)\right) = \gamma$, on obtient :

$$H_n - \log(n+1) \leq \gamma. \tag{3.25}$$

l'exponentiation de cette inégalité donne :

$$\exp\left(H_n\right) \leq e^\gamma \left(n+1\right). \tag{3.26}$$

La formule (3.21) implique que, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}\log(H_n) &\leq \log(\log n + 1) \\ &= \log\left(\log n\left(1+\frac{1}{\log n}\right)\right) \\ &\leq \log\log n + \frac{1}{\log n},\end{aligned} \tag{3.27}$$

où nous avons utilisé le fait élémentaire que $\log(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$. La multiplication de (3.26) et (3.27) donne pour $n \geq 3$,

$$\exp(H_n)\log(H_n) \leq e^{\gamma} n \log\log n + \frac{e^{\gamma} n}{\log n} + e^{\gamma}\left(\log\log n + \frac{1}{\log n}\right) \tag{3.28}$$

Ensuite on observe que pour $n \geq 3$,

$$\log\log n + \frac{1}{\log n} \leq \frac{n}{2\log n}.$$

En remplaçant cette borne dans (3.28),

$$\exp(H_n)\log(H_n) \leq e^{\gamma} n \log\log n + \frac{3e^{\gamma} n}{2\log n}.$$

Maintenant (3.21) donne pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}H_n &\leq \log n + 1 \\ &\leq \frac{n}{\log n}.\end{aligned}$$

L'addition de cette inégalité à la précédente donne, pour $n \geq 3$,

$$H_n + \exp(H_n)\log(H_n) \leq e^{\gamma} n \log\log n + \frac{4n}{\log n},$$

depuis $1 + 3e^{\gamma}/2 < 4$. ■

Preuve du Théorème 3.4 ($\Leftarrow$) Supposons que l'hypothèse de Riemann soit vraie. Alors le Théorème 3.5 et le lemme 3.2 donnent ensemble, pour $n \geq 5041$,

$$\begin{aligned}\sum_{d \backslash n} d &\leq e^{\gamma} n \log\log n \\ &\leq H_n + \exp(H_n)\log(H_n).\end{aligned}$$

Pour $1 \leq n \leq 5040$ on vérifie (3.17) directement par ordinateur, les seuls cas d'égalité étant $n = 1$.

($\Rightarrow$) Supposons que (3.17) soit valable pour tout n. Nous argumentons par contradiction, en supposant que l'hypothèse de Riemann est fausse. Alors le théorème Robin 3.6 s'applique. Cependant sa borne inférieure (qui est valable pour une infinité de n) contredit la borne supérieure du lemme 3.3 (qui est valable pour tout n suffisamment grand). Nous concluons que l'hypothèse de Riemann doit être vraie. ■

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une étude de la fonction zêta de Riemann, qui constitue un outil fondamental dans l'étude de la répartition des nombres premiers, et nous mettons en lumière l'hypothése de Riemann ; qui est à ce jour une conjecture ouverte et redoutable et constitue l'un des problèmes les plus important, aussi bien pour les mathématiciens que pour les physiciens. on a aussi intégréle théorème de Hardy qui est tout proche de l'hypothèse et la soutient en un certain. Enfin nous avons vu les critères équivalents à l'hypothèse et conclut qu'elle découle d'une combinaison des critères de Lagarias et Robin pour tous les nombres naturels supérieurs ou égaux à 5041.

Bibliographie

[1] Cartan, H. : Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieures variables complexes (Hermann, Paris, 191).

[2] Petites valeurs de la fonction d'Euler et hypothèse de Riemann, Seminar on number theory. Paris 1981-1982, Birkhausr, Boston 1983, pp. 207-218.

[3] Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. Pures Appl. 63 (1984) 187-213.

[4] Approximate Formulas for some Functions Prime Numbers, Illinois J. Math. 6 (1962) 64-94.

[5] Uber die Anzahl der primzalen unter eine gegebenen grösse, Monat. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin), 671-680, 1859.

[6] Contributions to the theory of Riemann zeta function and the theory of the distribution of the primes, Acta Math.41, 1, 119-196, 1918.

[7] An introduction to the theory of numbers, forth edition, Oxford University Press, Ely House, London W.1, 1960.

[8] Prime numbers and the Riemann hypothesis, Cambridge University Press, 2015.

[9] A Theorem on Functions Defined on a semi-group, Math. Scand., Vol. 1, 1953.

[10] Elementary and Analytic Number Theory, 1981, prépublication.

[11] One Two Problems concerning Linear Transformations in Hilbert Space, Acta Math., Vol. 81, 1949.

[12] One Some Groups and Semi-groups of Translations (thesis, Uppsala, 1950).

[13] Introduction to The Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press. Oxford, 2nd ed, 1948.

[14] On closure problems and the zeros of the Riemann zeta function, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 838-845.