République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème :

Etude des nombres de Pisot et de quelques nombres de Salem

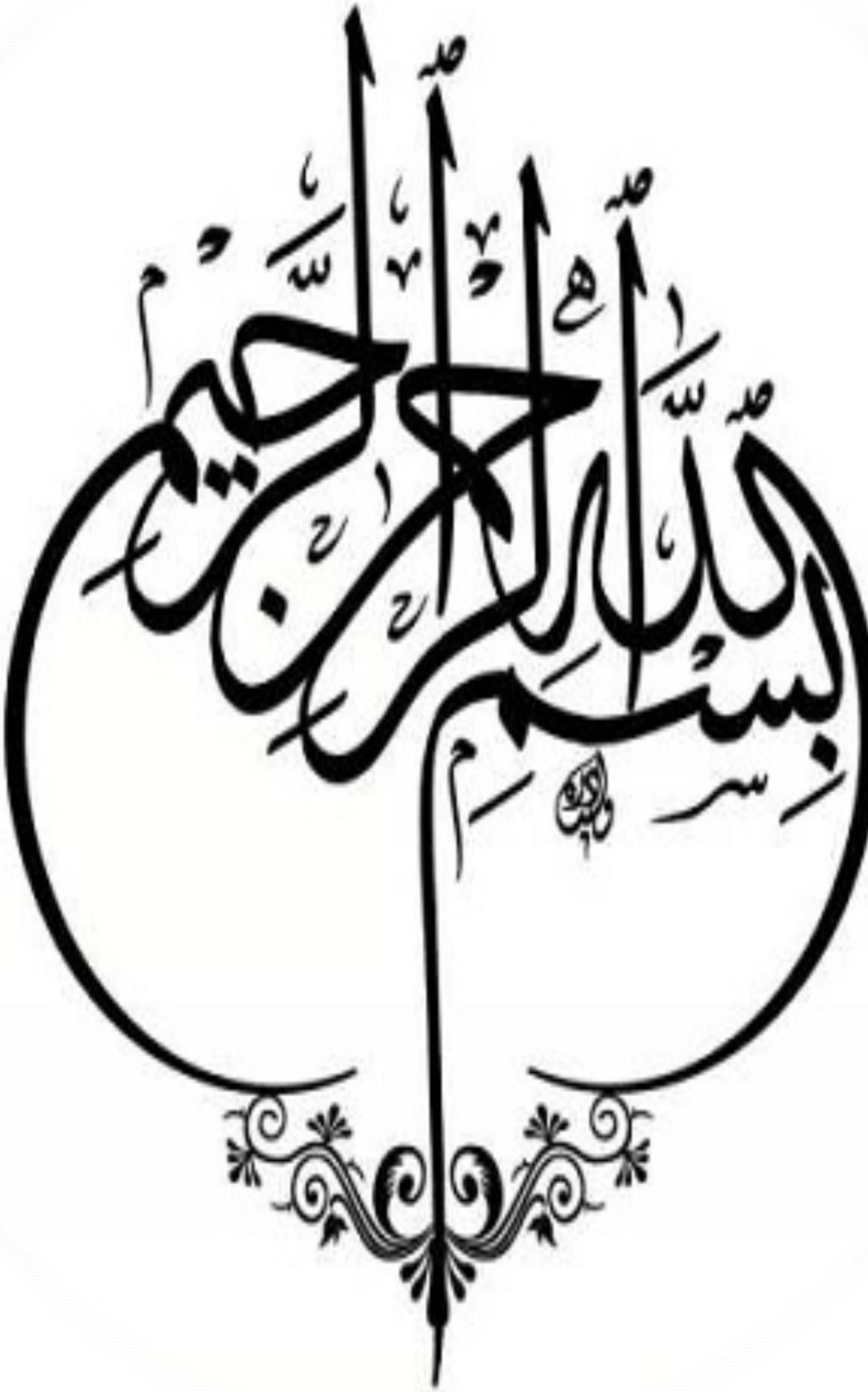
Présenté Par:

GOUNINA Hicham

Devant le jury :

Pr,Messaoudene hadia	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Présidente
Dr.Bouaziz Khalifa	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Dr.Bahi Mohammed Cherif	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Soutenu le :05/06/2023


بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

الحمد لله المعطاء المرجوّ سخاؤه،

خالق القضاء المضمون بقاؤه رافع السماء المستحق فداؤه،

مشرف العلم والعلماء الذي شمل العالمين إنعامه وعمّ جميع المخلوقات إكرامه وبعد:

فأهدي ثمرة سنيني وجهدها

أولًا وثانيًا وثالثًا وعاشرًا وأخيرًا... شيماء ماما بابا لا اقتباسات تنصفكم ولا نص يكفي للحديث

"دمتَم لي شيئا جميلًا لا ينتهي ولا يغيب "

إلى رفيقتي وقت الصُحبه و سندي وقت الضعف و طريقي المفتوح دائما وأبدا أنيسة دربي ورفيقته ،إلى من تستقبلني دائما بإبتسامة و شاركتني في كل لحظاتي الدراسية يوما بيوم وجمعت معي كل لحظات الفرح والحزن ، والتي عشت معاها لحظاتي الجامعية وشجعتني للإكمال في مسيرة العلمية والدراسية فضلك

لا يقدر بثمن سيدتي ومهجتي ، الكُل بكل وقت

"فاللهم أكمل لنا بالخير ويسر أمرنا"

حبيبتي شيماء

إلى قصيدة القلوب المشهود فضلها، مفتاح الدروب البهي ظلها، بطلة الاحلام المستحيل مثلها، وعروس الأيام المكتوب عدلها، هدية الحياة المرجو نيلها، هي ربيع البيت وأغنية أركانه،ضحكة ليله وبهجة نهاره.

ماما الغالية أدامك الله تاج فوق رأسي

إلى من رصّع فينا معنى الأدب، وجعل معدننا قح الذهب، وواصل المسيرة معنا من عز الشتاء إلى حر الصهيد،وضحى بسنينه فأعطى ووهب، و غاص لأجلنا في معنى التعب، مهما حييت لن أجد لمثله قلبا محب، فعجبا له من أب تقي وألف عجب.

بابا العظيم بعد الله سبحانه

أصحاب الضحكة الجميلة

فؤاد رحمة أمينة نجاح "الجواهر"

إلى خاوتي كل بإسمه ومقامه

Remerciement

Avant tout Je remercie Allah car à lui seul revient les louanges, le tout puissant pour la force, la volonté et la patience qu'il mia donnée pour réaliser ce travail .

Je tiens à remercier ici tous ceux qui ont contribué à ce que je parvienne au bout de ce mémoire.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, ***Dr.Baki Mohammed Cherif****, pour ses précieux conseils qui ont mené à bien l'évolution de notre mémoire et ces motivations pour réaliser ce modeste travail.*

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury : Le ***Professor Messoudan kadia*** *Qui m'a honoré en acceptant d'être président de ce jury.*

J'exprime ma reconnaissance au ***Docteur Bouaziz Khelifa*** *pour avoir accepté de rapporter ce mémoire.*

Avant de terminer, je tiens à dire merci à tous ceux qui mon soutien ont participé à moral.

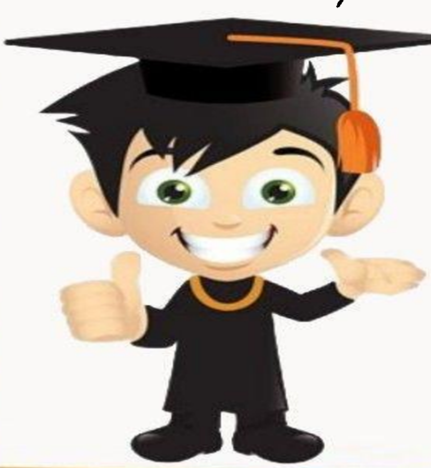


TABLE DES MATIÈRES

ملخّص

أعداد بيزو أوسالم هي أعداد الجبرية أكبر من 1,-والقيمة المطلقة اذا كانت حقيقية ($\mathbb{R}$) و الطويلة في $\mathbb{C}$ - لمرافقاتها أصغر من 1.

في دراسة أعداد بيزو وسالم ، نحتاج إلى المجموعات التالية:

1. المجموعة $\mathbb{E}$

$\mathbb{E} = \{ \alpha > 1: (\alpha.\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$ 1 غير موزعة بانتظام بترديد $(\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$المتتالية$\}$

2. المجموعة $\mathbb{U}$

$\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$

تُعرَّف المجموعة $\mathbb{U}$ ، وهي مجموعة جزئية من $\mathbb{E}$ ، على أنها مجموعة العناصر المرتبطة بعدد صحيح جبري α ، وكل من مرافقاتها لها قيمة مطلقة أصغر من أو تساوي 1.

3. المجموعة $\mathbb{S}$

$\mathbb{S} \subset \mathbb{U}$

4. نرمزب $\mathbb{S}$ مجموعة أعداد Pisot ؛ وهي مجموعة جزئية من المجموعة $\mathbb{U}$ ذات الطويلة في $\mathbb{C}$ أو القيمة المطلقة في $\mathbb{R}$ أصغر من أو تساوي 1.

5. المجموعة $\mathbb{T}$

$\mathbb{T} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{U}$

مجموعة $\mathbb{T}$ لأرقام سالم هي مجموعة الأعداد الجبرية τ أكبر من 1 التي تكون طويلة بقية مرافقاتها الأخرى أكبر من او تساوي 1.

المجموعة $\mathbb{U}$ مقسمة إلى مجموعتين فرعيتين $\mathbb{S}$ و $\mathbb{T}$. على الرغم من أن هذا القسم يظل صالحًا لبعض التعميمات ، إلا أن صياغته يمكن أن تكون معقدة بعض الشيء.

الكلمات المفتاحية: أعداد بيزو، أعداد سالم ، الأعداد الجبرية.

ABSTRACT

A Pisot and Salem number are real number algebraic integer greater than 1, such that there conjugates other than itself have absolute values less than 1.

In the study of Pisot and Salem numbers, we need the following sets :

1. The set $\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{E} = \{\alpha > 1/ \ (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \text{The sequence } (\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non-equidistributed} \pmod 1\}.$$

2. The set $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U} \subset \boldsymbol{E}$$

The set $\mathbb{U}$, which is a subset of $\boldsymbol{E}$, is defined as the set of elements associated with an algebraic integer α, such that all of its conjugates have an absolute value less than or equal to 1.

3. The set $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{U}$$

We denote by $\mathbb{S}$ the set of Pisot numbers; it is a subset of the set $\mathbb{U}$ introduced previously.In which the conjugates of α have a modulus strictly less than 1.

4. The set $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{U}$$

The set $\mathbb{T}$ of Salem numbers is the set of real algebraic integers $\tau \in \mathbb{R}$ greater than 1, such that all other conjugates have a modulus of at most 1, with at least one conjugate having a modulus equal to 1.

The set $\mathbb{U}$ is partitioned into two subsets $\mathbb{S}$ and $\mathbb{T}$. Although this partition remains valid for some generalizations, its formulation can become slightly more complicated.

Key words : Pisot numbers, Salem numbers, Algebraic numbers.

RÉSUMÉ

Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel plus grand que 1*,dont les autres conjugués* que lui-même sont de modules inférieurs à 1.

Un nombre de Salem est un entier algébrique réel τ *plus grand que* 1*, dont les autres conjugués sont de module inférieur ou égal à* 1*, avec au moins un conjugué de module* 1*.*

On a besoin, dans l'étude des nombres de Pisot et Salem, des ensembles suivants :

1. L'ensemble $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \{\alpha > 1/ (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \text{ la suite } (\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non équirépartie}(\bmod 1)\}.$$

2. L'ensemble $\mathbb{U}$

$$\mathbb{U} \subset \boldsymbol{E}$$

   L'ensemble $\mathbb{U}$,qui est une sous-ensemble de $\boldsymbol{E}$, est défini comme étant l'ensemble des éléments associés à un entier algébrique α, dont tous les conjugués ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

3. L'ensemble $\mathbb{S}$

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{U}$$

   On note par $\mathbb{S}$ l'ensemble des nombres de Pisot ; c'est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{U}$ in troduit précédemment.Dans lequel les conjugués de α sont de module strictement inférieur à 1.

4. L'ensemble $\mathbb{T}$

$$\mathbb{T} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{U}$$

   L'ensemble $\mathbb{T}$ des nombres de Salem est l'ensemble des entiers algébriques réels τ supérieur à 1dont les autres conjugués ont un module au plus égal à 1, un au moins ayant un module égal à 1.

L'ensemble $\mathbb{U}$ est partitionné en deux sous-ensembles $\mathbb{S}$ et $\mathbb{T}$. Bien que cette partition demeure valable pour certaines généralisations, sa formulation peut être légèrement compliquée.

Mots clés : Nombres de pisot, Nombres de salem, Nombres Algébriques.

INTRODUCTION

Les nombres de Pisot sont nommés d'après Charles Pisot (1910-1984)[3], un mathématicien français qui travaillaient surtout dans la théorie des nombres. Le nombre de Pisot, également connu sous le nom de constante de Pisot-Vijayaraghavan, est un nombre algébrique algébrique irrationnel positif qui possède des propriétés intéressantes en théorie des nombres et en combinatoire.Il a été découvert par le mathématicien français Marcel-Paul Schützenberger en 1958, et a été nommé d'après le mathématicien français Charles Pisot.Il n'y a pas d'historique spécifique associé au nombre de Pisot lui-même, mais il a été étudié en profondeur dans la littérature mathématique depuis sa découverte, et il continue d'être un sujet de recherche actif dans plusieurs domaines des mathématiques[28] [8].

Il existe beaucoup de résultat sur cet ensemble, ils soient algébrique, topologique et même physique ! Nous souhaitons donc présenter une petite étude claire avec un bagage mathématiques réduit et permettant quand même d'apercevoir leurs richesses mathématique[19].

Les nombres de Salem sont une classe de nombres algébriques construites à partir de la racine carrée de 2 et d'autres racines carrées entières. Ils ont été nommés en l'honneur de Raphaël Salem, un mathématicien tunisien qui les a étudiés dans les années 1940.

Les nombres de Pisot et de Salem sont des entiers algébriques réels riches en propriétés arithmétiques, ce qui explique leur apparition dans plusieurs domaines des mathématiques. Ces nombres étaient étudiés pendant une période qui dépasse un demi-siécle.

Le but de ce mémoire est l'étude des nombres de Pisot et nombres de Salem et donner quelques propriétés de ces nombres.Nous l'avons organisé ainsi :

Dans le premier chapitre, nous aborderons certaines des concepts de base que nous devions passer en revue et comprendre pour comprendre tout ce qui concerne les deux autres chapitres. Nous avons mentionné les points importants tels que les polynôme, un rappel général sur les nombres algébriques, ainsi que les théories et les définitions dont nous avons besoin pour la compréhension de l'analyse complexe[17], nous avons donné les définitions et énoncés des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

Au deuxième chapitre, nous avons présenté un ensemble particulier de nombres

$\mathbb{U}$ qui sert de cadre pour la définition des nombres de Pisot[27],[19]. Pour cela, nous avons utilisé un théorème qui nous a permis de définir l'ensemble $\mathbb{U}$. Nous avons ensuite spécifié un sous-ensemble $\mathbb{S}$ de l'ensemble $\mathbb{U}$, appelé les nombres de Pisot[8][3].En outre, nous avons énoncé certaines propriétés des nombres de Pisot et etude la fermeture de l'ensemble des nombres de Pisot, ainsi que des petits nombres de Pisot[4],[5][26].

Dans le troisième chapitre, intitulé "Quelques propriétés des nombres de Salem", nous avons présenté la définition de l'ensemble Salem $\mathbb{T}$. Nous avons également donné quelques exemples simplifiés et évoqué la catégorie des nombres de Salem, ainsi que certaines observations et conclusions importantes à retenir pour cette classe de nombres.Enfin , dans le dernier paragraphe on rappelle quelques résultats connus sur un ensemble remarquable d'entiers algèbriques : les nombres de Pisot et les nombres de Salem. On donne en particulier une dèmonstration explicite de la fameuse construction de Salem, et qui dit que tout nombre de Pisot est un point d'accumulation de l'ensemble des nombres de Salem.

En fin on donne la relation entre les nombres de Salem et les nombres de Pisot [2].

Notation

Tout au long de ce travail, nous avons utilisé les notations suivantes :

$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers.
$\mathbb{Q}$: Corps des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$: Corps des nombres réels.
$\mathbb{C}$: Corps des nombres complexes.
A^* : Ensemble des éléments non-nuls du sous-ensemble A de $\mathbb{C}$.
A^n : Produit cartésien de n copies de A,où $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{S}$: Ensemble des nombres de Pisot.
$\mathbb{T}$: Ensemble des nombres de Salem.
$\varkappa_A$: Polynôme caractéristique de A
M_α : Polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ d'un nombre algébrique α.
$D(z_0, r)$: Désigne un disque ouvert, de centre z_0 et de rayon r.
$\bar{D}(z_0, r)$: Désigne un disque fermé,de centre z_0 et de rayon r.
$\mathrm{Re}(z)$: Partie réelle d'un nombre complexe z.
$\mathrm{Im}(z)$: Partie imaginaire d'un nombre complexe z.
b-développement : le développement usuelle dans la base entière b.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

1.1 Préliminaires

Ce chapitre comprendra des rappels de définitions et de résultats importants liés à l'algèbre générale, aux séries formelles et à l'analyse complexe.

1.2 Polynôme

Dans cette section, on donne les définitions et propriétés principales des polynômes qui vont nous permettre de d'etudier les nombres algébriques plus facilement.

Définition 1.1 *On appelle polynôme à une varaiable de coefficients dans K ou plus simplement polynôme, toute expression algébrique de la forme*

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \end{aligned}$$

avec $a_i \in K$ pour tout $i \in \{0, .., n\}$,

où tous les a_i sont des nombres réels. L'élément X est appelé variable formelle. L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{R}[X]$. Un élément simple de la forme $a_i X^i$,est appelé un monôme.

Définition 1.2 *Pour tout polynôme*

$$P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le degré du polynôme P. On le note $\deg P = n$.

Proposition 1.1 *Soient $\lambda \in K$ et P,Q deux polynômes de $K[X]$ telle que :*

$$K[X] : P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

et

$$Q(X) = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + ... + b_2 X^2 + b_1 X + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ On définit alors :

1. *Addition de deux polynômes*

$$\begin{aligned} P + Q &= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \end{aligned}$$

2. *Multiplication de deux polynômes*

$$\begin{aligned} P \times Q &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{i=0}^{s} b_i X^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+s} c_i X^i, \text{où } c_i = \sum_{p+q=i} a_p b_q \end{aligned}$$

3. *Multiplication par un scalaire $\lambda.P$,est le polynôme dont le i-ème coefficient est $\lambda.a_i$.*

Définition 1.3 *Un polynôme P est dit unitaire s'il est non nul et si son coefficient dominant,le coefficient du terme de plus grand degré, est égale à 1.*

Proposition 1.2 *Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{k}$.*

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$,Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{R}[X]$.
Preuve. *Si un des deux polynômes est nul alors $PQ = 0$ et l'égalité devient $-\infty$ ce qui est ≪vrai≫ .*

On suppose donc que P et Q sont non nuls. Soit $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$. On pose $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Alors le coefficient du terme dominant de PQ est $a_n.b_m$.Or $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$ et donc, puisque $\mathbb{R}$ est intègre,$a_n.b_m \neq 0$.Ce qui implique $\deg(PQ) = n + m$. ■

1.2.1 Polynôme caractéristique

Définition 1.4 ***(Polynôme caractéristique d'une matrice)****Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau commutatif. Le polynôme caractéristique de M, noté $p_M(X)$, est le polynôme défini par*

$$p_M(X) = \det(XI_n - M).$$

Remarque 1.1 *Au lieu de l'expression précedente, certains auteurs définissent le polynôme caractéristique comme étant* $\det(M - XI_n)$*. Avec cette définition, on a l'équation* $p_M(0) = \det(M)$*. Ceci n'est pas le cas pour la définition lorsque l'ordre n est impair et* $\det(M) \neq 0$ *, puisque l'on a*

$$\det(XI_n - M) = (-1)^n \det(XI_n - M)$$

La définition présente l'avantage de rendre le polynôme caractéristique unitaire.

1.2.2 Polynôme minimal

Proposition 1.3 *Le polynôme minimal d'une matrice A est un polynôme M de degré minimal tel que $M(A) = 0$ et de coefficient dominant égal à 1.*

Preuve. D'abord M divise tous les polynômes tels que $P(A) = 0$, car si R désigne le reste de la division de P par M alors

$$R(A) = (P - QM)(A) = P(A) - Q(A)M(A) = 0,$$

Donc R est nul car son degré est plus petit que celui de M.

En particulier le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique C, car

$$C(A) = 0$$

on peut montrer que $C(A) = 0$ .Soit $C(\lambda)I$. comme $C(\lambda)I - C(A)$ peut se factoriser par $\lambda I - A$ en appliquant

$$A^k - \lambda^k I = (A - \lambda I)\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j}A^j$$

à chaque monome de C, on en déduit que $C(A)$ se factorise par $\lambda I - A$, donc $C(A) = 0$ en regardant les termes de plus haut degré de ces polynômes en à coefficients matriciels).Montrons enfin que les racines du polynôme caractéristique sont racines du polynôme minimal. En effet soit une racine du polynôme caractéristique alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Or $M(A) - M(\lambda)I$ se factorise par $A - \lambda I$ car $A^k - \lambda^k I$.

Donc $M(A) - M(\lambda)I$ ne peut pas être inversible. Comme $M(A) = 0$ on en déduit que $M(\lambda)I$ n'est pas inversible donc $M(\lambda) = 0$,λ est une racine de M. Donc si le polynôme caractéristique n'a pas de racines multiples, il est égal au polynôme minimal.

■

Exemple 1.1 *Soit la matrice $\mathcal{M}_n(R)$ est une matrice dont le polynôme minimal est x^2+1 ; Supposons d'abord qu'il existe une telle matrice, puisque x^2+1 n'a pas de racines dans R, A n'admet pas de valeurs propres réelles. Ceci n'est possible que si n est pair, sinon le polynôme caractéristique est de degré impair et s'annule.*

Réciproquement, supposons que $n=2p$ est pair. La clé est le cas $n=2$, Dans ce cas, la matrice

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans ce cas, on a également $\chi_B(x)=x^2+1$, Plus généralement, pour $n=2p$ pair quelconque, on considère la matrice diagonale par blocs comprenant sur la diagonale p blocs de B.

1.3 Nombre algébrique

Un nombre algébrique est simplement une racine d'un polynôme à coefficients entiers. Dans cette section, nous parlerons des entiers algébriques, un type bien particulier de nombres algébriques. Ces nombres ont des plusieurs application en théorie des nombres[30].

Définition 1.5 *soit $z\in\mathbb{C}$,On dit que z est un nombre algébrique s'il existe un polynôme **unitaire** $P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_2X^2+a_1X+a_0$ dans $Q[X]$ tel que $P(z)=0$, c-à-d, si z est racine d'une équation*

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_2z^2+a_1z+a_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

avec les a_i dans Q.

Définition 1.6 *Un nombre algébrique est une racine d'un polynôme non nul à coeffcients dans Q.*

Définition 1.7 *Le nombre d'or est le nombre réel positif, noté φ, égal à la fraction $\frac{a}{b}$ si a et b sont deux nombres en proportion d'extrême et de moyenne raison. Il est donné par la formule :*

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Définition 1.8 *Le nombre d'or et le réel $\sqrt{2}$ sont des entiers algébriques, car ils annulent les polynômes*

$$P(x)=x^2-x-1$$

et

$$Q(x)=x^2-2$$

respectivement.

Définition 1.9 *Pour un nombre α , le polynôme minimal de sur un champ α est le polynôme unitaire de degré minimal à coeffcients dans K. En particulier,le polynôme minimal d'un entier algébrique est toujours à coeffcients dans Z.*

Définition 1.10 *Le degré d'un nombre algébrique est le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$.*

Exemple 1.2 *Le nombre d'or et $\sqrt{2}$ sont des nombres algébriques de degré 2, car leur polynômes minimaux sont $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = x^2 - 2$ respectivement.*

Les entiers algébriques peuvent être liés par leur polynôme minimal.

Définition 1.11 *Deux nombres algébriques α et β sont conjugués s'ils ont le même polynôme minimal.*

Définition 1.12 *L'anneau des entiers d'un champ K est l'intersection de l'anneau des entiers algébriques avec le champ K.*

Définition 1.13 *On dit qu'un élément de $\mathbb{C}$ est un nombre algébrique, s'il existe un polynôme unitaire $P = P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Si de plus $P \in Z[x]$; alors est dit entier algébrique.*

Exemple 1.3 *On dit que l'extension L/Q est algébrique, si tout élément de L est algébrique.*

1. Le nombre $\alpha = \sqrt{3}$ est un entier algébrique car est racine du polynôme $x^2 - 3$.
2. Il est bien connu que toute extension finie de $\mathbb{Q}$ est algébrique. Par exemple l'extension $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)/\mathbb{Q}$ est de degré 2, et est donc algébrique.
3. Il est bien connu que le nombre $\pi = 3.14...$n'est pas algébrique.
4. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors α est un racine du polynôme $x - \alpha$, et est donc algébrique. En particulier si $\alpha \in \mathbb{Z}$ alors α est un entier algébrique.

1.3.1 Extensions de champs

La notion de sous-champ est défnie comme suit.

Définition 1.14 *Considérons un champ L. Un sous-champ de L est un sous-ensemble $K \subseteq L$ tel que K, muni des restrictions à K des opérations définies sur L, est un champ.*

Si L est une extension du champ K, alors on peut montrer que L est un K-espace vectoriel. On peut donc défnir le degré d'une extension de champ.

Définition 1.15 *Soit x un nombre algébrique de degré n et notons $x_2, x_3, ..., x_n$ ses conjugués.*

Considérons l'extension $Q(x)$ de Q de dimension n. Alors on définit sur $Q(x)$ la norme

$$N(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$$

où les homomorphismes σ_i sont définis par $\sigma_i(x) = x_i$ pour tout $i \in \{2, 3, .., n\}$,Alors on a le théorème suivant

Théorème 1.1 *Si α est un entier algébrique de $Q(x)$ alors $N(\alpha)$ est un entier.*

1.4 Entiers algébriques

Les entiers algébriques forment une classe des nombres complexes dont sont présentés ci-dessous les principales propriétés. Ils forment aussi un sous-ensemble des nombres algébriques, définis comme suit :

Définition 1.16 *Un entier algébrique est une racine d'un polynôme* ***unitaire*** *à coeff-cients dans Z.*

Définition 1.17 *soit $z \in \mathbb{C}$;On dit que z est un nombre algébrique entier, ou simplement un entier algébrique, s'il existe un polynôme* ***unitaire*** *$P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $P(z) = 0$, c-à-d, si z est racine d'une équation*

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

avec les a_i dans $\mathbb{Z}$.

Remarque 1.2 *la condition unitaire dans la définition d'entier algébrique, puisque si on retire cette condition on retombe sur la définition de nombre algébrique. En effet, on constate aisément que l'existence d'un polynôme $P(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $P(z) = 0$ est équivalente à l'existence d'un polynôme$P \in \mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$.*

Pour qu'un nombre algébrique soit un entier algébrique, il suffit d'imposer que tous les coeffcients soient des entiers et que le coeffcient du terme dominant du polynôme soit 1,c'est-à-dire que le polynôme soit unitaire. Dans ce cas, on dit aussi que le polynôme est monique.

1. Le rationnel $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier algébrique. Plus généralement, si r est un élément de $\mathbb{Q}$ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$, alors r n'est pas un entier algébrique.
2. i est un entier algébrique (il s'agit d'une racine de $P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$).

Théorème 1.2 *Toute fonction entière F à coefficients entiers d'un nombre quelconque d'entiers $\alpha, \beta, ..., \varkappa$,est encore un nombre entier.*

Lemme 1.1 *[19]Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors est un entier algébrique si et seulement si le sous-groupe abélien de $\mathbb{C} : B\langle 1, \alpha, \alpha^2, ..\rangle$ un nombre fini de générateurs.*

Lemme 1.2 *Soit $P \in \mathbb{Z}\,[X]$ un polynôme.Si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P, avec p et q premiers entre eux, alors p divise le terme indépendant de P et q divise son coefficient dominant.*

Proposition 1.4 *Si un entier algébrique est rationnel, alors il est entier. Autrement dit $\bar{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q}$.*
Preuve. *Soit q un entier algébrique qui est rationnel. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{Z}$ $[X]$ unitaire tel que $P(q) = 0$. d'aprés le lemme 1.4.2, le dénominateur de q doit diviser le coefficient dominant de P. Vu que le polynôme est unitaire, ce coefficient dominant est 1 et le nombre q est donc entier* ■

Théorème 1.3 *[29]Si α et β sont des entiers algébriques, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont des entiers algébriques.*

Définition 1.18 *On appelle entier de K un élément de K qui est un entier algébrique.*
On appelle anneau des entiers, et on note $\mathcal{O}_K$, l'ensemble des entiers de K, qui est un anneau d'après le théorème 1.4.2.

Théorème 1.4 *[29]On dit que de l'ensemble des entiers algébriques est un anneau.*

1.5 Eléments de la théorie des corps

On rappelle qu'un corps K est un anneau unitaire avec $1_k \neq 0$, pour des opérations que l'on notera toujours additivement et multiplicativement, dans lequel tout élément non nul est inversible pour la multiplication. Il suit que tous les idéaux de K sont triviaux, i.e. égaux à $\{0\}$ ou à K. Les morphismes de corps $\varphi : K \to L$ sont les morphismes d'anneaux entre deux corps. Il résulte de la nature des idéaux d'un corps qu'un tel morphisme est ou bien nul ($\varphi(x) = 0$ pour tout x de K) ,ou bien injectif.

Dans tout ce qui suit, on suppose que les morphismes de corps $\varphi : K \to L$ sont unitaires, c'est à dire qu'ils envoient l'élément unité de K sur celui de L, par suite ils seront tous injectifs.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux et les corps sont supposés commutatifs.

Définition 1.19 *Soient K et L deux corps tels que $K \subseteq L$: Alors on dit que L est une extension de K, et on écrit : L/K.*

Exemple 1.4
1. *Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$.*
2. *$\mathbb{C}$ est une extension du corps des rationnels $\mathbb{Q}$.*
3. *$\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$.*

Il est clair que si L est une extension de K ; alors L est un espace vectoriel sur K.

Définition 1.20 *Soit L/K une extension. La dimension de L comme espace vectoriel sur K s'appelle degré de l'extension, est notée $[L : K]$: Si $[L : K]$ est fini , on dit que l'extension est finie.*

Proposition 1.5 *Si E est une extension fini de L et L est une extension fini de K, alors il est facile de vérifer que E est une extension fini de K. Dans ce cas on a la relation bien connue,*

$$[E : K] = [E : L][L : K]$$

Dans ce qui suit les corps considérés sont contenues dans $\mathbb{C}$, et on rappelle que le corps $\mathbb{C}$ est intégralement clos, c'est à dire que tout polynôme à coeffcients complexes admet toutes ses racines dans $\mathbb{C}$. En particulier, si K est une extension fini de $\mathbb{Q}$, alors K est dit corps de nombres.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ Comme l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ est euclidien,l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{Q}[x], P(\alpha) = 0\}$ est un idéal principal de $\mathbb{Q}[x]$. De la défnition ci-dessus I est réduit à $\{0\}$ si n'est pas algébrique. Lorsque est algébrique, l'idéal I admet un générateur, noté M_α.On peux aussi supposer que M est unitaire.

Dans ce cas le polynôme M est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ et est unique ; ce polynôme s'appelle polynôme minimal de : En d'autres termes M_α est le seul polynôme unitaire à coeffcients rationnels,de degré minimal.

Définition 1.21 *Soit α un nombre algébrique. Alors les racines du polynôme minimal de α, noté M_α, sont dits conjugués de α, est le degré de α son polynôme minimal.*

Si α est un nombre algébrique de degré d ; alors α admet exactement d conjugués, car son polynôme minimal n'admet pas de racines doubles (il est irréductible). Dans ce cas le corps $Q(\alpha)$; qui est l'intersection de tous les sous corps de C contenant α ; est de degré d ; c'est à dire que,$[Q(\alpha) : Q] = d$.

Exemple 1.5 *l'ensemble $\left\{1, \alpha, ..., \alpha^{d-1}\right\}$ est une base du Q-espace vectoriel $Q(\alpha)$.*

Soit K un corps de nombres de degré d, Alors tout homomorphisme d'anneau de K dans $\mathbb{C}$, non-nul est injectif et laisse invariant les nombres rationnels.Un tel homomorphisme est dit plongement de K dans $\mathbb{C}$. Rappelons quíl existe exactement d plongements de K dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit lorsque $K = Q(\alpha)$, où α un nombre algébrique de degré d, que les d plongements $\sigma_1, ..., \sigma_d$ de K dans $\mathbb{C}$ transforment α en ses conjugués. De plus, si $\beta \in K$,alors les conjugués de β sont parmis les nombres $\sigma_1(\beta), ..., \sigma_d(\beta)$, chacun d'eux étant répété $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ fois.

1.6 Conjugués, normes et traces

Définition 1.22 *Soit $\Bbbk$ un corps de nombres de degré d.*

On appelle morphisme de conjugués tout morphisme σ de corps K dans $\mathbb{C}$ laissant $\mathbb{Q}$ invariant, i.e. :

$$\begin{cases} \sigma : K \to L & \\ \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) & \forall x, y \in K \\ \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) & \forall x, y \in K \\ \sigma(r) = r & \forall r \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

En particulier, σ est une application $\mathbb{Q}$-linéaire de $\Bbbk$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1.6 *soit* $\mathbb{k} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$*,et* $a + b\sqrt{5} \in \mathbb{k}$*,alors* $a, b \in \mathbb{Q}$*.*

Considérons le morphisme σ *tel que* $\sigma\left(a + b\sqrt{5}\right) = a - b\sqrt{5}$*.*$\sigma$ *est bien un morphisme de conjugaison :*

soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ *,*

1.

$$\begin{aligned} \sigma(x+y) &= \sigma\left(a + b\sqrt{5} + c + d\sqrt{5}\right) \\ &= a + c - (b+d)\sqrt{5} \\ &= \sigma\left(a + b\sqrt{5}\right) + \sigma\left(c + d\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sigma(x \times y) &= \sigma\left(\left(a + b\sqrt{5}\right)\left(c + d\sqrt{5}\right)\right) \\ &= \sigma\left(ac + bd + (ad + bc)\sqrt{5}\right) \\ &= ac + bd - (ad + bc)\sqrt{5} \\ &= \sigma\left(a + b\sqrt{5}\right)\sigma\left(c + d\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= r + 0\sqrt{5} \\ &= r \end{aligned}$$

σ peut être caractérisé de la façon suivante :σ est le morphisme qui envoie $\sqrt{5}$ sur $-\sqrt{5}$.

Théorème 1.5 *Soit* $\mathbb{k} = Q(\gamma)$ *un corps de nombres de degré* d*,*γ *un élément primitif,* $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2, ..., d$ *les racines (distinctes)du polynôme minimal de* γ*.*

Il existe exactement des morphismes de conjugaison $\sigma_1, ..., \sigma_d$ *,Chacun de ces morphismes est défini par* $\forall i = 1, .., d$ *;* $\sigma_i(\gamma) = \gamma_i$*.*

Preuve. *Soit* $F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ *le polynôme minimal de* γ *,Par définition*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i \sigma(\gamma)^i &= \sigma \sum_{i=0}^{n} a_i \gamma^i \\ &= \sigma(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout morphisme de conjugaison σ*,*$\sigma(\gamma)$ *est une racine de* F *. Comme* $\sigma(\gamma)$ *détermine* σ*,, il existe au plus d morphismes de conjugaison.*

Pour montrer qu'il y a exactement des morphismes de conjugaison, déterminons les tous.

On les définit ainsi :

$$\sigma\left(\sum_{k=0}^{d-1} a_k \gamma^k\right) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \sigma_k(\gamma)^i = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \gamma_i^k$$

A partir de la notion de morphisme de conjugaison, on définit la notion de discriminant associé à une base d'un corps de nombres. ■

Définition 1.23 *Soit* $\mathbb{k}$ *un corps de nombres de degré* d, $\sigma_1 = Id, \sigma_2, ..., \sigma_d$ *les des morphismes de conjugaison de* $\mathbb{k}$. *Pour* $x \in \mathbb{k}$, *on définit* ***la norme*** *de* x, *notée* $N(x)$ *et* ***la trace*** *de* x, *notée* $T(x)$ *par :*

1. ***la norme :***

$$N(x) = \sigma_1(x)\,\sigma_2(x)\,...\sigma_d(x)$$

2. ***la trace :***

$$T(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + ... + \sigma_d(x)$$

Notons que pour $x \in \mathbb{Q}$, $N(x) = x^d$.

Théorème 1.6 *Soit* $\mathbb{k}$ *un corps de nombres de degré* d.

$$\begin{array}{cc} \forall x \in \mathbb{k} & N(x) \in \mathbb{Q},\ et\ T(x) \in \mathbb{Q} \\ \forall x, y \in \mathbb{k} & T(x+y) = T(x) + T(y) \\ \forall x, y \in \mathbb{k} & N(xy) = N(x)N(y) \\ \forall x \in \mathbb{k} & N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array}$$

Preuve. *1.on applique la théorie de Galois.*

2.évident.

3.évident.

4. $N(x) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, .., d\}, \sigma_i(x) = 0$, *Or si* x *s'écrit* $x = P(\gamma)$ *avec* $P \in \mathbb{Q}_{d-1}[x]$,$\sigma_i(x) = 0 \Leftrightarrow P(\gamma_i) = 0$,

et comme le polynôme minimal de γ_i *est* F,*qui est de degré* d, $P = 0$ *et donc* $x = 0$.

■

Exemple 1.7 *soit* $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ *un corps quadratique. Alors les morphismes de conjugaison sont* $\sigma_1 = Id$ *et* $\sigma_2\left(\alpha + \beta\sqrt{d}\right) = \alpha - \beta\sqrt{d}$ *.Par conséquent,*$N\left(\alpha + \beta\sqrt{d}\right) = \alpha^2 - d\beta^2$ *et* $T\left(\alpha + \beta\sqrt{d}\right) = 2\alpha$.

1.7 Idéaux

Définition 1.24 *Une partie* I *d'un anneau* A *est un idéal à gauche (resp. à droite) si*

a $(I, +)$ *est un sous-groupe de* $(A, +)$.

b Pour tout $a \in A$, *pour tout* $x \in I$, *on a* $ax \in I$ *(resp.* $xa \in I$*).*

On dit que I est un idéal bilatère s'il est à la fois un idéal à gauche et à droite.

1.7.1 Idéaux premiers.

Définition 1.25 *Soit P un idéal de A. On dit que P est premier si l'anneau quotient A/P est intégre. Comme un anneau intégre est $\neq \{0\}$, c'est à dire $P \neq A$ et P vérifie les conditions équivalentes suivantes :*
soient $a, b \in A$ et I, J deux idéaux;
- si $a \notin P$ et $b \notin P$ alors $ab \notin P$.
-si $ab \in P$ alors $a \in P$ ou $b \in P$.
-si $IJ \subseteq P$ alors $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$.
-si $I \nsubseteq P$ et $J \nsubseteq P$, alors $IJ \nsubseteq P$.
Comme un corps est un anneau intégre, tout idéal maximal de A est premier

Remarque 1.3 *On note $Spec(A)$, resp. $Max(A)$, l'ensemble des idéaux premiers, resp. maximaux, de A.*

Lemme 1.3 *Soit $P \in Spec(A)$, et soient $I_1, ..., I_n$ des idéaux de A.*

1. *Si $I_1, ..., I_n \subseteq P$, alors P contient des I_k.*
2. *Si $\bigcap_{k=1}^{n} I_k \subseteq P$, alors P contient des I_k.*

Définition 1.26 ***(Idéaux maximaux)*** *Soit I un idéal de A. On dit que I est un idéal maximal si $I \neq A$ et s'il n'existe pas d'idéal $J \neq A$ contenant strictement I.*
On notera que, par définition, l'idéal A n'est ni maximal ni premier.

Lemme 1.4 *Soit I un idéal de A. Alors : I est maximal $\Leftrightarrow$ A/I est un corps.*

En particulier, comme un corps est un anneau intégre, tout idéal maximal de A est premier.
Preuve. *Supposons que A/I soit un corps et soit $x \in A \setminus I$. Alors, l'image $\bar{x}$ de x dans A/I est $\neq 0$, donc inversible, donc il existe $a \in A$ tel que $\bar{a}\bar{x} = 1$. Ceci signifie que $ax - 1 \in I$. Alors*

$$1 = ax + (1 - ax) \in Ax + I$$

et donc $I + Ax = A$, pour tout $x \notin I$. Ceci prouve que I est maximal.
Réciproquement, supposons que I soit maximal et soit $x \notin I$. Alors l'idéal $Ax + I$ égale A, donc il existe $a \in A$ et $y \in I$ tels que $ax + y = 1$. Alors, dans A/I on a $\bar{a}\bar{x} = 1$ et ceci prouve que x est inversible. Comme x est arbitraire dans $A \setminus I$ ceci prouve que A/I est un corps. ■

Lemme 1.5 *1-Si P est un idéal premier contenant I, il contient aussi $\sqrt{I}$ En particulier ,$P = \sqrt{P}$.*
2- Si $P_1, ..., P_n \in Spec(A)$, l'idéal $P_1 \cap ... \cap P_n$ est réduit.

1.7.2 Idéaux d'un corps de nombres

Définition 1.27 *Soit $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\lambda)$ un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de $\mathbb{k}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{k}$. On appelle idéal fractionnaire de $\mathbb{k}$ engendré par $\alpha_1, ..., \alpha_n$ le $\mathcal{O}_K$-module engendré par $\alpha_1, ..., \alpha_n$. On note $\mathcal{I}(\mathbb{k})$ l'ensemble des idéaux fractionnaires de $\mathbb{k}$.*
Si $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{O}_K$, on dit que c'est un idéal entier de $\mathcal{O}_K$.

Remarque 1.4 *Un idéal entier de $\mathcal{O}_K$ est un idéal de $\mathcal{O}_K$.*

Définition 1.28 *Soient $A = \langle \alpha_1, ..., \alpha_n \rangle$ et $B = \langle \beta_1, ..., \beta_n \rangle$ deux idéaux fractionnaires de $\Bbbk$. On pose :*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A.B = \{\sum_{i=1}^{q} a_i b_i \mid q \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, b_i \in B\}$$

Remarque 1.5 *Il est clair que :*

$$A + B =< \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n >$$

et

$$A.B =< \alpha_1\beta_1, ..., \alpha_1\beta_m, \alpha_2\beta_1, ..., \alpha_n\beta_1, ..., \alpha_n\beta_m > .$$

Proposition 1.6 [15] $(\mathcal{I}(\Bbbk)^*, .)$*est un groupe commutatif d'élément neutre $< 1 >= \mathcal{O}_K$.*

1.8 Rappel d'analyse complexe

1.8.1 Séries entières

Définition 1.29 *On appelle série entière toute série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où a_n sont des scalaires et z une variable, complexes.*

Définition 1.30 *On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le nombre*

$$\rho = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}_+, \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \leq +\infty \right\} \in \bar{\mathbb{R}}_+;$$

et disque de convergence ou domaine de convergence d'une telle série la boule $D(0; \rho)$.

Théorème 1.7 *soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières la rayons de convergences respectifs K et K'.*

On désigne par K'' le rayon de convergence de la série entière somme

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

alors $K'' \geq \min(K, K')$ [27].

1.8.2 Fonctions analytiques

Définition 1.31 (***série de Taylor***)*Soient ϕ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \phi \to \mathbb{C}$ Une application. Soit $t \in \phi$. On dite que f est analytique en t s'il existe un nombre $r > 0$ tel que le disque $D(t;r)$ soit contenu dans ϕ et une série entière*

$$\sum_{n\geq 0} a_n w^n$$

de rayon de convergence $\rho \geq r$ tels que, pour $z \in D(t;r)$, on ait

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-t)^n .$$

On dit que f est analytique sur ϕ si elle est analytique en tout point de ϕ.

Proposition 1.7 [17]*soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la série entière dont le rayon de convergence $\rho \neq 0$. Soit t un point de l'intérieur du disque de convergence. Alors la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(t)}{n!} w^n$,a un rayon de convergence au moins égal à $\rho - |t|$ et on a :*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (z-t)^n .$$

pour tout z tel que $|z-t| < \rho - |t|$.

Proposition 1.8 *La somme $S(z)$ d'une série entière convergente $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, de rayon de convergence $\rho > 0$ est une fonction analytique dans le disque $|z| < \rho$.*
Preuve. *la série $S(z)$ est entière, donc d'aprés la proposition précédente,elle est développable en série de Taylor en tout point de l'intérieur de disque de convergence donc analytique.* ■

1.8.3 Fonctions holomorphes

Définition 1.32 *Soit ϕ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \phi$. Une fonction $f : \phi \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en a si la limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$; elle est dite holomorphe dans ϕ si elle est holomorphe en tout point de ϕ.On note $H(\phi)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert ϕ de $\mathbb{C}$.

Lemme 1.6 *Toute fonction analytique sur un ouvert ϕ de $\mathbb{C}$ est holomorphe[17].*

1.8.4 Formule des résidus

Nous allons maintenant aborder un sujet qui sera d'une grande utilité pour la suite : la notion de résidu d'une fonction complexe[15].

Définition 1.33 *Soit Φ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Phi$ et $f : \Phi \diagdown \{a\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. S'il existe une fonction $g : \Phi \diagdown \{a\} \to \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n} \text{ et } g(a) \neq 0, \; \forall z \Phi \diagdown \{a\}$$

alors a est un pôle d'ordre n.

Définition 1.34 *Soit Φ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite méromorphe dans Φ s'il existe une partie discrète F de Φ telle que $f \in H(\Phi \diagdown F)$ et tout point de F soit un pôle de f.*

On note $\mathbf{M}(\Phi)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Φ.

Remarque 1.6 *Toute fonction méromorphe f peut être exprimée sous la forme d'un quotient de deux fonctions holomorphes h et g définies sur Φ.*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

telles que l'ensemble des points F soit l'ensemble des 0 de h.

Définition 1.35 *Soit Φ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Phi$. Si la fonction f est holomorphe sur $\Phi \diagdown \{z_0\}$, elle possède un d´eveloppement de Laurent en z_0 ;*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$$

et le coefficient a_{-1} de $(z-z_0)^{-1}$ dans ce d´eveloppement s'appelle le résidu de f en z_0. De plus si z_0 et un pôle d'ordre 1 alors :

$$\operatorname{Re} s(f.z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

1.9 Quelques critères rationnelles

Définition 1.36 *Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit $H(X)$ une série formelle de l'anneau $\mathbf{K}[[X]]$. La série S est dite rationnelle s'il existe deux polynômes P et Q de l'anneau $\mathbf{K}[X]$ avec $Q(0) \neq 0$ tels que : $H = P/Q$.*

Proposition 1.9 *Une série formelle $H(X) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$,de l'anneau $\mathbf{K}[[X]]$ est rationnelle si et seulement s'il existe deux entiers s, n_0 et $(s+1)$ eléments $q_0, q_1, .., q_s$ avec $q_0 \neq 0$, du corps $\mathbf{K}$ tels que :*

$$q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + ... + q_s a_{n-s} = 0, \forall n \geq n_0.$$

Pour plus de détails et de preuves de la propriété, voir [3] et [21].

Lemme de Fatou

Le lemme de Fatou peut également être considéré comme une condition algébrique de rationalité, bien qu'il puisse être appliqué dans des cas plus généraux en remplaçant l'anneau de Dedekind par un autre type d'anneau. Cependant, pour les besoins de cette discussion, nous nous concentrerons sur le cas particulier de l'anneau de Dedekind.[4],[3]

Lemme 1.7 *Si H est une série formelle rationnelle de l'anneau $\mathbb{Z}[[X]]$, alors il existe deux polynômes P et Q de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$, premiers entre eux tels que : $H = P/Q$,avec $Q(0) = 1$.*

CHAPITRE 2

NOMBRES DE PISOT

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on a fait une étude sur Les nombres de Pisot qui sont des entiers algébriques réels riches en propriétés arithmétiques, ce qui explique leur apparition dans plusieurs domaines des mathématiques.Les preuves de la majeur partie des résultats énoncés dans ce chapiter se trouvent dans les ouvrages suivants [3] [16]

Les nombres de Pisot ont été introduits par Pisot dans sa thèse en 1938, bien qu'ils aient été considérés plus tôt par Thue et Hardy. Pisot était principalement concerné par le lien avec l'analyse harmonique, mais en vertu de leurs propriétés arithmétiques, ils apparaissent naturellement dans de nombreux autres domaines comme la théorie ergodique, les systèmes dynamiques, les groupes algébriques et la numération non standard.

2.2 Définition et exemple sur les nombres de Pisot

Les nombres de Pisot sont une classe remarquable de nombres algébriques ayant la définition suivant :

Définition 2.1 *Un nombre de Pisot est un entier algébrique réel plus grand que* 1, *dont les conjugués autres que lui-même sont de modules inférieurs à* 1.

Plus précisément, un nombre de Pisot est un nombre algébrique α de degré $n \geq 2$ tel que toutes les autres racines de son polynôme minimal ont une norme inférieure à 1. La norme d'un nombre algébrique est définie comme la valeur absolue du produit de toutes ses conjugais.

Exemple 2.1

1. *Tout entier rationnel plus grand que* 1 *est un nombre de Pisot.*
2. *pour* $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, λ *est un nombre de Pisot de degré* 2, *car*

$$\begin{aligned} M_{\lambda}(x) &= x^2 - x - 1 \\ &= \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

et son polynôme minimal admet une autre racine $\left(\text{qui est } \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ *de module* < 1.

2.3 Ensemble $\mathbb{U}$

nous définirons une partition de cet ensemble qui servira de fil conducteur au prochain section[27][16][3].

Définition 2.2 $\mathbb{U}$ *est l'ensemble des nombres réels algébriques* $\alpha \geq 1$ *tel que ses conjugués soient de modules au plus* 1.

Théorème 2.1 *Soit* α *un réel* ≥ 1. *Supposons qu'il existe un réel* $\lambda \geq 1$ *tel que :*

$$\| \lambda\alpha^n \| \leq \frac{1}{2e\alpha(1+\log\lambda)(1+\alpha)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors α *est un entier algébrique réel, ses conjugués sont de modules au plus égaux à* 1 *et* λ *appartient au corps* $\mathbb{Q}(\alpha)$, *engendré sur* $\mathbb{Q}$ *par* α.

Remarque 2.1 *On voit que la suite* $(\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant la condition précédente ci-dessus est non équirépartie* $(\mathrm{mod}\, 1)$ *: eneffet puisque*

$$2e\alpha(1+\log\lambda)(1+\alpha) > 8$$

alors

$$\| \lambda\alpha^n \| < \frac{1}{8}, \forall n \in \mathbb{N}$$

donc la suite d'entiers de terme général

$$\psi(n) = Card\left\{k \in \mathbb{N}, k < n, \frac{1}{8} \leq \{u_k\} \leq \frac{7}{8}\right\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

est nulle, par conséquent

$$\psi(n)/n_{n \to +\infty} \to 0 \neq \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

et la suite $(\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *équirépartie* $(\mathrm{mod}\,1)$.

Afin de prouver le théorème, nous avons besoin de résultats auxiliaires posons :

$$u_n = E'(\lambda\alpha^n), \xi_n = \xi(\lambda\alpha^n) \quad \text{où} \quad u_n + \xi_n = \lambda\alpha^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

introduisons la forme linéaire V_n définie sur $\mathbb{R}^{s+1}$ par

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{s} u_{n+k}x_k \quad \text{où } s \in \mathbb{N}^*$$

Lemme 2.1 *supposons qu'il existe* $a = (a_0, ..., a_s) \in \mathbb{Z}^{s+1} \setminus (0)$ *et* $A \in \mathbb{N}^*$ *tels que :*

$$\sup_{0\leq k\leq s} |a_k| \leq A$$

1\Si $V_n(a) = 0$:

$$\xi_k < \frac{1}{(s+1)(\alpha+1)}, \forall k \in \mathbb{N}$$

alors$V_{n+1}(a) = 0$.
Preuve. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} |V_{n+1}(a) - \alpha V_n(a)| &= \left|\sum_{k=0}^{s} a_k (u_{n+k+1} - \alpha u_{n+k})\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{s} a_k \left(\left(\lambda\alpha^{n+k+1} - \xi_{n+k+1}\right) - \alpha\left(\lambda\alpha^{n+k} - \xi_{n+k}\right)\right)\right| \end{aligned}$$

d'où

$$|V_{n+1}(a) - \alpha V_n(a)| = \sum_{k=0}^{s} \left|a_k \left(\xi_{n+k+1} - \alpha\xi_{n+k}\right)\right|.$$

Or

$$\begin{aligned} \left|a_k\left(\xi_{n+k+1} - \alpha\xi_{n+k}\right)\right| &\leq A\left(\left|\xi_{n+k+1}\right| - \alpha\left|\xi_{n+k}\right|\right) \\ &< \frac{1A}{(s+1)(\alpha+1)A} = \frac{1}{(s+1)} \end{aligned}$$

donc
$$|V_{n+1}(a) - \alpha V_n(a)| < \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{(s+1)} = 1$$
Puisque $V_n(a) = 0$ alors $|V_{n+1}(a)| < 1$,or c'est un entier, on a donc $V_{n+1}(a) = 0$ ∎

2\ Si
$$\xi_k < \frac{1}{(s+1)(\alpha+1)A}, \forall k \in \mathbb{N}$$
alors
$$A \geq 2\lambda^{\frac{1}{s}}\alpha - 1$$
donc il existe $a \in \mathbb{Z}^{s+1} \backslash (0)$ tels que $V_0(a) = 0$.

Preuve. (du théoréme 2.3.1) D'après les deux condition précédents nous pouvons accéder $a = (a_k)_{0 \leq k \leq s}$, avec des a_k non tous nuls dans $\mathbb{Z}$, tels que
$$u_0 a_n + u_1 a_{n+1} + ... + u_s a_{n+s} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$
alors la série
$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$
et rationnelle, d'où l'existence de deux polynômes B et Q premiers entre eux, avec $Q(0) = 1$, à coefficients entiers tels que
$$\begin{aligned} \frac{B(z)}{Q(z)} &= \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} (\lambda \alpha^n - \xi_n) z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \lambda \alpha^n z^n - \sum_{n \geq 0} \xi_n z^n. \end{aligned}$$
On a
$$|\xi_n|^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$
alors
$$\lim_{n \to +\infty} \sup |\lambda \alpha^n|^{\frac{1}{n}} = \alpha, \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \sup |\xi_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$
Ainsi, les séries $\sum_{n \geq 0} \lambda \alpha^n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \xi_n z^n$sont convergentes respectivement sur les disques $D(0, 1/\alpha)$ et $D(0, 1)$ alors
$$\frac{B(z)}{Q(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda}{1 + \alpha z} - \xi_n z^n, \forall z \in D(0, 1/\alpha)$$
la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ etant analytique sur $D(0, 1)$, la fonction f telle que $f(z) = \frac{B(z)}{Q(z)}$ admet le nombre $1/\alpha$ comme unique pôle (d'ordre 1) sur $D(0, 1)$.

Ainsi le polynôme $Q(z)$ possède l'unique zéro $1/\alpha$ dans le disque $D(0, 1)$, le nombre α et un entier algébrique ; les conjugués $1/\alpha_k$ de $1/\alpha$, étant hors de $D(0, 1)$ dans $\mathbb{C}$, les α_k sont de module ≤ 1.

Par ailleurs le résidu de f en $1/\alpha$ est :

$$\operatorname{Re} s\,(f, 1/\alpha) = \lim_{z \to 1/\alpha} (z - 1/\alpha) \left(\frac{\lambda}{1 + \alpha z} - \xi_n z^n \right) = -\frac{\lambda}{\alpha} \tag{2.1}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s\,(f, 1/\alpha) &= \lim_{z \to 1/\alpha} (z - 1/\alpha) \frac{B(z)}{Q(z)} \\ &= \lim_{z \to 1/\alpha} \frac{B(z)}{\frac{Q(z)}{(z-1/\alpha)}} \\ &= \frac{B\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

de 2.1et2.2 on obtient

$$\lambda = -\alpha \frac{B\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Ainsi, le nombre λ est bien un élément du $Q(\alpha)$. ■

2.4 Ensemble des nombres de Pisot $\mathbb{S}$

on a étudié l'ensemble $\mathbb{U}$ et on a constaté que $\mathbb{S}$ peut être diviser l'ensemble $\mathbb{U}$ en plusieurs sous-groupes suivant les valeurs possibles prises par le module des nombres appartenant à $\mathbb{U}$[8][22][4].

Maintenant, dans ce qui suit, nous allons définir l'ensemble des nombres de Pisot :

Définition 2.3 *On appelle nombre de Pisot tout entier algébrique réel plus grand que* 1 *dont les conjugués sont de module strictement inférieur à* 1*.*

Définition 2.4 *On note $\mathbb{S}$ l'ensemble des nombres de Pisot ; c'est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{U}$ introduit précédemment.*

Remarque 2.2 *L'ensemble $\mathbb{S}$ est constitué de tous les entiers rationnels supérieurs à* 1*.*

Théorème 2.2 *Toute extension algébrique réelle de degré fini du corps des nombres rationnels Q contient une infinité de nombres de $\mathbb{S}$ dont le degré est égal à celui de l'extension, et certains de ces nombres sont des unités.*

2.4.1 Caractérisation des nombres de Pisot

l'ensemble $\mathbb{U}$ est inclus dans l'ensemble exceptionnel du théorème de Koksma[3].Si α est un nombre de Pisot alors la suite (α^n) converge vers zéro modulo 1.

Proposition 2.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{S}$. Alors $\forall n \in N$,$(\lambda^n) \in \mathbb{S}$[3].*

Théorème 2.3 *Soit λ un nombre de Pisot $\mathbb{S}$; la suite (λ^n) converge vers zéros module 1.*

Preuve. *Soient $\lambda \in \mathbb{S}$,et $\omega = \sup_{k\in[2,n]} \left(\lambda^{(k)}\right)$.*

Le nombre

$$\lambda^n + \sum_{k=2}^{s} \lambda^{(k)^n}$$

est un nombre entier ,car λ^n est un nombre de Pisot par la propriété précédente, donc ce nombre est égal au coefficient q_{s-1} de son polynôme minimal.L'inégalité $\left|\sum_{k=2}^{s} \lambda^{(k)^n}\right| \leq (s-1)\,\omega^n$ implique que pour un n suffisamment grand, on aura $\|\lambda^n\| = \left|\sum_{k=2}^{s} \lambda^{(k)}\right|$ En effet, le terme $\left|\sum_{k=2}^{s} \lambda^{(k)}\right| \to 0$,On en déduit que la suite $\|\lambda^n\| \to 0$ géométriquement.

■

Proposition 2.2 *Soit ψ une fonction méromorphe sur un ouvert Ω contenant $\bar{D}(0,1)$.Supposons que φ possède un développement en série de Taylor en 0 sur le disque $D(0,1)$*

$$\psi = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Alors ψ ne possède pas de pôle sur le cercle $C(0,1)$.

Preuve. *en utilisant la deuxémé Proposition dans le titer fonctions analytiques, la fonction ψ analytiques sur $D(0,1)$.*

alors que le rayon de convergence de la série est donc $R \geq 1$.

premier cas : *si $R \geq 1$ alors ψ ne posséde pas de pôle sur le cercle $C(0,1)$.*

deuxéme cas :*si $R = 1$ alors ψ posséde au moins un point singulier sur le cercle $C(0,1)$.*

On peut supposer, sans perte de généralité, que cette singularité se trouve en $z = 1$.

soit $\xi > 0$,il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|a_n| < \xi$. Ainsi pour $0 < r < 1$, on a

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n z^n\right| + \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|\, r^n \\ &\leq M + \xi \frac{r^{n_0}}{1-r} \qquad \text{, } M \text{ est un constante} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\psi(z)|(1-r) &\leq M(1-r) + \xi \\ \lim_{r\to 1} |\psi(r)|(1-r) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que 1 est pôle de ψ

En effet, si 1 est un pôle d'ordre $m \geq 1$ de la fonction ψ, on a sur un voisinage de 1.

$$\psi(r) = \frac{k(r)}{(r-1)^m}, \text{ où } k(r) \neq 0$$

et la limite nous donne justement que

$$\lim_{r\to 1}\frac{k\,(r)}{(r-1)^{m-1}}=0$$

alors $k(1)=0$*. C'est absurde, on a donc* $R>1$*.* ■

Théorème 2.4 *[27]Un nombre réel algébrique* $\lambda>1$ *appartient à* $\mathbb{S}$ *si et seulement s'il existe un réel* $\lambda=0$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty}\|\lambda\alpha^n\|=0.$$

2.5 Propriétés et applications des nombres de Pisot

Les nombres de Pisot sont une classe particulière de nombres algébriques qui ont des propriétés intéressantes en théorie des nombres et en géométrie. Ils ont été étudiés pour la première fois par le mathématicien français Marcel-Paul Schützenberger et le mathématicien belge Axel Thue, et sont nommés d'après le mathématicien français Charles Pisot[3],[19].

Les nombres de Pisot ont plusieurs propriétés intéressantes, notamment :

Proposition 2.3 *Soit* α *un nombre* $\mathbb{U}$*. Alors* α *est un* 0 *d'un polynôme à coefficients entiers dont les valeurs absolues sont* $\leq\alpha$*.*

Proposition 2.4 *Soit* $\lambda\in\mathbb{S}$ *. Supposons qu'il existe un sous-ensemble* K *de* $\{1,2...,s\}$ *et d'entiers* ϱ_k *où* $k\in K$ *,tel que*

$$\prod_{k\in K}\lambda^{(k)^{\varrho_k}}=1$$

Alors soient $\varrho_k=0$*,et* $\varrho_k=\varrho_1,(\forall k\in K)$

Preuve. *nous avons* $\varrho_{k1}=\max_{k\in K}|\varrho_k|$ *avec* $k_1=\min_{k\in K}k$*,Puisque le groupe de Galois d'un polynôme irréductible agit transitivement sur ses racines, on peut supposer* $k_1=1$*.*

nous concluons

$$\left|\lambda^{(1)}\prod_{k\in K\setminus\{1\}}\lambda^{(k)}\right|\leq\left[\lambda^{(1)^{\varrho_1}}\prod_{k\in K\setminus\{1\}}\lambda^{(k)^{\varrho_k}}\right]^{1/\varrho_1}\leq 1,$$

cela contredit

$$\left|\prod_{k=1,2,..,s}\lambda^{(k)}\right|\geq 1$$

sauf $\varrho_k=0$ *ou* $k=\{1,2...,s\}$*,et* $\varrho_k=\varrho_1,(\forall k\in K)$*.* ■

Corollaire 2.1 *soit* $\lambda\in\mathbb{S}$*, et soit*

$$\rho^{(k)}e^{i\varphi^{(k)}},\rho^{(k)}e^{-i\varphi^{(k)}}\qquad(k\in K_\lambda\subset\{2,..,s\})$$

désignent les conjugués non réels de λ*. Puis les nombres réels* 2π *et* $\varphi^{(k)}$ $(k\in K_\lambda)$*sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants [3].*

Les nombres de Pisot ont une propriété remarquable. Les puissances d'un nombre de Pisot approximent toujours un entier (cf. proposition suivant). Pour démontrer cette propriété :

Proposition 2.5 *Si α est un nombre de Pisot, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} d\left(\alpha^n\right) = 0.$$

Preuve. Soient $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_d$ les conjugués de α,Comme $|\alpha_i| < 1$ pour tout $i \in \{2, 3, ..., d\}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_i^n = 0$$

pour tout i.

On en tire que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_2^n + \alpha_3^n + .. + \alpha_d^n = 0.$$

On vu la remarque ,il existe un entier b_n tel que :

$$\alpha^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + .. + \alpha_d^n = b_n$$

donc

$$b_n - \alpha^n = \alpha_2^n + \alpha_3^n + .. + \alpha_d^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(b_n - \alpha^n\right) = \alpha_2^n + \alpha_3^n + .. + \alpha_d^n = 0$$

■

Remarque 2.3 *Comme un nombre de Pisot x_1 est une racine d'un polynôme unitaire à coeffcients entiers, les $e_i\left(x_1, .., x_n\right)$ correspondants sont tous des nombres entiers.on remarque que les $p_k\left(x_1, .., x_n\right)$sont des entiers.*

Ceci permet de conclure,cette proposition montre en particulier que les puissances d'un nombre de Pisot approximent des entiers avec une vitesse de convergence exponentielle.

L'ensemble des nombres de Pisot est usuellement noté $\mathbb{S}$. Beaucoup de résultat sont connus sur les nombres de Pisot. Citons quelques un :

1. $\min \mathbb{S} = \lambda_0 = 1.3247...$,où $\lambda_0^3 - \lambda_0 - 1 = 0$[5].
2. L'ensemble $\mathbb{S}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ [22].
3. Le plus petit point limite de $\mathbb{S}$ est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$[5].

2.6 Points limites de l'ensembles de Pisot

Dans cette section nous allons montrer en particulier que $\mathbb{S}$ est un ensemble fermé[19] [23]et[4],la preuve de cette propriété nécessite quelques résultats intermédiaires.

Définition 2.5 *soient $v \in \mathbb{N}^*, w \in \mathbb{N},$ et $\delta > 0$, On note par $\mathcal{F}(v, w, \delta)$ .L'ensemble des fonction rationnelles f qui peuvent s'ecrire sous la forme $f = \frac{B(z)}{Q(z)}, B, Q \in \mathbb{Z}[x]$,où B et Q sont des polynôme à cofficients entiers tels que :*

1. $Q(0) = v$, et $B(0) \neq 0$.
2. $\left|\frac{B(z)}{Q(z)}\right| \leq 1 \Longrightarrow |B(z)| \leq |Q(z)|$ sur $\mathbb{S}$.
3. Q possède au plus une racine dans $D(0,1)$ et soit non nul sur $D(0,\delta) \cup \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Remarque 2.4 *suppose que $\mathcal{F}(\delta)$ est un ensemble compact pour la norme de la convergence uniforme dans l'ensemble $\mathbb{S}$.*

Remarque 2.5 *Pour prouver que $\mathbb{S}$ est un ensemble fermé on utilise la compacité des familles $\mathcal{F}(v, w, \delta)$ et on pose $v = 1$ et $w = 1$ alors la familles $\mathcal{F}(1, 1, \delta)$.*

Corollaire 2.2 *Soit λ est un nombre de Pisot ($\lambda \in \mathbb{S}$) son polynôme minimal s'écrira :*

$$P = X^n + q_{n-1}X^{n-1} + ... + q_0, \quad \{ q_i \in \mathbb{Z}, i = 0, ..., n-1\}.$$

On note $P^+ = \xi P$, avec $\xi = \pm 1$, tel que $P^+(0) > 0$.De plus, on notera P^* le polynôme réciproque de P.

Le lemme suivant établit un lien entre Sand $\mathcal{F}(\delta)$.

Lemme 2.2 [19]*Supposons que g et h sont deux fonctions analytiques sur le disque $D(0,t)$ avec $t > 1$, telle que :*

1. $|g(z)| \leq |h(z)|$, *avec* $|z| = 1, z \in \mathbb{S}$.

2. $g(z) - h(z) = \gamma_n z^n + ... = \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_n X^n$,*avec* $\gamma_n \neq 0$.

alors $h(z)$ a au moins n zéros dans $D(0,t)$.

Lemme 2.3 *Si λ est un nombre de Pisot, alors il existe au moins un polynôme B à coefficients entiers, distinct de Q, telle que :*

1. $B(0) > 1, B(z) \neq Q(z)$.

2. $|B(z)| \leq |Q(z)|$*sur* $\mathbb{S}$.

Preuve. *Si les polynômes P et Q ne sont pas identiques, alors on choisit $B = P^+$. Dans le cas contraire, si P et Q sont identiques, on a*

$$P^+ = Q = X^2 - q_1X + 1, (\text{avec } q_1 \geq 3)$$

et on choisit les polynômes $B_1 = 1$ *et* $B_2 = (1-X)^2$.

Il est à noter que supposer que B *est différent de* Q *et premier avec* Q *est équivalent. Étant donné que le polynôme* Q *est irréductible, si* B *n'est pas premier avec* Q*, alors il est un multiple de* Q*. Ainsi, si l'égalité* $B = AQ$*est vraie dans* $\mathbb{Z}[x]$*, avec* $|A(z)| \leq 1$ *pour tout* z *appartenant à* $C(0,1)$*, et* $A(0) \geq 1$*, alors cela implique que* $A = 1$*.*

Le lemme précédent2.2 permet d'associer à chaque élément λ *de* $\mathbb{S}$ *au moins une fonction de* $\mathcal{F}(\delta)$*. En effet, si nous définissons* $f(z) = B(z)/Q(z)$*, alors la fonction* f *appartient à* $\mathcal{F}(\delta)$ *avec* $0 < \delta < \frac{1}{\lambda}$ *et vérifie l'inégalité* $f(0) \geq 1$*. Nous montrerons plus tard que* λ *est un point limite de* $\mathbb{S}$ *s'il existe plusieurs polynômes satisfaisant les conditions du lemme 2.3. Autrement dit, plusieurs fonctions de* $\mathcal{F}(\delta)$ *peuvent être associées à* A*. Pour* $f(z) = A(z)/Q(z)$*,* $f \in \mathcal{F}(\delta)$ *avec* $0 < \delta < 1/\lambda$*, et vérifiant* $f(0) \geq 1$ *(car* $f(0) = B(0)/Q(0)$*, avec* $B(0) \geq 1$ *et* $Q(0) = 1$*).* ■

Théorème 2.5 *L'ensemble de nombres de Pisot* $\mathbb{S}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$*[22] [25].*

Preuve. L'objectif est de démontrer que tout point sur la frontière de $\mathbb{S}$ appartient également à $\mathbb{S}$. Plus précisément, si μ est un élément de la frontière de $\mathbb{S}$, alors $\mu \in \mathbb{S}$.Il y a deux situations à considérer :

premier cas : point isolé,et dans ce cas il s'agit bien d'un nombre de Pisot.

deuxéme cas : point d'accumulation de $\mathbb{S}$.

On note alors $(\lambda_\nu)_\nu$ une suite d'éléments de $\mathbb{S}$ qui converge vers μ quand ν tend vers l'infini.D'après le lemme2.3 précédent, on peut associer à chaque λ_ν une fonction f_ν de $\mathcal{F}(\delta)$, avec $\delta < \inf 1/\lambda_\nu$, de la forme $\frac{B_\nu}{Q_\nu}$, et telle que $f_\nu(0) \geq 1$.Etant donné que l'ensemble $\mathcal{F}(\delta)$ est compact, on peut extraire de la suite $(\lambda_\nu)_\nu$ une sous-suite, que l'on notera toujours (λ_ν), telle que la suite (f_ν) associée à cette sous-suite converge vers $f \in \mathcal{F}(\delta)$.

Maintenant, nous prouvons que f a un pôle dans $D(0,1)$. Soit le développement de Taylor des fonctions f_ν et f :

$$f_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\nu,n} z^n, \text{ et } \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

Tous les coefficients $u_{\nu,n}$ et u_n sont des entiers : en effet, $f^{(n)}(0) \in \mathbb{Z}$, car $\forall n \in \mathbb{N}$ $Q(0)^n = 1$.

Etant donné que

$$\lim_{\nu \to +\infty} u_{\nu,n} = u_n$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \nu_0(n)$ tel que $\forall \nu(n) \geq \nu_0(n)\,; u_{\nu(n)} = u_n$.Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, la fonction ν admet un pôle dans $D(0,1)$ (plus précisément en $1/\lambda_\nu$), et telle que $u_{n,0} \geq 1$ car $u_{n,0} = |q_{\nu,0}| \neq 0$.

Soit la fonction $h_\nu(z) = (g_\nu(z) - u_{\nu,0})Q_\nu(z)$. Par le lemme : $u_{n,1} \neq 0$.Si

$$u_{n,1} = 0 : h_\nu(z) = B_\nu(z) - u_{\nu,0} Q_\nu(z)$$

alors

$$|B_\nu(z)| \leq |u_{\nu,0} Q_\nu(z)|$$

et

$$h(z) = \gamma_2 z^2 + ... = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i X^i$$

Il s'ensuit que Q possède au moins deux zéros dans l'intervalle $D(0,1)$, ce qui contredit la définition d'un nombre de Pisot. En effet, le nombre associé au polynôme Q aurait un conjugué dont le module est supérieur à 1. Par conséquent, nous avons $u_{\nu,1} \neq 0$.alors $u_0 \geq 1$,et $u_1 \neq 0$.

Si la fonction f n'a pas de pôle dans l'intervalle $D(0,1)$, alors elle est holomorphe dans cet intervalle et le polynôme Q divise le polynôme B. En effet, une remarque précédant le théorème énonce que dans ce cas, la fonction f serait égale à la fonction constante égale à 1. Par conséquent, tous les coefficients un seraient nuls pour tout entier $n \geq 1$, et en particulier, $u_1 = 0$.

On en déduit que f admet un pôle en μ dans $D(0,1)$, où μ est défini comme la limite de la suite $1/\lambda_\nu$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} = 1/\nu.$$

On peut alors écrire $f(z) = B(z)/Q(z)$, où B et Q sont des polynômes premiers entre eux et à coefficients entiers. Ils satisfont bien la condition $|B| \leq |Q|$ sur $\mathbb{S}$. D'autre part, Q ne peut pas avoir de racines sur $\mathbb{S}$ car A n'a pas de racine sur $\mathbb{S}$.

Enfin, de l'égalité $Q(0) = 1$, on déduit que μ appartient à $\mathbb{S}$, puisque Q est un polynôme à coefficients entiers et que $\mathbb{S}$ est l'ensemble des nombres de Pisot qui sont des entiers algébriques. ■

Remarque 2.6 *la fonction limite f appartient à la frontière de l'ensemble $\mathcal{F}(\delta)$ est dans l'ensemble $\mathcal{F}'(\delta)$.*

Dans ce contexte, $\mathcal{F}(\delta)$ est un ensemble de fonctions et $\mathcal{F}'(\delta)$ est la frontière de cet ensemble. La fonction limite f est donc à la fois dans l'ensemble $\mathcal{F}(\delta)$ et en même temps, elle est limite de cet ensemble, ce qui signifie qu'elle est très proche de certains éléments de l'ensemble mais pas tout à fait dans l'ensemble. Par conséquent, f appartient à la frontière de $\mathcal{F}(\delta)$ et donc à l'ensemble $\mathcal{F}'(\delta)$.

Remarque 2.7 *Carl Siegel a montré que le plus petit nombre de Pisot correspond à la racine supérieure à 1 du polynôme $X^3 - X - 1$. Ce nombre est appelé le "nombre plastique" et vaut environ $1,3247...$*

Il convient de noter que le nombre plastique est un nombre irrationnel qui a des propriétés intéressantes en théorie des nombres et en géométrie. Il est également lié à la suite de Fibonacci et à la géométrie des pentagones réguliers.

En résumé, étant donné que $\mathbb{S}$ est un ensemble de nombres de Pisot fermé et minoré par 1, il existe un plus petit nombre de Pisot dans $\mathbb{S}$, qui correspond à la racine supérieure à 1 du polynôme $X^3 - X - 1$ et est appelé le nombre plastique[2].

2.7 Petits nombres de Pisot

Beaucoup de résultats sont connus sur l'ensemble $\mathbb{S}$. Citons quelques-uns : Un algorithme a été introduit par Dufresnoy et Pisot pour déterminer les éléments de $\mathbb{S}\cap]1,1.6183[$ [5], et cet algorithme a été généralisé par D. W. Boyd [4] – [24] pour trouver les nombres de Pisot dans certains intervalles. Salem avait montré que l'ensemble $\mathbb{S}$ est fermé pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ [10]. Les points limites de $\mathbb{S}$ inférieurs à 2 peuvent être déterminés explicitement [1], [6]. Pour montrer, d'une manière simple, qu'il existe des nombres de Pisot de degré arbitrairement grand, rappelons les deux résultats connus qui suivent.

Proposition 2.6 *Soit P un polynôme unitaire, à coefficients entiers rationnels, possédant une seule racine réelle θ plus grande que 1, et les autres racines de module strictement inférieur à 1. Alors $P(x) = x^s M_\theta(x)$, où $s \in N^*$, et $\theta \in S$.*

Preuve. Comme $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $P(\theta) = 0$, alors θ est un entier algébrique et il existe $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$ *tel que* $P = M_\theta P_1$. De plus P_1 est unitaire, car les polynômes P et M_θ le sont, et admet toutes ses racines à l'intérieur du disque unité. Par suite le produit des racines de P_1 est nul car il est de module strictement inférieur à 1; d'où $P_1(x) \equiv x^s$. ■

Pour montrer l'assertion qui suit, rappelons un corollaire du théorème de Rouché, vrai pour des fonctions analytiques au lieu des polynômes.

Théorème 2.6 (***théorème de Rouché***) [32]*Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. f, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$Soit D un disque tel que $\bar{D} \subset \Omega$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :*

$$|f(z)| \; > |g(z)|$$

Alors f et $f+g$ ont même nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) dans D i.e :

$$(Z(f) \cap D) = (Z(f+g) \cap D)$$

Corollaire 2.3 *Si f et g sont deux polynômes tels que $|f(z)| > |g(z)|$ sur le cercle $|z| = \rho$, où $\rho > 0$, alors le polynôme $f+g$ admet le même nombre de racines que f dans le disque ouvert $|z| < \rho$.*

Proposition 2.7 *Soit P un polynôme à coefficients entiers rationnels, tel que*

$$P(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \;\; a_0 \neq 0,$$

et

$$|a_{n-1}| > 1 + \; |a_{n-2}| \; + \cdots + |a_1| + |a_0| \, .$$

Alors P possédé une unique racine θ dans $|z| > 1$ et ses autres racines dans $|z| < 1$. Ainsi $\pm\, \theta$ est un nombre de Pisot.

Preuve. On a les relations suivantes, pour $|z| = 1$,

$$|z^n + \cdots + a_1 z + a_0| \leq 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < \left|a_{n-1} z^{n-1}\right| = |a_{n-1}|.$$

D'après le lemme ci-haut, le polynôme P possédé dans $|z| < 1$, le même nombre de zéros que $a_{n-1}z^{n-1}$, soit $n-1$. Comme P n'a pas de racines sur $|z| = 1$, à cause de l'inégalité stricte dans

$$|z^n + \cdots + a_1 z + a_0| \leq 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0| < \left|a_{n-1} z^{n-1}\right| = |a_{n-1}|.$$

il admet donc une seule racine θ dant $|z| > 1$ et qui est un réel, car sinon par conjugaison complexe on obtient deux racines. Comme $a_0 \neq 0$, de la proposition 2.1, on déduit que θ ou bien $-\theta$ est un nombre de Pisot. ■

Nous appliquons cette propriété à l'exemple au polynôme $P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 1$, *où* $n \geq 2$, montre que P est le polynôme minimal d'un réel θ tel que $\pm\theta$ est un nombre de Pisot. De plus, comme $P(1) = -1 < 0$ *et* $0 < P(3) = 1$, θ est un nombre de Pisot de degré n. On déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 2.4 *Pour tout* $d \in \mathbb{N}^*$, *il existe un nombre de Pisot de degré* d.

Preuve. *Si* $\theta \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ *alors* θ *est un nombre de Pisot de degré* $d = 1$. *Pour* $d \geq 2$, *et d'après le calcul ci-dessus il existe toujours un nombre de Pisot de degré* d. ■

Proposition 2.8 *Soit* θ *un nombre de Pisot de degré* d *; alors* θ^n *est aussi un nombre de Pisot de degré* d.

Preuve. *Il est clair que* $\mathbb{Q}(\theta^n) \subset \mathbb{Q}(\theta)$,*et si* $\theta = \theta_1, \theta_2, .., \theta_n$ *sont des conjugués de* θ *; alors il existe* d *plongements* $\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_d$, *de* $\mathbb{Q}(\theta)$ *dans* $\mathbb{C}$ *tels que* $\sigma_i(\theta) = \theta_i, \forall i \in \{1, .., d\}$.

Donc $\sigma_i(\theta^n) = \theta_i^n$ *et les conjugués de* θ^n *sont parmis les nombres* θ_1^n , $\theta_2^n, .., \theta_d^n$ *Supposons que* θ^n *soit de degré* d' , *Alors d'aprés la relation*

$$[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\theta^n)] [\mathbb{Q}(\theta^n) : \mathbb{Q}],$$

On a $d = md'$,*où* $m \in \mathbb{N}$ *et donc chaque conjugué de* θ^n *est répété* m *fois dans l'ensemble* $\{\theta_1^n, \theta_2^n, .., \theta_d^n\}$.

Comme $\theta^n > 1$, *et* $|\theta^n| < 1$,*pour tout* $i \geq 2$ *; on obtient* $m = 1$*et* $d = d'$.

Ainsi θ^n *est aussi un nombre de Pisot de degré* d. ■

2.7.1 Table du nombres de Pisot inférieurs à 1.6[18]

La table ci-dessous donne les nombres de Pisot inférieurs à 1.6 en ordre croissant et leurs Polynôme minimal.

On applique c'est formule :

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \frac{x^{2n}\left(x^2-x-1\right)+1}{x-1} \\ &= x^{2n+1}-\frac{x^{2n}-1}{x-1}. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= \frac{x^{2n+1}\left(x^2-x-1\right)+1}{x-1} \\ &= x^{2n+1}-\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}. \end{aligned}$$

où

$$Q_n = x^n\left(x^2-x-1\right)+\left(x^2-1\right).$$

c'est-à-dire que leur polynôme minimal divise ces polynômes.

À partir des informations précédentes, il est possible de dresser le tableau suivant.

	Nombre de Pisot	Polynôme minimal	Forme
1	1.3247179572447460260	x^3-x-1	$P_2=Q_1$
2	1.3802775690976141157	x^4-x^3-1	Q_2
3	1.4432687912703731076	$x^5-x^4-x^3+x^2-1$	Q_3
4	1.4655712318767680267	x^3-x^2-1	P_3
5	1.5015948035390873664	$x^6-x^5-x^4+x^2-1$	Q_4
6	1.5341577449142669154	$x^5-x^3-x^2-x-1$	P_4
7	1.5452156497327552432	$x^7-x^6-x^5+x^2-1$	Q_5
8	1.5617520677202972947	$x^6-2x^5+x^4-x^2+x-1$	
9	1.5701473121960543629	$x^5-x^4-x^2-1$	P_5
10	1.5736789683935169887	$x^8-x^7-x^6+x^2-1$	Q_6
11	1.5900053739013639252	$x^7-x^5-x^4-x^3+x^2-x-1$	P_7
12	1.5911843056671025063	$x^9-x^8-x^7+x^2-1$	Q_7

Pour en savoir plus sur les nombres de Pisot inférieurs à 1.6 et supérieurs à 1.6, on peut consulter.

CHAPITRE 3

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES DE SALEM.

3.1 Introduction

Les nombres de Salem sont une sous-ensemble de mesures de Mahler d'entiers algébriques positifs. Ils sont nommés en l'honneur de Raphaël Salem et apparaissent en approximation diophantienne ainsi qu'en analyse harmonique [10] [4]. En mathématiques, un nombre de Salem est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1 dont tous les conjugués ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1, et au moins un conjugué a une valeur absolue égale à 1.

3.2 Définitions et exemples

Définition 3.1 *Un nombre de Salem est un entier algébrique réel τ plus grand que* 1*, dont les autres conjugués sont de module inférieur ou égal à* 1*, avec au moins un conjugué de module* 1*.*

On note l'ensemble de Salem par $\mathbb{T}$.

On déduit de cette définition que le polynôme minimal d'un nombre de Salem est réciproque de degré pair au moins égal à 4 et que tous les conjugués de nombre de Salem τ (excepté τ et $1/\tau$) sont complexes non réels et de module 1.

Remarque 3.1 *Les ensembles $\mathbb{S}$ et $\mathbb{T}$ forment une partition de l'ensemble $\mathbb{U}$. Bien que cette partition reste valable dans certaines généralisations, sa formulation peut se compliquer légèrement*

Exemple 3.1 *Voici quelques exemples de nombres de Salem*

1. *Le plus petit nombre de Salem connu est la plus grande racine réelle du polynôme*

de degré 10,

$$\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{7\sqrt{2}}+\frac{1}{11\sqrt{2}}+\frac{1}{13\sqrt{2}} +\frac{1}{17\sqrt{2}}+\frac{1}{19\sqrt{2}}+\frac{1}{23\sqrt{2}}+\frac{1}{29\sqrt{2}}$$

Son polynôme minimal est

$$x^{10}+x^9-x^7+x^6+x^5-x^4-x^3+x+1$$

et il est connu sous le nom de "nombre de Salem de degré 10" ou simplement comme "le nombre de Salem".
il vaut approximativement $1,1762...$ *Les quatre plus petits nombres de Salem actuellement connus sont racines de degrés respectifs* $10;18;14$ *et* 14 *: Par analogie avec l'ensemble* $\mathbb{S}$ *: La plupart des exemples de nombres de Salem est fournie par la célèbre construction de Salem.*

2. *Un autre exemple de nombre de Salem est*

$$\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{7\sqrt{2}}$$

qui est un nombre de Salem de degré 3*. Son polynôme minimal est*

$$x^3-x^2-2x-1.$$

3. *Le nombre de Salem*

$$\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}}$$

est un nombre de Salem de degré 3 *également. Son polynôme minimal est*

$$x^3-x^2-2x-1.$$

Dans tout ce qui suit on suppose que β est un nombre de Salem de degré 4, et soit

$$M_\beta(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$$

son polynôme minimal.

Le lemme suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme de la forme $P(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$,soit le polynôme minimal d'un nombre de Salem.

Lemme 3.1 *Soit* $P(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1\in\mathbb{Z}[x]$*,Alors* P *est le polynôme minimal d'un nombre de Salem si et seulement si*

$$-2a-2<b<2a-2; b\neq 2, \text{ et } b\neq 1\pm a$$

Preuve. *Supposons que* P *soit le polynôme minimal d'un nombre de Salem* β, *et posons* $P(x) = x^2 A(x + x^{-1})$ *où*

$$A(t) = t^2 - at + (b-2)$$

Si μ *et* $\bar{\mu}$ *sont les conjuguès de* β *; avec* $|\mu| = 1$, *alors* A *admet deux zèros* $\beta + \beta^{-1}$ *et* $\mu + \bar{\mu}$ *et qui vérifient* $-2 < \mu + \bar{\mu} < 2 < \beta + \beta^{-1}$.

Il s'ensuit immèdiatement que $A(2) < 0 < A(-2) \Rightarrow -2a - 2 < b < 2a - 2.$ *: De plus,si* $b = 2$ *alors* $\mu + \bar{\mu} = 0$ *ou bien* $\mu + \bar{\mu} = a \Rightarrow \mu$ *est un entier quadratique,puisqu'il est racine du polynôme* $t^2 - (\mu + \bar{\mu})t + 1 \in \mathbb{Z}[x]$*ce qui absurde,puisque* μ *est de degrè* 4. *De même, si* $b = \pm a + 1$ *alors* $\mu + \bar{\mu} = 1$ *et on obtient une contradiction similaire à celle obtenue précèdement. Inversement,si on suppose que* A *admet deux zéros réels* σ *et* ρ *tels que* $-2 < \sigma < 2 < \rho$ *alors on défnit* μ *et* β *comme racines des équations* $\mu^2 - \sigma\mu + 1 = 0$ *et* $\beta^2 - \sigma\beta + 1 = 0$,

Les conditions $b \neq 2$ *; et* $b \neq \pm a + 1$ *entrainent que* σ *ne peut pas être un entier rationnel, c'est-à-dire, que* $\sigma \neq 1{,}0$.*Donc les polynômes* A *et* P *sont irréductibles. Donc,* P *défnit un nombre de Salem quartique et* $P = M_\beta$. ■

Avec la notation de la preuve ci-dessus, la trace de β vérifie : $a = \beta + \frac{1}{\beta} + \mu + \bar{\mu}$: Le lemme qui suit exprime la partie entière de en fonction de sa trace.

Lemme 3.2 *Si* $M_\beta(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ *est le polynôme minimal díun nombre de Salem quartique* β, *alors*

$$[\beta] = \begin{cases} a+1 & Si \quad -2a-2 < b < -a \\ a & Si \quad -a \leq b \leq 0, b \neq -a+1 \\ a-1 & Si \;\; 0 < b \leq a, b \neq 2 \\ a-2 & Si \;\; a+1 < b < 2a-2 \end{cases}$$

Preuve. *Comme* $a = \beta + \frac{1}{\beta} + \mu + \bar{\mu}$ *; on voit que* $\beta + 0 - 1 - 1 < a < \beta + 1 + 1 + 1 \Rightarrow a - 3 < \beta < a + 2$ *et donc* $[\beta] \in \{a-2, .., a+1\}$. *Il est clair que*

$$[\beta] = a - 2 \Leftrightarrow a - 2 < \beta < a - 1 \Longleftrightarrow M_\beta(a-2) < \beta < M_\beta(a-1)$$

la derniére équivalence est dûe au fait que M_β *admet une seule racine réelle plus grande que* 1 *(qui est* β*)Supposons d'abord* $[\beta] = a - 2$. *alors* $a = [\beta] + 2 \geq 3 \Rightarrow \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2}$ *Il s'ensuit de la relation*

$$\begin{aligned} M_\beta(a-1) &> 0 \Longleftrightarrow b > (a-1)^2 - a(a-1) + \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2} \\ &= (a-1) + \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2}, \end{aligned}$$

que $b > a$,$b \geq a + 1$ *; et donc* $b > a + 1$, *puisque d'aprés le lemme précédent* $b \neq a + 1$ *: Ainsi, on a prouvé l'implication*

$$[\beta] = a - 2 \Rightarrow a + 1 < b < 2a - 2 \tag{3.1}$$

Supposons maintenant $[\beta] = a - 1$ *c'est-à-dire, que* $M_\beta(a-1) < 0 < M_\beta(a)$ *.*
De façon similaire, on a $a = [\beta] + 1 \geq 2$; $\frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2} < 2$,

$$M_\beta(a-1) < 0 \Rightarrow b < a - 1 + \frac{a}{a-1} - \frac{1}{(a-1)^2}$$

et donc $b < a+1$;*d'ou* $b \leq a$.*De même* $M_\beta(a) > 0 \Leftrightarrow ba^2 - a^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow b > 1 - \frac{1}{a^2} \Rightarrow b > 0$ *: on a donc montré l'implication*

$$[\beta] = a - 1 \Longrightarrow 0 < b \leq a \tag{3.2}$$

la relation $b \neq 2$ *découle du lemme précédente . De maniére identique on montre les implications*

$$[\beta] = a \Longrightarrow -a < b \leq 0 \tag{3.3}$$

avec $b \neq -a+1$, *et*

$$[\beta] = a + 1 \Longrightarrow -2a - 2 < b < -a \tag{3.4}$$

Le lemme suit alors immédiatement des relations. ■

3.3 Polynôme minimal d'un nombre de Salem

Une autre classe remarquable d'entiers algébriques, notée $\mathbb{T}$, et qui a des liens avec l'ensemble $\mathbb{S}$, est la classe des nombres de Salem.

Soient M_τ le polynôme minimal d'un nombre de Salem τ de degré n, et soit $M_\tau^*(x) = x^n M_\tau(1/x)$ le polynôme réciproque de M_τ. Si α est une racine de module 1 de P, alors $\overline{\alpha} = 1/\alpha$ est également racine des deux polynômes M_τ et M_τ^*. Par suite, M_τ *et* M_τ^* ont une racine commune et comme M_τ est unitaire et irréductible, alors $M_\tau = \lambda M_\tau^*$, $M_\tau(0) = \lambda$ et $1 = \lambda\ M_\tau(0)$; d'où $\lambda^2 = 1$. Si $\lambda = -1$, alors ± 1 *est racine de* M_τ, d'où la contradiction puisque M_τ est irréductible. Par conséquent, $\lambda = 1$ et $M_\tau = M_\tau^*$. De plus le degré de M_τ est un entier pair au moins égal à 4. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Le polynôme minimal d'un nombre de Salem* τ *est réciproque et de degré* ≥ 4*. De plus,* τ *possède un seul conjugué de module inférieur à* 1, *qui est son inverse, et ses autres conjugués sont tous de module* 1.

Preuve. La première partie de la proposition résulte du calcul précédent. Si α est racine de M_τ alors $1/\alpha$ est aussi racine de M_τ, car il est réciproque. Ainsi $1/\tau$ est le seul conjugué de τ ayant un module < 1, puisque τ n'admet pas d'autres conjugués, autre que lui-même de module > 1. ■

Contrairement à l'ensemble des nombres de Pisot, qui satisfait $\min \mathbb{S} = 1.3247...$ [12], on ne sait pas s'il y a un plus petit nombre de Salem. Plus précisément on ne sait pas, si l'égalité $\inf \mathbb{T} = 1$ a lieu ou non. Ce dernier problème avait été posé, en 1933, par D. H. Lehmer [7].

Exemple 3.2 *Le polynôme minimal du plus petit nombre de Salem connu est :*

$$X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1,$$

ce nombre vaut approximativement $1,1762...$ [3].

Remarque 3.2 *La plupart des exemples de nombres de Salem sont fournis par la célèbre construction de Salem, qui dit que tout nombre de Pisot est limite d'une suite de nombres de Salem* [10].

Théorème 3.1 (*Construction des nomber de Salem*)
Soit θ *un nombre de Pisot de degré* s *supérieur à* 2, *de polynôme minimal* P. *Soit* Q_n^{ε} *le polynôme défini par la relation*

$$Q_n^{\varepsilon}(z) = z^n P(z) + \varepsilon P^*(z),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ *et* $P^*(z) = z^s P(1/z)$ *est le polynôme réciproque de* P. *Alors, il existe un entier* n_0, *tel que pour* $n \geq n_0$, *l'équation* $Q_n^{\varepsilon}(z) = 0$ *a pour racine un nombre de Salem* τ_n^{ε}. *De plus on a* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \tau_n^{\varepsilon} = \theta$ *et les* τ_n^{ε} *tendent vers* θ *à droite ou à gauche selon la valeur de* ε.

Preuve. Le nombre de Pisot θ est une racine du polynôme irréductible P de degré s. Puisque θ n'est pas une unité quadratique, c.-à-d. n'est pas racine d'un polynôme unitaire réciproque du second degré ayant θ et $1/\theta$ pour racines, les polynômes P et P^* sont premiers entre eux. En d'autres termes les polynômes P *et* P^* n'ont pas de racines communes. Pour tout entier positif n, considérons le polynôme

$$Q_n^{+}(z) = z^n P(z) + P^*(z).$$

Le polynôme Q_n^+ est unitaire, à coefficients entiers. Ses racines sont donc des entiers algébriques. Nous allons montrer que pour $n \geq n_0$, Q_n^* a pour zéro un nombre de Salem. Ecrivons :

$$\frac{p(z)}{p^*(z)} = \frac{z-\theta}{1-\theta z}\prod_{i=1}^{s-1}\frac{z-\alpha_i}{1-\overline{\alpha_i}z},$$

Où les α_i sont les conjugués de θ, de module < 1, *et* s est le degré de P. Soit $\eta > 0$,

suffisamment petit pour que P^* soit sans racines dans la couronne $1 \leq |z| \leq 1 + \eta$. Alors on a pour $|z| = 1 + \eta$,

$$|z-\alpha_i|^2 = \left|z^2\right| + |\alpha_i|^2 - \alpha_i\overline{z} - \overline{\alpha_i}z, \tag{1-10}$$

Et

$$|1-\overline{\alpha_i}z|^2 = 1 + |\alpha_i|^2|z|^2 - \alpha_i\overline{z} - \overline{\alpha_i}z. \tag{1-11}$$

De $(1-10)$ *et* $(1-11)$ on obtient $|z-\alpha_i| > |1-\overline{\alpha_i}z|$ et $\prod_{i=1}^{s-1} |z-\alpha_i| > \prod_{i=1}^{s-1} |1-\overline{\alpha_i}z|$.
Ainsi

$$\left|\prod_{i=1}^{s-1} \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\right| > 1.$$

Si on pose $z=(1+\eta)\exp^{i\varphi}$, alors on a

$$\left|\frac{z-\theta}{1-\theta z}\right|^2 = \left|\frac{(1+\eta)\exp^{i\varphi}-\theta}{1-\theta(1+\eta)\exp^{i\varphi}}\right|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+n)^2-\theta(1+\eta)\exp^{i\varphi}-\theta(1+n)\exp^{-i\varphi}+\theta^2}{1-\theta(1+\eta)\exp^{-i\varphi}-\theta(1+n)\exp^{i\varphi}+\theta^2(1+n)^2} \\
&= \frac{\theta^2+(1+n)^2-\theta(1+n)\left(\exp^{i\varphi}+\exp^{-i\varphi}\right)}{1-\theta(1+\eta)\left(\exp^{i\varphi}+\exp^{i\varphi}\right)+\theta^2(1+n)^2} \\
&= \frac{\theta^2(1+n)^2-2\theta(1+n)\cos\varphi}{1+\theta^2(1+n)^2-2\theta(1+n)\cos\varphi} \\
&= f(\varphi).
\end{aligned}$$

Comme

$$f'(\varphi) = \frac{2\theta(1+\eta)\sin\varphi\left[1+\theta^2(1+\eta)^2-(1+\eta)^2-\theta^2\right]}{D^2},$$

s'annule pour $\varphi=0$ et $\varphi=\pi$,et reste positive sur l'intervalle $]0,\pi[$, l'application f admet un minimum en $\varphi=0$. D' où$\left|\frac{z-\theta}{1-\theta z}\right| > \frac{\theta-(1+\eta)}{\theta(1+\eta)-1} > 1-\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}$, car $1-\frac{\theta-(1+\eta)}{\theta(1+\eta)-1} = \frac{\eta(\theta+1)}{\theta(1+\eta)-1} < \frac{\eta(\theta+1)}{\theta-1}$.

Choisissons maintenant η assez petit de façon à avoir $1-\eta\left[(\theta+1\theta)/(\theta-1)\right] > 0$.
On a donc pour $|z|=1+\eta$:

$$\begin{aligned}
\left|z^n\frac{p(z)}{p^*(z)}\right| &> (1+\eta)^n\left(1-\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}\right) > (1+n\eta)\left(1-\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}\right) \\
&= 1+\eta\left(n-\frac{\theta+1}{\theta-1}-n\eta\frac{\theta+1}{\theta-1}\right) > 1
\end{aligned}$$

Lorsque $2\frac{\theta+1}{\theta-1} < \eta < \frac{\theta-1}{2(\theta+1)}$. Par suite d'après le théorème de Rouché, le polynôme Q_n^+ possède dans $|z| < 1+\eta$, autant de zéros que $z^n p$, soit $n+s-1$. Comme η est arbitrairement petit, cela prouve que Q_n^+ possède une seule racine, disons τ_n^+, de module supérieur à 1, donc nécessairement réel. De plus Q_n^+ est réciproque car

$$\begin{aligned}
Q^*(z) &= z^{n+s}Q\left(\frac{1}{z}\right) = z^{n+s}\left(\frac{1}{z^n}p\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{z^s}p(z)\right) \\
&= z^s p\left(\frac{1}{z}\right)+z^n p(z) = z^n p(z)+p^*(z).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $1/\tau_n^+$ est le seul zéro de Q_n^+ de module plus petit que 1, et les autres zéros de Q_n^+ sont donc de module 1; on a donc $Q_n^* = K_n T_n$, avec K_n ne possédant que des racines de l'unité et T_n irréductible, possédant la racine τ_n^+.

Maintenant, montrons que $\lim\limits_{n \longmapsto +\infty} \tau_n^+ = \theta$.tout d'abord, on a $Q_n^+(\theta) = P^*(\theta) \neq 0$, *car* P *et* P^* sont premiers entre eux et $P'(\theta) > 0$. Donc il existe $\sigma > 0$ et $\mu > 0$ tels que $P'(x) \geq \mu$ pour $1 < \theta - \sigma \leq x \leq \theta + \sigma$. Soit δ vérifiant $|\delta| < \sigma$, alors $P(\theta + \delta) = \delta P'(\varepsilon)$ pour $\theta < \varepsilon < \theta + \delta$, ou bien pour $\theta + \delta < \varepsilon < \theta$. Or, $P(\theta + \delta)$ est du signe de δ. Par suite, pour n assez grand, $Q_n^+(\theta + \delta) = (\theta + \delta)^n P(\theta + \delta) + P^*(\theta + \delta)$ est du signe de δ. Choisissons alors δ tel que $\delta p^*(\theta) < 0$. Les quantités $Q_n^+(\theta)$ et $Q_n^+(\theta + \delta)$ sont alors de signes opposés ; d'où $\tau_n^+ \in [\theta, \theta + \delta]$ si $P^*(\theta) > 0$. On voit ainsi que les τ_n^+ tendent vers θ à droite si $P(\theta) < 0$, et à gauche si $P^*(\theta) > 0$. Cela prouve que, pour $n \geq n_0$, les τ_n^* sont des nombres de Salem, car sinon, on aurait une infinité d'entiers quadratiques, tous différents, tendant vers θ et par suite, leurs polynômes minimaux auraient leurs coefficients bornés, ce qui est impossible. En considérant $\bar{Q_n} = z^n P - P^*$, on peut construire de la même façon une suite de nombres de Salem tendant vers θ de l'autre côté. ■

Remarque 3.3 *En fait la preuve ci-dessus fonctionne lorsque le degré du nombre de Pisot* θ *est* ≤ 2 *sauf lorsque* $P(z) = z^2 - rz + 1$. *Dans ce dernier cas il suffit de considérer le polynôme*

$$Q_n^{\pm}(z) = (z^{2n} + 1)(z^2 - rz + 1) \pm z^{n+1},$$

pour obtenir, par une méthode identique, que θ *est limite à gauche et à droite d'une suite de nombres de Salem. On déduit alors immédiatement le corollaire suivant.*

Corollaire 3.1 *Tout nombre de Pisot est limite d'une suite de nombres de Salem, et donc il existe des nombres de Salem de degré arbitrairement grand.*

3.4 Observations sur les nombers de Salem

1. Les nombres de Salem sont des nombres algébriques entiers. Cela signifie qu'ils sont des solutions d'une équation polynomiale avec des coefficients entiers.
2. Les nombres de Salem sont réels et algébriques de degré 2. Cela signifie qu'ils peuvent être écrits sous la forme $a + b\sqrt{2}$où a et b sont des nombres rationnels.
3. Les nombres de Salem sont liés à la théorie des nombres et à la géométrie fractale. Ils sont utilisés pour construire des ensembles fractals intéressants appelés ensembles de Salem.
4. Les nombres de Salem sont également liés à la théorie des nombres transcendants. En particulier, ils sont utilisés pour montrer que la constante de Liouville est transcendantale.
5. Les nombres de Salem sont distribués de manière dense dans l'ensemble des nombres algébriques réels de degré 2.

Conclusion

Nous pouvons tirer une conclusion intéressante de cette étude que nous avons menée sur les nombres Pisot et certains nombres Salem remarquables, à savoir la relation entre les nombres Pisot et les nombres Salem[2].

Il existe une relation intéressante entre les nombres de Pisot et les nombres de Salem. Tout nombre de Salem est également un nombre de Pisot, mais l'inverse n'est pas vrai. Autrement dit, les nombres de Salem constituent un sous-ensemble strict des nombres de Pisot .On a un exemple de nombre Pisot qui n'est pas un nombre de Salem est le nombre de Pisot de degré 4, défini comme la plus petite racine positive de l'équation

$$x^4 - x^3 - x - 1 = 0.$$

Ce nombre est irréductible, ses conjugués ont des modules inférieurs à 1, mais son module n'est pas une racine de l'unité. En revanche, un exemple de nombre de Salem est le nombre de Salem de degré 5, défini comme la plus petite racine positive de l'équation

$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + 1 = 0.$$

Ce nombre est également un nombre de Pisot, mais son module est une racine de l'unité, à savoir $\exp(2i\pi/5)$.

En particulier, les nombres de Salem et les nombres de Pisot ont des liens étroits avec la théorie des nombres transcendants et la théorie des nombres algébriques. Par exemple, on peut montrer que l'ensemble des nombres de Salem est dense dans l'ensemble des nombres transcendants, c'est-à-dire que tout nombre transcendant peut être approché arbitrairement bien par des nombres de Salem. De même, l'ensemble des nombres de Pisot est dense dans l'ensemble des nombres algébriques de degré supérieur ou égal à 2[25].

En conclusion, les nombres de Pisot et les nombres de Salem sont des exemples importants de nombres algébriques spéciaux qui ont des propriétés intéressantes en théorie des nombres et en géométrie algébrique.et les deux types de nombres sont importants pour la théorie des nombres et sont utilisés dans divers domaines de la recherche mathématique, tels que la cryptographie, la théorie des codes, la géométrie algébrique et la théorie du chaos. Ils sont également liés à des sujets plus larges tels que la théorie de Galois, l'analyse complexe et la topologie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Amara, *Ensembles fermés de nombres algébriques,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **83** (1966), 215-270.

[2] H. Hardy and E.M.Wright,Introduction to the theory of numbers. Vuibert-Springer,2007.

[3] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugo, M. Pathiaux-Delefosse and J. P. Schreiber*, Pisot and Salem numbers,* Birkhäuser Verlag Basel, 1992.

[4] D. W. Boyd, *Salem numbers of degree four have periodic expansions,* Number Theory, eds J. H. de Coninck and C. Levesque, Walter de Gruyter, Berlin (1989), 57-64.

[5] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, *Étude de certaines fonctions mésomorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques,* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **72** (1955), 69-92.

[6] M. Grandet-Hugo*, Ensembles fermés d'entiers algébriques,* Ann. Sci. École. Norm. Sup. **92** (1965), 1-35.

[7] D. H. Lehmer*, Factorization of certain cyclotomic functions,* Ann. Math. **34** (1933), 461-479.

[8] C. Pisot, *La répartition modulo un et les nombres algébriques,* Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa **7** (1938), 205-248.

[9] C. Pisot, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques,* Montréal, Quebec, les presses de l'université de Montréal, 1966.

[10] R. Salem*, Algebraic numbers and Fourier analysis,* Heath Math. Monographs, Boston, 1963.

[11] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot and Salem numbers,* Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 269-278.

[12] C. L. Siegel, *Algebraic numbers whose conjugates lie in the unit circle,* Duke Math. J. **11** (1944), 597-602.

[13] T. Zaïmi*, On an approximation property of Pisot numbers,* Acta Math. Hungar. **96** (2002), 309-325.

[14] T. Zaïmi, *Commentaires sur quelques résultats sur les nombres de Pisot,* J. Théor. Nombres Bordx. **22** (2010),513-524.

[15] J. Voedts,Cours de mathématique, MP-MP.

[16] Ch. Pisot, Etude de certains entiers algébriques, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 4 (1950-1951), exp. no 2, p. **1-16**.

[17] M. Audin, Analyse complexe.

[18] Kevin Hare,Pisot numbers and the Spectra of Real numbers,B.Math, University of Waterloo, 1997,M.Sc, Simon Fraser University, 1999.

[19] A.Vinçotte,Nombres de Pisot-Vijayaraghavan et de Salem, et application aux systèmes de numération

[20] Bruno Vallette,cours d'Algèbre linéaire pour tout,Version du October 8, 2015,E-mail : brunov@unice.fr.

[21] Yves Meyer,Algebraic Numbers and Harmonic Analysis,Université de Paris-Sud, France 1972 .

[22] C. Pisot,Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques, Montréal, Quebec, les presses de l'université de Montréal, 1966.

[23] J.W.S Cassels,Introduction todiophantine approximation, Université de Press 1957 p **133-144**.

[24] D. W. Boyd,On beta-expansions for Pisot numbers, Math. Comp. 65 (1996),841-860.

[25] Jürgen Neukirch,Algebraic Number Theory,Université Louis Pasteur ,springer 1999.

[26] Jacques Ravatin and Anne-Marie Branca. Théorie des formes et des champs de cohérences. Éditions du Cosmogone, 1998.

[27] Ilias LAIB,Sur les nombers de Pisot,Ecole Normale Supérieuré Kouba, Alger 2016.

[28] Berthé,V.Siegel.On Pisot substitutions and the transcendence of their associated numbers Acta Arith(2002) : 315-349.

[29] Pierron,Théo.Théorie des nombres.ENS Ker Lann p 22-26.

[30] O. Ore.Les corps algébriques et la théorie des idéaux.Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 64 (1934)

[31] Kiyoshi Ito. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, MIT Press, 1993, p. 995.

[32] Analyse réelle et complexe de base .Université de Rennes p.33.36.