



DÉPARTEMENT GÉNIE ÉLECTRIQUE

DOMAINE DE FORMATION : SCIENCES ET TECHNOLOGIES (ST)

Support de cours *Théorie du champ*

Matière : Théorie du champ

Spécialité : Electrotechnique

Niveau : 3^{ème} Année Licence

Réalisé par : Dr. BENDAKIR Abdelhakim

Année universitaire : 2022/2023

Sommaire

Rappels Mathématiques

1.	Introduction	02
2.	Systèmes de coordonnées	02
1.1.	Coordonnées cartésiennes	02
2.2.	Coordonnées cylindriques	03
2.3.	Coordonnées sphériques	04
3.	Vecteurs	05
3.1	Somme de deux vecteurs	05
3.2	Produit scalaire de deux vecteurs	05
3.3.	Produit vectoriel de deux vecteurs	05
4.	Éléments d'analyse vectorielle	06
4.1	L'opérateur gradient	06
a-	En coordonnées cartésiennes	06
b-	En coordonnées cylindriques	07
c-	En coordonnées sphériques	07
4.2	L'opérateur divergence	07
a-	En coordonnées cartésiennes	07
b-	En coordonnées cylindriques	07
c-	En coordonnées sphériques	07
4.3	L'opérateur Laplacien	08
a-	En coordonnées cartésiennes	08
b-	En coordonnées cylindriques	08
c-	En coordonnées sphériques	08
4.4	L'opérateur rotationnel	08
a-	En coordonnées cartésiennes	08
b-	En coordonnées cylindriques	08
c-	En coordonnées sphériques	09
5.	Formules de Green	09
6.	Formule de Stokes-Ampère	09
	Chapitre 1. Électrostatique	10
1.	Définition	11
2.	structure de la matière	11
3.	loi de coulomb	12
4.	champ électrique	13
5.	répartition des charges	14
6/	dipôle électrique	16
7.	potentiel électrique	17
8.	relation entre le champ et le potentiel V	18

9.	surface équipotentielle	19
10.	théorème de Gauss	20
11.	capacité- condensateur	21
12.	énergie électrostatique	22
13.	interaction entre le champ électrique et la matière	23
14.	équations de Maxwell en électrostatique	24
Chapitre 2. Magnétostatique		26
1.	Loi d'ampère	27
2.	direction du champ magnétique	27
3.	force magnétique	27
4.	théorème d'Ampère	28
5.	flux magnétique	28
6.	potentiel magnétique	29
7.	énergie magnétique W_m	32
Chapitre 3. Phénomènes dépendant du temps (régime quasi-stationnaire)		33
1.	Loi de Faraday	36
2.	loi de Lenz	36
3.	formes intégrale et différentielle	38
4.	comparaison entre le Régime Stationnaire (R.S) et le Régime Quasi-Stationnaire (R.Q.S).	39
Chapitre 4. Régime Variable- Equations de Maxwell		40
1.	Principe de conservation de la charge	42
2.	équations de Maxwell	43
3.	loi de Maxwell-Ampère	43
4.	loi d'Ohm localisée	45
5.	conditions limites	46
Chapitre 5. Propagation du champ électromagnétique		47
1.	Description mathématique de la propagation	48
2.	équation de propagation d'une onde quelconque	49
3.	équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide	50
4.	vérification expérimentale	52
5.	onde plane	55
6.	caractéristiques des ondes planes	54
7.	propagation dans une direction quelconque	56

8.	vitesse et longueur d'onde	57
9.	propagation de l'énergie électromagnétique	58
10.	Ondes électromagnétiques stationnaires	59
11.	spectre du rayonnement électromagnétique	60
	Chapitre 6. Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques	62
1.	Réflexion des ondes électromagnétiques	63
2.	Modèle du conducteur parfait	64
3.	Complément sur l'effet de peau	65
4.	Ondes incidente et réfléchie	66
5.	Réflexion sous incidence normale sur un plan conducteur parfait	69
	Références bibliographiques	70

Semestre : 5

Unité d'enseignement : UEF 3.1.2

Matière : Théorie du Champ

VHS : 45h00 (cours : 1h30, TD : 1h30)

Crédits : 4

Coefficient : 2

Objectifs de l'enseignement :

Approfondir et consolider des notions d'électromagnétisme. Appréhender les outils physiques et mathématiques pour comprendre les équations de Maxwell ainsi que la propagation des ondes.

Connaissances préalables recommandées :

Calcul vectoriel, notions du Gradient, Divergence et Rotationnel – Notion d'électrostatique et de magnétostatique.

Contenu de la matière :

Chapitre 1. Electrostatique : (3 semaines)

Définition, structure de la matière, loi de coulomb, champ électrique, répartition des charges, dipôle électrique, potentiel électrique, relation entre le champ et le potentiel V , surface équipotentielle, théorème de Gauss, capacité- condensateur, énergie électrostatique, interaction entre le champ électrique et la matière.

Chapitre 2. Magnétostatique : (3 semaines)

Loi d'ampère, direction du champ magnétique (règle de la main droite), potentiel magnétique, théorème d'Ampère, flux magnétique, force magnétique, énergie magnétique W_m .

Chapitre 3. Phénomènes dépendant du temps (régime quasi-stationnaire) : (3 semaines)

Loi de Faraday, loi de Lenz, formes intégrale et différentielle, comparaison entre le Régime Stationnaire (R.S) et le Régime Quasi-Stationnaire (R.Q.S).

Chapitre 4. Régime Variable- Equations de Maxwell : (3 semaines)

Principe de conservation de la charge, loi de Maxwell-Ampère, équations de Maxwell, loi d'Ohm localisée, conditions limites.

Chapitre 5. Propagation du champ électromagnétique : (2 semaines)

Description mathématique de la propagation, équation de propagation d'une onde quelconque, équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, vérification expérimentale, onde plane, caractéristiques des ondes planes, propagation dans une direction quelconque, vitesse et longueur d'onde, propagation de l'énergie électromagnétique, réflexion et transmission des ondes, ondes guidées, spectre du rayonnement électromagnétique.

**Chapitre 6. Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques :
semaine)**

(1

Mode d'évaluation :

Contrôle continu : 40% ; Examen : 60%.

Références bibliographiques :

1. Rosnel, Eléments de propagation électromagnétique, physique fondamentale, Mc GRAW-HILL 2002.
2. Garing, Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques, Exercices et problèmes corrigés, 1998.
3. Paul Lorrain, Dale Corson, and François Lorrain, Les Phénomènes électromagnétiques : Cours, exercices et problèmes résolus, 2002.
4. Louis de Broglie, Ondes Electromagnétiques et Photons, 1968.
5. Garing, Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs : Exercices et problèmes corrigés, 1998.
6. Michel Hulin, Nicole Hulin, and Denise Perrin, Equations de Maxwell : ondes électromagnétiques. Cours, exercices et problèmes résolus, 1998.

Rappels

Mathématiques

1. Introduction

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques concepts et formules mathématiques omniprésents dans les développements analytiques de l'aéroacoustique. Les principaux opérateurs d'analyse vectorielle, la manipulation des tenseurs d'ordre 2, les concepts de fonctions généralisées ou ceux des fonctions de Green ne doivent pas être totalement inconnus.

Afin de démystifier leur utilisation, on rappellera les principales définitions et propriétés de ces outils sans donner de démonstration rigoureuse. Les étudiants soucieux d'approfondir leurs fondements mathématiques pourront se reporter aux références bibliographiques données dans ce chapitre.

2. Systèmes de coordonnées

2.1. Coordonnées cartésiennes

Soit un point origine O et un système d'axes (Oxyz) sur lesquels on considère trois vecteurs unitaires ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) supposés constituer une base orthonormée directe. Tout point M de l'espace peut être caractérisé par ses coordonnées cartésiennes x, y, z qui sont les projections de \vec{OM} sur les axes Ox, Oy, Oz respectivement (figure I.1), c'est-à-dire :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

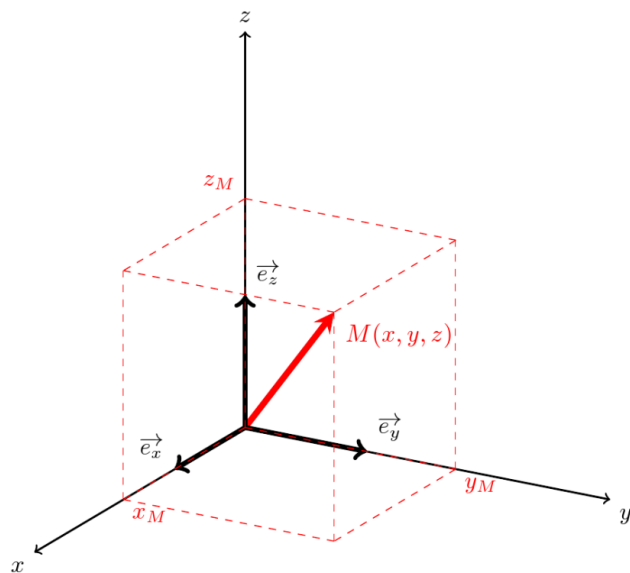
$x = \overline{Om_1}$ est l'abscisse du point M, $y = \overline{Om_2}$ l'ordonnée et $z = \overline{Om_3}$ la cote avec $x, y, z \in]-\infty; +\infty[$.

Pour un faible déplacement :

$$d\vec{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

L'élément de volume est :

$$dV = dx dy dz$$



2.2. Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques tout point M peut être caractérisé de manière également unique par la connaissance des trois paramètres r, ϕ, z :

$$r = |\overrightarrow{Om}| \geq 0 \text{ (rayon vecteur) } |\overrightarrow{Om}|.$$

$$\phi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \in [0, 2\pi [\text{ (angle polaire) }$$

$$z = \overrightarrow{Om'} \in]-\infty, +\infty [\text{ (cote) }$$

Les points m et m' sont les projections orthogonales de M respectivement sur le plan polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ et sur l'axe \overrightarrow{Oz} (voir Fig.2).

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e}_r + z\overrightarrow{e}_z \quad \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e}_r + r d\theta \overrightarrow{e}_\theta + dz \overrightarrow{e}_z$$

L'élément de surface est :

$$ds = r d\theta dz$$

L'élément de volume est :

$$dV = r dr d\theta dz$$

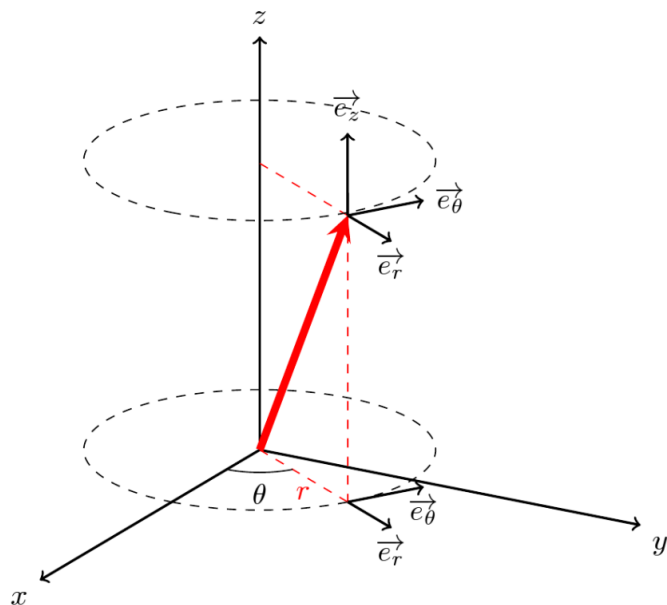


Figure. 2

2.3. Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques tout point M de l'espace (figure I.3) peut être caractérisé de manière également unique par la connaissance des trois paramètres (ou coordonnées sphériques), ρ, θ, ϕ définis par :

$$\rho = |\overline{OM}| \in [0, +\infty [\text{ (rayon vecteur)}$$

$$\theta = (\overline{Oz}, \overline{OM}) \in [0, \pi] \text{ (colatitude)}$$

$$\phi = (\overline{Ox}, \overline{Om}) \in [0, 2\pi [\text{ (longitude)}$$

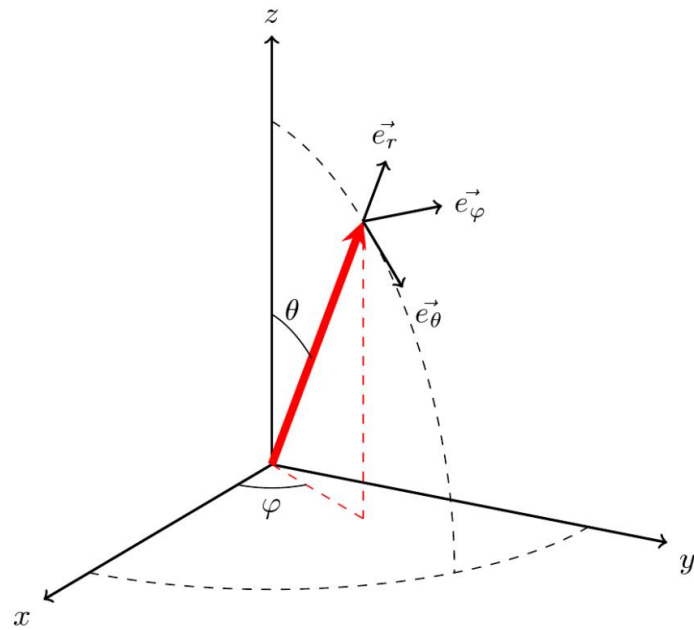


Figure. 3

$$\overline{OM} = r\vec{e}_r \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$d\overline{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi$$

L'élément de surface est :

$$ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

L'élément de volume est :

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

3. Vecteurs

3.1. Somme de deux vecteurs

Soit les deux vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{V}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z$$

La somme de ces deux vecteurs est :

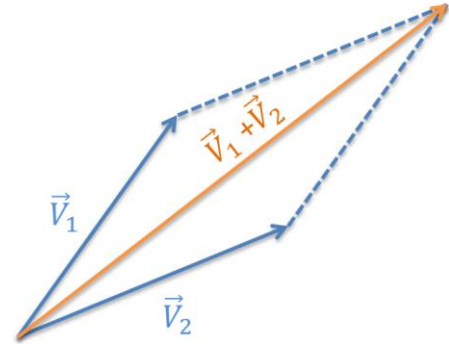


Figure. 4

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2) \vec{e}_x + (y_1 + y_2) \vec{e}_y + (z_1 + z_2) \vec{e}_z$$

3.2. Produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1 \cdot x_2) + (y_1 \cdot y_2) + (z_1 \cdot z_2)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos \alpha$$

3.3. Produit vectoriel de deux vecteurs

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{e}_x - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{e}_y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_z$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \sin \alpha \vec{u}$$

$$\vec{u} \perp \text{plan}(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

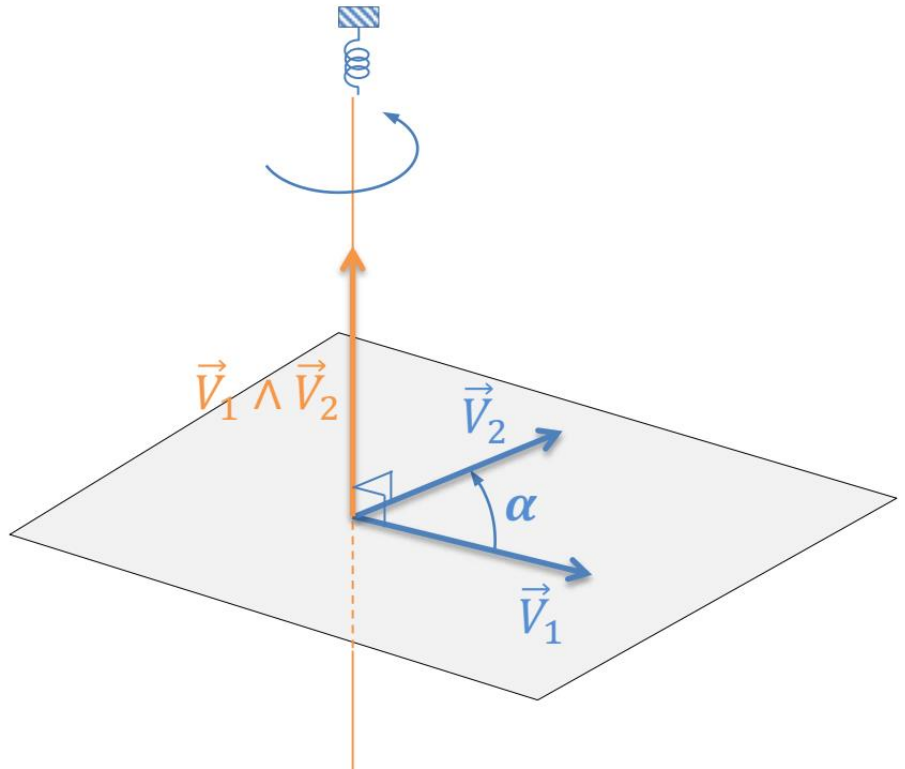


Figure.5

4. Éléments d'analyse vectorielle

4.1. L'opérateur gradient

L'opérateur "nabla" $\vec{\nabla}$ appliqué à un scalaire définit le gradient du scalaire. Il s'agit d'un vecteur. Par exemple, pour la fonction f , qui est un scalaire, le vecteur $\vec{\nabla}f$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} f$ (gradient f) s'écrit :

a- En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f$$

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant les trois vecteurs unitaires pour les coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

b- En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ étant les trois vecteurs unitaires pour les coordonnées cartésiennes (r, θ, z) .

c- En coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ étant les trois vecteurs unitaires pour les coordonnées cartésiennes (r, θ, φ) .

4.2. L'opérateur divergence

Le produit scalaire de l'opérateur "nabla" $\vec{\nabla}$ par un vecteur définit la divergence du vecteur. La divergence (également noté \overrightarrow{div}) d'un vecteur est un scalaire. Pour le vecteur \vec{v} , elle s'écrit :

a- En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Avec

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

b- En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Avec

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$$

c- En coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Avec :

$$v = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

4.3. L'opérateur Laplacien

Il s'agit d'un opérateur différentiel, noté Δ ou $(\vec{\nabla})^2$, qui est appliquée à un scalaire.

a- En coordonnées cartésiennes

$$\Delta \cdot f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

b- En coordonnées cylindriques

$$\Delta \cdot f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

c- En coordonnées sphériques

$$\Delta \cdot f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

4.4. L'opérateur rotationnel

Le produit vectoriel de l'opérateur "nabla" r par un vecteur définit le rotationnel du vecteur. Le rotationnel (noté $\overrightarrow{\text{rot}}$) d'un vecteur est un vecteur. Pour le vecteur \vec{v} , il s'écrit :

a- En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \vec{e}_z$$

b- En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

c- En coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

5. Formules de Green

$$\iiint_v \overrightarrow{\text{grad}} f \, d\vec{v} = \iint_s f \, ds$$

$$\iiint_v \overrightarrow{\text{div}} \vec{V} \, dv = \iint_s \vec{V} \vec{n} \, ds$$

La première formule est la *formule du gradient* ; elle permet par exemple de relier la force de pression exercée sur une surface au gradient de pression dans la masse du fluide. La seconde formule est la *formule d'Ostrogorski*, très utile pour exprimer le flux d'une quantité à travers une surface par une intégrale volumique.

6. Formule de Stokes-Ampère

$$\iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \vec{n} \, ds = \oint_c \vec{V} \, dl$$

Où S désigne une surface s'appuyant sur le contour C .

Chapitre 1

Électrostatique

1. Définition de l'électrostatique

L'électrostatique est l'étude des interactions électriques entre des charges constantes et immobiles (au repos). Autrement dit, pas de déplacement des charges.

Il existe deux types de charges électriques : positive $+q$ et négative $-q$

- Entre les charges, il existe des forces causées par ces charges. On les appelle forces électriques.

- Les charges de même genre se repoussent, les charges de genre différent s'attirent. (Avec la gravité, il n'y a que des forces attractives.)

- Les charges ont toujours des masses. Des charges sans masse n'ont pas encore été trouvées.

- Les charges positives et négatives peuvent être séparées les unes des autres.

Un corps est dit neutre s'il possède le même nombre de charges positives et négatives. Un corps est dit chargé positivement s'il a plus de charges positives que négatives. Un corps est dit chargé négativement s'il a plus de charges négatives que positives.

2. Structure de la matière

Particules élémentaires caractérisées par :

– Masse

– Charge

– Spin

– Parité

– ...

Propriétés abstraites ou familières

3. Loi de coulomb

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 :

- 1) La force est radiale, c'est à dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
- 2) Elle est proportionnelle au produit des charges : attractive si elles sont de signe opposé, répulsive sinon ;
- 3) Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

3.1 Force coulombienne

Soit deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 au repos, placées dans le vide, distantes l'une de l'autre de r . q_1 exerce sur q_2 une force $\vec{F}_{1/2}$, la charge q_2 exerce sur q_1 une force $\vec{F}_{2/1}$ égale d'après le principe d'action et de réaction, cette force appelée force électrostatique, décrite par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{AB} = \|AB\| \vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{AB}}{\|AB\|}$$

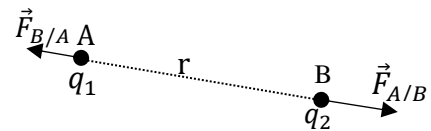


Figure.1

où $\epsilon_0 = 8.85 * 10^{-12} F/m$ est la permittivité du vide.

La constante k est : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98 * 10^9 N m^2 / C^2$

Remarque

- 1) Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles (approximation de l'électrostatique) et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
- 2) Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.

3) À part la valeur numérique de la constante K, cette loi a exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation (loi de Newton). Il ne sera donc pas étonnant de trouver des similitudes entre ces deux lois.

4. Champ électrique

On dit quand une région de l'espace existe un champ électrostatique si une charge électrique placée en un point dans cette région est soumise à une force de nature électrostatique.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f'}{f''} = \frac{q'}{q''} = \frac{f'''}{f''''} = \frac{q'''}{q''''} \\ \frac{f'}{q'} = \frac{f''}{q''} = \frac{f'''}{q'''} = \frac{f''''}{q''''} = E \end{array} \right\} \vec{f}' = q' \vec{E}$$

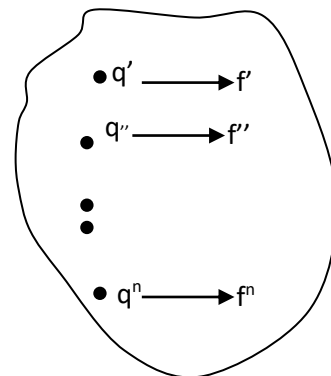


Figure. 2

On définit le champ électrique \vec{E} produit par la charge q_1 comme suit :

$$\vec{f}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{r^2} \vec{u}_r = q' \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{E}/q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \text{ en [V/m].}$$

4.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Une particule de charge q située en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel

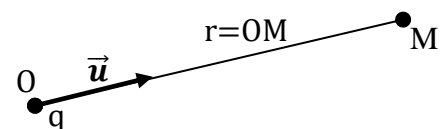


Figure. 3

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

4.2 Champ électrique créé par un ensemble de charges

Dans le cas où le champ est créé par plusieurs charges (q_1, q_2, \dots, q_n), l'intensité du champ est égale à la somme vectorielle des intensités due à chaque charge.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

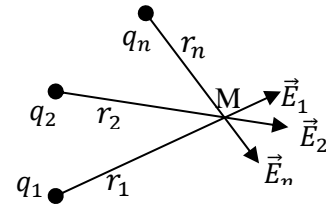


Figure. 4

Cette propriété de superposition des effets électrostatiques est un fait d'expérience et énoncé comme le **principe de superposition** (comme tout principe, il n'est pas démontré).

5. Champ créé par différentes répartitions des charges

5.1 Champ créé par une distribution volumique de charge

Les charges disposées dans un volume (distribution réel), caractérisées par une densité volumique de charge

$$Q = \iiint \rho dv \Rightarrow \rho = \frac{dq}{dv}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r}}{r^3} \rho dv$$

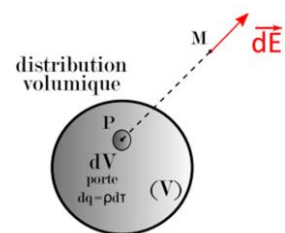


Figure. 5

5.2 Champ créé par une distribution surfacique de charge

Lorsque l'une des dimensions de la distribution volumique de charges est beaucoup plus petite que les deux autres (ex : un plan ou une sphère creuse), on peut généralement faire une intégration sur cette dimension. On définit alors la **densité surfacique de charges**

$$Q = \iint_S \sigma ds \Rightarrow \sigma = \frac{dq}{ds} \quad (\text{Unités : } C/m^2),$$

produisant un champ total

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r^3} \vec{r}$$

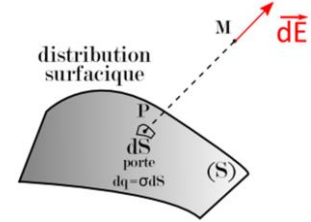


Figure. 6

5.3 Champ créé par une distribution linéique de charge

Enfin, si deux des dimensions de la distribution sont négligeables devant la troisième (ex : un fil), on peut définir une **densité linéique de charges** $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (unités : C/m⁻¹), associé au champ

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r}$$

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces trois expressions dépend de la géométrie de la distribution de charges considérée.

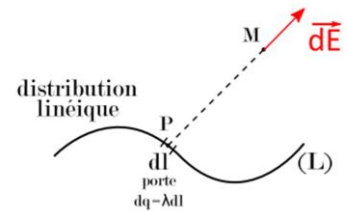


Figure. 7

6. Dipôle électrique :

Le dipôle électrique est une disposition très intéressante constituée de deux charges égales et opposées séparées par une très petite distance, qu'on retrouve particulièrement à l'échelle atomique (Figure. 7).

Le moment électrique dipolaire est donné par :

$$\vec{p} = q \vec{a},$$

où \vec{a} est dirigé de la charge négative vers la charge positive.

Le potentiel crée par le dipôle au point P est :

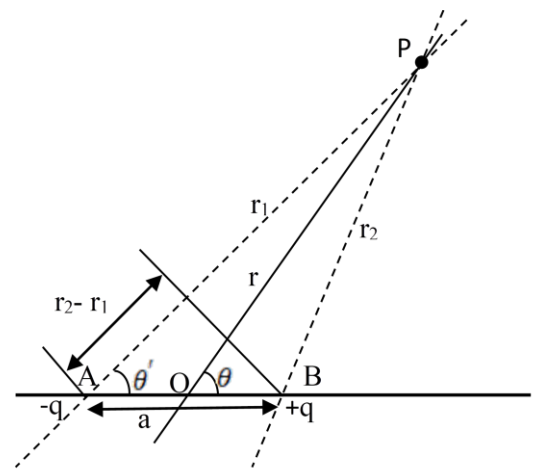


Figure. 8

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

On peut écrire d'après la figure : $r_2 - r_1 = a \cos \theta'$

Si la distance a est très petite par rapport à r , on peut poser :

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta$$

et $r_1 r_2 \approx r^2,$

Ce qui donne :

$$V(P) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le calcul en coordonnées polaires donne deux composantes du champ électrique :

- Une composante radiale E_r :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- Une composante transversale E_θ :

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

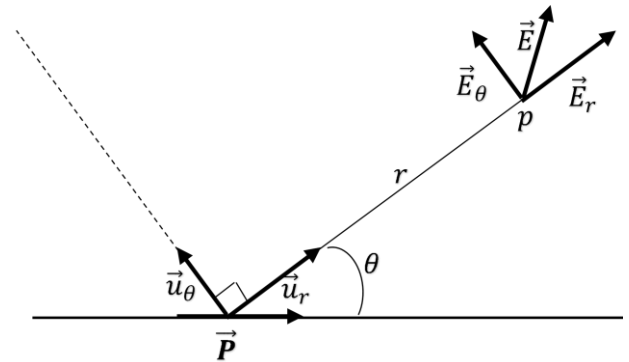


Figure. 9

Un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple qui tend à l'aligner suivant la ligne de ce champ.

7. Potentiel électrique.

On considère une charge q_1 placée à l'origine d'un repère. On apporte une autre charge q_2 de l'infini jusqu'à une distance $r = R$ de q_1 .

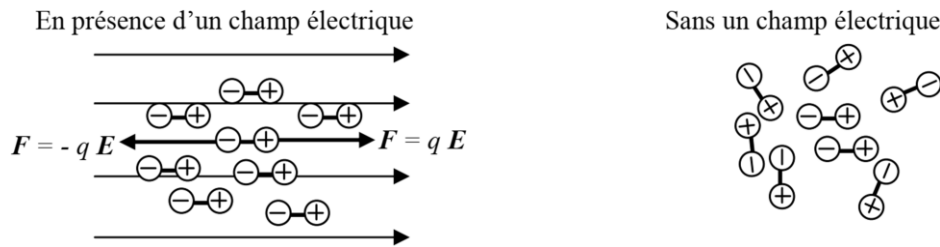


Figure. 10

Le travail fourni W pour vaincre la force de répulsion de q_1 est :

$$W = - \int_{\infty}^R \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\infty}^R F dr = - \int_{\infty}^R q_2 E_1 dr$$

Avec $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$W = - \int_{\infty}^R \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = - \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Suivant le principe de conservation de l'énergie, le travail fourni W est emmagasiné par la charge q_0 sous forme d'énergie potentielle E_p ,

Soit $W = E_p$.

On pose donc : $E_p =$

$$\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = q_1 V_2$$

Avec $V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$

potentiel créé par q_2

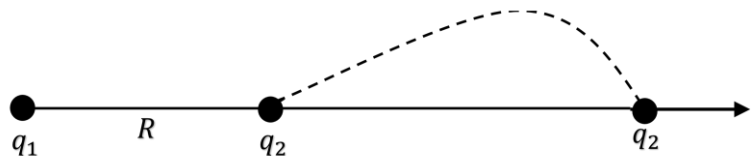


Figure. 11

On peut également écrire : $E_p = q_2 V_1$

Avec $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$ potentiel crée par q_1

$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ est donc l'expression du potentiel crée par une charge q , et $E_p = qV$ est l'énergie potentielle d'une charge q soumise à un potentiel V .

Unité

soit en J/C car par définition $V = E_p/q$ ou bien en Volt, qui est l'unité la plus utilisée. Le potentiel crée par plusieurs charges en un point P peut être déterminé à partir de l'expression suivante :

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

une charge ponctuelle produit :

- Un champ (vectoriel) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$
- Un potentiel (scalaire) $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

8. Relation entre le champ \vec{E} et le potentiel V :

Dans un repère orthonormé Oxyz, le vecteur

$$\vec{r} = r * \vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r};$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{On rappelle } \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{donc} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{-1}{r} \right)$$

$$\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{r} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right); \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$$

Donc la relation entre le champ \vec{E} et le potentiel V est : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$

9. Surface équipotentielle :

On dit qu'une surface est une surface équipotentielle si le potentiel est le même en tout point de la surface.

Exemple : pour une charge ponctuelle q , $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$V = \text{cte}$ pour $r = \text{cte}$

Cet exemple montre que les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

10. Flux de champ électrostatique

Une ligne de champ est une ligne orientée dans le sens du champ électrique, En chaque point de celle-ci, le champ est tangent.

Dans une région vide de charge, plus les lignes de champs sont serrées, plus le champ électrique est intense.

La figure suivante représente les lignes de champs pour deux distributions de charges.

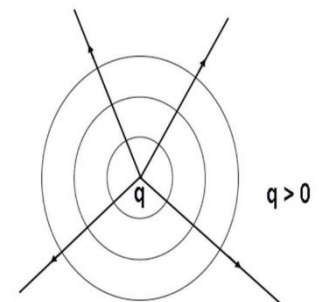


Figure. 12

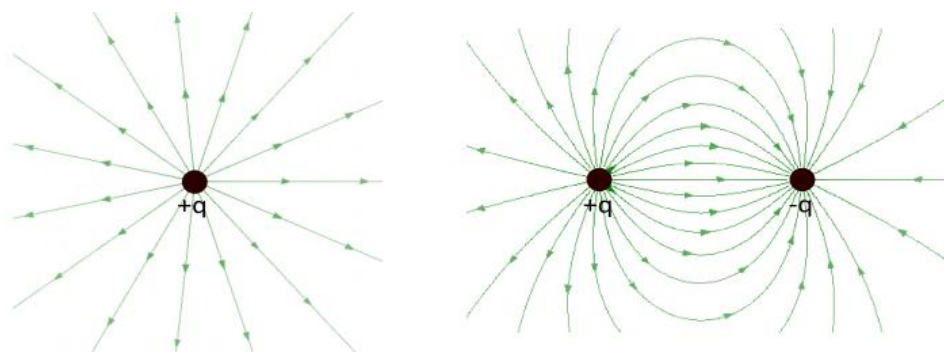


Figure. 13 les lignes de champs pour deux distributions de charges.

Le nombre de lignes de champ tracées à travers une surface S est appelé le flux électrique Φ à travers cette surface, est défini par :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

Où :

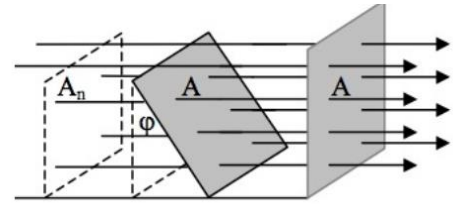


Figure. 14

$\left\{ \begin{array}{l} \Phi : \text{le flux du champ électrique en [V/m]} \\ \vec{E} : \text{champ électrique} \\ ds : \text{élément infinitésimale de la surface} \\ \vec{n} : \text{vecteur unitaire normale à l'élément de surface } ds \end{array} \right.$

11. Théorème de Gauss :

11.1 L'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan.

L'angle solide élémentaire $d\Omega$, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \vec{e}_r$$

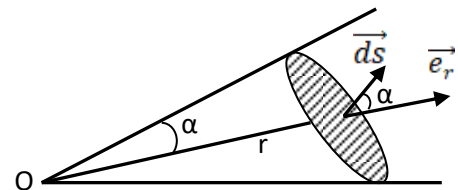


Figure. 15

Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r . Son unité est le « stéradian » (symbole sr).

11.2 Calcul d'un angle solide Ω d'ouverture α :

En coordonnées sphériques, l'élément de surface perpendiculaire à \vec{e}_r est :

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

On en déduit l'expression de $d\Omega$:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \Rightarrow \Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi$$

11.1 Généralisation de théorème de Gauss

Le théorème de Gauss exprime la relation entre le flux électrique sortant d'une surface fermée et la somme de charges comprises à l'intérieur du volume délimité par cette surface. On considère une charge ponctuelle q (positive).

$$\oiint \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

12. Capacité d'un condensateur plan

Considérons deux portions de plans parallèles distants de e et de surface S , en regard l'une de l'autre. Ce système constitue un condensateur plan. Figure ci-contre.

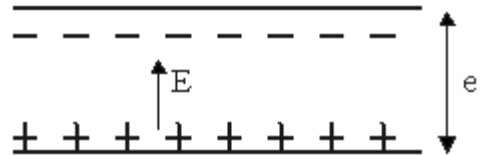


Figure. 16

Si nous négligeons les effets de bord, nous pouvons supposer que la charge Q est uniformément répartie sur chaque armature avec la densité superficielle

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Le champ électrostatique est alors uniforme entre les armatures et donné par le théorème de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \vec{n} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \vec{n}$$

La relation locale $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$, nous permet d'écrire $dV = -\overrightarrow{dE} * \overrightarrow{dl}$

La circulation du champ électrostatique est :

$$V_2 - V_1 = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$$

D'où l'expression de la capacité :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Dans la pratique, on interpose souvent un diélectrique entre les armatures ; dans le cas fréquent d'un diélectrique linéaire homogène et isotrope, la capacité C du condensateur est :

$$C = \frac{\varepsilon S}{e}$$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$: Permittivité absolue du diélectrique, avec :

ε_r : Permittivité relative du diélectrique et ε_0 : permittivité du vide.

13. Énergie électrostatique

En électrostatique, l'énergie emmagasinée par un condensateur était de la forme :

$W_c = \frac{1}{2} C U^2$, où U est la tension aux bornes du condensateur.

- Pour un condensateur plan, il peut noter :

$$V_2 - V_1 = U = E * e \quad \text{et} \quad C = \frac{\varepsilon_0}{eS} ; \text{ alors :}$$

$$W_c = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{e} E^2 * e^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} eS$$

eS : représenté le volume délimité par les armatures.

La densité volumique d'énergie électrostatique s'écrit :

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \text{ (en J.m}^{-3}\text{)}.$$

14. Conditions de passage du champ électrostatique à la surface de séparation entre deux milieux linéaires homogènes et isotropes

Soit un cylindre à une hauteur h , séparée deux milieux linéaires homogènes et isotropes (MLHI), (figure. 17).

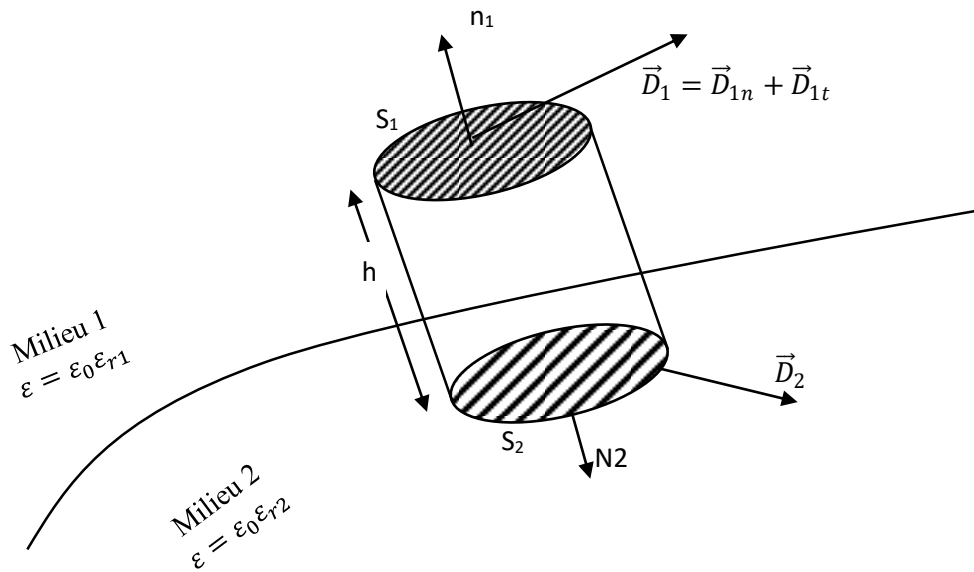


Figure. 17

$$S_1 = S_2 = S \quad h \rightarrow 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{vrai} = \int_S \sigma_{vrai} ds$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 \rightarrow S_1 \\ \phi_2 \rightarrow S_2 \\ \phi_3 \rightarrow S_3(\text{surface lateral}) \end{array} \right.$$

$$\text{Si } h \rightarrow 0 \Rightarrow \phi_3 = 0$$

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \phi_1 + \phi_2 = \vec{D}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{s}_2 = D_{1n} S_1 - D_{2n} S_2$$

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = (D_{1n} - D_{2n}) S = \sigma S \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \frac{\sigma_{vrai}}{S}$$

Généralement la densité de charge σ_{vrai} sur une interface est nulle. $\sigma_{vrai} = 0$.

Ce qui conduit $D_{1n} = D_{2n}$.

Plus on a :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} \text{ et } D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\text{Si } \sigma_{vrai} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \quad \Leftrightarrow \quad E_{1n} \neq E_{2n}$$

La projection sur l'axe tangentiel donne :

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \vec{E} = -\text{grad } V \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{l}_2 = 0$$

$$|\vec{l}_1| = |\vec{l}_2| \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t} \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2t} \end{cases}$$

$$E_{1t} l_1 - E_{2t} l_2 = 0, \quad \text{mais } l_1 = l_2 \text{ donc} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

15. équations de Maxwell en électrostatique

Les deux équations fondamentales de l'électrostatique dans le vide sont :

	Forme locale	Forme intégrale
\vec{E} conservatif	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
Théorème de Gauss pour \vec{E}	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$

Chapitre 2

Magnétostatique

1. Définition

La magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

2. Loi d'Ampère

Permet de calculer le champ magnétique d'une distribution de courants ayant une certaine symétrie.

La circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un contour (Γ), que l'on appelle contour d'Ampère, est égale à la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par ce contour.

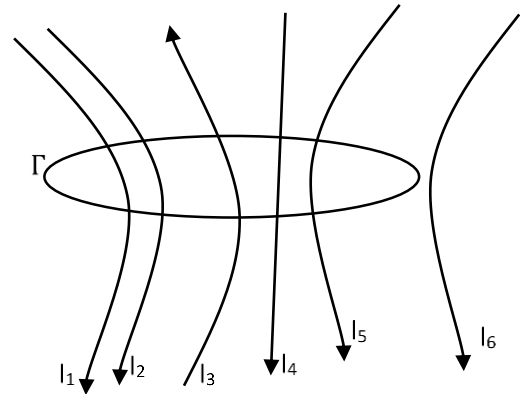


Figure. 1

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

Dans l'exemple de la figure. 1, la somme algébrique est :

$$\sum_{i=1}^n I_i = I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5$$

Cette théorie ne considère que les courants traversant la surface limitée par (Γ).

3. Direction du champ magnétique (règle de la main droite),

3.1 Force magnétique - Force de Lorentz

Une particule de charge q déplacée par une vitesse v dans un champ magnétique \vec{B} est soumise à une force dite de Lorentz telle que: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Produit vectoriel 1^{er} vecteur 2^e vecteur

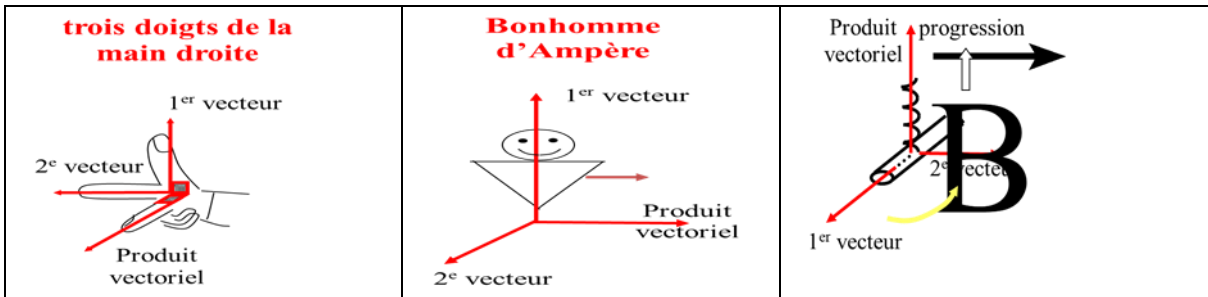


Figure. 2

4. Loi de Biot est Savart et potentiel vecteur magnétique

Champ magnétique crée par un segment de courant

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$|\vec{dB}| = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} \sin(\vec{dl}, \vec{r})$$

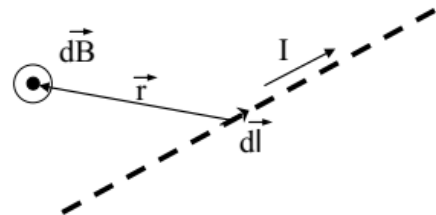


Figure.3

$\mu_0 = 4\pi$: Perméabilité magnétique de vide

$\vec{B} \perp$ au plan (\vec{dl}, \vec{r}) , la triade $\vec{dl}, \vec{r}, \vec{B}$ est directe (règle du

Bonhomme d'Ampère ou règle du tire-bouchon de Maxwell)

Unité de B est Tesla [T]

Remarque : physiquement le champ \vec{dB} crée par un élément de courant \vec{dl} n'a aucun sens.

Sel aura un sens physique le champ magnétique \vec{B} crée par un circuit fermé $\vec{B} = \oint \vec{dB}$.

5. Conservation du flux magnétique

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} \Rightarrow \vec{B} = \oint \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \overrightarrow{\text{div}} \left(\frac{\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$$

On a :

$$\overrightarrow{\text{div}} \left(\frac{\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} * \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{d\ell}) - \overrightarrow{d\ell} * \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) * \overrightarrow{d\ell}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

Donc

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0$$

(Osrogradski)

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} \, d\tau = 0$$

$$\iiint \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} \, d\tau = \oint \vec{B} \, d\vec{s} = 0 \Rightarrow \text{Ce champ est conservatif.}$$

6. Potentiel magnétique

On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$$

\vec{A} est appelé potentiel vecteur magnétique

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I \overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad \overrightarrow{dB} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{dA})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{dA}) = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

on a aussi

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{dA}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge d\vec{\ell}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(k * \vec{v}) = k * \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) + \overrightarrow{\text{grad}}(k) \wedge \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(k) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(k * \vec{v}) - k * \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge d\vec{\ell} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{r} * d\vec{\ell}\right) - \frac{1}{r} * \overrightarrow{\text{rot}}(d\vec{\ell})$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{d\vec{\ell}}{r}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\mu_0 I d\vec{\ell}}{4\pi r}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{dA})$$

$$\overrightarrow{dA} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell}}{4\pi r} \Rightarrow$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell}}{r}$$

7. Expression local du théorème d'Ampère

Comme le théorème d'Ampère s'applique à un contour quelconque on va l'appliquer à un contour infinitésimal PGRS situé dans le plan xy. On a

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{QR} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{RS} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{SP} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

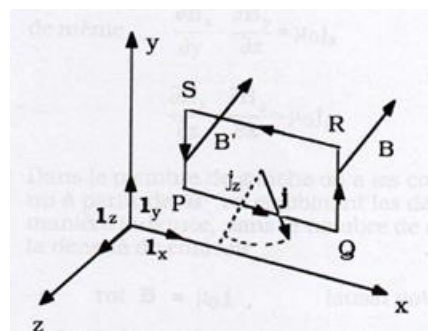


Figure. 4

$$\int_{QR} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B I_y dy = B_y dy$$

$$\int_{SP} \vec{B}' \cdot d\vec{l} = -B'_y dy$$

Donc

$$\int_{QR} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{SP} \vec{B}' \cdot d\vec{l} = (B_y - B'_y) dy$$

$$B_y - B'_y = dB_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx$$

De même

$$\int_{PQ} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{RS} \vec{B}' \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx$$

D'où

$$\oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Si dI est le courant traversant PQRS, on peut le relier à la densité de courant \vec{j} par $dI = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Et finalement

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_x$$

De même

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_y$$

On a établi une relation locale entre \vec{B} et \vec{j} en un même point de l'espace. La donnée de \vec{j} permet de calculer \vec{B} et vice-versa. S'il n'y a pas de courant électrique $\text{rot } \vec{B} = 0$.

Comme on a vu que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ la relation locale correspondante sera : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0$

Remarque :

- On a vu le théorème d'Ostrogorski qui permet de transformé une intégrale de surface en une intégrale de volume

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_v \overrightarrow{\text{div}} \vec{E} \, dV$$

- On vient d'utiliser ici une autre relation (théorème de Stockes) qui lie une intégrale de contour à une intégrale de surface.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

8. Énergie magnétique Wm

Le travail W que nous devons fournir pour augmenter l'intensité du courant dans un circuit (de résistance nulle) est le travail nécessaire pour vaincre la force électromotrice qui apparait dans le circuit (suite à cette augmentation).

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dU}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow U = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\Phi_m = LI \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \oint_c \vec{A} * (I d\vec{l})$$

L'expression pour une distribution volumique de courants s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \vec{A} \cdot \vec{j} dV$$

ou encore

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} B^2(r) dV$$

Interprétation

L'énergie U d'un système de courants (constants) est disséminée dans tout l'espace où règne un champ magnétique avec une densité.

$$u(r) = \frac{1}{2\mu_0} B(r) * B(r) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(r)$$

Chapitre 3

Phénomènes dépendant du temps

(régime quasi-stationnaire)

1. Introduction

Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont :

- Le phénomène d'induction
- Le phénomène de capacité
- Le phénomène de propagation

Pourtant dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi-stationnaire (A.R.Q.S)

2. L'induction électromagnétique

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme (C) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

Les cas de variations du flux du champ magnétique à travers un circuit sont :

- Le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent,
- Le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable,
- le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable.

Pour trouver de manière qualitative le sens du courant induit, on utilise la loi de Lenz qui stipule que :

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.

Puisque une f.é.m apparaît dans le circuit (C) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit (C). Ce champ est appelé champ électrique induit.

3. Loi de Faraday

La force électromotrice induite le long d'un chemin mobile ou fixe dans un champ magnétique constant ou variable est égale au nombre de lignes de flux coupées par le chemin par unité de temps.

Le flux magnétique :

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Unité : Weber (1Wb)=1 T.m²

Pendant un temps dt, la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit (C) est dΦ ; la f.é.m induite e s'exprime à l'aide de la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique.

4. Loi de Lenz

Le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux qui lui a donné naissance.

La signe (-) traduit la loi de Lenz, la F.e.m d'induction peut être définie comme

$$e = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

La circulation sur le circuit fermé d'un champ électromoteur \vec{E}_m .

5. Application :

Le principe des moteurs à induction.

-Les fours à inductions.

-Les ralentisseurs des camions et des Wagons.

-Certains embrayages automobiles.

1. Moments magnétiques atomiques et nucléaires

Soit une orbite de rayon r et v la vitesse de l'électron le courant moyen le long de l'orbite :

$$I = \frac{e}{2\pi r} = \frac{ev}{2\pi r}$$

$$\text{Moment magnétique } \mu = I \cdot (\text{surface}) = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right) \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

Et en fonction du moment angulaire $L = m_e vr$

$$\mu = \frac{e}{2m_e} L \quad (1)$$

Remarque :

- Le calcul reste valable pour toute orbite périodique
- La méca quantique donne le même résultat
- Pour un atome de n électrons \rightarrow relation entre le moment magnétique total et le moment angulaire orbital total
- En mécanique quantique L n'est pas une variable continue mais varie par pas entier de la constante de Planck

$$\hbar = 1.06 \text{ J} \cdot \text{s}^2$$

qui a des unité de moment angulaire $\rightarrow L=0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$

1° Moment angulaire de spin

Mouvement de rotation sur lui-même qui combiné avec sa charge va donner lieu à un moment magnétique de spin. L'électron ayant un spin de $\frac{1}{2} \hbar \rightarrow$ la mécanique quantique donne

$$\mu_{spin} = \left(\frac{e}{2m_e} \right) \hbar = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

C'est le magnéton de Bohr.

On ne peut pas faire : $L = \frac{1}{2} \hbar$ dans la formule $\mu = \frac{e}{2m_e} L$ sinon on trouve une valeur de moitié de μ_{spin} . μ_{spin} a même direction mais sens opposé au moment angulaire de spin.

On devra donc combiner les moments orbitaux et les moments de spin pour trouver le moment magnétique total de chaque atome.

2° Le noyau de l'atome a aussi un moment magnétique

Provenant de moments de rotation orbitale des nucléons et de leur moment intrinsèque de spin.

$\mu_{proton} = 1.41 \cdot 10^{-26} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ce qui est petit comparé à l'électron généralement négligé.

6. Formes intégrale et différentielle des équations des états quasi-stationnaires

Dans l'approximation du régime quasi-stationnaire, les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour \vec{E}	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau$
Équation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$
Loi de Faraday	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{d\vec{B}}{dt}$	$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}$
Théorème d'Ampère-Maxwell	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot \vec{ds}$

7. Comparaison entre le Régime Stationnaire (R.S) et le Régime Quasi-Stationnaire (R.Q.S):

RS	RQS
$\vec{E} = -\overline{\text{grad}}V$	$\vec{E} = -\overline{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$\text{div}\vec{B} = 0$	$\text{div}\vec{B} = 0$
$\overline{\text{rot}}\vec{E} = 0$	$\overline{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\overline{\text{rot}}\vec{B} = \mu\vec{j}$	$\overline{\text{rot}}\vec{B} = \mu\vec{j}$

Chapitre 4

Régime Variable

Équations de

Maxwell

1. Introduction

Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont :

- Le phénomène d'induction
- Le phénomène de capacité
- Le phénomène de propagation

Le phénomène de propagation : Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps ; cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à un instant antérieur qui est fonction de la distance séparant le point d'observation des sources. Nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

Toutefois dans le cas de régimes variant assez lentement en fonction du temps, on fait des approximations qui permettent de négliger certains termes dans les équations de Maxwell. Cet ensemble d'approximations est appelé l'approximation du régime quasi-stationnaire (A.R.Q.S).

Soit un milieu MLHI ne dépend pas du temps

a- Milieu Homogène

On dit que un milieu est homogène, si ses propriétés ne varie pas du point a un autre.

b- Milieu isotrope

On dit un milieu est isotrope, si ses propriétés sont les mêmes dans tous les directions en un point donner.

c- MLHI

$$\text{Si } \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

2. Principe de conservation de la charge

Considérons une surface S entourée un volume V, la conservation de la charge est traduit comme suit :

$$Q = i \cdot t$$

$$i = \frac{dQ}{dt}, \quad \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, d\tau$$

$$\int_S \vec{J}_l \cdot d\vec{s} = -\int_V \frac{\partial \rho_l}{\partial t} \, d\tau \quad \text{Loi de conservation de la charge sous forme intégrale.}$$

$$\text{div } \vec{J}_l = \frac{-\partial \rho_l}{\partial t} \quad \text{Sous forme différentielle.}$$

2.1. Potentielles retardés

$$\text{En statique :} \quad \vec{A} = \mu \int_V \frac{\vec{J} d\tau}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{r}$$

$$\text{En régime variable :} \quad \vec{A} = \mu \int_V \frac{\vec{J}(t-\frac{r}{c}) d\tau}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(t-\frac{r}{c}) d\tau}{r}$$

2.2. Condition de Lorentz

On l'appelle condition de Lorentz la relation :

$$\text{div } \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Dans le vide elle s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

3. Équation de Maxwell

Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et ses sources (ρ, j) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} & (\text{équation du flux magnétique}) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (\text{équation du Maxwell Gauss}) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{équation du Maxwell Faraday}) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{équation du Maxwell Ampère}) \end{array} \right.$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

3.1. Loi de Maxwell-Ampère,

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total. Cette équation est héritée du théorème d'Ampère. Sous forme locale, elle s'écrit en termes de vecteur densité de courant \vec{j} :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Aussi noté } \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est :

$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = \iint \mu_0 \vec{j}_t d\vec{s} = \iint \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

On obtient le résultat fondamental : Un champ électrique variable crée un champ magnétique.

3.2. Équation de continuité

Considérons une surface fermée (S) entourant un volume (τ) ; si ρ est la densité volumique de charge électrique et q la charge électrique totale du volume (τ) à l'instant t , on a

$$q = \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

Pendant l'intervalle de temps dt la variation de la charge totale est dq , et le taux de variation de charge s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{\tau} \rho d\tau \right)$$

Mais $\oiint_S \vec{j}_t d\vec{s}$ représente la charge totale sortant de la surface (S) par unité de temps, donc par suite de la conservation de la charge :

$$\frac{dq}{dt} = - \oiint_S \vec{j}_t d\vec{s}$$

Et

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{\tau} \rho d\tau \right) = - \oiint_S \vec{j}_t d\vec{s}$$

En changeant l'ordre des opérations par rapport à l'espace et par rapport au temps, on a :

$$\left(\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \right) = - \oiint_S \vec{j}_t d\vec{s}$$

or, d'après le théorème d'Ostrogradsky :

$$- \oiint_S \vec{j}_t d\vec{s} = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau$$

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] d\tau = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume (τ), il faut donc que l'on ait :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cette équation dite de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux de vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans le cas des états stationnaires.

On peut vérifier que le théorème d'Ampère qui est valable uniquement dans le cas des régimes stationnaires ne peut plus être utilisé dans le cas des régimes variables car il serait en contradiction avec la relation de continuité qui exprime un principe fondamental de la physique (Principe de conservation de la charge électrique). Par contre le théorème d'Ampère-Maxwell qui prend en compte le courant de déplacement satisfait pleinement la relation de continuité.

4. Loi d'Ohm localisée

La loi d'Ohm : pour un conducteur comme le cuivre par exemple, le temps de relaxation (« durée » de collision des porteurs de charges) est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14}$ s. Or on sait que, dans un conducteur, la loi d'Ohm est satisfaite si le temps caractéristique d'évolution du système T vérifie $T \gg \tau$. Dans le cadre de l'ARQS, cette condition sera bien vérifiée.

Ainsi, dans le cadre de l'ARQS, la loi d'Ohm locale sera valable :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \left(\vec{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

- Courant de déplacement dans un conducteur ohmique :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, compte tenu de la loi d'Ohm locale :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On note T le temps d'évolution caractéristique de la distribution (D) (sa période d'évolution). On peut comparer le courant de conduction avec le courant de déplacement :

$$\frac{|\sigma \vec{E}|}{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \approx \frac{\sigma E}{\varepsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\sigma T}{\varepsilon_0}$$

Par conséquent, pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

5. Conditions limites

À l'interface de deux milieux ayant des propriétés magnétiques différentes, la composante normale de l'induction magnétique est continue, en raison de la loi différentielle $\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0$.

Par contre, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue s'il y a des courants libres de surface. Si \vec{K} est la densité superficielle de courant, alors l'application du théorème de Stokes près de l'interface à la relation $\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{H} = (4\pi/c) \vec{j}$ donne

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = -4\pi/c \vec{K}$$

En effet, soit \vec{n}_1 le vecteur normal à une boucle rectangulaire infinitésimale traversant l'interface et $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}$. Alors $\vec{n}_2 \cdot$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \left(\frac{4\pi}{c}\right) \vec{n}_2 \vec{K}$$

ou

$$(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{n}_1 \cdot (\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)) = \left(\frac{4\pi}{c}\right) \vec{n}_2 \cdot \vec{K}$$

Chapitre 5

Propagation du champ

électromagnétique

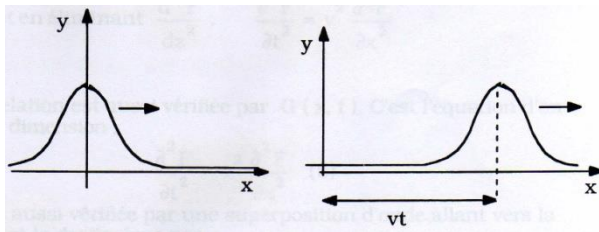
1. Description mathématique de la propagation

Comment transmettre une perturbation d'une extrémité à l'autre ?

- En écartant transversalement une masse de la position d'équilibre et en la relâchant → onde transversale
- On a à la fois de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle → l'onde transporte de l'énergie
- Après passage de la perturbation, tout revient à son état initial → la perturbation ne transporte pas de matière

2. équation de propagation d'une onde quelconque,

Déplacement d'une perturbation parcourant un milieu avec une vitesse v . On va supposer que la forme de la perturbation ne varie pas dans le temps.



Soit $y=f(x)$ la forme de la perturbation à l'instant $t=0$. A l'instant t ultérieur, la perturbation sera en $x=vt$ mais garde la même forme donc $y=f(x-vt)$ de sorte que pour $x=vt$, $y=f(0)$.

$y = F(x, t) = f(x - vt)$ dont la fonction d'une variable $y=f(z)$ est transformée en une fonction de deux variables $F(x,t)$ par la substitution $z= x-vt$

Quelle est l'équation différentielle qui satisfait à $F(x,t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{df}{dz} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \quad (2)$$

En éliminant df/dz des deux relations :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -v \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3) \text{ (onde se déplaçant vers la droite)}$$

La même opération pour une onde allant vers la gauche :

$$y = G(x, t) = f(x + vt)$$

$$\rightarrow \frac{\partial G}{\partial t} = v \frac{\partial G}{\partial x} \quad (4)$$

Pour avoir une même équation pour les deux mouvements, il faut dériver encore une fois les équations (3) et (4) par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -v \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Et en éliminant $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$: $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

Cette relation est aussi vérifiée par $G(x, t)$. C'est l'équation d'onde à une dimension :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (5)$$

Elle est aussi vérifiée par une superposition d'onde allant vers la gauche et la droite donc par

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Nous allons nous intéresser à une forme particulière d'ondes, appelées ondes harmoniques et donc la forme générale est

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \sin(kx + \omega t) \quad (6)$$

Où A, B et k, ω sont des constantes positives.

Il faut d'abord montrer que cette forme est bien une solution acceptable de l'équation d'onde (5)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t) - k^2 B \sin(kx + \omega t) = -k^2 y$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) - \omega^2 B \sin(kx + \omega t) = -\omega^2 y$$

D'où

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On a donc bien une onde qui se propage à la vitesse $v = \omega/k$. On montre que la relation

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \sin(kx + \omega t) \quad (6)$$

Où les sinus sont remplacés par des cosinus est aussi solution de l'équation d'onde. On remarque aussi que dans $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \sin(kx + \omega t)$ (6) $y(x, t)$ est le même lorsque l'argument du sinus change de 2π donc

a) Pour t fixé

$\sin(kx - \omega t)$ est périodique en x avec une période $2\pi/k = \lambda$

k est le nombre d'onde (m^{-1})

λ est appelé longueur d'onde (m)

b) Pour x fixé

$\sin(kx - \omega t)$ est périodique en t avec une période $T = 2\pi/\omega$

ω est appelé pulsation ou fréquence angulaire (s^{-1})

T est la période (s)

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ est la fréquence } (s^{-1})$$

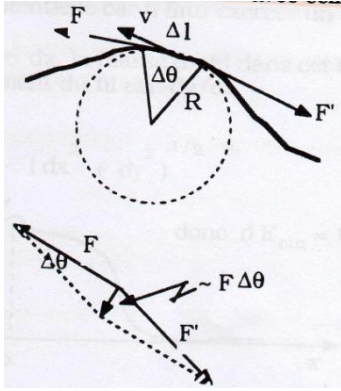
$$v\lambda = \frac{\omega}{k} = v \text{ vitesse de phase de l'onde}$$

3. Vitesse des ondes dans un fil.

Soit F la tension du fil et μ la densité du fil (kg/m)

On suppose que l'amplitude de la perturbation est petite par rapport au fil donc l'onde n'introduit qu'une toute petite perturbation dans le fil et la tension de celui-ci reste constante.

On se place dans un système de référence « attaché » à la perturbation donc en mouvement de vitesse v avec celle-ci.



Sur le petit segment Δl , la perturbation, de forme quelconque, peut être approchée par un arc de cercle, de rayon R et sous tendant un angle θ . LA force résultante qui tend à ramener le fil à sa position d'équilibre est $\sim F\Delta\theta$ donc $\mu\Delta l \frac{v^2}{R} = F\Delta\theta$ et donc $\mu\Delta l = m$ mais $R\Delta\theta = \Delta l \rightarrow$ il reste $\mu v^2 = F$ et

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

v ne dépend que de F et μ et donc pas de forme de la perturbation. Grâce à $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ la vitesse de propagation dépend de la force de rapport F et de l'inertie du milieu μ . Il est à noter que le fait que v ne dépend pas de la forme de la perturbation est un cas assez particulier. En général, les différentes parties de la perturbation se déplacent à des vitesses différentes : déformation.

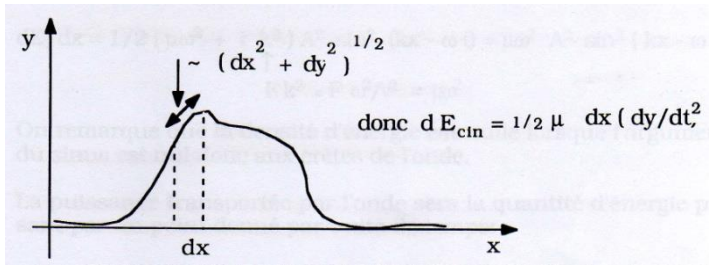
Milieu dispersif : milieu qui donne lieu à un tel comportement. La vitesse du point de déformation maximum est appelée vitesse de groupe et, sauf pour les ondes harmoniques, est différente de la vitesse de phase.

4. Énergie d'une onde.

Une onde transverse dans un fil possède :

- Une énergie cinétique car les particules sont en mouvement
- Une énergie potentielle car il faut exercer un travail pour étirer le fil

Soit un intervalle dx , la masse du fil dans cet intervalle est μdx et la vitesse d'un élément du fil est dy/dt



Énergie potentielle : le fil est initialement de longueur dx et prend après extension une longueur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ et donc le changement de longueur est

$$\delta l = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right)$$

Si dy/dx est petit on peut utiliser l'approximation

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad \text{donc } \delta l = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

Mais l'énergie potentielle est le travail à effectuer contre la tension F pour étendre le fil d'une longueur δl donc

$$dU = F\delta l = \frac{1}{2}F \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

Et l'énergie totale est :

$$dE = dE_{cin} + dU = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\text{D'où } \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$dE/dx \rightarrow$ densité d'énergie totale de l'onde

Application aux ondes harmoniques :

Si $y = A \cos(kx - \omega t)$, en calculant $\frac{\partial y}{\partial t}$ et $\frac{\partial y}{\partial x}$ on obtient :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}(\mu\omega^2 + Fk^2)A^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$Fk^2 = F \frac{\omega^2}{v^2} = \mu\omega^2$$

La densité d'énergie est nulle lorsque l'argument du sinus est nul donc aux crêtes de l'onde.

La puissance transportée par l'onde sera la quantité d'énergie passant par un point donné par unité de temps :

$$P = \frac{dE}{dt} = \left(\frac{dE}{dx}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) = v \frac{dE}{dx} = v \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Le fait que P soit proportionnel à v, à ω^2 et à A^2 est vrai pour tous les types d'ondes.

5. Principe de superposition.

Lorsque plusieurs ondes arrivent en un même point, la déformation résultante instantanée est simplement la somme des déformations individuelles instantanées : chaque onde se propage comme si les autres n'étaient pas présentes : les ondes n'interagissent pas entre elles. Mais pour des ondes de forte intensité le principe de superposition ne s'applique plus.

Exemple pour deux ondes harmoniques de même amplitude et se propageant dans la même direction :

$$y_1 = A \cos(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \cos(kx - \omega t + \delta) \quad \delta: \text{différence de phase}$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right) \cos\frac{1}{2}\delta$$

$$\text{En utilisant } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

L'onde résultante a la même fréquence mais une amplitude donnée par $2A \cos \frac{1}{2} \delta$. Si $\delta=0$, l'amplitude est de $2A$ et donc les deux ondes s'additionnent, si $\delta=\pi$ l'amplitude totale est nulle (interférence destructive). Si les amplitudes A ne sont pas les mêmes, une interférence destructive réduira l'amplitude totale sans l'annuler complètement. Etudions maintenant la somme de deux ondes de fréquences légèrement différentes :

$$y_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]$$

Pour $t=0$

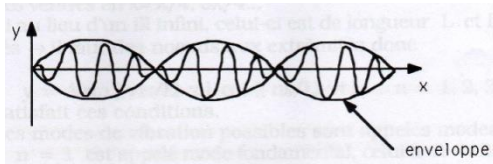
$$y = 2A \cos \left[\frac{1}{2} (\Delta k)x \right] \cos(\langle k \rangle x)$$

Avec $\Delta k = k_1 - k_2$ et $\langle k \rangle = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$

On a donc

- Une onde harmonique de vecteur d'onde moyen
- Dont l'amplitude varie lentement en fonction de x si $k_1 \sim k_2$ et donc Δk est petit

L'amplitude de l'onde est modulée, maximum pour $x=0$ et minimum pour $x=\pi/\Delta k$ lorsque les deux ondes interfèrent destructivement.



Phénomène de battement : lorsque t change la configuration ci-dessus se déplace vers la droite avec la vitesse de l'onde. En un point donné, l'onde

subit une pulsation dans le temps appelée battement. Dont la fréquence est :

$$v_{\text{battement}} = \frac{1}{\Delta t} = v \frac{\Delta k}{2\pi} = \frac{vk_1}{2\pi} - \frac{vk_2}{2\pi} = v_1 - v_2$$

Une onde périodique peut être décomposée en une somme d'ondes harmoniques (sinus et cosinus) grâce au théorème de Fourier.

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{4A}{\pi}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \left(\frac{4A}{3\pi}\right) \sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right) + \left(\frac{4A}{5\pi}\right) \sin\left(\frac{10\pi x}{L}\right) + \dots \\ &= 4A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(4n+2)x\pi}{L}\right) \end{aligned}$$

Où L est la longueur d'onde de l'onde carrée d'amplitude A

6. Ondes stationnaires

Soit la superposition de deux ondes de même amplitude et même fréquence mais se propageant en sens opposé.

$$y_1 = A \cos(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \cos(kx + \omega t)$$

$$\rightarrow y = y_1 + y_2 = 2A \cos kx \cos \omega t$$

C'est une onde stationnaire, quelque soit le temps les maxima restent à la même position. L'onde est affectée d'une pulsation dans le temps de fréquence ω . Les positions d'amplitude maximum (ventre) sont telles que $x=0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$ et les positions d'amplitude minimum (nœuds) sont telles que $x=1/4\lambda, 3/4\lambda, 5/4\lambda, \dots$ si le fil est fixé en $x=0$, alors il y aura des nœuds en $x=0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$ et des ventres en $x=1/4\lambda, 3/4\lambda, 5/4\lambda$

Pour un fil de longueur L fixé aux extrémités :

$$y = A \sin \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) x \right] \cos \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right) vt \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les modes de vibrations possibles sont appelés modes normaux celui à $n=1$ est le mode fondamental. Celui à $n=2$ le 1^{er} harmonique etc. Les longueurs d'ondes de ces modes $\lambda_1 = 2L, \lambda_2 = L, \lambda_3 = 2L/3$ et les fréquences correspondantes $\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad n = 1, 2, \dots$

7. Ondes électromagnétiques planes

Les solutions particulières des équations de Maxwell formées d'un champ électrique et d'un champ magnétique perpendiculaires.

Pour cela on prend E orienté suivant l'axe y et B orienté suivant l'axe z .

Dans ce cas $E_x = 0 \quad E_y = E \quad E_z = 0$

$$B_x = 0 \quad B_y = 0 \quad B_z = B$$

Les équations de Maxwell donnent dans le vide

$$\text{Théorème de Gauss électrique} \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad (1) \quad \text{div } E = 0$$

$$\text{Théorème de Gauss magnétique} \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad (2) \quad \text{div } B = 0$$

$$\text{Théorème de Faraday} \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (3) \quad \text{rot } \vec{E} = \frac{(-\partial B)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4)$$

théorème de Maxwell $\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$ (5) $\overrightarrow{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6)$$

De (1) et (3) \vec{E} ne dépend pas de y et z \rightarrow seulement de x et t

De (2) et (5) \vec{B} ne dépend pas de y et z \rightarrow seulement x et t

\vec{E} et \vec{B} ont à chaque instant la même valeur dans un plan perpendiculaire à x qui est la direction de propagation.

Pour trouver la dépendance des champs en x et t on va utiliser la relation (4) et (6) :

Dérivons (4) par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} \quad (7)$$

Dérivons (6) par rapport à t :

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Donc B est aussi une onde [$B = B(x - ct)$] se déplaçant à la vitesse c. On sait que l'équation d'onde admet pour solution les ondes planes sinusoïdales.

Par exemple :

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \text{ avec } \omega = kc$$

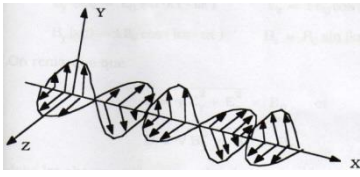
$$B_z(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t) \quad (9)$$

Mais E_0 et B_0 ne peuvent être indépendantes car il faut obéir aux équations (4) et (6) donc

$$\frac{\partial E}{\partial x} = kE_0 \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -kc B_0 \cos(kx - \omega t)$$

On aura entre valeurs instantanées les mêmes relations qu'entre les amplitudes :

$$\vec{E} = c \vec{B} \text{ et } \vec{B} = 1/c \vec{E}$$



Par définition, la direction de E est appelée direction de polarisation de l'onde. Les ondes électromagnétiques associées aux deux solutions vues jusqu'ici sont dites polarisées linéairement parce que e est toujours contenu dans un plan.

La lumière solaire ou d'une lampe est dite non polarisée car constituée d'un grand nombre d'ondes planes dont les positions relatives de polarisation sont aléatoires \rightarrow la moyenne est nulle.

On peut modifier cela via un filtre polarisant constitué de longues chaînes de molécules orientées de façon parallèle : la direction parallèle à celle des molécules laisse passer le champ électrique, la direction perpendiculaire l'arrête.

Il existe d'autres solutions à l'équation d'onde en particulier :

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad E_z = \pm E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$B_y(x, t) = \pm B_0 \cos(kx - \omega t) \quad B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

On remarque que :

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_0 \text{ et}$$

$$B = \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = B_0$$

Donc les champs ont une amplitude constante mais E et B , tout en restant perpendiculaires, tournent autour de la direction de propagation : polarisation circulaire gauche ou droite suivant le signe choisi.

Les ondes électromagnétiques planes sont transversales, les champs E et B sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation.

La loi de Malus

Si la direction préférentielle d'un polariseur fait un angle θ avec la direction d'un champ électrique e d'amplitude E_0 , la composante du champ parallèle à la direction préférentielle sera

$E' = E_0 \cos \theta$ et comme l'intensité transmise est proportionnelle au carré de l'amplitude :
intensité transmise = $\cos^2 \theta \times$ intensité incidente. C'est la loi de Malus de polarisation.

8. Énergie et impulsion d'une onde électromagnétiques.

Densité d'énergie associée à un champ électrique : $E_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Densité d'énergie associée à un champ magnétique $E_B = \frac{1}{2} \mu_0 c^2 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = E_E$

La densité totale d'énergie vaudra donc $E_{tot} = \epsilon_0 E^2$

L'intensité de l'onde, énergie par unité de temps à travers une surface unité sera : $I = E_{tot} c = c \epsilon_0 E^2$

Et l'intensité moyenne : $I_{moyen} = c \epsilon_0 (E^2)_{moyen}$

Qui pour une onde sinusoïdale donne

$$(E^2)_{moyen} = E_0^2 [\sin^2(kx - \omega t)]_{moyen} = \frac{1}{2} E_0^2$$

D'où $I_{moyen} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$

Produit vectoriel $E \times B$ pour une onde électromagnétique plane, c'est un vecteur perpendiculaire au front d'onde et parallèle à la direction de propagation.

$$|E \times B| = EB = \left(\frac{1}{c}\right) E^2$$

Le vecteur $c^2 \epsilon_0 E \times B$ ou $1/\mu_0 E \times B$ est appelé vecteur de Poynting et son module est l'intensité instantanée I de l'onde.

$$\oint P dS = \frac{dE}{dt}$$

avec $\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ vecteur de Poynting est l'énergie qui traverse la surface s par unité de temps. de $p = mv$ et $E_{tot} = mc^2$ on tire :

$$p = v \frac{E}{c^2} = \frac{E_{tot}}{c} \text{ pour } v = c$$

Donc la quantité de mouvement par unité de volume associée à l'onde électromagnétique est

$$p = \frac{E_{tot}}{c} = \epsilon_0 \frac{E}{c} = \epsilon_0 (E \wedge B)$$

On peut aussi montrer qu'une onde électromagnétique possède un moment cinétique

$$L = r \times p = \epsilon_0 r. (E \wedge B)$$

Par conséquent une particule qui émet ou absorbe une onde électromagnétique modifie son énergie et sa quantité de mouvement mais aussi son moment cinétique.

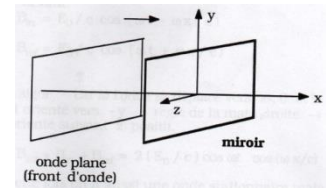
\vec{P} vecteur de Poynting

p impulsion

P_n pression

9. Ondes électromagnétiques stationnaires

Une onde plane, harmonique et polarisée dans la direction y est totalement réfléchiée sur un miroir plan orienté perpendiculairement à sa direction.



Les champs électriques des ondes incidentes et réfléchies sont

$$E_{in} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \leftarrow \text{onde de pulsation } \omega \text{ se dirigeant vers la droite}$$

$$E_{ref} = -E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c}\right) \leftarrow \text{onde de pulsation } \omega \text{ se dirigeant vers la gauche}$$

$$E_{tot} = E_{in} + E_{ref} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ pour tout } t$$

Dans la région $x < 0$ on aura

$$\begin{aligned} E_{tot} = E_{in} + E_{ref} &= E_0 \left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c}\right) \right] \\ &= 2E_0 \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{c} \end{aligned}$$

C'est une onde stationnaire fixée dans l'espace. L'amplitude $2 E_0 \sin \omega x/c$ de l'onde est maximum en

$$\rightarrow \frac{\omega x}{c} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots \text{ et donc si } \lambda \text{ est la longueur d'onde } (\lambda = 2\pi c/\omega) ;$$

$$x = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda \dots \text{ maxima variant en } t \text{ entre } 2E_0 \text{ et } -2E_0$$

En les points $x=0, 1/2 \lambda, \lambda, 3/2 \lambda \dots$ noeud

L'interférence destructive des ondes incidentes et réfléchies génère tout le temps une onde d'amplitude nulle.

Le champ magnétique associé au champ électrique est orienté suivant z et vaut :

$$B_{in} = \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right)$$

$$B_{ref} = \frac{E_0}{c} \cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{c}\right)$$

B_{ref} est toujours orienté suivant z positif.

$$B_{tot} = B_{in} + B_{ref} = 2\left(\frac{E_0}{c}\right) \cos \omega t \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

On a une onde stationnaire mais :

$$x = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda \text{ nœud}$$

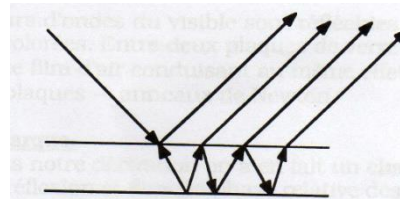
$$x=0, 1/2\lambda, \lambda, 3/2\lambda \text{ maximal}$$

- Les maxima de B sont déplacés de $\frac{1}{4}\lambda$ par rapport à ceux de E
- Il y a une différence de phase en temps de $\pi/2$

10. Les films minces

Ces phénomènes d'interférence en lumière visible deviennent spectaculaires dans le cas de film mince :

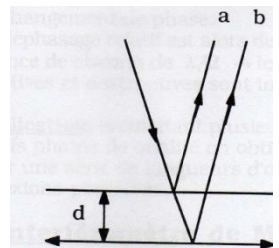
Ondes réfléchies se déplaçant dans la même direction et pouvant interférer constructivement ou destructivement



- 2 ondes les plus intenses après réflexion
- Si le rayon est ~ vertical la différence de chemin parcouru par (a) et (b) est $\sim 2d$ et donc si $2d$ est un multiple de λ les 2 ondes vont s'ajouter crête à crête \rightarrow interférence constructive

$$2d = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots \text{ interférence constructive}$$

$$2d = 1/2\lambda, 3/2\lambda, 5/2\lambda, \dots \text{ interférence destructive}$$



(λ est ici la longueur d'onde dans le film, si son indice de réfraction est n , ce sera $n\lambda$ dans l'air)

Remarque :

Dans notre dérivation on a en fait un changement de phase à chaque réflexion et donc la phase relative des ondes réfléchies ne change pas ? C'est ce qui se passe quand le rayon va d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent. Dans le cas d'un film suspendu dans l'air (bulle) l'onde réfléchie à la surface inférieure ne subit pas de changement de phase. Le déphasage relatif est alors de 180° ce qui est équivalent à une différence de chemin de $\lambda/2$ les conditions d'interférences constructives et destructives sont inversées.

Chapitre 1

Réflexion et

transmission

des ondes

électromagnétiques

1. Réflexion des ondes électromagnétiques

On s'intéresse désormais à l'arrivée d'une onde EM sur une surface métallique. On assimile localement l'interface air/métal à son plan tangent et on note \vec{z} le vecteur unitaire normal, dirigé du métal vers l'air.

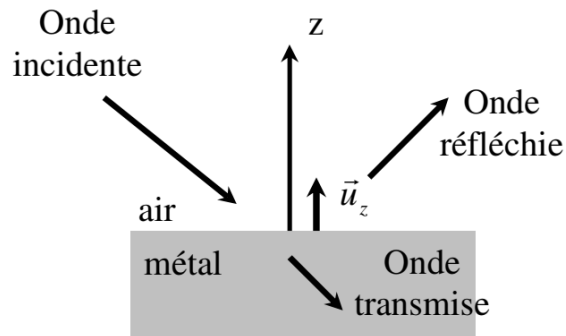


Figure. 1

L'air est assimilé au vide. Dans le conducteur, les charges de conduction sont mises en mouvement par le champ de l'onde EM et vont intervenir dans le processus de propagation. Dans la suite, on se limite à des fréquences telles que la période de l'onde est très grande devant le temps de relaxation du métal (ou $\nu \ll 10^{13}$ Hz).

On note ω la pulsation de l'onde incidente ; on constate expérimentalement que l'onde réfléchie et l'onde transmise ont même pulsation.

Le métal sera supposé parfait : sa conductivité $\sigma \rightarrow \infty$ (parfois notée γ)

Les équations de Maxwell ont permis de montrer que :

$$\vec{E}_{air} - \vec{E}_{conducteur} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

et

$$\vec{B}_{air} - \vec{B}_{conducteur} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

- La composante tangentielle du champ électrique était continue à la traversée de la surface métallique.
- La composante normale du champ magnétique était continue à la traversée du métal.

2. Modèle du conducteur parfait

La puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur est :

$$\vec{P}_j = \vec{j} \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$$

Pour un conducteur parfait, $\sigma \rightarrow \infty$ et ainsi $\vec{E}^2 \rightarrow 0$ pour que cette puissance volumique reste finie : le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait. D'après la relation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = 0 = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Seul un champ statique peut exister dans le conducteur parfait. On supposera dans la suite qu'il n'y a aucun champ statique : $\vec{B} = 0$.

Finalement, il n'y a pas de champ EM au sein du métal parfait (cas identique au cas statique). L'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$div \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

soit

$$\rho = 0$$

Il n'y a pas de charges volumiques au sein du métal parfait. L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{soit } \vec{j} = \vec{0}$$

Il n'y a pas de courants volumiques au sein du conducteur. Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.

Conclusion : en régime variable, un conducteur parfait est caractérisé par des champs \vec{E} et \vec{B} nuls et des densités volumiques de charge ρ et de courant \vec{j} nulles. Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques.

Remarque : on néglige finalement l'effet de peau

3. Complément sur l'effet de peau

Dans le conducteur, $\rho = 0$; en effet, le temps de retour à la neutralité électrique est très court : On suppose qu'à l'instant $t = t_0$, il existe en un point M intérieur au conducteur une charge volumique $\rho(M, t_0)$. Comment varie dans le temps cette charge volumique ?

L'équation de Maxwell-Gauss, la loi d'Ohm locale et la conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

permettent d'écrire :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\sigma} \vec{j} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

Par intégration :

$$\rho(M, t) = \rho(M, t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_d}\right) \quad \text{avec} \quad \tau_d = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

Pour le cuivre, $\tau_d \approx 4.10^{-14} \text{ s}$: très rapidement, le conducteur devient neutre en volume :

$$\rho(M, t) = 0$$

Ainsi, comme en régime stationnaire, les charges s'accumulent au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, d'où l'intérêt de la notion de charge surfacique σ .

Finalement, dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes : (on néglige également le courant de déplacement devant le courant de conduction)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

L'équation de propagation du champ électrique est :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad \Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

C'est une équation de type « diffusion », obtenue dans les transferts thermiques conductifs.

On cherche des solutions complexes de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 f(z) e^{j\omega t}$. D'où :

$$f''(z) - j\mu_0 \sigma \omega f(z) = 0$$

On pose $k = \mp(1 + j)\sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{2}}$; alors, en éliminant la solution qui diverge dans le métal (avec $z < 0$!) et en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}}$ on obtient :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{z/\delta} e^{j(\omega t + z/\delta)}$$

Le champ se propage dans le métal mais en étant atténué d'un facteur $e^{z/\delta}$ (attention ici, $z < 0$) ; δ est appelée épaisseur de peau et correspond à l'ordre de grandeur de la longueur de pénétration de l'onde dans le métal.

Cette épaisseur sera d'autant plus faible que la conductivité de matériau et la fréquence de l'onde sont élevées.

L'onde est ici absorbée du fait de l'effet Joule au sein du conducteur, sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ .

Si l'on considère une onde EM de fréquence de l'ordre du GHz, δ est de l'ordre du μm .

4. Ondes incidente et réfléchie

Le champ électromagnétique de l'onde incidente, se propageant dans la direction du vecteur \vec{u}_i dans le milieu (1) s'écrit :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i(\alpha x - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{0i}}{\omega} e^{i(\alpha x - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

Pour l'onde réfléchie dont la pulsation est la même que celle de l'onde incidente (se propageant dans la direction du vecteur \vec{u}_r dans le milieu 1) :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\alpha x - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_{0r}}{\omega} e^{i(\alpha x - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

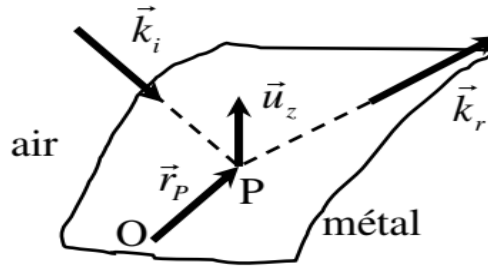


Figure. 2

On a par ailleurs (dans le vide) : $k_i = k_r = \frac{\omega}{c}$

Les conditions de passage des champs électromagnétiques permettent d'affirmer que :

$$\vec{E}_{air} - \vec{E}_{conducteur} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

et

$$\vec{B}_{air} - \vec{B}_{conducteur} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

Comme

$$\vec{E}_{conducteur} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{B}_{conducteur} = 0 ; \text{ Il vient que :}$$

$$\vec{E}_{air} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

et

$$\vec{B}_{air} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

Le champ électrique total est normal au conducteur alors que le champ magnétique est tangent au conducteur.

Par conséquent :

$$\vec{E}_{0i} e^{i(\alpha x - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_p)} + \vec{E}_{0r} e^{i(\alpha x - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_p)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air}$$

où $\vec{r}_p = \vec{OP}$ désigne le rayon vecteur d'un point P quelconque de l'interface air-métal (avec l'origine O choisie sur l'interface).

On note $\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{0i, //} + \vec{E}_{0i, \perp} = \vec{E}_{0i, //} + \vec{E}_{0i, z}$ (une coordonnée dans le plan tangent au conducteur et une coordonnée perpendiculaire, selon (Oz)).

De même pour le champ réfléchi : $\vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0r, //} + \vec{E}_{0r, \perp} = \vec{E}_{0r, //} + \vec{E}_{0r, z}$

Si l'on projette sur le plan tangent de l'interface :

$$\underline{\vec{E}}_{0i, //} e^{i(\omega \vec{k}_i \cdot \vec{r}_P)} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} e^{i(\omega \vec{k}_r \cdot \vec{r}_P)} = \vec{0}$$

Soit encore :

$$e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_P} (\underline{\vec{E}}_{0i, //} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P}) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\underline{\vec{E}}_{0i, //} + \underline{\vec{E}}_{0r, //} e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}_P} = \vec{0}$$

Cette équation devant être valable pour tout point P, il vient :

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \vec{r}_P = 0$$

Soit $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ colinéaire à $\vec{n}_{cond \rightarrow air}$: le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est donc dans le plan d'incidence (défini par \vec{k}_i et $\vec{n}_{cond \rightarrow air}$).

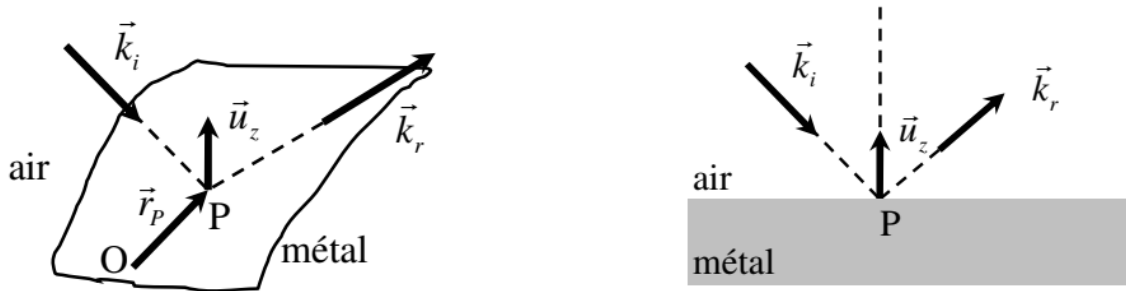


Figure 3

Enfin, comme $k_i = k_r = \frac{\omega}{c}$ et que $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ est colinéaire à $\vec{n}_{cond \rightarrow air}$, les angles d'incidence et de réflexion sont identiques (loi de Descartes pour la réflexion).

On en déduit de plus que : $\vec{E}_{0i, //} + \vec{E}_{0r, //} = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_z$

5. Réflexion sous incidence normale sur un plan conducteur parfait

Dans le cas particulier de l'incidence normale :

$$\vec{k}_i = \vec{k}_r = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$$

La condition aux limites

$$\vec{E}_{air} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{cond \rightarrow air} \text{ pour le champ}$$

électrique donne :

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{z=0} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

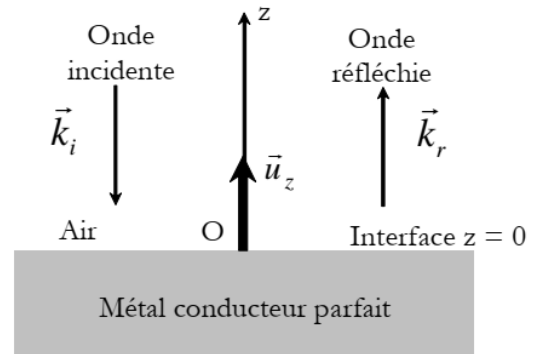


Figure 4

Or, le champ électrique de l'onde incidente et de

l'onde réfléchie sont transverses ; par conséquent: $\sigma = 0$: le conducteur reste localement neutre en surface.

On en déduit ensuite que $\vec{E}_i = -\vec{E}_r$: le coefficient de réflexion r relatif à l'amplitude du champ électrique vaut -1 .

On détermine le champ magnétique par :

$$(\vec{B}_r)_{z=0} = \left(\frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} \right)_{z=0} = \left(\frac{(-\vec{k}_i) \wedge (\vec{E}_i)}{\omega} \right)_{z=0} = (\vec{B}_i)_{z=0}$$

Le coefficient de réflexion relatif au champ magnétique vaut donc 1 .

Références bibliographiques

Références bibliographiques :

1. J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001).
2. O. Picon et coll., *Les Antennes* (Dunod, Paris, 2009).
3. Rosnel, *Eléments de propagation électromagnétique, physique fondamentale*, Mc GRAW-HILL 2002.
4. Garing, *Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques, Exercices et problèmes corrigés*, 1998.
5. Paul Lorrain, Dale Corson, and François Lorrain, *Les Phénomènes électromagnétiques : Cours, exercices et problèmes résolus*, 2002.
6. Louis de Broglie, *Ondes Electromagnétiques et Photons*, 1968.
7. Garing, *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs : Exercices et problèmes corrigés*, 1998.
8. Michel Hulin, Nicole Hulin, and Denise Perrin, *Equations de Maxwell : ondes électromagnétiques. Cours, exercices et problèmes résolus*, 1998.