جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي تبسة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلـــوم التسيير

ميدان التكوين: علوم اقتصادية والتسيير وعلوم تجارية

مطبوعة في مقياس الإحصاء -2-

الميدان : علوم اقتصادية والتسيير وعلوم تجارية

المستوى : السنة الأولى جذع مشترك

من إعداد:

د. مُحَمَّد العيفة

2023-2022

توجه هذه المطبوعة لطلبة السنة الأولى ل.م.د، مسار العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بصفة خاصة، وحتى لطلبة مسارات أخرى حزمة متكاملة من المفاهيم والأدوات الأساسية في الإحصاء الرياضي أو الإحصاء 2 حسب التسمية الرسمية للمقياس وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي. راعينا عند تأليف هذه المطبوعة العناصر التالية:

-عرض الأسس والقواعد العلمية التي تقوم عليها الأدوات الإحصائية موضوع الدراسة دون أن نبالغ في الغوص في جوانب نظرية غير ضرورية من الناحية التطبيقية.

-ضرورة الاستيعاب الجيد للمدلول الإحصائي والوظيفة التحليلية التي تحملها كل أداة.

-إعطاء أمثلة تطبيقية مع شرح النتيجة.

-تدعيم المفاهيم النظرية في آخر كل فصل بمسائل تطبيقية شاملة من الواقع.

من أهداف هذا المقياس التحكم في أدوات الإحصاء الرياضي ومبادئ الاحتمالات، دراسة المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد و التوزيعات الاحتمالية.

الفهرس

الفهرس

مقدمة

هذه المطبوعة هي عبارة عن محاضرات الإحصاء حسب البرنامج الوزاري لمقياس" إحصاء 2 " للسنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية.

برمج هذا المقياس لطلبة السنة الأولى، لكي يستفيد الطلبة من القاعدة التي اكتسبوها عند دراسة الإحصاء الوصفي، لكن هدفه الأساسي هو التمهيد لدراسة الإحصاء التطبيقي في السنة الثالثة .هدف هذا المقياس هو تقديم علم الإحصاء الرياضي، أي الأساس الرياضي للإحصاء التطبيقي.

تشكل هذه المحاضرات مدخلا تمهيديا لمقياس الإحصاء الرياضي وحساب الاحتمالات، ليتعرف على مبادئ الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ثم التوزيعات الاحتمالية.

تهدف هذه المطبوعة إلى تبسيط وشرح المفاهيم الأساسية للمقياس مع الأمثلة المبسطة في كل مرة، من أجل تقريب الفهم وإزالة الغموض ثم التغلب على تعقيدات المعادلات الرياضية للمتغيرات العشوائية.

تم تقسيم هذا العمل إلى أربعة فصول؛ جاء في الفصل الأول التحليل التوافقي حيث تم التطرق إلى طرق العد وكل من التباديل، التراتيب والتوفيقات، وتناول الفصل الثاني موضوع نظرية الاحتمالات؛ حيث شمل المفاهيم الأساسية للنظرية الاحتمالية ثم التعريف بالاحتمالات والجوانب المتعلقة بها، واحتوى الفصل الثالث على المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد بنوعيها ثم خصائص هذه المتغيرات بصفة عامة، وتم تخصيص الفصل الأخير لدراسة أهم أشهر التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية.

الفصل الأول

الفصل الأول: التحليل التو افقي

في كثير من التطبيقات نكون مهتمين بمعرفة عدد العناصر المنتمية إلى مجموعة ما. ونستخدم طرق العد لإيجاد عدد عناصر مجموعة ما دون الحاجة إلى سرد عناصرها. وهذه الطرق تساعدنا أيضا في إيجاد عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء أي تجربة، وهذا بدوره يفيدنا كثيرا في دراسة علم الاحتمال. وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوافقي، وعليه فانه سيتم في هذا المحور التركيز على الموضوعات التالية:

_ **التباديل(*Les Permutations*)**
_ **التر اتيب(*LesArrangements*)**
_ **التو افيق (*LesCombinaisons*)**
وقبل التطرق إلى هذه المواضيع لابد من التطرق إلى مبدأ طرق العد

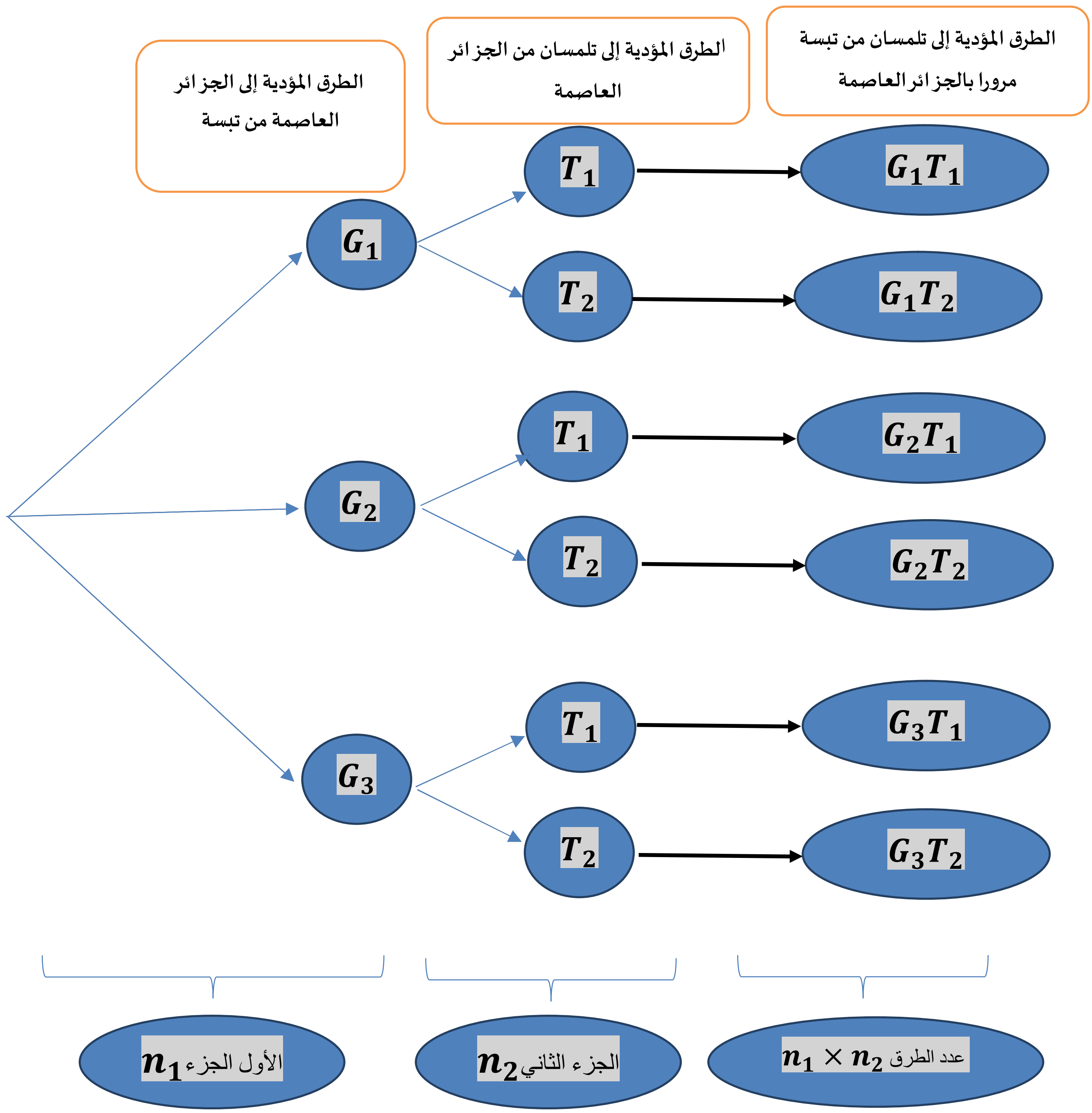
أولا: مبدأ طرق العد

1- مبدأ الضرب: يعتمد مبدأ طرق العد على أنه إذا أمكن القيام بعمل ما بـ n_1 طريقة مختلفة، وإذا امكن القيام بعمل آخر بـ: n_2 طريقة مختلفة وهذا من أجل كل طريقة من الطرق السابقة فيمكن القيام بالعملين معا _ بآن واحد _ بعدد من الطرق مساو الى $n_1 \times n_2$ طريقة ممكنة. ويمكن تعميم هذ المبدأ على أكثر من عاملين، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال: إذا كان لدينا ثلاث طرق للوصول من مدينة تبسة إلى الجزائر، ومن الجزائر إلى تلمسان لدينا طريقين فما هي عدد الطرق المكن للوصول إلى تلمسان.

حتى يتم تحليل التمرين وفهمه أكثر سندرج المخطط التالي:

حيث أننا سنرمز للطرق المؤدي إلى الجزائر بالرمز $G_1 \quad {}_2G_3$ على الترتيب أما الطرق المؤدية إلى تلمسان بالرمز التالي: T_1T_2على الترتيب.



من خلال الشكل نلاحظ أن عدد الطرق المؤدية إلى ولاية تلمسان هو 6 طرق وبالتالي العملية التي يمكن تطبيقها هي: عدد الطرق في المرحلة الأولى ضرب عدد الطرق في الحالة الثانية:

$$\boldsymbol{n_1 \times n_2 = 2 \times 3 = 6}$$

وإذا كان لدينا أكثر من مرحلتين فتكون القاعدة كالتالي:

$$\boldsymbol{n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n_N}$$

2- مبدأ الجمع: إذا كنا نريد حدوث طريقة واحدة إما الحدث الأول أو الحدث الثاني وليس حدوث الاثنين معا فإن ذلك يطلب استخدام الجمع وليس الضرب أي: $(N_1 + N_2)$طريقة.

ملاحظة: في طريقة الجمع تكون العمليات متنافية، أي أن إجراء إحدى العمليات ينفي (أو يمنع) إجراء العمليات الأخرى.

مثال (1): إذا أراد أحد السفر إلى مدينة تلمسان من مدينة تبسة ولديه أربع طرق إذا اتخذ طريق عنابة وثلاث طرق إذا تبع طريق قسنطينة، بكم طريقة يمكن أن يصل إلى تلمسان.

الحل:

عدد الطرق الممكن إتباعها هو $4 + 3 = 7$

الفرق بين هذا المثال والمثال السابق أنه في الحالة الأولى كان لابد وأن يتم دمج طريقين حتى الوصول، لذلك استخدمنا الضرب، أما في هذا المثال فكل طريق مستقل عن الأخر وبالتالي استخدمنا عملية الجمع.

مثال (2): بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقررا واحدا فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و 2 مقررين مختلفين للرياضيات و 2 مقررين مختلفين للفيزياء.

الحل:

العملية الأول: اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_1 = 3$.

العملية الثانية: اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_2 = 2$.

العملية الثالثة: اختيار مقرر الفيزياء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_3 = 2$.

وحيث أن العمليات متنافية وباستخدام قاعدة الجمع فإن عدد الطريق المختلفة لاختيار المقرر يساوي: $n = n1+ n2 + n3 = 3+ 2 + 2 = 7$ (طريقة مختلفة)

ملاحظة: عند استخدام (و) نقصد عملية الضرب مثلا في المثال الأول نستخدم طريق تبسة الجزائر والطريق الأول إلى تلمسان، وفي هذه الحالة الثانية استخدمنا حرف (و) وبالتالي نعوضه بعملية الضرب.

عند استخدام (أو) نقصد عملية الجمع مثلا في المثال الثاني نستخدم احد الطرق فلا يوجد ارتباط بين الطرق، أي نستخدم الطريق الأول.

ثانيا: التباديل، الترتيب والتوفيقات

1- التباديل.(Les Permutations)

التبديلة هي ترتيبة لعدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب. فعدد التباديل لمجموعة مكونة من n من الأشياء مأخوذًا r منها في كل مرة يساوي عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن تكوينها من n من الأشياء بحيث تحوي كل ترتيبة على r من هذه الأشياء مع مراعاة الترتيب.

يمكن أن نميز في التباديل بين حالتين مهمتين وهما:

_ التباديل دون تكرار

_ التباديل مع التكرار

1-1. التباديل دون تكرار

يمكن أن نسمي ترتيب N من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة K في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي $N = K$. هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب هذه العناصر على الأقل، ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$p_n = n!$$

$n!$: يقرأ n عاملي أو مضروب n. حيث أن:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times \dots \dots \dots (n-n)!$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times (2-1) = 2$$

$$3! = 3 \times (3-1) \times (3-2)$$

$$4! = 4 \times (4-1) \times (4-2) \times (4-3)$$

مثال: ما هو عدد الطرق الممكنة لترتيب الأعداد التالية دون تكرار: $n = \{11; 12; 13\}$

الطرق الممكنة الكلية دون تكرار هي كالتالي:

$\{11; 12; 13\}$

$\{11; 13; 12\}$

$\{12; 11; 13\}$

$\{12; 13; 11\}$

$\{13; 11; 12\}$

$\{13; 12; 11\}$

نلاحظ أن عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الأرقام هو 6 طرق، كل طريقة من هذه الطرق تسمى تبديلة، بمعنى انه لدينا 6 تبديلات ممكنة لهذه الأعداد دون تكرار

ويمكن حسابها بالطريقة التالية:

$$p_3 = 3! = 3 \times (3-1) \times (3-2) \times (3-3)!$$

أي

$$p_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 \times 0!$$

ومنه:

$$p_3 = 3! = 6$$

ملاحظة: بالنسبة للتكرار ليس من الضروري أن يكون في المعطيات لأنه في بعض الحالات لا يحدد لنا هل التبديل دون تكرار أم لا لأنه يستحيل فيه التكرار مثلا ترتيب مجموعة من الكتب في هذه الحالة التكرار مستحيل لأنه لا يمكن وضع كتاب في نفس الوقت.

في حالة العدد الكلي اكبر من الترتيبات، مثلا تشكيل كلمة مكونة من ثلاث حروف مع العلم أن الحروف المتاحة هي خمسة حروف، يمكن تعريف ذلك كما يلي:

نفرض أن لدينا n كرسي مرقما وهناك N شخصا لمعرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ملء الكراسي. الكرسي الأول له N طريقة، والثاني له $N-1$ طريقة، والثالث $N-2$ طريقة وهكذا حتى الكرسي الأخير ويمكن لأن يملأ بـــ $N-(n+1)$ طريقة.

أي أن: عدد الطرق المختلفة لملء الكراسي هو:

$$N(N-1)(N-2)(N-3) \ldots \ldots (N-1)$$

أي: $P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$

هذا العدد يسمى N تباديل $n(N\ permutation)$ ويرمز له بالرمز P_n^N

مثال: ما هي عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من هذه الحروف (A B C D E) في الحالات التالية:

- إذا كانت الكلمة مكونة من خمسة حروف لا يهم المعنى.

- إذا كانت الكلمة مكونة من ثلاثة حروف لا يهم المعنى.

<u>الحالة الأولى</u>: عدد الحروف الإجمالي يساوي العدد المطلوب تشكيل كلمة منه وبالتالي تكون كالتالي:

$$p_5 = 5! = 5 \times (5-1) \times (5-2) \times (5-3) \times (5-4) \times (5-5)!$$

ومنه $p_5 = 5\,! = 120$

بمعنى أن هناك 120 تبديلة لتشكيل هذه الحروف الخمسة من إجمالي خمسة حروف وذلك دون تكرار الحرف

أي: $P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$

حيث أن N هي العدد الاجمال و n هي العدد الذي يراد ترتيبه.

وبما أن العدد الإجمالي للحروف هو $N = 5$ وعدد الحروف المطلوب إيجاد عدد التباديل الممكنة لها هو $n = 5$

ملاحظة يمكن حل العملية باستخدام القانون التالي: $\boldsymbol{P_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}}$ **أيضا**

$$\boldsymbol{P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120}$$

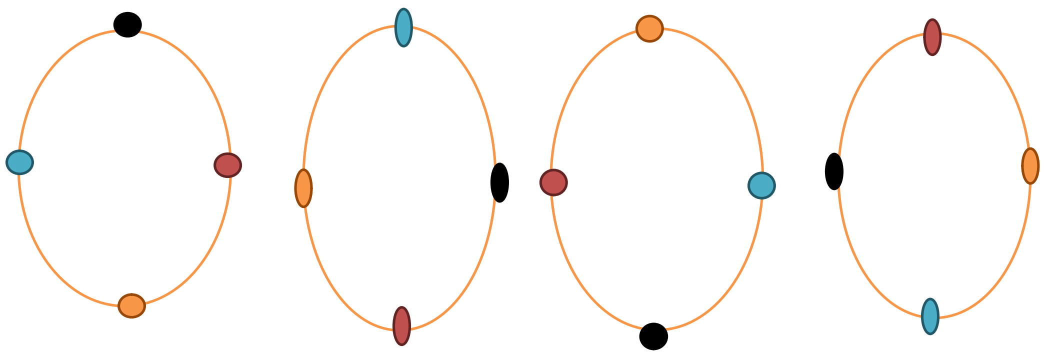
<u>الحالة الثانية</u>: عدد الحروف الإجمالي أقل من العدد المطلوب تشكيل كلمة منه وبالتالي تكون كالتالي:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

أي أن عدد التبديلات الممكنة لثلاثة حروف من خمسة حروف هو 60 تبديلة ممكنة دون تكرار.

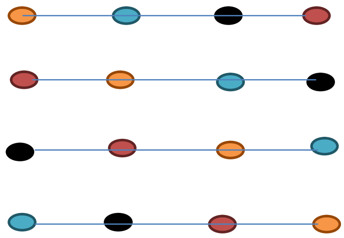
1-2. التبديل الدائرية

نستعين بالتمثيل البياني التالي لفهم التباديل الدائرية:

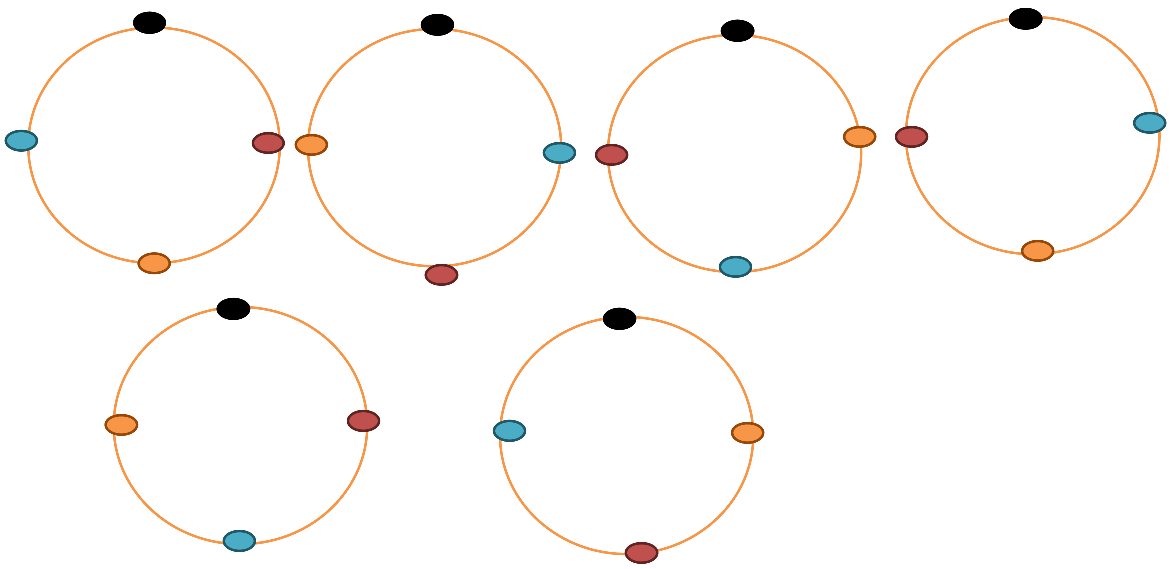


حسب التمثيل البياني السابق نلاحظ أن هناك تباديل متغيرة وذلك بإزاحة كل لون رتبة واحدة إلا أن اللون السابق واللاحق يبقى نفسه كأننا قمنا بإدارة الدائرة.

أما إذا كانت هذه الألوان على خط مستقيم وفي كل مرة نزيح اللون درجة واحدة حسب الشكل الموالي نجد أنه حدث تغير في اللون الأزرق مثلا كان قبله لون برتقالي وبعده لون أسود،إلا أنه بعد إزاحة اللون رتبة واحدة نجد أن اللون الأزرق لم يصبح بعده أي لون؛ أي تغير موضع الألوان اللون الأخير أصبح اللون الأول، وهذا عكس ما نجده في الألوان الموضوعة دائريا.



لهذا لابد أن نقوم بتثبيت أحد العناصر دون أن يتم تغيير مكانه في حالة التباديل الدائرية، وبالتالي كل العناصر تتغير حسب هذا العنصر الثابت ليصبح بمثابة بوصلة لتحديد التغيرات، وفي هذا المثال سنقوم بتثبيت اللون الأسود واعتباره بوصلة التغيرات.



حسب الشكل السابق نلاحظ أنه لدينا 6 تبديلات وبالتالي القانون في حالة التبديلات الدائرية هو:

$$p_n = (n-1)!$$
$$p_4 = (4-1)!$$
$$3! = 3 \times (3-1) \times (3-2)$$
$$3! = 6$$

مع العلم أن هذه التباديل الدائرية هي حالة خاصة وهي تعتمد على طرح واحد من العدد الإجمالي وحساب العدد العاملي للباقي.

مثال: بكم طريقة يمكن أن يجلس أعضاء مجلس الإدارة مكون من 11 عضو في طاولة دائرية؟

بما أن الطاولة دائرية فهذا يعني أنه لابد وأن يكون أحد أفراد المجلس في مكان ثابت حتى يتمكن الأشخاص الآخرين تغيير تبديلاتهم بناء عليه.

$$p_n = (n-1)!$$

$$p_{11} = (11-1)!$$

$$10! = 3628800$$

وبالتالي فان عدد التبديلات الممكنة هو 3628800 تبديلة.

1-3. التباديل مع التكرار

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما تكون العناصر متماثلة.

في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التباديل من خلال الصيغة العامة التالية:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots \ldots \ldots . n_k!}$$

حيث أن كل من n_1 حتى k تمثل العناصر المتماثلة حيث:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \ldots \ldots . n_k = n$$

وحتى يتم توضيح وبرهنة هذه النظرية، نفترض أننا نريد تكوين جميع التباديل الممكنة دون النظر إلى معنى الكلمة وذلك باستخدام الحروف التالية: FSFFK، في الحالة العدية يكون عدد التباديل ممكنة لخمسة حروف ليست متكررة هو 120 بديلة تم حسابها كما يلي:

$$5! = 120$$

مع العلم أن هذه الحروف نعتبرها ليست متكررة $_3K$ $_1SF_2$ حيث تم التفرقة بين الحروف المكررة عن طريق الترقيم $F_1F_2F_3$

فإذا تم القيام بالتبديلات نحصل الترتيب التالي:

$$\boxed{\begin{matrix} F_1F_2F_3SK \\ F_1F_3F_2SK \\ F_2F_1F_3SK \\ F_2F_3F_1SK \\ F_3F_2F_1SK \\ F_3F_1F_2SK \end{matrix}}$$

نلاحظ أن هناك 6 تبديلات في حالة ما إذا فرقنا بين الحرف المكرر ثلاث مرات بالأرقام وهو ناتج من حساب $3! = 6$ لكن الملاحظ هنا أنه إذا حذفنا الأرقام فأن الست 6 تبديلات سوف تصبح تبديلة واحدة كالتالي:

$$\boxed{\begin{matrix} FFFSK \\ FFFSK \\ FFFSK \\ FFFSK \\ FFFSK \\ FFFSK \end{matrix}}$$

نلاحظ أن كل التبديلات عبارة عن تبديلة واحدة؛ أي أنه لدينا تبديلة واحدة وليس 6 ستة تبديلات لذلك يجب التخلص من التكرار الذي ليس له معنى في التبديلات، لابد من أن نقسم على عدد التبديلات المكررة وهنا هو 6 أي $3! = 6$ ومنه لحساب التبديلات في هذه الحالة التي فيها رقم واحد مكرر نقوم بما يلي:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

مثال (1): احسب عدد التباديل المختلفة الممكن تكوينها من الحروف التالية بغض النظر عن المعنى: BOSSOSRABOANA

الحل:

نلاحظ أن هناك أحرف متكررة وبالتالي لا يمكن التمييز بها في عملية التبديل وتكرار الحروف كالتالي:

حرف B متكرر مرتين $_1 = 2$

حرف O متكرر ثلاث مرات $_2 = 3$

حرف S متكرر ثلاث مرات$n_3 = 3$

حرفR متكرر مرة واحدة$n_4 = 1$

حرف A متكرر ثلاث مرات$n_5 = 3$

حرف N متكرر مرة واحدة$n_6 = 1$

وبالتالي يمك

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots \ldots \ldots .\, n_k!}$$

$$P_{13}^{2\times3\times3\times1\times3\times1} = \frac{13!}{2!\,3!\,3!\,1!\,3!\,1!} = 1108800$$

مثال (2): اوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب 10 كرات خمسة حمراء وثلاثة بيضاء واثنان زرقاء.

الحل:

بما أن هناك ألوان فيها تكرارات لذلك نستخدم العلاقة التالية:

نرمز للكرات الحمراء بـ $n_1 = 5$

نرمز للكرات البيضاء بـ $n_2 = 3$

نرمز للكرات الزرقاء بـ $n_3 = 2$

وبالتالي يمكن تطبيق القانون التالي:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$

بالتعويض نحصل على:

$$P_8^{5\times2\times1} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2520$$

ومنه هناك 2520 تبديلة يمكن الحصول عليها في هذه الحالة.

2- الترا تيب (Les Arrangements)

الترتيبات هي ترتيب لمجموعة من العناصر بصفة جزئية؛ أي جزء من الكل.

1-2. الترا تيب دون تكرار.

إذا كان لدينا الأحرف التالية وطلب منا ترتيبها اثنين اثنين بترتيبات مختلفة دون تكرار:

$$\boldsymbol{VSZK}$$

$$\langle \boldsymbol{VS}\ |\boldsymbol{VZ}|\boldsymbol{VK}\rangle$$
$$\langle \boldsymbol{SV}\ |\boldsymbol{SZ}|\boldsymbol{SK}\rangle$$
$$\langle \boldsymbol{ZV}\ |\boldsymbol{ZS}|\boldsymbol{ZK}\rangle$$
$$\langle \boldsymbol{KV}\ |\boldsymbol{KS}|\boldsymbol{KZ}\rangle$$

نلاحظ أننا حصلنا على 12 ترتيبة وحتى نبين بطريقة أخرى نلاحظ الشكل التالي:

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا أربع حروف يمكن أن نضعها في الترتيب الأول	**في الحالة الثانية لدين فقط ثلاث اختيارات لأننا نكون قد وضعنا حرف في الحالة الأولى**
4	**3**
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد3×4 والنتيجة هي 12	

ويمكن حسابها من خلال القاعدة التالية:

إن ترتيب p عنصرا اخترناه من بين n عنصرا وهو تشكيل مرتب لـ p من n عنصرا، حيث كل واحد منها يظهر مرة واحدة على الأكثر في نفس الترتيب

إذا رمزنا بـ A_n^p إلى عدد الترتيبات

p عنصرا مختارا من بين n، $p = 2$

n العدد الكلي $n = 4$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2))!} = \frac{4!}{(2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{(2)!} = 4 \times 3 = 12$$

ومنه عدد الترتيبات الممكنة دون تكرار هو 12.

مثال: كان لدينا خمسة مرشحين لأخر انتخابات رئاسية في الجزائر سنة 2019، سينتقل منهم اثنين أحدهما رئيس والأخر نائب، فما هو عدد التراتيب الممكنة.

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا خمسة مرشحين يمكن أن يكون أي منهم في الترتيب الأول يعني خمسة خيارات	في الحالة الثانية لدين فقط أربع مرشحين لأننا نكون قد اخترنا مرشحا في الحالة الأولى
5	4
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد5×4 والنتيجة هي 20	

إذا رمزنا بـ A_n^p إلى عدد الترتيبات

p عنصرا مختارا من بين n، $p = 2$

n العدد الكلي $n = 5$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2))!} = \frac{5!}{(3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{(3)!} = 5 \times 4 = 20$$

ومنه عدد الترتيبات الممكنة لاختيار رئيس ونائب مع الرئيس هو 20 ترتيبة

2-2. التر اتيب مع التكرار.

نقصد بالتراتيب مع التكرار إمكانية اختيار عنصر p من بين العناصر المتاحة أكثر من مرة.

مثال: إذا كان لدينا الأحرف التالية وطلب منا ترتيبها اثنين اثنين بترتيبات مختلفة مع التكرار:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{VSZK} \\ \langle VS\ |VZ|VK|VV\rangle \\ \langle SV\ |SZ|SK|SS\rangle \\ \langle ZV\ |ZS|ZK|ZZ\rangle \\ \langle KV\ |KS|KZ|KK\rangle \end{array}$$

نلاحظ أننا حصلنا على 16 ترتيبة.

وحتى نبين بطريقة أخرى نلاحظ الشكل التالي:

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا أربع حروف يمكن أن نضعها في الترتيب الأول	في الحالة الثانية لدين أيضا أربع اختيارات لأنه مسموح بتكرار الحرف الذي اختير سابقا
4	4
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد 4×4 والنتيجة هي 16	

حيث أن العملية الحسابية التي حسبنا بها هي 4×4 أي: 4^2

وبما أن

p عنصرا مختارا من بين n، $p = 2$

n العدد الكلي $n = 4$

نرمز للترتيبات مع التكرار بالرمز:

$$\widehat{A_n^p} = \underbrace{n \times n \times n \times n \times \dots\dots\dots \times n} = n^p$$

حيث أن: n يمثل العدد الإجمالي.

p يمثل العدد الذي نختاره من العدد الإجمالي لأجل ترتيبه.

مثال: إذا كان لدينا الأعداد التالية: 10،12،14،16،18،19،11 فما هو عدد الطرق التي يمكن أن نحصل بها على ترتيبات مكونة من أربعة أرقام في حالة التكرار وفي حالة عدمه.

لدينا: p **عنصرا مختارا من بين** n، $p = 4$ n **العدد الكلي** $\{10,12,14,16,18,19,11\} = 7$
في حالة عدم التكرار
$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_7^4 = \frac{7!}{(7-4))!} = \frac{7!}{(3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$
840
نلاحظ أن عدد الترتيبات في حالة التكرار أكبر منها في حالة عدم التكرار أي: $\widehat{A_n^p} > A_n^p$
تتساوى الترتيبات في حالة التكرارات وعدم التكرارات إلا إذا كان $p = 1$

3- التوفيقات Les Combinaisons

التوفيقة أو التوليفة هي كل مجموعة يمكن اختيارها من مجموعة من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب.

وبالتالي فهي اختيار عدد من المفردات بحجم P من مجموعة كبيرة بحجم n وبدون ترتيب، حيث $p \leq n$.

مثال: لدينا أربع كرات متجانسة وملونة بالألوان التالية: أحمر R ، أبيض B ، أخضر V، اسود N. ونريد أن نختار اثنين من الكريات، وبالتالي تكون الطرق الممكنة للاختيار كما يلي:

$$\text{التوفيقات الممكنة}\begin{cases}\boldsymbol{NP}\\ \boldsymbol{NV}\\ \boldsymbol{NR}\\ \boldsymbol{PV}\\ \boldsymbol{PR}\\ \boldsymbol{VR}\end{cases}$$

نلاحظ أن لدينا 6 توفيقات ممكنة.

ملاحظة:

التوفيقات تشبه الترتيبات لكن في هذه الحالة التشكيلتين $\begin{cases}\boldsymbol{NP}\\ \boldsymbol{PN}\end{cases}$ نعتبرهما تشكيلة واحدة فمثلا عند ذهابك لمحل ملابس بهدف شراء قميص احمر وقميص أزرق، يعتبر قولك لصاحب المحل أعطيني <u>قميص أحمر وقميص أزرق</u> أو أعطيني <u>قميص أزرق وقميص أحمر</u> نفس الشيء.

3-1.تعريف: إن توافقية عنصرا P اخترناه من بين N عنصرا هي تشكيل غير مرتب لهذه العناصر حيث يظهر كل واحد منها مرة واحدة على الأكثر.

نرمز بـ C_n^P وأحيانا $\binom{n}{p}$ إلى عدد التوفيقات الممكن إجراؤها بواسطة p عنصرا نختاره من بين n حيث أن $p \leq n$

$$\boxed{C_n^P = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

بالعودة إلى المثال السابق: لدينا أربع كرات متجانسة وملونة بالألوان التالية: أحمر R ، أبيضB ، أخضر V ، اسودN. ونريد أن نختار اثنين من الكريات، وبالتالي تكون الطرق الممكنة للاختيار كما يلي:

في هذه الحالة $P = 2$ و $n = 4$

$$\boxed{\boldsymbol{C_n^P = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}} \text{ أي } \boldsymbol{C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\,2!} = \frac{12}{2} = 6}}$$

ملاحظة: الفرق بين التوفيقة والترتيبة هو أن الترتيبة يكون للترتيب فيها معنى أي يؤثر على المشاهدة مثلا: إذا كانت لدينا الأرقام التالية: (1,2,3,4,5) وطلب منا تشكيلها اثنين اثنين دون تكرار فإننا نجد فرق بين ترتيب رقمين مثلا (12|21) الأولى تُقرأ أثنى عشر والأخرى تُقرأ واحد وعشرون، أما إذا كانت لدينا مثلا أربع كرات ملونة واحدة حمراء والأخرى بيضاء والأخرى خضراء والأخيرة سوداء وطلب من تشكيلها اثنين اثنين ووضعنا ترتيب

$$\boxed{\left(\text{خضراء حمراء} \middle| \text{حمراء خضراء}\right)}$$

من هنا نلاحظ أن التغير في الترتيب ليس له أي معنى وبتالي تعتبر تشكيلة واحدة,

توضيح الفرق في القانون بين الترتيبة والتوفيقة

ترتيبة: $\boldsymbol{A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}}$

توفيقة: $\boldsymbol{C_n^P = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

الفرق بين الترتيبة والتوفيقة في القانون هو أننا في التوفيقة نقسم على

$$\boxed{\boldsymbol{p!\,(n-p)}}$$

والهدف من إضافة $p!$ هو إلغاء الترتيب لأنه كما شرحنا سابقا فان الترتيب ليس له معنى وبالتالي التشكيلات التي تغيرفيها الترتيب تحسب واحدة فقط لذلك لابد من إلغائها بالقسمة على $p!$

2-3. خصائص التوفيقات:

الخاصية الأولى: إذا كان الفرق بين العدد الكلي n والعدد المسحوب واحد$(n-1)$ فإن عدد التوفيقات يساوي العد الكلي n

$$C_n^{n\_1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-(n-1))!} = \frac{n \times (n\_1)!}{(n-1)!\,(n-n+1))!} = \frac{n}{(0+1))!} = n$$

الخاصية الثانية: إذا كان العدد الكلي والعدد المسحوب متساوي فان عدد التوفيقات يكون مساوي للعد واحد.

$$C_n^n = \frac{n!}{(n)!\,(n-(n))!} = \frac{(n)!}{(n)!\,(0))!} = \frac{(n)!}{(n)!} = 1$$

الخاصية الثالثة: إذا كان العدد المسحوب هو صفر من العدد الكلي n فان عدد التوفيقات يكون توفيقة واحدة.

$$C_n^0 = \frac{n!}{(0)!\,(n-0)!} = \frac{(n)!}{(n)!} = \frac{(n)!}{(n)!} = 1$$

الخاصية الرابعة: إذا كان العدد المسحوب هو 1 من العدد الكلي n فان عدد التوفيقات يكون مساوي للعدد الكلي n .

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

ويكون في هذه الحالة: $C_n^1 = A_n^1$

مثال (1): (خواص التوفيقات)

الخاصية		الأمثلة
$C_n^1 = n$	مـــــــثال	$C_7^1 = 7$ $C_{12}^1 = 12$ $C_{45}^1 = 45$
$C_n^0 = 1$	مـــــــثال	$C_{10}^0 = 1$ $C_{19}^0 = 1$ $C_{66}^0 = 1$
$C_n^{n-1} = n$	مـــــــثال	$C_9^8 = 9$ $C_{86}^{85} = 86$ $C_{42}^{41} = 42$
$C_n^n = 1$	مـــــــثال	$C_5^5 = 1$ $C_{100}^{100} = 1$ $C_{70}^{70} = 1$

مـثال: (2)

إذا أخذنا أربعة مرشحين لمنصب رئيس مصلحة من بين خمسة مرشحين ولم نأخذ بعين الاعتبار الترتيب. فما هي عدد التوفيقات الممكنة واذكرها؟

$P = 4 \rightarrow$ المسحوب

$n = 5 \rightarrow$ العدد الكلي

$$C_n^P = C_5^4 = \frac{5 \times 4!}{4!\,(5-4)!} = 5$$

مـثال(3):

أراد مدرب فريق كرة القدم تشكيل فريق من 11 لاعب، يتم اختيارهم من بين 20 لاعب. فما هو عدد الفرق التي يمكن تشكيلها؟

$P = 11 \rightarrow$ المسحوب

$n = 20 \rightarrow$ العدد الكلي

$$C_n^P = C_{20}^{11} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11!\,(20-11)!} = 167960$$

أن المدرب له خيارات عديدة لتشكيل الفريق وهي 167960 إمكانية.

الفصل الثاني

الفصل الثاني: نظرية الاحتمالات

أولا: مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات

نتناول في هذا الفصل شرح معنى التجارب العشوائية وذكر أمثلة منها ؛ شرح دور الصدفة في مثل هذه التجارب العشوائية؛ تحديد فضاء العينة المقابل للتجربة العشوائية، والتفريق بين الأنواع المختلفة من الأحداث مثل الأحداث متساوية الاحتمال، والأحداث المتنافية، الأكيدة، الشاملة المستقلة.... .

1. التجربة العشوائية Random Experiment

ترتكز نظرية الاحتمالات على نماذج التجارب العشوائية؛ وهي تلك التجارب التي لا يمكن أن تكون نتيجتها يقينية قبل إجراءها.

في إطار النظرية الاحتمالية التكرارية يفترض أن التجربة يمكن تكرارها إلى أجل غير مسمى في ظل نفس الظروف. هذا الافتراض مهم لأن النظرية التكرارية تهتم بالسلوك طويل المدى حيث يتم تكرار التجربة. على نقيض ذلك في نظرية الاحتمالية النظرية والتي تهتم بقياس الاعتقاد حول ما سيحدث عند القيام التجربة، في هذا الإطار يكون التكرار افتراضًا أقل أهمية. لذلك تتطلب التجربة تعريفا دقيقا لما يتم تسجيله بالضبط من المعلومات حول التجربة.

تعرف التجربة العشوائية على أنها التجربة التي يمكن ملاحظتها وتحديد النواتج الممكنة قبل إجرائها، مع عدم التنبؤ بنتيجة مؤكدة. من الأمثلة على التجارب العشوائية: - تجربة رمي قطعة نقود وتسجيل الوجه الظاهر. - تجربة رمي حجر نرد وتسجيل الوجه العلوي. وفي حال تكرار هذه التجربة في نفس الظروف لا نحصل حتميا على نفس النتائج.

الشروط الأساسية للتجربة العشوائية:

- جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.

- لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.

- يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

2. فضاء العينة: Sample Space

تعريف (1): فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(S)$.

تعريف (2): نقطة العينة هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة S.

تكون النتائج محددة بشكل يكون فيه نوع من التباديل؛ بحيث لا يمكن حدوثها في الوقت ذاته.

مثال (1):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.

تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

الحل:

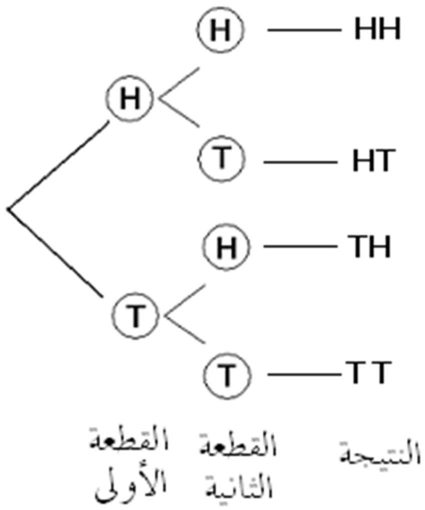
1. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:

إن النتائج الممكنة هي H أو T ولذلك فإن فضاء العينة هو: $S = \{H , T\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 2$.

2. تجربة قذف قطعتي النقود معا:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T. الشكل التالي يوضح النتائج الممكنة للتجربة.



إن النتائج الممكنة هي:

$$(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)$$

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 4$

ملاحظة: يمكن إيجاد مجموعة نتائج التجربة (فضاء العينة) باستخدام حاصل الضرب الديكارتي كما يلي:

$$S = \{H,T\} \times \{H,T\} = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

باستخدام قاعدة الضرب فإن عدد عناصر مجموعة نتائج التجربة (فضاء العينة) يمكن حسابه كما يلي:

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

مثال (2):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

الحل:

1. تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة:

إن النتائج الممكنة هي: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 6$.

2. تجربة رمي حجر النرد مرتين:

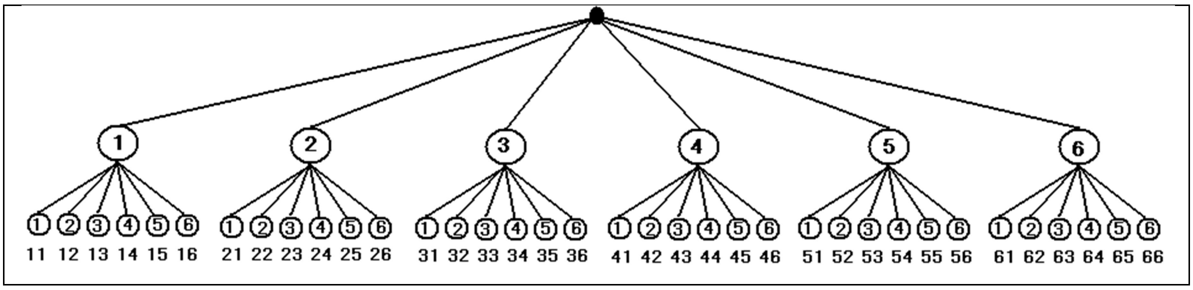
يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق. نذكر من هذه الطرق: (1) طريقـــة حاصل الضـــرب الديكـــارتي و(2) طريقـــة الشجرة و(3) طريقـــة الشبكـــة (أو الجدول):

أ): إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:

$$\begin{aligned} S &= \{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ &\quad (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ &\quad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \end{aligned}$$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي: $n(S)=6\times6=36$

ب): إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:



ج): إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):

نتيجة الرمية الثانية

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

ملاحظة: إن (4,3) عنصر من عناصر فضاء العينة وبالتالي فإن (4,3) هي نقطة عينة وذلك لأن $(4,3) \in S$. كما أن النتيجة (4,3) تعني ظهور الرقم 4 في الرمية الأولى وظهور الرقم 3 في الرمية الثانية وهذه النتيجة تختلف عن النتيجة (3,4) والتي تعني ظهور الرقم 3 في الرمية الأولى وظهور الرقم 4 في الرمية الثانية.

ثانيا: الحوادث وحساب الاحتمالات

1- الحوادث

1-1.تعريف الحادثة أو الحدث Event

هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة Ω، ونقول عن حادثة A أنها حادثة إذا كانت $A \subseteq \Omega$. ونقول أن الحادثة A وقعت إذا وقع أو حدث أحد عناصر هذه الحادثة خلال التجربة العشوائية..

2-1.أنواع الحوادث

ينقسم الحادث إلي نوعين هما:

1-2-1.الحوادث البسيطة

هو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة؛ مثال ذلك ظهور الرقم 6 أو 5 أو 4 أو 3.......... كلها حوادث بسيطة.

2-2-1.الحوادث المركبة

تشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة، أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.؛ مثال ذلك حالات ظهور الصورة مرة واحدة في تجربة رمي قطعة

نقدية متزنة مرتين. $A = \{HT \ , TH\}$ ، أو الحصول على عدد فردي في تجربة رمي

حجر نرد مرة واحدة $B = \{1,3,5\}$.

1-2-3.الحوادث المتنافية

نقول أن الحادثين A و B أنهما متنافيتان إذا كانا غير متقاطعين أو منفصلان ، أي لا

يمكن وقوعهما في نفس الوقت، وبالتالي يكون وقوع أحداهما ينفي وقوع الآخر.

1-2-4.الحوادث الشاملة

نقول عن الحوادث $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots\ldots A_n$ أنها حوادث شاملة إذا كان

إتحاد كل هذه الحوادث يعادل فضاء العينة؛ ومنه فلا بد من وقوع واحدة منها خلال التجربة

العشوائية. ونكتب:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \cup A_n = \Omega$$

مثال: في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:

متنافيتان لأن: $A \cap B = \phi$.

شاملتان لأن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$.

الحوادث $A1 = \{1,2,3\}$ و $A2 = \{2,3,4\}$ و $A3 = \{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية.

1-2-5.الحوادث المستقلة

تعرف الحوادث المستقلة على أنها تلك الحوادث التي يكون احتمال حدوثها لا يتأثر مطلًقا بحدوث أو عدم حدوث الحوادث الأخرى، بحيث لا يوجد ارتباط بينها، وتبرز استقلالية الحوادث عند حساب الاحتمال الشرطي؛ كما سنرى لاحقا إذ لا فرق بين احتمال الحادثة والاحتمال الشرطي لها فيما بينها.

1-2-6.الحادثة المستحيلة

هو الحدث الذي لا يقع أبدا عند إجراء التجربة، أو هو الحدث المؤلف من المجموعة الخالية، مثال ظهور عدد سالب في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة.

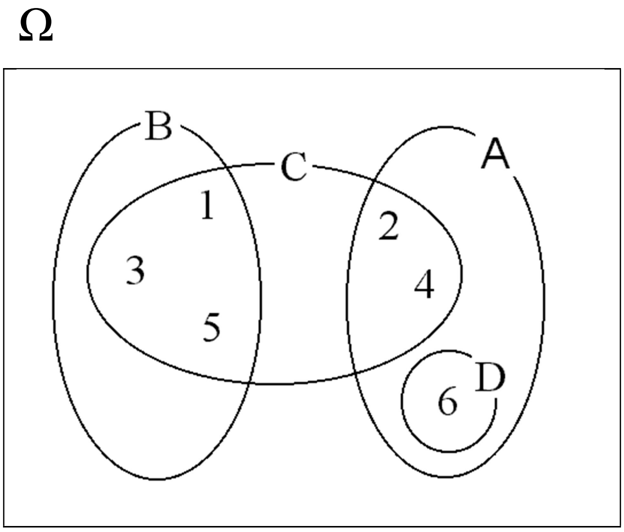
1-2-7.الحادثة المؤكدة

هو الحدث الذي يقع دائما عند إجراء التجربة العشوائية، أو هو الحدث الذي يساوي الفضاء العيني؛ إذن هي الفضاء Ω.

مثال (1): في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي فإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة Ω.

الحادثة		عدد العناصر
A = { ظهور عدد زوجي } = {2, 4, 6};	$A \subseteq \Omega$	$n(A) = 3$
B = { ظهور عدد فردي } = {1, 3, 5};	$B \subseteq \Omega$	$n(B) = 3$
C = { ظهور عدد أقل من ستة } = {1, 2, 3, 4, 5};	$C \subseteq \Omega$	$n(C) = 5$
D = { ظهور العدد ستة } = {6};	$D \subseteq \Omega$	$n(D) = 1$
ϕ = { ظهور عدد سالب } = { };	$\phi \subseteq \Omega$	$n(\phi) = 0$
S = { ظهور عدد موجب } = {1, 2, 3, 4, 5, 6};	$S \subseteq \Omega$	$n(S) = 6$

في هذا المثال يمكن أن نمثل الحوادث بأشكال فن. فالشكل التالي يمثل الحوادث A و B و C و D:



في هذا المثال:

نقول بأن حادثة ظهور العدد الزوجي A={2,4,6} وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية 2 أو 4 أو 6. ونقول بأن الحادثة D={6} وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6، وهكذا.

مثال (2): أحسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

$A =$ { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

$B =$ { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

$C =$ { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

الحل: نحسب فضاء العينة والحوادث وعدد العناصر كما يلي:

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\};\ \ n(\Omega) = 4$$
$$A = \{(H,H),(H,T)\};\ \ n(A) = 2$$
$$B = \{(T,H),(T,T)\};\ \ n(B) = 2$$
$$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\};\ \ n(C) = 3$$

مثال (3):

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و(y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

$$A = \{ (x,y):\ x + y < 4 \}$$
$$B = \{ (x,y):\ x = y \}$$
$$C = \{ (x,y):\ x = 5 \}$$
$$D = \{ (x,y):\ x+y = 1 \}$$

الحل: نمثل فضاء العينة والحوادث بالشكل التالي:

Y

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	**(5,6)**	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	**(5,5)**	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	**(5,4)**	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	**(5,3)**	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	**(5,2)**	(6,2)
(1,1)	**(2,1)**	(3,1)	(4,1)	**(5,1)**	(6,1)

⇑ ⇑ X

A C

ومن هذا الشكل نحسب الحوادث وعدد عناصرها كما يلي:

$A = \{ (x,y):\ x + y < 4 \} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\};\qquad n(A) = 3$

$B = \{ (x,y):\ x = y \} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};\quad n(B) = 6$

$C = \{ (x,y):\ x = 5 \} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\};\qquad n(C) = 6$

$D = \{ (x,y):\ x + y = 1 \} = \{ \} = \phi;\qquad n(D) = 0$

3-1.أهم العمليات على الحوادث

بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث. وفي دراسة احتمالات الحوادث فإننا نحتاج إلى تعريف بعض الحوادث والتي يمكن تكوينها من حوادث أخرى.

1-3-1.اتحاد حادثتين (Union)

اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معًا. وتقع الحادثة $A\cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت A و B معًا.

وباستخدام المجموعات فإن اتحاد الحادثتين A و B هو:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \,;\, x \in A \vee x \in B\}$$

للتذكير الرمز $\vee$ يرمز للفصل "أو"

2-3-1. تقاطع حادثتين (Intersection)

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cap B$ أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A و في B معًا. وتقع الحادثة $A\cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معًا في نفس الوقت.

وباستخدام المجموعات فإن تقاطع الحادثتين A و B هو:

$$A \cap B = \{x \in \Omega ; x \in A \wedge x \in B\}$$

للتذكير الرمز ∧ يرمز للوصل "و"

3-3-1. متممة حادثة: (Complement)

متممة أو مكملة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^C أو $\bar{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. وتقع متممة الحادثة $\bar{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

وباستخدام المجموعات فإن متممة الحادثة A هو:

$$A^C = \overline{A} = \{x \in \Omega ; x \notin A\}$$

4-3-1. الفرق بين حادثتين (Difference between Two Events)

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A - B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B. وتقع الحادثة $A-B$ إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

وباستخدام المجموعات فإن حادثة الفرق $A-B$ هي:

$$A - B = \{x \in \Omega ; x \in A \wedge x \notin B\}$$

نتيجة (1):

$$(A^C)^C = A$$
$$S^C = \phi$$
$$\phi^C = S$$
$$A^C = S - A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cap S = A$$
$$A \cup S = S$$
$$A \cap \phi = \phi$$
$$A \cup \phi = A$$

$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cap B \ = A$$
$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cup B \ = B$$

نتيجة (2):

حادثة الفرق $A - B$ تكافئ حادثة التقاطع $A \cap B^C$ ، أي أن:

$$A - B = A \cap B^C$$

1-3-5.قانون دي مورغان (Morgan's rules)

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

مثال(1): قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

1. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

2. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة.

3. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$A \cap B$, $A \cup C$, $AC \cup BC$, $(A \cap B)C$, $A - B = A \cap BC$

الحل:

1. فراغ العينة لهذه التجربة هو:

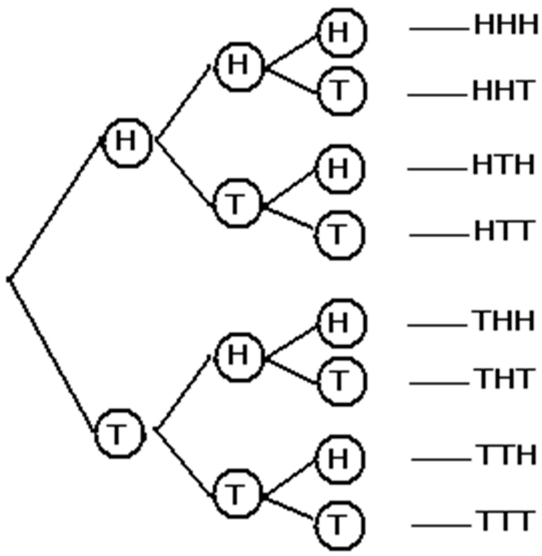
$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),$

$(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 23 = 8$

وشكل الشجرة التالي يوضح فراغ العينة:



2. وأما الحوادث A وB وC فهي:

$A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}, \;\; n(A) = 4$

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\},$

$n(B) = 7$

$C = \{(T,H,H), (T,T,H)\}, n(C) =2$

3. الآن نسحب الحوادث المطلوبة بملاحظة أن:

$A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$

$B =\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$C = \{(T,H,H), (T,T,H)\}$

$AC = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$BC = \{(T,T,T)\}$

والحوادث هي:

$A\cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}; \; n(A\cap B) = 4$

$A\cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\};$
$n(A\cup C) = 6$

$AC\cup BC = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$

$= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \; ; n(AC\cup BC) = 4$

$(A\cap B)C= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \; ; n((A\cap B)C) = 4$

$A\cap BC = A - B = \phi \; ; n(A\cap BC) = 0$

2. الاحتمالات

تلعب نظرية الاحتمال دوراً هاماً في نظريات وتطبيقات علم الإحصاء ونظرية الاحتمال تعنى بدراسة التجارب العشوائية. ففي الحياة العملية لا يمكن تصور حركة السوق التجارية والمالية والإنتاج دون أن تكون خاضعة لتأثيرات عشوائية لا يمكن السيطرة عليها من هنا جاءت أهمية دراسة الاحتمال في مجال نظرية العمليات التصادفية ويعرف الاحتمال بأنه نسبة الجزء إلى الكل.

1-2. تعريف الاحتمال

الاحتمال هو قياس إمكانية وقوع حدث ما.[1] يُقاس الاحتمال بأنه رقم بين الصفر والواحد حيث يشير الصفر إلى الاستحالة ويشير الواحد إلى التأكيد. كلما زاد احتمال الحدث، زادت إمكانية وقوع هذا الحدث.[2] أحد الأمثلة البسيطة هي رمي العملة (غير المنحاز). لأن العملة غير منحازة، فإن الناتجين (وجه ونقشة) متساويان في الاحتمال تماما، أي أن احتمالية ظهور الوجه تساوي احتمالية ظهور النقشة، ولأنه لا يوجد احتمالات أخرى فإن إمكانية ظهور "الوجه" أو "النقشة" هي ½ (والتي يمكن كتابتها 0.5 أو 50%.

نقرن كل حادثة (أو حدث) معرفة على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة حقيقية تقيس فرصة وقوع هذه الحادثة عند إجراء التجربة .تسمى هذه القيمة باحتمال الحادثة.

[1] David Siegmund (14-8-2018), "Probability theory" ،www.britannica.com, Retrieved 19-02-2022. Edited.

[2] Some Useful Terms in Probability", www.toppr.com, Retrieved 10-10-2020. Edited.

يعتبر احتمال الحادثة A مقياسا عدديا يرمز له بالرمز P(A) ويقيس فرصة وقوع الحادثة Aعند إجراء التجربة. وتكون قيمة هذا المقياس ما بين الصفر و الواحد.

2-2. الاحتمال التجريبي

إذا قمنا بتكرار تجربة عشوائية n مرة مع توفر نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحادثة A في هذه التكرارات يساوي $R_{(A)}$ فإن احتمال الحادثة A بناء على التعريف التكراري النسبي يأخذ الصيغة التالية:

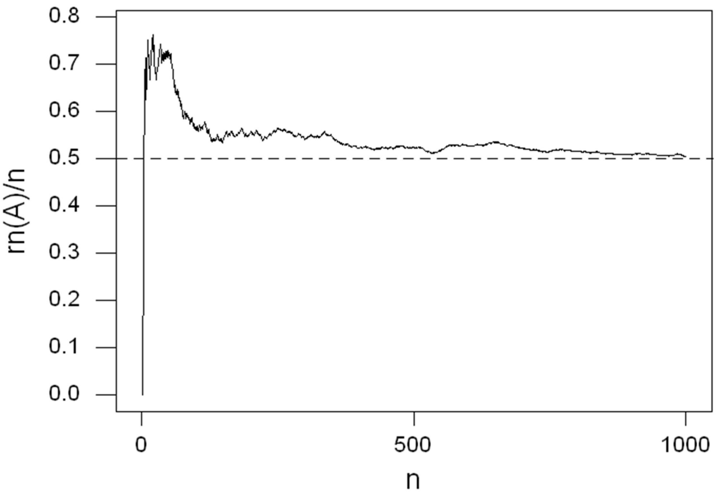
$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{R_A}{n}\right)$$

ملاحظة:

لاحظ أن $\frac{r_n(A)}{n}$ هو التكرار النسبي لعدد مرات وقوع الحادثة A عند تكرار إجراء التجربة n مرة وبالتالي فإن احتمال الحادثة A هو هذا التكرار النسبي عندما نكرر إجراء التجربة ما لا نهاية من المرات.

مثال: لنعرف الحادثة A على أنها الحادثة الدالة على ظهور الصورة في تجربة قذف العملة المتزنة. ولنفرض أننا كررنا هذه التجربة 1000 مرة وليكن rn(A) هو عدد مرات ظهور الصورة عند المحاولة رقم n. قمنا بمحاكاة هذه العملية باستخدام الحاسب الآلي فحصلنا على الشكل أدناه. وهذا الشكل يبين لنا بوضوح حقيقة أنه للعملة المتزنة فإن:

$$P(A) = P(H) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n} = 0.5$$



الاحتمال التكراري النسبي

ملاحظة: بالرغم من أن التعريف التكراري النسبي للاحتمال مفيد وعام لأي نوع من أنواع التجارب العشوائية إلا أننا لا نستطيع التأكد من أننا سوف نحصل على النسبة نفسها لو كررنا إجراء التجربة n مرة في وقت آخر. كذلك فإنه من الصعب جدا تطبيق هذا التعريف لأنه يعتمد على تكرار إجراء التجربة عدد كبير من المرات . كما أن هذا التعريف له بعض الصعوبات من الجهة الرياضية إذ قد لا توجد النهاية، ولهذه الأسباب فقد ظهر التعريف الرياضي للاحتمال والذي يعتمد على بعض المسلمات الأساسية.

3-2. الاحتمال الكلاسيكي(التقليدي): (Classical Definition of Probability)

الاحتمال الكلاسيكي هو أن تكون جميع الحالات المحتملة للحدث لها نفس احتمال حدوثها.

ووفقًا للتعريف الوارد أعلاه ، يعتبر حدث "رمي العملة" مثالًا على الاحتمال الكلاسيكي، لأن احتمال ظهور الوجه أو الصورة هو $P(A) = \frac{1}{2}$

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية فرصة الحدوث وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي n فإن احتمال الحادثة يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$$

ونقرأ احتمال الحادثة A يساوي عدد عناصر الحادثة A على عدد عناصر فضاء العينة Ω.

نستطيع القول أن احتمال الحادثة A يساوي عدد الحالات المواتية لهذه الحادثة على عدد كل الحالات الممكنة؛ حيث أن الحالات المواتية هي الحالات التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة وبعبارة أخرى هي نتائج التجربة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

مثال(1): لتكن التجربة العشوائية؛ رمي حجر نرد متزنة مرة واحدة ونسجل النتيجة من على الوجه العلوي ونعرف الأحداث التالية كما يلي:

الحدث **A** ظهور عدد زوجي أكبر من 2 ؛

الحدث **B** ظهور عدد فردي أكبر أو يساوي العدد 1 ؛

الحدث **C** ظهور عدد أكبر من العدد 1 ؛

الحدث **D** ظهور عدد أكبر من العدد 6 ؛

الحدث **E** ظهور عدد أكبر أو يساوي العدد 1 ؛

الحل:

تحديد فضاء العينة:

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$$

1- الحادثة **A**:

$$A = \{4;6\}$$

عدد عناصر الحادثة **A** هو 2 ، احتمال الحادثة **A** هو

$$p(A) = \frac{(n_A)}{(n_\Omega)} = \frac{2}{6}$$

$$B = \{1 ; 3 ; 5\}$$

2- الحادثة **B**:

عدد عناصر الحادثة **B** هو **3** ، احتمال الحادثة **B** هو

$$p(B) = \frac{(n_B)}{(n_\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

3- الحادثة **C**:

عدد عناصر الحادثة **C** هو **5** ، احتمال الحادثة **C** هو

$$p(C) = \frac{(n_C)}{(n_\Omega)} = \frac{5}{6}$$

$$D = \{\ \}$$

4- الحادثة **D**:

عدد عناصر الحادثة **D** هو **0** ، احتمال الحادثة **D** هو **0**

$$p(D) = \frac{(n_D)}{(n_\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$E = \Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

5- الحادثة **E**:

عدد عناصر الحادثة **E** هو **6** ، احتمال الحادثة **E** هو احتمال الحادثة الأكيدة:

$$p(E) = \frac{(n_E)}{(n_\Omega)} = \frac{6}{6} = 1$$

مثال(2): عناصر **A** هي مضاعفات العدد 3 :

$$A = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,49\}$$

عناصر **B** هي مضاعفات العدد 4 :

$$B = \{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,39,44,48\}$$

عناصر **C** هي مضاعفات العدد 3 و مضاعفات العدد 4 :

$$C = A \cap B = \{0,12,24,36,48\}$$

عناصر D هي مضاعفات العدد 3 او مضاعفات العدد 4 :

$D = A \cup B = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,$

$42,45,49,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,39,44,48\}$

ب- حساب النسبة المئوية لكل لكل جزء منها في Ω :

$P(A) = \frac{17}{100} \times 50 = 34\%$ ، $P(B) = \frac{13}{100} \times 50 = 26\%$

$P(C) = \frac{5}{100} \times 50 = 10\%$ ، $P(C) = \frac{25}{100} \times 50 = 50\%$

ج- التعبير عن النسب السابقة بكسر ناطق غير قابل للإختزال :

$P(A) = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$ ، $P(B) = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$

$P(C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ، $P(C) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

2 - حساب احتمالي الحادثتين :

$F = \{11, 22, 33, 44\}$

$E = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$

$P(E) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$ ، $P(F) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

4-2. بعض قوانين الاحتمال

إذا كانت A و B حدثان من فضاء العينة Ω فإن:

1) إذا كانت A و B حدثان من فضاء العينة Ω فإن:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2) إذا كانت A و B حدثان من فضاء العينة Ω فإن:

$$p(A - B) = p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B)$$

3) $p(A^c) = 1 - p(A)$

4) إذا كان الحدث A حدثا مستحيلا فإن: $p(A) = 0$

5) إذا كان الحدث A حدثا أكيدا فإن: $p(A) = p(\Omega) = 1$

6) إذا كانت الحوادث $A_1; A_2; A_3; A_4; \ldots\ldots\ldots . A_n$ حوادث متنافية مثنى مثنى فإن:

$$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

7) $p(A) = p(A \cap B^c) + p(A \cap B)$

8) $p(B) = p(A^c \cap B) + p(A \cap B)$

9) $p(A \cup B) = p(A) + p(A^c \cap B)$

10) $p(A \cup B) = p(B) + p(A \cap B^c)$

11) $p(A^c \cap B^c) = 1 - p(A \cup B)$

5-2. الاحتمال الشرطي (Conditional Probability)

في الاحتمالات، ثمة حالات تُغير فيها المعلومات الجديدة احتمال وقوع الأحداث. على سبيل المثال، نفترض أننا نحاول تخمين بطاقة اختارها صديقنا من بين 52 بطاقة. بناء على الافتراضات البحتة، يمكننا تخمين أن صديقنا اختار الآس البستوني. وبما أنه لا توجد أي معلومات عن البطاقة الصحيحة، فإن احتمال أن يكون تخميننا صحيحًا يساوي$= p(A)$ $\frac{1}{52}$. ماذا لو أعلن صديقنا أن البطاقة الصحيحة عليها شكل البستوني؟ بمعلومية هذه المعطيات الجديدة، سيزداد احتمال أن يكون تخميننا صحيحًا إلى $p(A) = \frac{1}{13}$

نلاحظ أن قيمة احتمال تخميننا تغيرت بمعرفة المعلومة الجديدة. ويوضح هذا مفهوم الاحتمال الشرطي، وهو احتمال وقوع حدث بشرط ظهور ناتج معين لحدث آخر. في هذا السياق، فإن الاحتمال $p(A) = \frac{1}{13}$ يمثل الاحتمال الشرطي أن تكون البطاقة الصحيحة هي الآس البستوني بشرط أن تكون البطاقة الصحيحة على شكل البستوني.

أي أننا نكون مهتمين بإيجاد الاحتمال الشرطي للحادثة بشر ط وقوع الحادثة . فمثلا قد نكون مهتمين بعرفة ما يلي:

1. احتمال تعطل السيارة لأحد السائقين إذا علمنا بأنه قد قام باستعمال GPL بدلا من البنزين.
2. احتمال أن يستمر أحد الأجهزة الكهربائية في العمل لمدة 100 يوما قادمة علما بأن هذا الجهاز ظل عاملا لمدة 30 يوما الماضية.
3. احتمال أن يصاب الشخص بالكورونا علما بأن هذا الشخص قد تم تلقيحه ضد الكورونا.

يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحادثة A منسوبا إلى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة.

قاعدة حساب الاحتمال الشرطي
$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

إذا كان الحدثان A و B مستقلان فإنه لا فرق بين الاحتمال الشرطي والاحتمال العادي؛ وبالتالي يكون:

$$p(A|B) = p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

مثال (1): الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصًا حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم على النحو التالي:

عادة التدخين

مستوى ضغط الدم

	يدخن D	لا يدخن D^C	المجموع
مرتفع A	40	10	50
متوسط B	70	130	200
منخفض C	55	95	150
المجموع	165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

D : حادثة اختيار شخص مدخن

المطلوب هو إيجاد احتمال أن الشخص المختار:

1. ضغط دمه مرتفع.
2. مدخن.
3. ضغط دمه مرتفع و يدخن.
4. ضغط دمه مرتفع علمًا بأنه مدخن.

الحل:

عدد نتائج التجربة $n(S)=\binom{400}{1}=400$ وهي متساوية الفرص.

1. $P(A) = n(A)/n(S) = 50/400 = 0.125$
2. $P(D) = n(D)/n(S) = 165/400 = 0.4125$
3. $P(A\cap D) = n(A\cap D)/n(S) = 40/400 = 0.1$
4. $P(A \mid D) = P(A\cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

أو $P(A \mid D) = n(A\cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$

مثال (2):

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. اخترنا عينة مكونة من 4 كرات من هذا الصندوق عشوائيًا دون مراعاة الترتيب. أوجد احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء.

الحل:

لنعرف الحادثة A على أنها حادثة الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء

عدد طرق اختيار 4 كرات من ثلاثين كرة = $n(S)$

عدد طرق اختيار على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء = $n(A)$

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A) = n(A)/n(S)$

$$n(S) = \binom{30}{4}$$

$$n(A) = \binom{10}{3} \times \binom{20}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}} = 0.088$$

3. قانون الاحتمال الكلي و نظرية بايز

1-3. قانون الاحتمال الكلي(Total Probability Law)

لتكن الأحداث $B_1, B_2, \ldots, B_k$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى أو تبادليا بحيث:

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega \\ B_i \cap B_j = \{\ \}; \forall i \neq j \end{cases} \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} p(B_i) = 1$$

ومهما يكن الحدث A من فضاء العينة فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

2-3. نظرية بايز (Bayes' Theorem)

كانت نظرية بايز اقتراحًا فضيًا من قبل القس توماس بايز ، عالم اللاهوت الإنجليزي في القرن الثامن عشر والذي كان أيضًا عالم رياضيات. كان مؤلف العديد من الأعمال في علم اللاهوت، ولكن من المعروف حاليًا أنه أوجد اثنين من الأطروحات الرياضية، ومن بينها نظرية بايز المذكورة سابقًا والتي تبرز باعتبارها النتيجة الرئيسية.

تناول بايز هذه النظرية في ورقة بعنوان "مقالة نحو حل مشكلة في عقيدة الفرص"، التي نشرت في عام 1763، والتي تم من خلالها تطوير الأعمال الكبيرة لحل مشكلة في عقيدة الاحتمالات. وتم تطبيقها في مختلف مجالات المعرفة.

وبفضل هذه النتيجة، تمكنت مجموعات البحث والشركات المتنوعة من تحسين النظم القائمة على المعرفة.

على سبيل المثال، في دراسة الأمراض، يمكن لنظرية بايز أن تساعد في اكتشاف احتمال وجود مرض في مجموعة من الأشخاص ذوي خصائص معينة، مع الأخذ في الاعتبار المعدلات العالمية للمرض وهيمنة الخصائص المذكورة في الناس على حد سواء الأصحاء والمرضى.

افترض أننا نعرف الاحتمالات الشرطية للحدث لجميع "الأسباب" المحتملة لهذا الحدث. يمكننا استخدام هذه المعلومات للعثور على احتمال أحد تلك الأسباب المحتملة، على أساس أن هذا الحدث قد وقع.

لتكن B1, B2, . . . , Bk حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى أو تبادليا بحيث:

$$\sum_{i=1}^{k} p(B_i) = 1$$

ومهما يكن الحدث A من فضاء العينة فإن: (قانون بايز)

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

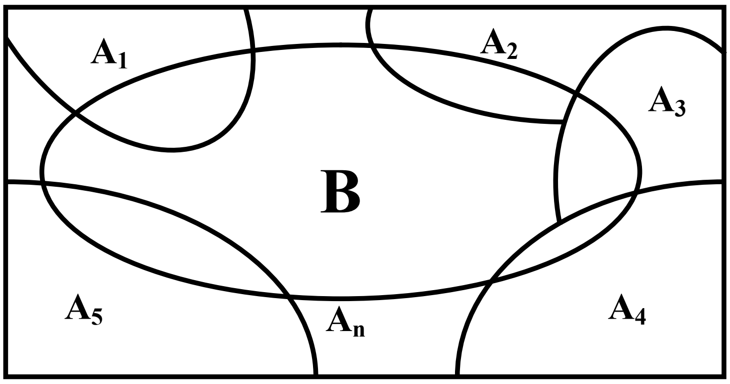
نسمي الاحتمالات P(B1), P(B2), . . . , P(Bk) بالاحتمالات القبلية (prior probabilities)

نسمي الاحتمالات P(B1|A), P(B2|A), . . . , P(Bk|A) بالاحتمالات اللاحقة (posterior probabilities)

التحول من الاحتمالات القبلية إلى الاحتمالات اللاحقة يسمى تحديث بايز.

كما نلاحظ أنه من خلال قانون بايز يتم حساب الاحتمال الشرطي العكسي اعتمادا على الاحتمال الشرطي الأصلي وتطبيقا لقانون الاحتمال الكلي.

نفرض أن $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}, \ldots\ldots, \mathbf{A_n}$ سلسلة من احداث غير مشتركة واتحادها هو الـ Ω , افترض هناك الحدث B يتقاطع مع كل الاحداث الموجودة على الـ Ω



والآن بصدد برهنة صيغة الاحتمال الشرطي لـ بييز

$$B = \Omega \cap B$$

البرهان :

$$B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \ldots \ldots \ldots \cup A_n) \cap B$$

وتبعاً لذلك

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \ldots .. \cup (A_n \cap B) \qquad \ldots . (1$$

حيث ان $(A_i \cap B)$ حوادث متمانعة Mutually Exclusive

وعند اخذ الاحتمال لكلا الطرفين للمعادلة (1) فيكون كالآتي:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \ldots . \cup (A_n \cap B)]$$

وفقاً لفرضيات قياس الاحتمال

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots \cdot + P(A_n \cap B) \qquad \cdots\cdot (2$$

وباستخدام نظرية حاصل الضرب , نجد أن لقانون الاحتمال الشرطي

$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \qquad \cdots (3$$

وبالتعويض بالمعادلة رقم (2)

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \cdots$$

$$+ P(A_n) \cdot P(B|A_n) \cdots\cdot (4$$

وبالتعويض في قانون الاحتمال الشرطي التالي

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \qquad , P(B) \neq 0$$

التعويض عن البسط بالعلاقة رقم (3) , وعن المقام بالعلاقة رقم (4)

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)} \quad \cdot (5 \quad ..$$

ويمكن اختصار المعادلة رقم (5) كما يلي:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

وتدعى هذه الصيغة بصيغة بيز.

مثال (1): تنتج ثلاث ماكنات C,B,A %50 , %30 , %20 على التوالي من الإنتاج الكلي لمصنع ما. ونسبة الانتاج المعيب لهذه الماكينات هي %3 , %4 , %5 أيضا على التوالي, إذا اختيرت وحدة واحدة من الانتاج بطريقة عشوائية, ما هو احتمال ان تكون هذه الوحدة معيبة؟

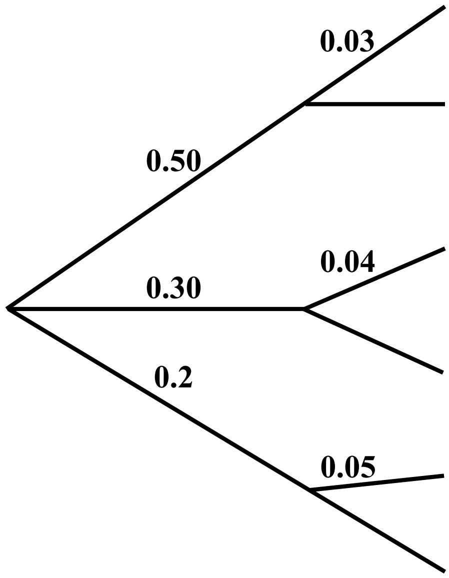
الحل:

نفرض ان X هي الوحدة المختارة المعيبة

اذاً من معادلة رقم (4)

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A) \cdot P(X|A) + P(B) \cdot P(XB) + P(C) \cdot P(X|C) \\ &= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05) \\ &= 0.037 \end{aligned}$$

ويمكن اعتبار هذا المثال عملية عشوائية تمثلها الشجرة البيانية التالية:



مثال (2): لو أعيد منطوق المثال السابق ويكون إذا اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج بطريقة عشوائية ووجد انها معيبة . فما هو احتمال ان تكون هذه الوحدة من إنتاج الماكينة A.

الحل : المطلوب ممكن تلخيصه بلغة الاحتمالات هو $\mathrm{P(A|X)}$

$$\mathrm{P}(A|X)=\frac{\mathrm{P(A)}\cdot\mathrm{P}(X|A)}{\mathrm{P(A)}.\mathrm{P}(X|A)+\mathrm{P(B)}\cdot\mathrm{P}(X|B)+\mathrm{P(C)}\cdot\mathrm{P}(X|C)}$$

$$\mathrm{P(A|X)}=\frac{(0.50)(0.03)}{(0.50)(0.03)+(0.30)(0.04)+(0.20)(0.05)}$$

$$=\frac{0.015}{0.037}=0.40$$

مثال(3): يتم الإنتاج في أحد المصانع بواسطة ثلاث آلات، فإذا كانت الآلات $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ و $\mathrm{M_3}$ تقوم بإنتاج ما نسبته 15 % ، 25 % ، 60 % من مجموع الإنتاج اليومي على الترتيب، مع العلم أن نسبة الإنتاج التالف هي 1 % ، 2 % ، 3 % من الإنتاج اليومي للآلات الثلاثة على الترتيب.

نسحب منتجا واحدا عشوائيا من إنتاج أحد الأيام.

-ما هو احتمال أن يكون المنتج المسحوب تالفا؟

- إذا كان بالمعلوم أن المنتج المسحوب تالف، أحسب ما يلي:

1. ما هو احتمال أن يكون هذا المنتج من إنتاج الآلة M_1 ؟
2. ما هو احتمال أن يكون هذا المنتج من إنتاج الآلة M_2 ؟
3. ما هو احتمال أن يكون هذا المنتج من إنتاج الآلة M_3 ؟

الحل:

نعتبر الحادثة A الحالة التي يكون فيها المنتج المسحوب تالفا.

نعتبر الحادثة B_1 الحالة التي يكون فيها مصدر المنتج من الآلة الأولى ، و الحادثة B_2 الحالة التي يكون فيها مصدر المنتج من الآلة الثانية، والحادثة B_3 الحالة التي يكون فيها مصدر المنتج من الآلة الثالثة .

-احتمال أن يكون المنتج المسحوب تالفا

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)=0.15*0.01+0.25*0.02+0.6*0.03=0.0245$$

1. احتمال أن يكون هذا المنتج من إنتاج الآلة M_1 مع العلم المنتج المسحوب تالفا:

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{0.15*0.01}{0.0245}=\frac{0.0015}{0.0245}=0.061$$

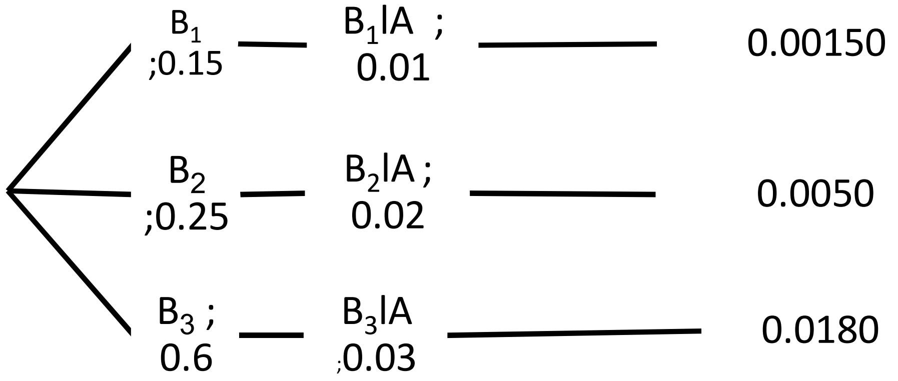
2. احتمال أن يكون هذا المنتج من إنتاج الآلة M_2 مع العلم المنتج المسحوب تالفا:

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{0.25*0.02}{0.0245}=\frac{0.0050}{0.0245}=0.204$$

3. احتمال أن يكون هذا المنتج من إنتاج الآلة M_3 مع العلم المنتج المسحوب تالفا:

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{0.60*0.03}{0.0245}=\frac{0.018}{0.0245}=0.734$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشجرة التالية:



$$P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)=0.0015+0.005+0.018=0.0245$$

الفصل الثالث

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

(Random Variables)

تم التطرق في الفصل السابق إلى التجربة العشوائية وفراغ العينة والحدث واحتمالات حدوث هذه الاحتمالات، وفي هذا الفصل لن يكون اهتمامنا بدراسة نقاط فراغ العينة لكن سيكون اهتمامنا منصبا على قيم عددية مرتبطة بنقاط فراغ العينة، هذه القيم العددية تسمى بالمتغير العشوائي, سنتناول في هذا الفصل المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها وتوقعاتها وتبايناتها سواء في الحالة المتقطعة أو في الحالة المتصلة,

يعرف المتغير العشوائي بأنه كل متغير يأخذ قيما حقيقية مختلفة تمثل نتائج تجربة عشوائية، ويكون لكل قيمة من هذه القيم التي يأخذها احتمال معين،

أولا: المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة) (Discrete Random Variables)

المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع) , وهو على العكس من المتغير العشوائي المستمر تكون الفروق بين كل متغير وآخر لاحق أو سابق له فروق متساوية أو يلتزم بأخذ القيم العددية الصحيحة.

ومن الأمثلة على ذلك:

1. عدد الوحدات المعيبة عند سحب عينة **n** من إنتاج إحدى الآلات؛
2. عدد الصور التي تظهر عند رمي قطعة نقود **n** مرة؛
3. عدد السيارات التي تباع في الشهر؛

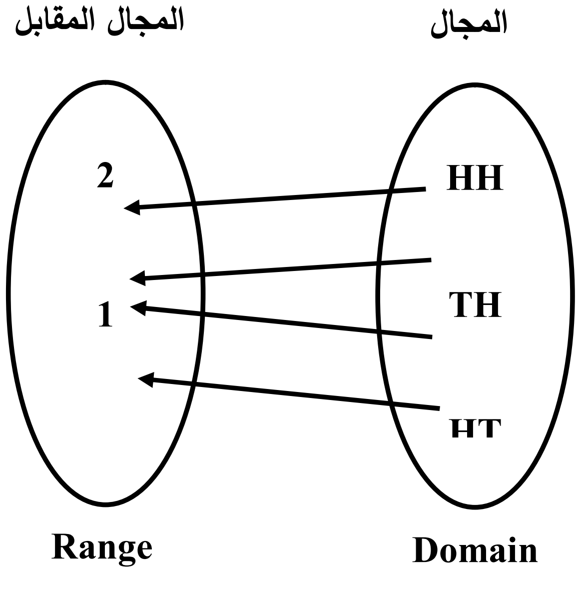
4. عدد حوادث السيارات في يوم معين في المدينة؛

5. عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة؛

6. عدد الغرف في منزل مكون من عدة طوابق.

مثال: إذا أردنا معرفة عدد مرات ظهور الصورة عند رمي عملة صحيحة , فأن المتغير العشوائي ونرمز له بـ X يمثل ظهور وجه العملة الذي يحمل الصورة , وان قيمته ستكون عبارة عن عدد مرات ظهور هذه الصورة , ففي حالة رميها مرتين يصبح $X_i = 0,1,2$, فأذا رمزنا للصورة بـ H وللكتابة T

$$S = \{HH , TH , HT , TT\}$$



إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مثل Y,X ولنفس فضاء العينة (S) فأن المقادير الاتية (XY) , (KX) , $(X + K)$, $(X + Y)$ (عندما تكون K كمية ثابتة وتكون دالة على فضاء العينة وتعرف بواسطة

1. $(X + Y)(w) = X(w) + Y(w)$
2. $(X + K)(w) = X(w) + K$
3. $(KX)(w) = KX(w)$
4. $(XY)(w) = X(w) \cdot Y(w)$

إذا كان (X) هو متغير عشوائي و K عدد حقيقي, فيكون:

1. $E(KX) = K\,E(X)$
2. $E(X+K) = E(X) + K$
3. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

نتيجة:

افترض أن X_1 ، X_2 ، X_3 ، ... ، X_n متغيرات عشوائية ولنفس فضاء العينة:

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_n)$$

مثال: في تجربة رمي العملة المعدنية مرة واحدة افترض أن:

إذا كان ناتج التجربة صورة $X = 1$ H

إذا كان ناتج التجربة كتابة $X = -1$ T

إذن المتغيرات العشوائية تأخذ قيمتين 1 ، 1-

1. دالة توزيع المتغيرات العشوائية المنفصلة

تعريف التوزيع الاحتمالي: التوزيع الاحتمالي هو الدالة (وقد تكون على شكل جدول) وهي تصف كيفية توزيع الاحتمالات على قيم المتغير العشوائي.

يبين التوزيع الاحتمالي احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في التجربة العشوائية، ويمكن التعبير عنه بالتكرار النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير.

2. شروط دالة كثافة الاحتمال

دعونا نكون جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي المنفصل X؛ ولتكن $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$

ومن ثم فإن الشروط المطلوبة لتكون دالة التوزيع الاحتمالية المنفصلة لـ X دالة كثافة احتمال هي:

$$\begin{cases} 1- f(x_i)\geq 0; \\ 2- \sum_{allx} f(x_i)=1 \end{cases}$$

3. دالة التوزيع التجميعية (التراكمية):

$$F(X\leq x_i)=\begin{cases} 0...x\prec 0 \\ f(x_1)..x\leq x_1 \\ f(x_1)+f(x_2)..................................x\leq x_2 \\ f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)........................x\leq x_3 \\ .... \\ f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+......+f(x_n)......x\leq x_n \end{cases}$$

مثال (1): افترض أن X، Y هما متغيرين عشوائيين ذا توزيع متقطع، ويأخذان القيم **{..,3,2,1}** وسوف نفترض دالة التوزيع المشتركة الآتية لهم.

$$P(X=x\ ,Y=y)=(0.64)\ (0.2)^{x+y-2} \qquad x\ ,y=1\ ,2\ ,3\ ,....$$

أوجد:

1) $P(X=x)$

2) $P(Y=y)$

3) هل أن X ، Y متغيرين عشوائيين مستقلين.

الحل:

النظرية تؤكد الآتي:

$$A_x = \{X = x\}$$
$$B_y = \{Y = y\}$$
$$A_x \cap B_y = \{X = x \,,\, Y = y\}$$
$$P(A) = \sum_{y=1}^{\infty} \{A \cap B_y\}$$

$$1)\ P(X = x) = \sum_{y=1}^{\infty} P(X = x \,,\, Y = y)$$
$$= \sum_{y=1}^{\infty} (0.64)\,(0.2)^{x+y-2}$$
$$= (0.64)\,(0.2)^{x-2} \sum_{y=1}^{\infty} (0.2)^{y}$$
$$= (0.64)\,(0.2)^{x-2} [0.2 + (0.2)^2 + (0.2)^3 + ...]$$
$$P(X = x) = (0.64)\,(0.2)^{x-2} \left[\frac{0.2}{1 - 0.2}\right] = (0.64)\,(0.2)^{x-2} \left[\frac{0.2}{0.8}\right] = (0.8)\,(0.2)^{x-1}$$

$$2)\ P(Y = y) = \sum_{x=1}^{\infty} (0.64)\,(0.2)^{x+y-2}$$
$$= (0.64)\,(0.2)^{y-2} \sum_{x=1}^{\infty} (0.2)^{x}$$
$$= (0.64)\,(0.2)^{y-2} [0.2 + (0.2)^2 + (0.2)^3 + ...]$$
$$P(Y = y) = (0.8)\,(0.2)^{y-1}$$

$$3)\ P(X = x \,,\, Y = y) = P(X = x) \,.\, P(Y = y)$$
$$(0.64)\,(0.2)^{x+y-2} = [(0.8)\,(0.2)^{x-1}]\ [(0.8)\,(0.2)^{y-1}]$$
$$= (0.64)\,(0.2)^{x+y-2}$$
$$= P(X = x \,.\, Y = y)$$

إذن المتغيرين X ، Y متغيرين عشوائيين مستقلين.

مثال (2): يضم فوج دراسي في كلية 40 طالبًا. موزعة أعمارهم كالأتي: طالبين عمرهما 17 سنة، وثمانية طلاب أعمارهم 19 سنة ، ثمانية عشرة منهم أعمارهم 20 سنة، ستة أعمارهم 21 سنة، أربعة أعمارهم 22 سنة، واثنان عمرهما 33 سنة.

نختار طالب واحد عشوائيا، وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عمر الطالب.

- ما نوع التوزيع الإحتمالي؟
- أوجد دالة التوزيع الإحتمالي؟
- أوجد الدالة التجميعية.

الحل:

- المتغير العشوائي X متغير العشوائي متقطع (منفصل).

عدد الطلبة=40؛ قيم المتغير العشوائي **x** هي: $x = 17, 19, 20, 21, 22, 33$

- التوزيع الاحتمالي:

$$f(17)=\frac{2}{40}, f(19)=\frac{8}{40}, f(20)=\frac{18}{40}, f(21)=\frac{6}{40}, f(22)=\frac{4}{40}, f(33)=\frac{2}{40}$$

X=x	17	19	20	21	22	33	∑
f(x)=p(X=x)	2/40	8/40	18/40	6/40	4/40	2/40	40/40

- الدالة التجميعية $F(X \leq x)$:

X=x	17	19	20	21	22	33	∑
F(X≤x)	2/40	10/40	28/40	34/40	38/40	40/40	/

ونكتب:

$$F(X \le_X) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots x \prec 17 \\ 2/40 \ldots\ldots\ldots \ \ldots x \le 19 \\ 10/40 \ldots\ldots\ldots \ \ldots x \le 20 \\ 28/40 \ldots\ldots\ldots \ .x \le 21 \\ 34/40 \ldots\ldots\ldots \ .x \le 22 \\ 38/40 \ldots\ldots\ldots \ ..x \le 33 \\ 40/40 \ldots\ldots\ldots \ .x \succ 33 \end{cases}$$

ثانيا: المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر هو متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددا غير منتهيا . ويتحدد هذا المتغير العشوائي من خلال مجال معين قد يكون هذا المجال مفتوحًا أو شبه مفتوح أو مغلق، وقد تكون محددة أو غير محدودة. أي أن له قيم فترية مستمرة وليست متقطعة ،. فمثلا عند قياس الوزن لمجموعة من الطلبة فهناك مجال محدد لكن قيمه ليست منتهية ولا يمكن عدها ، وتبين دالة توزيع المتغير العشوائي المستمر كيفية حساب القيم الاحتمالية والمعرفة على مجال القيم التي يأخذها هذا المتغير العشوائي.

وكما قلنا بأن قيم المتغير العشوائي المستمر لا حصر لها فإنه لا يمكننا تحديد احتمال كل نتيجة عن طريق جدول كما هو الحال بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع، بليتم تقديم دالة جديدة تستخدم لحساب الاحتمالات. تسمى دالة كثافة.

ملاحظة: يجب أنن ننوه إلى أن الطالب يحتاج إلى دراسة الدوال الأصلية والتكامل وإلا فلن يكون قادرا على دراسة هذا المحور.

أمثلة:

- درجة حرارة تفاعل كيميائي معين.
- نسبة تركيز مركب ما في محلول كيميائي.
- الفترة الزمنية بين الإصابة بمرض الايدز والوفاة.

- طول شخص ما.
- المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن.

1. دالة توزيع المتغير العشوائي المستمر

تعريف التوزيع الاحتمالي: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر هو الدالة التي تبين كيفية حساب القيم الاحتمالية والمعرفة على مجال القيم التي يأخذها هذا المتغير العشوائي.

بمأن المتغير العشوائي مستمر ، فإن هناك عدد لا حصر له من النتائج المحتملة ، لا يمكننا تحديد احتمال كل نتيجة عن طريق جدول كما هو الحال بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع، بدلا من ذلك يجب علينا تقديم دالة جديدة تستخدم لحساب الاحتمالات. وستكون تشكل دالة كثافة

ومع أن المتغير العشوائي مستمرا يمكن أن يكون أي عدد حقيقي؛ على المجال

$X \in \{-\infty,+\infty\}$

تعريف: أي دالة حقيقية غير سالبة والمعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R تسمى دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المستمر X إذا وإذا فقط كان:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \quad : \forall a,b \in R, a \leq b$$

2. شروط دالة كثافة الاحتمال

بالنسبة لجميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي المستمر X؛ وليكن $X \in \{-\infty,+\infty\}$ فإن هناك شرطان لتكون دالة التوزيع الاحتمالية المستمرة لـ X دالة كثافة احتمال وهما:

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0; 0 \leq f(x_i) \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d(x) = 1 \end{cases}$$

3. دالة التوزيع التجميعية:

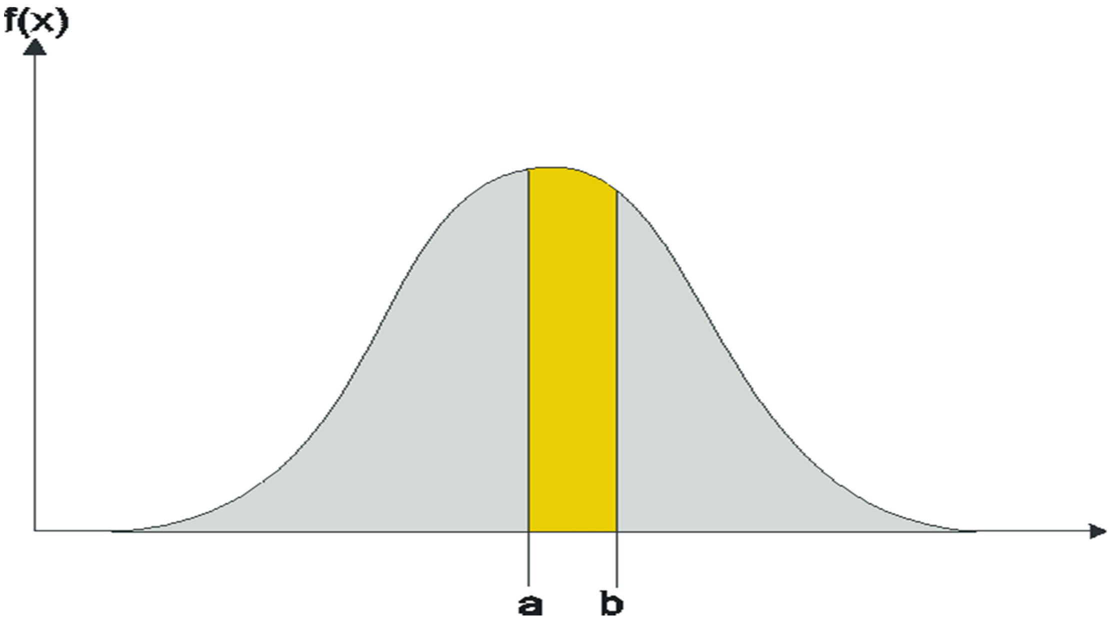
تعتبر دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي المستمر دالة جديدة ومهمة،

تسمى أيضا دالة التوزيع التراكمية.

- دالة الكثافة الاحتمالية:

أي أن احتمال وقوع المتغير العشوائي X في أي فترة يساوي المساحة فوق تلك الفترة وتحت منحنى الدالة : $f_X(X)$

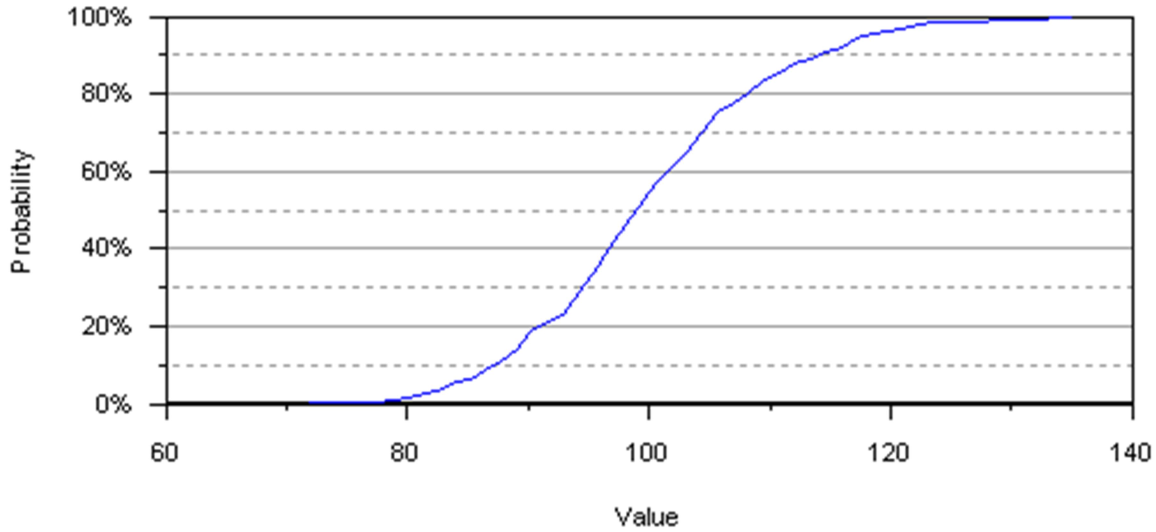
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$



- دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المستمر (المتصل):

إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمر دالة كثافته الاحتمالية هي$f_X(x)$ ، فإن دالة توزيعه التراكمية يرمز لها بالرمز F (x) وتعرف لكل قيمة حقيقية x بالصيغة التالية:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \; ; -\infty < x < \infty$$



مثال:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2; & -1 < x < 2 \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

1- باستخدام دالة التوزيع التراكمية أوجد الاحتمال: $P(0 < X \le 1)$

2- أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$P(0 < X \le 1) = F(1) - F(0)$$

$$P(0 < X \le 1) = \frac{1+1}{9} - \frac{0+1}{9} = \frac{2-1}{0} = \frac{1}{9}$$

ثالثا: التوقع الرياضي والتباين

في العديد من الحالات لا يكفي حساب احتمال تحقق حدث أو أحداث معينة بل نحتاج للخروج بتوقع معين يلخص الوضعية المطروحة أمامنا .من جهة أخرى قد يصعب المفاضلة بين خيارات متاحة مقيمة بمبالغ معينة بسبب ارتباط كل مبلغ بمخاطرة مختلفة؛ من المعروف أن الاستثمارات الأكثر مردودية هي تلك التي تتضمن أكبر مخاطرة، فكيف يمكن أخذ في الحسبان المخاطرة والمبلغ المتوقع وبطريقة دقيقة وموضوعية؛ إن طريقة التوقع وبقية المفاهيم الأخرى التي سنتناولها لاحقا يمكن أن تساعدنا في ذلك.

نتناول في هذا الجزء التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري ثم العزوم للمتغيرات العشوائية بنوعيها المتقطعة والمستمرة.

1. التوقع (الأمل الرياضي)

يعرف التوقع الرياضي والقيمة المتوقعة على أساس أنه المتوسط المرجح لكل قيم المتغير العشوائي، حيث ترجح كل قيمة من المتغير باحتمالها فإذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة توزيع فان التوقع أو القيمة المتوقعة للمتغير X والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ ، ويعرف حسب العلاقة التالية:

في حالة المتغير العشوائي المتقطع: $E(X)=\sum x\times p(x)$

في حالة المتغير العشوائي المستمر: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times f(x)dx$

ويسمى التوقع الرياضي أيضا الأمل الرياضي أي ما نأمل الحصول عليه وهي نفس تفسير ما نتوقع الحصول عليه: كما إن التوقع الرياضي نقصد به القيمة المتوسطة وهو يقابل الوسط الحسابي في الإحصاء الوصفي ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

نفرض أن لدينا احتمالات متساوية مثل إلقاء زهرة نرد متوازنة كل الأرقام لها نفس الاحتمال أي:

$$P(x)=\frac{1}{n} \qquad \forall x \in \{x_1, x_1, x_1, \dots\dots\dots.. x_n\}$$

$$\mu_X=E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)=x_1\frac{1}{n}+x_2\frac{1}{n}+x_3\frac{1}{n}+\cdots\dots\dots.+x_n\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}(x_1+x_3+x_3+\cdots\dots\dots.+x_n)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

نلاحظ أن التوقع الرياضي يساوي $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ وهو هنا يمثل مجموع القيم مقسوما على عدد القيم وهو تعريف الوسط الحسابي الذي تم دراسته في الاحصاء الوصفي،

أليك بعض النظريات التي تساعدنا في حساب التوقع الرياضي:

توقع العدد الثابت هو نفسه أي:

نفرض c عدد ثابت فإن:

أولا:

$$a) \qquad E(c) = c$$

البرهان

$$E(c) = \sum_{i=1}^{n} cp(c) = c\sum_{i=1}^{n} p(c)$$

وبما أن مجموع الاحتمالات دائما يساوي الواحد فإن $\sum_{i=1}^{n} p(c) = 1$

$$= c\sum_{i=1}^{n} p(c) = c$$

ثانيا:

$$b) \qquad E(cX) = cE(X)$$

البرهان

$$E(CX) = \sum_{i=1}^{n} Cx_i p(x_i) = Cx_1 p(x_1) + Cx_2 p(x_2) + \cdots \ldots . + C\,x_n p(x_n)$$

$$= C\big(x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots \ldots + x_n p(x_n)\big)$$

$$= C\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = cE(X)$$

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين فإن:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

البرهان:

$$E(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) p(x_i \pm y_i) =$$

$$= \big(x_1 p(x_1) \pm y_1 p(y_1) \pm x_2 p(x_2) \pm y_2 p(y_2) \pm \cdots \ldots \pm x_n p(x_n) \pm y_n p(y_n)\big)$$

$$= \underbrace{\big(x_1 p(x_1) \pm x_2 p(x_2) \pm \cdots \pm x_n p(x_n)\big)}_{\boldsymbol{E(X)}} \pm \underbrace{\big(y_1 p(y) \pm y_2 p(y_2) \pm \cdots \pm y_n p(y_n)\big)}_{\boldsymbol{E(Y)}}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{E(X)} \qquad \pm \qquad \boldsymbol{E(Y)}}$$

$$\boldsymbol{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$$

$$E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$$
$$E(X \pm a) = E(X) \pm a$$
$$E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$$
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
$$E(aXY) = aE(X)E(Y)$$
$$E\big(E(X)\big) = E(X)$$

إذا كان Xو Y متغيرين عشوائيين مستقلين،فإن:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

البرهان:

بما أن المتغيرين مستقلين فإن $(xy) = p(x)p(y)$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)p(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)p(x_i)p(y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) y_i p(y_i) = E(X)E(Y)$$

مثال (1):

ليكن X متغير عشوائي القيم الاحتمالية له ممثلة في الجدول التالي:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	α	$\frac{1}{8}$

أوجد كل من:

$$a)E(X) \quad ; \; b)E((X)^2) \quad ; \; c)E(X+7) \; ; \; d)E(X^2+3X)$$

الحل:

باستخدام ما تم دراسته سابقا:

$$\sum_x P(X=x) = 1 \rightarrow P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$
$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \alpha + \frac{1}{8} = 1 \rightarrow \alpha + \frac{5}{8} = 1 \; \rightarrow \alpha = 1 - \frac{5}{8}$$
$$\alpha = \frac{3}{8}$$

ومنه:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\alpha = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حساب التوقع الرياضي:$a)(X)$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

X^2	0	1	4	9	
X	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i p(x_i)$	$0\times\frac{1}{8}$	$1\times\frac{3}{8}$	$2\times\frac{3}{8}$	$3\times\frac{1}{8}$	$\frac{12}{8}$
${X^2}_i p({X^2}_i)$	$0\times\frac{1}{8}$	$1\times\frac{3}{8}$	$4\times\frac{3}{8}$	$9\times\frac{1}{8}$	$\frac{24}{8}$
$(X^2+3X)_i p(X_i)$	$(0^2+3\times0)0$	$(1^2+3\times1)\frac{12}{8}$	$(2^2+3\times2)\frac{30}{8}$	$(3^2+3\times3)\frac{18}{8}$	$\frac{60}{8}$

من خلال الجدول نجد:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)=\frac{12}{8}$$

أو

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}$$

حساب: $b)E((X)^2)$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} {X^2}_i p({X^2}_i)$$

من خلال الجدول نجد:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} {X^2}_i p(X_i)=\frac{24}{8}$$

أو

$$E(X^2)=\ 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}\ =\frac{24}{8}$$

حساب: $c)E(X+7)$

$$E(X+a)=E(X)+\ a\rightarrow E(X+7)=E(X)+\ 7\ =\frac{10}{8}+\ 7=\frac{66}{8}$$

حساب:$d)E(x^2+3X)$

$$E(X^2+3X)=E(X^2)+E(3X)=E(X^2)+3E(X)=\frac{24}{8}+3\left(\frac{12}{8}\right)=\frac{60}{8}$$

مثال(2): ليكن متغير عشوائي مستمر يمثل دالة كثافة احتمال، نعرف دالة التوزيع كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

أحسب الأمل الرياضي (التوقع) لهذا المتغير العشوائي؟

الحل:

$$E(X)=\int_0^1 x\times dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2}$$

2. التباين والانحراف المعياري

يقيس الانحراف المعياري الانتشار أو التشتت لمجموعة من البيانات, وكذلك يقيس الانحراف المعياري انتشار قيم المتغير العشوائي،

يحسب تباين المتغير العشوائي بالعلاقة التالية:

في حالة المتغير العشوائي المستمر

$$V(X)=E[(X-E(X))^2]=\sum(x-E(X))^2\times p(x)$$

في حالة المتغير العشوائي المتقطع

$$V(X)=E[(X-E(X))^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2\times f(x)dx$$

هناك طريقة ثانية لحساب التباين كالأتي:

$$V(X)=E[(X-E(X))^2]=E[X^2-2XE(X)+E(X)^2]=E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

بالنسبة للانحراف المعياري فهو جذر التباين: $\sigma=\sqrt{V(X)}$

مثال (1): بالرجوع لمعطيات المثال السابق:

ليكن X متغير عشوائي القيم الاحتمالية له ممثلة في الجدول التالي:

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	α	$\frac{1}{8}$

أوجد كل من:

$e)\quad Var(X)\ ;\quad f)\ Var(6X-8)$

الحل:

e)حساب التباين: $e)\quad Var(X)$

لدينا: $$Var(X)=\sigma_X^2=E(x^2)-[E(X)]^2$$

بما اننا سابقا وجدنا أن:

$$E(X^2)=\frac{24}{8}\ ;\quad E(X)=\frac{12}{8}\to[E(X)]^2=\frac{144}{64}\to Var(X)=\frac{24}{8}-\frac{144}{64}$$

$$Var(X)=\frac{432}{64}=6.75$$

f)حساب $f)\ Var(6X-8)$

$$Var(6X-8)=6^2Var(X)$$

مثال(2): إليك الجدول التالي، أحسب التباين والانحراف المعياري

x	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

$E(x)=2$

حساب التباين $v(x)$:

$$V(X)=\sum(x-2)^2\times p(x)=(0-2)^2\times 0{,}0625+(1-2)^2\times 0{,}25+(2-2)^2\times 0{,}375+(3-2)^2\times 0{,}25+(4-2)^2\times 0{,}0625=1$$

$$V(X)=E(x^2)-(E(x))^2$$

$$E(x^2)=\sum x^2\times p(x)=0^2\times 0{,}0625+1^2\times 0{,}25+2^2\times 0{,}375+3^2\times 0{,}25+4^2\times 0{,}0625=5$$

$$V(X)=E(x^2)-(E(x))^2=5-2^2=1$$

حساب الانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma}$: $\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$

الفصل الرابع

الفصل الر ابع: التوزيعات الاحتمالية

أولا: التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (المتقطعة)

بعد أن عرفنا مفهوم المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يمكننا الآن أن ندرس عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة.

تستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي ا ولتجاري وفي الإدارة .ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا :التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون .

1- توزيع برنولي (Bernoullidistribution)

هو توزيع نظري يصف تجارب لها نتيجتين محتملتين فقط. هناك كثير من الأحداث ينطبق عليها هذا التوزيع. فعلى سبيل المثال: نظام ضبط الجودة في المصانع يصف أي سلعة يتم اختبارها على أنها معيبة أو غير معيبة. وكذلك الأمر عند التفاوض لإبرام عقد فتكون النتيجة إما إبرام العقد أو لا، وكذلك الشراء إما نشتري أو لا، وكذلك عند اجتياز مسابقة توظيف ستكون النتيجة ننجح أو لا ننجح، وكذلك عند تقديم اقتراح لمديرك في العمل ستكون النتيجة الموافقة أم لا. وبهذا نلاحظ أن هناك دائما إجابتين أو بالأحرى نتيجتين فقط.

- الشروط التي يجب أن يستوفيها توزيع برنولي

1) لكل محاولة نتيجتان ممكنتان: نجاح أو فشل.
2) هناك عدد ثابت من المحاولات المتماثلة في كل تجربة عددها n.
3) محاولات التجربة مستقلة بعضها عن بعض. وهذا يعني أنه إذا كانت نتيجة إحدى المحاولات " نجاحا "، فهذا لا يؤثر على احتمال أن تكون نتيجة محاولة أخرى، " نجاحا" أيضا.
4) يجب أن تكون العملية متلائمة مع توليد نتائج بعضها نجاح والاخر فشل. ويجب أن تكون القيمة المرتبطة باحتمال النجاح. " p" ثابتة في جميع محاولات التجربة.
5) إذا كانت "p " تمثل احتمال النجاح فإن احتمال الفشل هو "q " حيث:

$$q = 1 - p$$

مثال: عند رمي قطعة النقود فإن النتيجة يمكن أن تكون صورة أو كتابة فإذا كانت X تأخذ قيمة (1) إذا حصل الشخص على الصورة (النجاح) وقيمة (0) إذا حصل الشخص على الكتابة (الفشل) وبما أن احتمال الحصول على الصورة من هذه اللعبة هو $\frac{1}{2}$ فإن:

$$\boldsymbol{P(X = x) = (\frac{1}{2})^{x}(\frac{1}{2})^{1-x} \qquad x = 0\,,1}$$

2 -التوزيع ثنائي الحدين (Binomialdistribution)

إذا تم تكرار تجربة مستقلة ذات ناتجين (التجربة المذكورة في توزيع برنولي لـ n من المرات). نفرض أن p هو احتمال النجاح ولذلك يكون $q = 1 - p$ هو احتمال الفشل. على فرض إذا كان هدفنا هو عدد مرات النجاح وليس ترتيب ووقوع النجاح. ولذلك يمكن صياغة صيغة توزيع ثنائي الحدين وكما يلي:

x احتمال وقوع عدد من النجاحات في n من المحاولات المكررة هو:

$$b(X\,;n\,,p) = \binom{n}{x} p^{x}\, q^{n-x} \qquad x = 0\,,1,\ldots,n$$

مثال (1): تم رمي قطعة من النقود 6 مرات أو بطريقة مكافئة القيت 6 قطع من النقود. نفرض أن الصورة هي النجاح. إذا كان $\mathbf{p = q = \frac{1}{2}\;, n = 6}$ أوجد ما يلي:

- احتمال وقوع صورتين بالضبط (أي أن **k** = 2) هو:

$$\mathbf{b\left(2\,;6\,,\frac{1}{2}\right) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{15}{64}}$$

- احتمال وقوع أربع صور على الأقل (أي إن **k** = 4 أو 5 أو 6 ويكون كما يلي:

$$b\left(4\,;6\,,\frac{1}{2}\right)+\ b\left(5\,;6\,,\frac{1}{2}\right)+\ b\left(6\,;6\,,\frac{1}{2}\right)$$
$$=\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\ \binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$
$$+\ \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\ =\ \frac{15}{64}+\ \frac{6}{64}+\ \frac{1}{64}=\ \frac{11}{32}$$

-احتمال عدم وقوع الصورة (أي الفشل في جميع التجارب) هو:

$$q^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\ =\frac{1}{64}$$

إذا كان المطلوب احتمال وقوع صورة واحدة على الأقل هو:

$$1-\ q^6=\ 1-\ \frac{1}{64}=\ \frac{63}{64}$$

مثال (2): تم إلقاء حجر النرد 7 مرات، نفترض أن النجاح هو الحصول على الرقمين 5 أو 6 في أي رمية.

إذن $n=7$, $p=p\{(5\,,6)\}=\frac{1}{3}$, $q=1-p=\frac{2}{3}$ أوجد ما يلي:

- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط (أي أن **k = 3**) هو:

$$b\left(3\,;7\,,\frac{1}{3}\right)=\binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\ =\frac{560}{2187}$$

- احتمال عدم الحصول على الرقمين 5 أو 6 (أي الفشل في جميع المحاولات) هو:

$$q^7=\ \left(\frac{2}{23}\right)^{7}\ =\frac{128}{2187}$$

ويكون حتماً الحصول على الرقمين 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل هو:

$$1-\ q^7=\frac{2059}{2187}$$

وبصورة عامة إذا اعتبرنا أن n ، p ثوابت فإن الدالـــة الســـــابقة $\mathbf{p(k) = b(k\,;n\,,p)}$ تكون توزيعاً احتمالياً متقطعاً.

K	0	1	2	3	...	N
P(k)	q^n	$\binom{n}{1} q^{n-1}\, p$	$\binom{n}{2} q^{n-2}p^2$	$\binom{n}{3} q^{n-3}p^3$	...	p^n

ويسمى هذا التوزيع بتوزيع ذي الحدين وذلك لأن الاحتمالات لقيم $k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$ هي الحدود المتتالية في مفكوك ذي الحدين

$$\mathbf{(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1}\, p + \binom{n}{2} q^{n-2}p^2 + \binom{n}{3} q^{n-3}p^3 + \dots + p^n}$$

ويسمى هذا التوزيع بتوزيع برنولي **(Bernoulli)**.

ويمكن تلخيص خواص توزيع ذي الحدين.

توزيع ذي الحدين	
التوقع	$\mu = n\,p$
التباين	$\sigma^2 = n\ p\,q$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$

مثال (3): عند رمي حجر النرد (الزار) 180 مرة فيكون توقع عدد مرات الحصول على الرقم 6 هو:

$$\boldsymbol{\mu = n\,p = 180\,.\frac{1}{6} = 30\ ,\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{180\,.\frac{1}{6}\,.\frac{5}{6}} = 5}$$

مثال (4): تصنع مؤسسة معينة أجهزة الكترونية، وكان من المعلوم أن 0,15 من الأجهزة تالفة، اخترنا عشوائيا 15 جهازا، المطلوب :

- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير(باستعمال توزيع ثنائي الحد).
- ما احتمال عدم الحصول على أي جهاز تالف من بين الأجهزة المختارة؟
- ما احتمال الحصول على جهاز واحد تالف على الأكثر؟
- ما احتمال الحصول على جهاز واحد تالف على الأقل؟

الحل:

$$p = 0.15$$ ،

$$1 - p = q = 0.85$$ ،

$$n = 15$$ ،

- دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير

(باستعمال توزيع ثنائي الحد $f(x) = C_n^x (p) \quad (q)^{n-x}$

$$f(x) = C_{15}^x (0.15)^x (0.85)^{15-x};$$

- احتمال عدم الحصول على أي جهاز تالف من بين الأجهزة المختارة:

$$p(x = 0) = f(0) = C_{15}^0 (0.15)^0 (0.85)^{15-0}$$

$$= (0.15)^{15};$$

- احتمال الحصول على جهاز واحد تالف على الأكثر :

$$f(0) + f(1) = (0.15)^{15} + C_{15}^{1}(0.15)^{1}(0.85)^{15-1}$$

$$= (0.15)^{15} + 15(0.15)(0.85)^{14};$$

- احتمال الحصول على جهاز واحد تالف على الأقل :

$$p(x \geq 1) = f(1) + f(2) + \cdots = 1 - f(0) =$$

$$1 - C_{15}^{0}(0.15)^{0}(0.85)^{15-0} = 1 - (0.15)^{15};$$

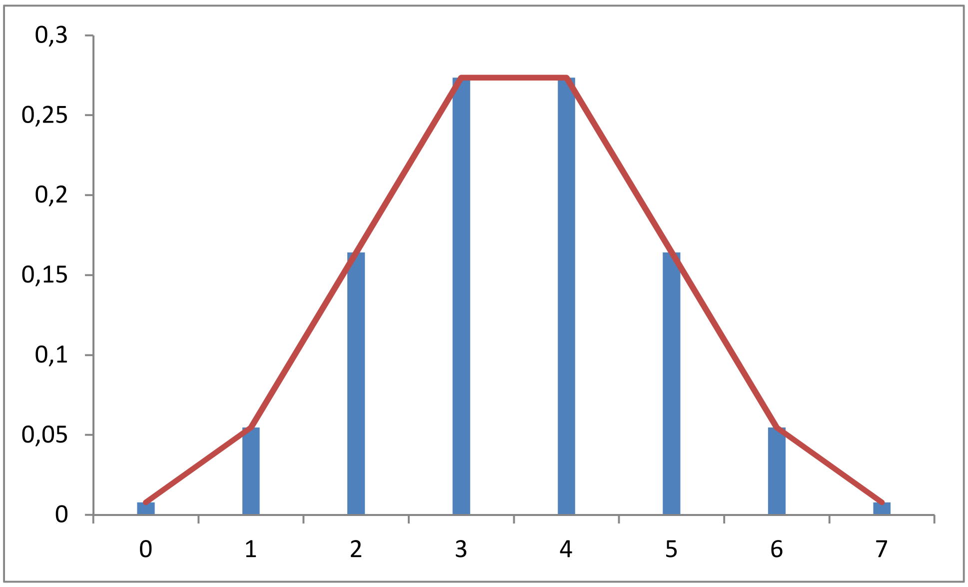
مثال(5): أوجد دالة التوزيع ورسمها البياني لتوزيع ذي الحدين التالي: $Bin(7; 0.5)$.

الحل:

$$f(x) = C_7^x(0.5)^x(0.5)^{7-x} = C_7^x(0.5)^7;$$

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
P(X=x)	**0,0078**	**0,0547**	**0,1641**	**0,2734**	**0,2734**	**0,1641**	**0,0547**	**0,0078**	1

التمثيل البياني:



توزيع متماثل.

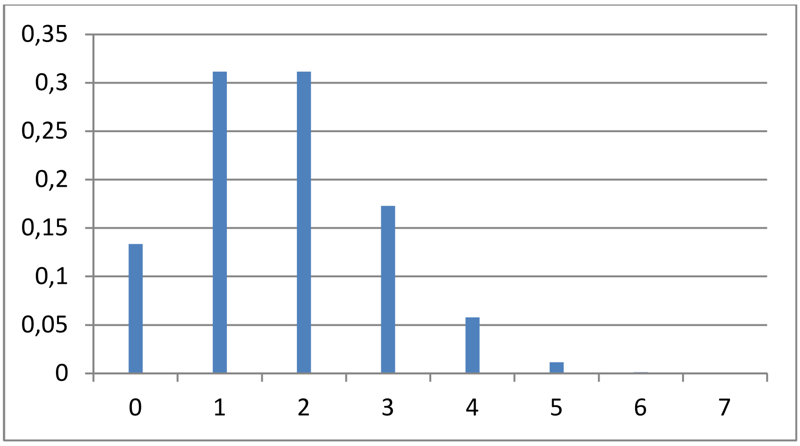
مثال(6): أوجد دالة التوزيع وتمثيلها البياني لتوزيع ذي الحدين التالي: $Bin(7; 0.25)$.

الحل:

$$f(x) = C_7^x (0.25)^x (0.75)^{7-x};$$

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7	Σ
P(X=x)	0,1335	0,3115	0,3115	0,173	0,0577	0,0115	0,0013	0,0001	1

التمثيل البياني:



توزيع ملتوي جهة اليمين لأن $p < q$

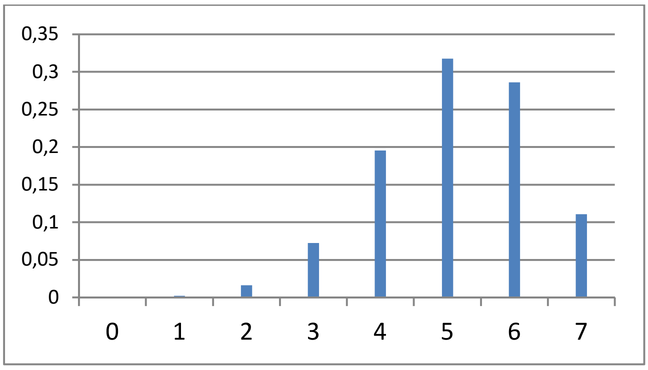
مثال(7): أوجد دالة التوزيع وتمثيلها البياني لتوزيع ذي الحدين التالي: $Bin(7; 0.73)$.

الحل:

$$f(x) = C_7^x (0.73)^x (0.27)^{7-x};$$

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7	Σ
P(X=x)	0,0001	0,002	0,0161	0,0724	0,1956	0,3174	0,286	0,1105	1

التمثيل البياني:



توزيع ملتو جهة اليسار لأن $p > q$

3-توزيع بواسون (POISSON DISTRIBUTION)

درسنا التوزيع ذي الحدين الذي يحتوي على حدثين حادث نجاح والأخر فشل، إلا أنه توجد العديد من الحالات يمكننا فقط تحديد حالات النجاح ولا يمكننا حساب عدد مرات الفشل. فعلى سبيل المثال مستشفى بكارية في ولاية تبسة يقدم خدمات الطوارئ لمرضى الكورونا، في هذه الحالة يمكننا بسهولة حساب عدد اتصالات حالات الطوارئ التي تستجيب لها الوحدات في الساعة. لكن التساؤل هنا كيف يمكن عد الاتصالات التي لم يتم تلقيها؟ من الواضح هنا أنه من الصعب بل من المستحيل معرفة عدد النتائج الممكنة (نجاح +فشل), فإذا كنا لا نستطيع حساب العدد الكلي للنتائج الممكنة عندئذ لا يمكن تطبيق التوزيع ذي الحدين ولكن في هذه الحالة قد نستطيع تطبيق توزيع بواسن.

3-1. خصائص توزيع بواسون

يصف توزيع بواسون عملية تمتد على مدى فترة من الزمن أو تتعلق بحيز محدد أو أي وحدة تحقق محددة بشكل جيد، تحدث النتائج الممكنة التي ندرسها مثل اتصالات الطوارئ، وعدد الحفر بشكل عشوائي، ونعد النتائج التي تحدث خلال شريحة معينة من الزمن من حيز ما. يمكن أن نعد عدد اتصالات الطوارئ خلال ساعة أو عدد الحفر لمسافات طولها ميلان من إحدى الطرقات.

ونسمي هذه الأعداد نجاحات مع أنها قد تكون غير مرغوبة. يتعامل هذا المتغير العشوائي مع حوادث نادرة الوقوع.

يعتبر توزيع بواسون أحد أنواع التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة والتي غالبا ما تستعمل عند وصف عدد الأحداث التي تقع في فترة زمنية محددة ، أو في منطقة محددة أو حجم معين.

يسمى بعض الأحيان بتوزيع الظواهر الخاصة والنادرة وتكون الدالة الاحتمالية له كما يلي:

$$P(k\,;\,\lambda)=\frac{(\lambda)^k\ e^{-\lambda}}{k!} \qquad , \ k\ =\ 0,1,2,....$$

حيث $0 < \lambda$ ثابت اختياري. ويظهر هذا التوزيع اللانهائي القابل للعد في كثير من الظواهر الطبيعية مثل عدد المكالمات الهاتفية في وحدة الوقت، عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة في كتاب كبير، عدد جسيمات الفا التي يطلقها مركب نشيط اشعاعياً، عدد المركبات الداخلة إلى محطة الوقود للتزود بالوقود، عدد الأفراد الذين يتوافدون على صالونات الحلاقة أو بشكل عام كل الأحداث التي تحدث خلال الوقت t فإنها تتوزع أو عددها يتوزع توزيع بواسون. وتكون خواص توزيع بواسون كما **يلي:**

توزيع بواسون	
التوقع	$\mu = \lambda$
التباين	$\sigma^2 = \lambda$
الإنحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\lambda}$

على الرغم من أن توزيع بواسون له فوائده الخاصة إلا أنه يعطينا أيضاً تقريباً جيداً لتوزيع ذي الحدين عندما تكون k صغيرة ويفترض أن p صغيرة وأن $\lambda = n\ p$ ويبين الجدول التالي هذه الخاصية.

- مقارنة بين توزيع ذي الحدين وبواسون عندما $n = 100$, $p = \frac{1}{100}$, $\lambda = n\ p$

k	0	1	2	3	4	5
ذي الحدين	0.366	0.370	0.185	0.0610	0.0149	0.0029
بواسون	0.368	0.368	0.184	0.0613	0.0153	0.00307

3- 2. بعض الصيغ الهامة لتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

هذه الصيغ مفيدة جدا في حساب احتمالات المتغيرات العشوائية المنفصلة؛ ونخص بالذكر الاحتمالات المستخرجة من جدول توزيع ذي الحدين وجدول توزيع بواسون على حد سواء (إذ أن كلا منهما تم إعداده على أساس التوزيع الاحتمالي التراكمي):

$*P(x = a) = P(x \leq a) - P(x \leq a - 1)$

$*P(x < a) = P(x \leq a - 1)$

$*P(x > a) = 1 - P(x \leq a)$

$*P(x \geq a) = 1 - P(x \leq a - 1)$

$*P(a < x < b) = P(x \leq b - 1) - P(x \leq a)$

$*P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a - 1)$

مثال(1): تحدث حالات الولادة عشوائياً في مستشفى الأم والطفل بمتوسط 1.8 ولادة في الساعة الواحدة.

- ما هو احتمال حدوث 4 ولادات في ساعة معينة في هذا المستشفى؟
- ما هو احتمال حدوث ولادة واحدة على الأقل في ساعة معينة في هذا المستشفى؟

الحل:

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد حالات الولادة في الساعة الواحدة،

باستخدام توزيع بواسون؛ المتوسط $\lambda = 1.8$; $\mathbf{p(X = x) = \boldsymbol{f}(x) = \frac{\boldsymbol{\lambda}^{x}}{x!}\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\lambda}}}$

احتمال حدوث 4 ولادات في ساعة معينة في هذا المستشفى:

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} = 4) = f(4) = \frac{(1.8)^4}{4!}e^{-1.8} = \mathbf{0.07230173;}$$

احتمال حدوث ولادة واحدة على الأقل في ساعة معينة في هذا المستشفى:

$$\mathrm{p}(\mathrm{X} \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots \dots \dots \dots = 1 - f(0)\mathbf{;}$$

$$= 1 - \frac{(1.8)^0}{0!}e^{-1.8} = 1 - \mathbf{0.16529889} = \mathbf{0.83470111;}$$

مثال(2): يدخل أحد المحلات التجارية ثلاث زبائن كمعدل في الدقيقة؛

- أحسب احتمال دخول أربعة زبائن هذا المحل في دقيقة ما؟

- أحسب احتمال دخول خمسة زبائن هذا المحل في دقيقة ما؟

الحل:

باستخدام توزيع بواسون؛ المتوسط $\lambda = 3$، $\mathbf{p(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}}$

احتمال دخول أربعة زبائن هذا المحل في دقيقة ما:

$$\text{p}(\text{X} = 4) = f(4) = \frac{3^4}{4!} e^{-3} = \mathbf{0.16803136} \text{ ;}$$

احتمال دخول خمسة زبائن هذا المحل في دقيقة ما:

$$\text{p}(\text{X} = 5) = f(5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3} = \mathbf{0.10081881;}$$

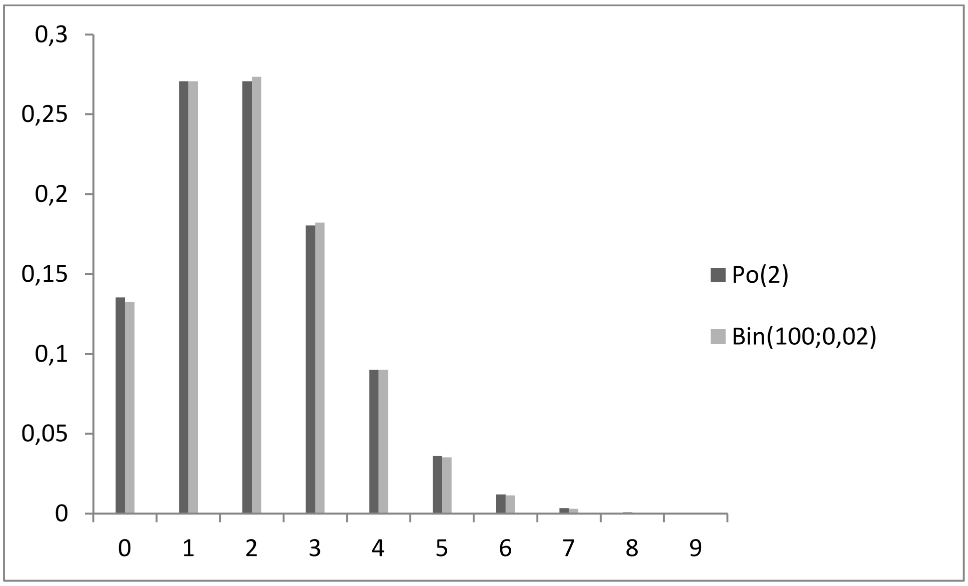
3-3. استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين

إذا كانت n كبيرة $(n > 50)$ و p صغيرة $(p < 0.1)$ يمكننا استعمال توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين

توزيع ذي الحدين وتوزيع Poisson كلاهما من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة. في بعض الحالات تكون التوزيعات متشابهة جدًا، على سبيل المثال:

مثال(1): $Bin(100 ، 0.02)$ و $Po(2)$ هذان التوزيعان جد متطابقان.

- $Po(2)$: $\mathbf{p(X = x) = f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}}$ **;**
- $Bin(100 ، 0.02)$: $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = C_{100}^{x}(0.02)^x(0.98)^{100-x}$;



مثال(2): إذا كان لدينا 5 ٪ من السكان من الأعسرين ، استخدم توزيع Poisson لتقدير احتمال أن عينة عشوائية من 100 شخص تحتوي على 2 أو أكثر من الأعسرين.

الحل:

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأعسرين.

نلاحظ أن هذا المتغير العشوائي يتبع توزيع ثنائي الحد $X{\sim}Bin(100; 0.05)$، بالتقريب لتوزيع بواسون يصبح: $X{\sim}Po(\lambda)$؛

$$\lambda = np = 100 * 0.05 = 5;$$

$$X{\sim}Po(5) \rightarrow f(X) = \frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda},$$

$$f(x) = \frac{5^{x}}{x!}e^{-5}\ ; \quad X=0\ ;1..........$$

احتمال أن يكون 2 أو أكثر من الأعسرين في العينة المختارة:

$$f(x \geq 2) = f(2) + f(3) + f(4) + \cdots = 1 - \big(f(0) + f(1)\big);$$

$$= 1 - \left(\frac{5^0}{0!} e^{-5} + \frac{5^1}{1!} e^{-5}\right) = 1 - (0.0067 + 0.036) = 1 - 0.040427 = 0.95957$$;

4- التوزيع الهندسي (GeometricDistribution)

في التجارب المستقلة التي يكون فيها احتمال النجاح (P) فإن عدد المحاولات المطلوبة (X) للوصول إلى أول نجاح هو:

$$P(X = x) = P\ (q)^{x-1} \qquad x = 1 , 2 , \dots$$

أو:

$$P(X = x) = P\ (q)^{x} \qquad x = 0 , 1 , 2 , \dots$$

يعتبر هذا التوزيع حالة خاصة من توزيع ثنائي الحدين السالب (**NegativeBinomial**) عندما **r=1**.

مثال: افترض أن X يشير إلى عدد المحاولات التي تسبق المحاولة التي نحصل فيها على أول ظهور لجهة الكتابة في تجربة لرمي قطعة نقد واحدة، فإذا كان احتمال الحصول على جهة الكتابة هو **P** واحتمال الحصول على جهة الوجه هو **q=1−p** فإن التوزيع الذي سيخضع له المتغير العشوائي المتقطع X سيكون التوزيع الهندسي (**Geometricdistribution**) وبدالة كتلة الاحتمال:

$$P(X = n) = P\ (q)^{n-1} \qquad n = 1 , 2 , \dots$$

ثانيا: التوزيعات الاحتمالية المتصلة (المستمرة)

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المستمرة لها أشكال مختلفة حسب طبيعة التجارب المدروسة والقيمة الاحتمالية لكل نتيجة من نتائج تلك التجارب إلا أنها تشترك في خواص عامة أهمها:

1. كتلة الاحتمال عند أية نقطة من محور القيم الحقيقية صغيرة جداً وقريبة من الصفر لذا لا تعرف دالة كتلة الاحتمال في هذه الحالة.
2. دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي معروفة وهي:

$$F(x) = P(X \le x) \qquad , \quad x \in R$$

3. تعرف هنا دالة الكثافة الاحتمالية (**Probability density function**)ويرمز لها بالرمز **f(x)** وتعرف من خلال الخواص الآتية:

$$f(x) \geq 0 \qquad , \; x \in R$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ d(x) = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\ d(y)$$

وبشكل عام فإن:

$$P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\ d(x)$$

ولدالة الكثافة الاحتمالية صيغة رياضية محددة لكل نوع من أنواع التوزيعات المستمرة المعروفة.

1. التوزيع الطبيعي (Normaldistribution)

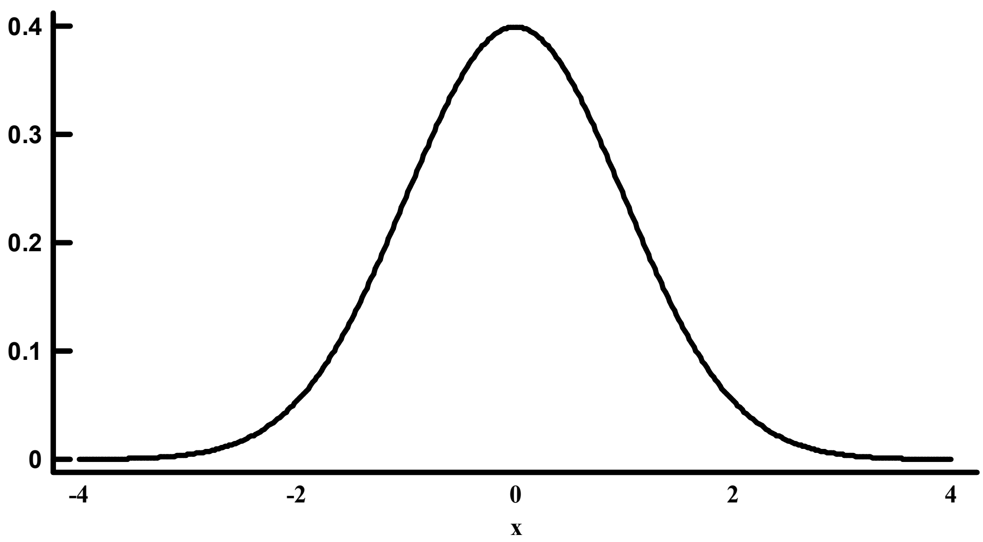
يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شار ع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة .ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد ومتجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي.

1-1. التعريف بالتوزيع الطبيعي

يعرف التوزيع الطبيعي أو المنحني الطبيعي أو ما يسمى بتوزيع كاوس كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث أن μ ، $\sigma > 0$ ثابتان اختياريان، وهذه الدالة بالتأكيد واحدة من أهم أمثلة التوزيعات المستمرة، ويبين المنحنيان التاليان التغير في الدالة F، أي كلما تغيرت μ وكلما تغيرت أيضاً σ . وبصفة خاصة فإننا نلاحظ أن هذه المنحنيات شبيهة بشكل الجرس وإنها متماثلة حول المستقيم $x = \mu$.



ويمكن تلخيص خواص التوزيع الطبيعي:

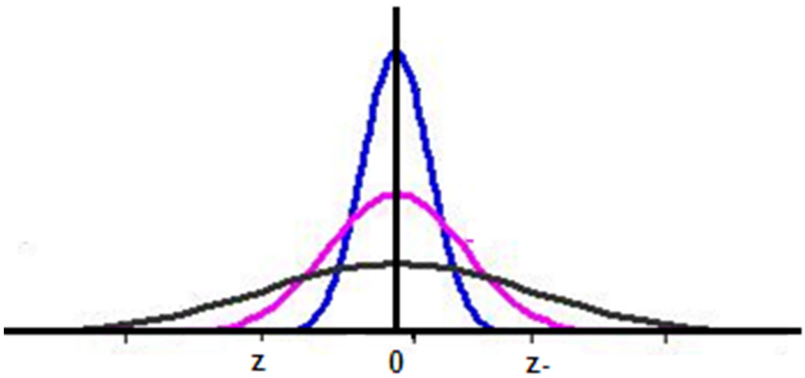
التوزيع الطبيعي	
التوقع	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ

ونرمز للتوزيع الطبيعي الذي توقعه μ وتباينه σ^2 بالرمز $N(\mu , \sigma^2)$.

وإذا أجرينا التعويض $K = \frac{(X-\mu)}{\sigma^2}$ في الصيغة السابقة للمتغير $N(\mu , \sigma^2)$ نحصل على التوزيع الطبيعي القياسي أو المنحنى الطبيعي القياسي:

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}k^2}$$

والذي يكون توقعه $\mu = 0$ وتباينه $\sigma^2 = 1$ وسنرسم التوزيع لاحقاً، ويمكن إثبات أن المساحة الواقعة تحت المنحنى وبين الخطين K=1 و K=-1 تمثل 68.2% من كل المساحة الواقعة تحت المنحنى، وإن المساحة الواقعة تحت المنحنى بين K=2 و K=-2 تمثل 95.4% من المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى.



ولنفرض أن X متغير عشوائي متصل ينتمي للتوزيع للتوزيع الطبيعي، ويقال عادةً أن X موزع توزيعاً طبيعياً. سوف تحتسب احتمال أن يقع المتغير بين القيمتين a ، b والذي يرمز له $P(a \le X \le b)$ كما يلي. أولاً نغير a ، b إلى وحدات قياسية:

$$b' = \frac{b-\mu}{\sigma} \qquad , \quad a' = \frac{a-\mu}{\sigma}$$

$$P(a \le X \le b) = P(a' \le X \le b')$$

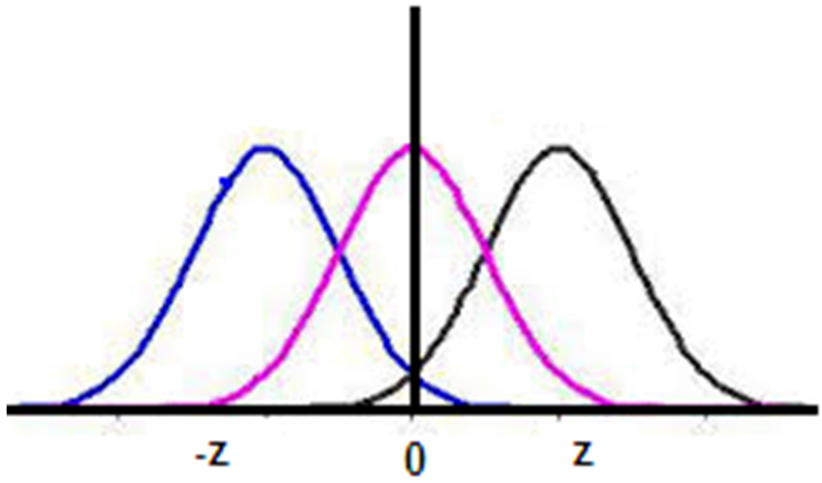
= المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي القياسي من a' ، b'.

العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ذي الحدين – نظرية النهاية المركزية

لابد لنا أولاً من التطرق إلى منطوق نظرية النهاية المركزية التي تؤكد بأن "جميع التوزيعات الاحتمالية سوف تؤول إلى التوزيع الطبيعي كلما إزداد حجم العينة n" ومن الممكن هنا تقريب توزيع ذي الحدين $P(k) = b(k\ ;\ n\ ,\ p)$ تقريباً إلى التوزيع الطبيعي إذا كان n كبيرة ولم تكن أي من pأو q قريبة من الصفر، والجدول التالي يبين القيم الاحتمالية وعند زيادة nمن أن التوزيع ذي الحدين سوف يقترب من التوزيع الطبيعي.

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(k)	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

توزيع ذي الحدين عندما تكون n = 8 ، $p = q = \frac{1}{2}$



- نظرية النهاية المركزية:

نفترض أن .... , $X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3$ متسلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة ولها نفس التوزيع والتوقع μ والتباين σ^2 لنفرض أن:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\,\mu}{\sqrt{n}\ \sigma}$$

فتتحقق لأي فترة $\{a \le X \le b\}$

$$\lim_{n \to \infty} P(a \le Z_n \le b) = P(a \le \phi \le b)$$

حيث ϕ تمثل المتغير الطبيعي القياسي.

والحاقاً بالفرض السابق في نظرية النهاية المركزية لنسمي $\overline{S}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ بمتوسط عينة المتغيرات $X_1 + X_2 + ... + X_n$ أي أن Z_n في الصيغة أعلاه السابقة هو المتوسط القياسي للعينة وبشكل تقريبي فإن نظرية النهاية تنص على أنه في أي متسلسلة من المحاولات المتكررة يقترب متوسط العينة القياسي من المنحنى الطبيعي القياسي كلما زاد عدد المحاولات المكررة.

2-1. خصائص التوزيع الطبيعي

- متماثل ، على شكل جرس
- متواصل لجميع قيم X بين -∞ و ∞ بحيث يكون لكل فاصل بين الأرقام الحقيقية احتمال غير الصفر.
- قيم المتغير العشوائي x تأخذ كل القيم الحقيقية $-\infty \leq X \leq \infty$،
- للتوزيع الطبيعي معلمتان ، μ و σ، حيث تحددان شكل التمثيل البياني له ، ومع تغير القيم لهتين المعلمتين تتشكل عائلة من التوزيعات الطبيعية.
- نرمز بالكتابة $X{\sim}N(\mu\,;\sigma^2)$ أن المتغير X يتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط μ والتباين σ^2؛
- حوالي 3/2 من المساحة الكلية تقع ضمن انحراف معياري واحد عن المتوسط ، أي

$$P\ (\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6826.$$

- حوالي 95٪ من المساحة الكلية تقع بين القيمتين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$

$$P\ (\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544\,;$$

- حوالي 99٪ من الحالات تقع بين القيمتين $\mu - 2.58\sigma$ و $\mu + 2.58\sigma$:

- $p(\mu - 2.58\sigma < x < \mu + 2.58\sigma) = 0.99$;

مثال:

- أطوال الشبان: عندما تسأل 10000 من الشبان عن طولهم تجد أن أطوالهم تتوزع بين 150 إلى 110 سنتيمتر وبمتوسط 72 سنتيمتر. معظم الشبان تجدهم حول الذروة 72 سنتيمتر. وأما الأعداد الصغيرة جدا للطول تجدها عند 150 سنتيمتر و 110 سنتيمتر،
- أيضا عندما تعمل إحصائية بين الناس بين الفقير والغني، تجد أن القمة تمثل أعداد الطبقة المتوسطة، وعن يمينها ويسارها تجد عددا قليلا من الفقراء جدا ومن الأغنياء جدا.
- كذلك توزيع إنجاب الأطفال: تجد أن متوسط عدد الأطفال في الأسرة 3 (قمة التوزيع الجرسي). وإلى أقصى اليمين تجد عدد العائلات التي أنجبت 12 طفلا ، وإلى أقصى اليسار العائلة التي أنجبت طفلا واحدا أو لم تُنجب.

2. التوزيع الطبيعي المعياري

- تعريف التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)

تعريف: نسمي التوزيع الطبيعي المعياري كل توزيع لمتغير عشوائي مستمر بمتوسط 0 وتباين 1 حيث تكون دالة التوزيع من الشكل التالي:

$$\boldsymbol{f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}} \quad -\infty < x < +\infty \;;$$

$$\pi = 3.14 \;;\; Z = \frac{X-\mu}{\sigma};$$

ونكتب $Z \sim N(0\,;1)$

سيكون من الصعب القيام بحساب التفاضل والتكامل في كل مرة اعتمادا على دالة التوزيع للتوزيع الطبيعي العادي وفي كل مرة قيم جديدة للمعلمات لـ μ و σ؛ لذلك نتعامل عادةً مع التوزيع الطبيعي القياسي ، حيث $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ ، أي $Z \sim N(0\,;1)$. بمعنى أنه بدلاً من حل

مشكلة تتعلق بشكل مباشر بمتغير X مع وجود متوسط μ وانحراف معياري σ ، يتم استخدام واعتماد التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة غير مباشرة.

مثال (1): ليكن المتغير العشوائي $x \sim N(3\,;4)$

أحسب الاحتمال الآتي: $p(4 < x < 6)$ ؟

الحل:

هذا المتغير العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3 وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{4} = 2$

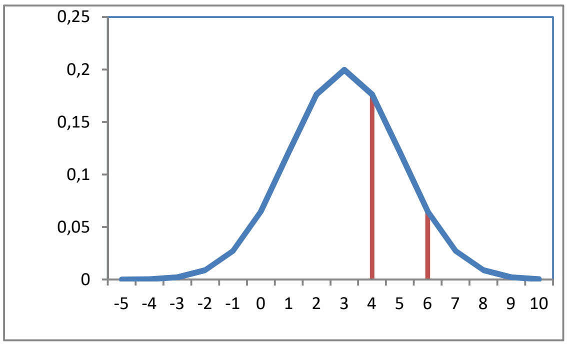
إذن نحول المتغيرات إلى متغيرات معيارية كما يلي: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ؛

$$p(4 < x < 6) = p\left(\frac{4-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = p\left(\frac{4-3}{2} < \frac{x-3}{2} < \frac{6-3}{2}\right) =$$

$$p(0.5 < Z < 1.5) = p(Z < 1.50) - p(Z < 0.50)\ ;$$

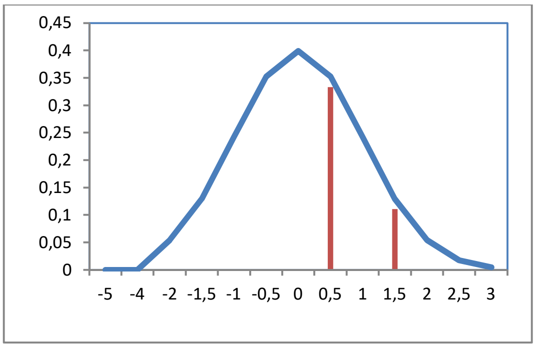
$$= \mathbf{0.9332 - 0.6915 = 0.2417\ ;}$$

التوزيع الطبيعي $X \sim N(3,4)$



$P(4 \le x \le 6)$

التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$



$P(0.5 \le z \le 1.5)$

كيفية الحصول أو استخراج القيمتين الاحتماليتين $p(Z < 1.5);\ p(Z < 0.5)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري: $0.50 = 0.5(ligne) + 0.00(colone);$

$$1.50 = 1.5(ligne) + 0.00(colone)\ ;$$

أمثلة أخرى لاستعمال الجدول أسفله:

1. $p(Z < 1.47) = 0.9292$;

نأخذ القيمة 1.4 من جهة الأسطر و القيمة 0.07 من جهة الأعمدة؛ ونحدد مكان التقاطع؛

نلاحظ إن مجموع القيمتين يساوي 1.47 (حيث أن العمود يبين الرقم الثاني بعد الفاصلة).

$$1.47 = 1.4(ligne) + 0.07(colone)\ ;$$

$2.p(Z < 0.36) = 0.6406.$

$3.p(Z < 0.09) = 0.5359.$

$4.p(Z > 1.47) = 1 - p(Z < 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708.$

$5.p(Z \leq 0.09) = p(Z < 0.09) = 0.5359.$

$6.p(0 < Z < 0.36) = p(Z < 0.36) - p(Z < 0)$;

$= 0.6406 - 0.5 = 0.1406$;

مثال(2): عن كيفية استخراج القيمة الحرجة من الجدول أسفله

أوجد القيمة الحرجة $_1$ في كل حالة من الحالات الآتية:

1. $P(Z < Z_1) = 0.7764$
2. $P(Z < Z_1) = 0.70$
3. $P(Z < Z_1) = 0.95$

الحل: استخراج القيم الحرجة يكون بعد البحث عن القيمة الاحتمالية من داخل الجدول أسفله.

1. $P(Z < Z_1) = 0.7764 \to Z_1 = 0.7\left(\text{السطر}\right) + 0.06\left(\text{العمود}\right); Z_1 = 0.76;$

2. $P(Z < 0.52) = 0.6985; P(Z < 0.53) = 0.7019$;

نلاحظ أن القيمة الاحتمالية 0.70 تقع بين القيمتين الحرجتين 0.52 و 0.53 ومنه: $Z_1 = \frac{052+0.53}{2} = 0.525$.

3. $P(Z < 1.64) = 0.9495; P(Z < 1.65) = 0.9505$;

نلاحظ أن القيمة الاحتمالية 0.95 تقع بين القيمتين الحرجتين 1.64 و 1.65

ومنه:. $Z_1 = \frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$

$\Phi(z) = P(Z \leq z),\ 0 \leq z \leq 3.49,\quad Z \sim N(0,1)$ لتوزيع الطبيعي تا

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

3. التوزيع المنتظم (Uniformdistribution)

يعد هذا التوزيع من التوزيعات البسيطة ذات الأهمية لأنه حالة طبيعية يعكس تصرف كثير من نتائج التجارب وهذا التوزيع يعتمد على توقع حصول المتغير العشوائي على قيم مختلفة في الحيز المتاح له بدرجة احتمالية واحدة فإذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم في الحيز (a,b) فإن دالة الكثافة الاحتمالية له تكون:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad x \in (a,b) \\ 0 & , \quad x \notin (a,b) \end{cases}$$

حيث أن a ، b قيمتان حقيقيتان بحيث أن $a < b$.

مثال: تصل باصات نقل الركاب لمنطقة معينة على التتابع باص بعد باص كل 20 دقيقة بدءاً من الساعة السادسة صباحاً، فيصل أحدها عند الساعة السادسة صباحاً ويصل آخر عند الساعة السادسة والثلث وآخر عند السادسة وأربعين دقيقة وهكذا، فإذا علمت بوصول أحد الركاب لتلك المنطقة خلال أول أربعين دقيقة عمل لتلك الباصات والتي يخضع وقت الوصول فيها للتوزيع المنتظم المستمر. فالمطلوب تحديد احتمال انتظار الشخص الواصل.

- أقل من خمس دقائق ليصل الباص فيصعد فيه.
- أكثر من 15 دقيقة ليصل الباص فيصعد فيه.

الحل:

ليكن X يمثل متغير وقت الوصول خلال أول 40 دقيقة بالمعالم **a = 0 , b = 40** فتكون دالة كثافة الاحتمال التي تمثل X بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{40} \qquad , \qquad 0 < X < 40$$

- إن حادثة انتظار الشخص أقل من 5 دقائق ليصل الباص تعني وصول الشخص إما بين الدقيقة الخامسة عشر والعشرين فيصل أول باص فيصعد فيه، أو أن يصل الشخص بين الدقيقة الخامسة والثلاثين والأربعين فيصل ثاني باص ليصعد فيه، فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = p\,[15 < x < 20] + p\,[35 < x < 40]$$
$$= \int_{15}^{20} \frac{1}{40} dx + \int_{35}^{40} \frac{1}{40} dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

- إن حادثة انتظار الشخص أكثر من 15 دقيقة ليصل الباص فيصعد فيه، تعني وصول الشخص إما في أول خمسة دقائق أو ما بين الدقيقة العشرين والخامسة والعشرين فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = p\,[0 < x < 5] + p\,[20 < x < 25]$$
$$= \int_{0}^{5} \frac{1}{40} dx + \int_{20}^{25} \frac{1}{40} dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

3. التوزيع الأسي (Exponentialdistribution)

يمثل التوزيع الأسي حالة خاصة من توزيع كاما الذي يعتمد بدوره أحد أهم التوزيعات المستمرة وذلك لكثرة التطبيقات والاستخدامات العملية التي يشكل هذا التوزيع الركن الأساسي فيها وخاصة تلك التطبيقات التي يكون الزمن مهم فيها، كتلك الدراسات الخاصة بطول مدة اشتغال معدات ومكائن مصنع معين أو دراسة أزمان العطلات والتوقفات لتلك المعدات والمكائن أو الوقت المستغرق لإنجاز عمل معين أو زمن انتظار عمل معين، وكذلك فإن لهذا التوزيع أهمية خاصة في دراسة المعولية وغيرها من التطبيقات.

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X الذي يتبع كاما هي عبارة عن:

$$f(x)= \frac{e^{-\lambda x}\ \lambda^{n}}{\Gamma n} x^{n-1} \qquad , \quad x \geq 0$$

أما عندما **n = 1** فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X ستدعى بدالة التوزيع الأسي، وتكتب بالشكل:

$$f(x)= \lambda\ e^{-\lambda x} \qquad , \quad x \geq 0$$

مثال: افترض إن طول المكالمة الهاتفية X بالدقائق يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{10}}$

فإذا وصل أحد الأشخاص إلى كشك الهاتف فالمطلوب:

1. ما هو احتمال أن ينتظر أكثر من 10 دقائق؟
2. ما هو احتمال أن ينتظر بين 10 و 20 دقيقة؟

الحل:

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X ستكون بالشكل:

$$f(x)= \frac{1}{10}\ e^{-\frac{x}{10}}$$

$$1. \quad p(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10}\ e^{-\frac{x}{10}}\ dx = -\ e^{-\frac{x}{10}} \Big]_{10}^{\infty} = e^{-1} = 0.368$$

$$2. \quad p(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big]_{10}^{20} = e^{-1} - e^{-2} = 0.233$$

4. توزيع كاما (Gammadistribution)

يعد هذا التوزيع من أكثر التوزيعات المستخدمة في التطبيقات الهندسية مرونة، إذا كان المتغير العشوائي X غير سالب ويتبع توزيع أحادي النمط فالفرصة جيدة في أن يتمكن فرد من توزيع كاما من وصف المتغير قيد الدراسة وصفاً ملائماً. يعطى توزيع كاما:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x \geq 0 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \qquad , \quad \alpha > 0$$

حيث أن $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ قيمة غير سالبة، مع تزايد قيمة α يقترب توزيع كاما من التوزيع الطبيعي أما عندما يكون $\alpha = 1$ فيطابق توزيع كاما مع التوزيع الأسي الذي سبق مناقشته.

بعض من خواص دالة كاما:

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \, \Gamma(\alpha)$
2. إذا كان $\alpha = \frac{1}{2}$ ، $\lambda = \frac{1}{2\alpha^2}$ نحصل على:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

3. بما أن $\Gamma(1) = 1$ وأن X عدد صحيح موجب فإن: $\Gamma(n) = (n-1)!$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت n صحيح موجب فردي فإن:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

تمارين مقترحة

التمرين 01:

حدد فضاء العينة وعدد عناصره في الحالات الآتية:

1. إلقاء قطعة نقود غير متحيزة مرة واحدة
2. إلقاء قطعة نقود غير متحيزة مرتين
3. إلقاء قطعتي نقود غير متحيزتين مرة واحدة
4. عند إلقاء عملة غير متحيزة عدد من المرات حتى نحصل على الصورة مرة واحدة
5. عند سحب كرتين بدون إرجاع من كيس به 5 كرات حمراء و 3 زرقاء و 2 خضراء

التمرين 02:

ألقيت عملة غير متحيزة 3 مرات ، وعرفت الأحداث الآتية كما يلي:

A ظهور الصورة مرتين

B ظهور الصورة مرة واحدة

C ظهور الصورة في الرمية الأولى

أحسب الأحداث الآتية:

- $A \cup B \cup C$. $A \cup B$; $A \cup C$. $B \cup C$
- $A \cap B \cap C$, $A \cap B$; $A \cap C$. $B \cap C$
- $\vec{B}$

التمرين 03:

في رمية واحدة لحجر النرد ما هو احتمال الحصول على 2 أو 3 في رمية واحدة للنرد؟

التمرين 04:

عند سحب ورقة واحدة عشوائياً من مجموعة أوراق لعب مخلوطة خلطاً جيداً، ما هو احتمال الحصول على الحدث بستوني (S) أو الحدث شايب؟

التمرين 05:

ألقيت قطعة غير متحيزة عدد من المرات، وتم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه في كل مرة، النتائج في الجدول الأتي:

الوجه	H	T	الاحتمال
الرمي 500 مرة	260	....	....
الرمي 1000 مرة	....	750	....
الرمي 1500 مرة	800	....	....
الرمي 2000 مرة	....	1050	....

أكمل الجدول وبين نوع وطريقة حساب الاحتمال.

قارن بين الاحتمال النظري الكلاسيكي والاحتمال التجريبي.

أحسب احتمال ظهور الوجه.

التمرين 06:

عند ألقاء زهرة نرد غير متحيزة مرتين، أوجد ما يلي:

- احتمال ظهور وجهين متشابهين
- احتمال ظهور وجهين مجموعهما يساوي 10
- احتمال ظهور وجهين متشابهين أو مجموعهما يساوي 10
- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 أو مجموعهما يساوي 10

التمرين 07: ليكن A , B حدثان من فضاء العينة S حيث :

$P(A)=\frac{1}{4}\ ;\ P(B)=\frac{2}{5}\qquad P(A\cap B)=\frac{3}{20}$ أحسب ما يلي:

1. احتمال تحقق الحادثة A أو B
2. $P(A-B)$ .3 $P(A^c\cap B^c)$

التمرين 08: صندوق يحوي 8 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء، نسحب منه 5 كرات عشوائيا ما هو احتمال أن تكون في العينة 3 كرات بيضاء؟

التمرين 09: ليكن A , B حدثان من فضاء العينة S

- إذا كان : $P(A \cup B) = \frac{85}{100}$ $P(A) = \frac{6}{10}$; $P(B) = \frac{75}{100}$
- إذا كان : $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{4}$ و A , B حدثان مستقلان أحسب $P(A \cup B)$

التمرين 10: ليكن A , B حدثان من فضاء العينة S حيث :

$P(A \cup B) = \frac{28}{60}$ $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ أحسب ما يلي:

$P(A|B)$; $P((A \cap B)|B)$; $P((A^c \cap B)|(A^c \cup B))$

التمرين 11: نقذف حجري نرد متماثلين ، أحسب الاحتمال P كي يكون المجموع الذي نحصل عليه أكبر أو يساوي 10 علما أن :

1. الحجر الأول أعطانا الرقم 5.
2. على الأقل أحد الحجرين أعطانا الرقم 5.

التمرين 12: تقدمت إحدى الشركات لمناقصتين ، فكان احتمال الحصول على المناقصة A هو $\frac{6}{10}$ و احتمال الحصول على المناقصة B هو $\frac{3}{10}$ و احتمال الحصول على المناقصة A أو B هو $\frac{8}{10}$

ما هو احتمال الحصول على المناقصة A أو B ؟

التمرين 13: في إحدى مصانع المصابيح الكهربائية ، إذا كانت الآلات M_1 و M_2 و M_3 تقوم بإنتاج ما نسبته 30 % ، 30 % ، 40 % من مجموع الإنتاج اليومي على الترتيب، مع العلم أن 1 % ، 3 % ، 2 % من الإنتاج اليومي معيب على الترتيب.

نسحب مصباحا كهربائيا واحدا عشوائيا من إنتاج احد الأيام وجد أنه معيب،

4. ما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج الآلة M_1 ؟
5. ما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج الآلة M_2 ؟

6. ما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج الآلة M_3 ؟

التمرين 14: ليكن x متغير عشوائي يمثل دالة كثافة الاحتمال :

$f(x) = a\ C_5^x$ حيث a ثابت، x=1, 2,3, 4.5

أحسب قيمة الثابت a,

التمرين 15: إذا كان x متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير في مدينة ما ، و دالة كثافة احتماله على الشكل التالي: (حيث c قيمة ثابتة)

X=x	0	1	2	3	4	5
f(x)=P(X=x)	4c	3c	2c	c	1.5c	0.5c

- أحسب قيمة الثابت c,
- أحسب: $P(0 < x < 2)$ ، $P(0 < x \leq 4)$ ، $P(x < 4)$.
- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي,

التمرين 16: ليكن x متغير عشوائي يمثل دالة كثافة الاحتمال:

$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}$ حيث $0 \leq x \leq 2$ أحسب ما يلي:

$\mathrm{P}(0 < x < 1.5)$; $\mathrm{P}(\mathrm{x} < 0{,}75)$; $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 1{,}5)$; $\mathrm{P}(0{,}5 < x < 1.5)$

التمرين 17: ليكن x متغير عشوائي يمثل دالة كثافة الاحتمال :

$\mathrm{f(x)} = \frac{2-\mathrm{x}}{2}$ ، $0 < x < 2$

أوجد مايلي: ; $\mathrm{P}(\mathrm{x} < 0{,}3)$; $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 1{,}5)$; $\mathrm{P}(0{,}5 < x < 1)$
$\mathrm{P}(0 < x < 2)$

التمرين 18: دولاب عليه ثلاثة أرقام هي 2 ، 3 ، 4 إذا أدرنا الدولاب مرتين يؤشر المؤشر على أحد الأرقام الثلاثة في كل مرة، وإذا افترضنا أن x تمثل مجموع الرقمين الناتجين.

احصر النتائج الممكنة ، وأوجد التوزيع الاحتمالي لـ x .

التمرين 19: إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف و ن على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) \ , & 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

المطلوب:

1- حساب قيمة الثابت c

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (8,5) ألف و ن خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟

4- أوجد دالة التوزيع التجميعي ، ثم استخدم هذه الدالة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف و ن.

التمرين 20:

إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد العملاء عبوتين، والمطلوب:

1- كون فراغ العينة.

2- إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X = 1)$ ، $P(X \leq 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \leq 1.5)$

التمرين 21:

أوجد احتمال الحصول على 4 صور في 6 رميات لعملة متوازنة (باستخدام توزيع ذي الحدين) ثم أوجد عدد الصور المتوقع في ستة رميات. والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لست رميات.

التمرين 22:

يتلقى مركز شرطة في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، أوجد احتمال تلقي مكالمتين في ساعة مختارة عشوائياً (باستخدام توزيع بواسون).

التمرين 23:

افترض أن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي حيث أن $\boldsymbol{{}^{2} = 4, \mu = 10}$ أوجد احتمال أن يأخذ قيمة بين 8 و 12.

التمرين 24:

افترض أن X متغير عشوائي موزع طبقاً للتوزيع الطبيعي حيث $\boldsymbol{{}^{2} = 4, \mu = 10}$ أوجد احتمال أن X يأخذ قيمة بين 7 و 14.

التمرين 25:

ما هو احتمال تضخم I أو كساد R، إذا كان احتمال التضخم 0.3 واحتمال الكساد 0.2 واحتمال التضخم والكساد 0.06؟

التمرين 26:

ما هو احتمال سحب آس، سباني أو ديناري عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب؟

التمرين 27:

تشير الخبرة السابقة إلى أنه في المتوسط يتوقف 6 زبائن للتزود بالبنزين عند مزود البنزين كل ساعة، ما هو احتمال:

(أ) توقف 3 زبائن في ساعة ما؟

(ب) توقف 3 زبائن أو أقل في ساعة ما؟

(ج) ما هي القيمة المتوقعة والإنحراف المعياري لهذا التوزيع.

التمرين 28: في تجربة عشوائية نرمي زهرتي نرد متزنتين، وليكن x المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الوجهين.

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.

ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X\leq 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\leq 1.5)$

التمرين 29: في تجربة عشوائية نقوم برمي ثلاث قطع نقدية متوازنة ، نعتبر أن المتغير العشوائي x هو الذي يمثل عدد الأوجه.

- أوجد دالة كثافة الاحتمال.
- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية (الدالة التجميعية)

التمرين 30: إذا كانت احتمالات أن يوجد شخص واحد أو اثنين أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 في الطابق الأول للطائرة هي: 0,05 ، 0,43 ، 0,27 ، 0,12 ، 0,09 ، 0,04 على الترتيب.

ما هو عدد الأشخاص المتوقع وجودهم في الطابق الأول للطائرة؟

<u>التمرين 31</u>: إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مستقلين x و y كثافة احتمالهما كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 12x^2(1-x); & 0 \le x \le 1 \\ f(y) = 2y\,; & 0 \le y \le 1 \end{cases};$$

أحسب ما يلي: $E(x)$ ، $E(y)$ ، $E(\frac{y}{x^2})$ ، $E(\frac{y}{x})$ ، $E(\frac{1}{y})$

<u>التمرين 32</u>: إذا كان لدينا x متغير عشوائي وسطه الحسابي يساوي 10، وتباينه يساوي 6 .

أحسب : - $E(x^2+3x)$ ، $E(2x+3)$ ، $E(2x)$ ، $E(\frac{x}{2})$

- $var(1+3x)$ ، $var(1-3x)$ ، $var(3+x)$ ، $var(x-6)$

<u>التمرين 33</u>: إليك الجدول التالي الذي يبين التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات المباعة من قبل إحدى الشركات خلال شهر:

عدد السيارات	0	10	20	30	40
الاحتمال	0,01	0,05	0,39	0,45	0,10

- أحسب μ_x متوسط عدد السيارات المباعة خلال شهر.
- أحسب var_x تباين عدد السيارات المباعة خلال شهر.

<u>التمرين 34</u>: يبين الجدول الآتي قيم المتغير العشوائي x والاحتمالات المقابلة لها:

X=x	2	4	6	8	10
P(X=x)	0,13	0,27	0,39	0,21	0,07

- أحسب التوقع (الأمل الرياضي) للمتغير العشوائي x,
- أحسب التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي x.

التمرين 35: إذا كان المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد الأخطاء المطبعية في صفحة وأن:

$$f(0) = 0.9\ ,\ f(1) = 0.05\ ,\ f(2) = 0.05\ ,\ f(3) = 0.02.$$

أحسب عدد الأخطاء المتوقعة في 200 صفحة.

التمرين 36: أثبت أن:

$$V(x) = E(X^2) - (E(X))^2\ ;$$

التمرين 37: في تجربة عشوائية تم إلقاء قطعة نقود غير متحيزة 3 مرات، وإذا كان x المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة في كل مرة، أحسب ما يلي:

- الأمل الرياضي $E(x)$ ؛
- قيمة التباين $Var(x)$ ثم الانحراف المعياري.

التمرين 38: ليكن x المتغير العشوائي الذي دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\ , & 0 < x < 2 \\ 0 & other\ wise \end{cases}\ ;$$

أحسب ما يلي:

- الأمل الرياضي $E(x)$ ؛
- قيمة التباين $Var(x)$ ثم الانحراف المعياري.
-

التمرين 39: ليكن Z المتغير العشوائي الذي دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$; f(y) = \frac{5-y}{10}\ ,\ \ y = 1,2\ ,3,4,$$

- ما نوع المتغير العشوائي y ؟
- أثبت أن $f(y)$ تمثل دالة كثافة احتمال؟
- أوجد دالة التوزيع التراكمية؟
- ارسم التمثيل البياني للدالتين $f(y)$ و $F(y)$.

<u>التمرين 40</u>: صندوق يحتوي على 20 مصباح كهربائي منها 05 تالفة، نسحب منها 04 مصابيح بطريقة عشوائية مع الإعادة, -أحسب احتمال الحصول على مصباح واحد تالف.

-أحسب احتمال الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل.

<u>التمرين 41</u>: نرمي حجر نرد متوازن سبع مرات، نفترض أن حالة النجاح هي التي تصادف ظهور الرقم 5 أو 6 مرة واحدة وهي التي تمثل المتغير العشوائي x،

أحسب احتمال الحصول على الرقم 5 أو 6 مرة واحدة.

أحسب $p(x = 3)$ ، $p(x \geq 1)$

<u>التمرين 42</u>: ليكن عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها شخص في فترة زمنية محددة هو 1.8 في الدقيقة، المطلوب:

- احتمال عدم وجود أي مكالمة هاتفية.
- احتمال وجود مكالمة هاتفية واحدة.
- احتمال وجود مكالمتين هاتفيتين.
- احتمال وجود 3 مكالمات هاتفية على الأقل.

<u>التمرين 43</u>: إذا كان متوسط عدد الحوادث المتعلقة بالعمل في مصنع ما هو 04 حوادث شهريا.

- ما هو احتمال أن لا يقع أي حادث في شهر معين.

- ما هو احتمال أن تقع 3 حوادث على الأكثر في شهر معين.

<u>التمرين 44:</u> إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60، إذا تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض. إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين المستجيبين (حالات الشفاء) لهذا العقار. المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير؟
2. اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.
3. احسب الاحتمالات التالية:
   - ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟
   - ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
   - ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟
4. احسب الأمل الرياضي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

<u>التمرين 45:</u>

نفترض أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2. اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.
3. احسب الاحتمالات التالية:
   - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
   - احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
   - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
4. احسب الأمل الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

المراجع:

1. دومينيك سالفاتور 1982 ، سلسلة شوم نظريات ومسائل في **الإحصاء والاقتصاد القياسي**، الدار الدولية للنشر والتوزيع،مصر.
2. عزام صبري 2006؛ **الاحصاء الوصفي ونظام SPSS** ، الطبعة الأولى، علم الكتب الحديث، اربد الأردن.
3. محمد عبد العال النعيمي وحسين ياسين طعمة (2008) ، الإحصاء التطبيقي،، الطبعة 1، دار وائل للنشر للتوزيع، عمان الأردن.
4. موساوي عبد النور(2010)، وبركان يوسف، الإحصاء 2 Statistique، دار العلوم، عنابة الجزائر.
5. سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، (2010) **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، ط 2، دار المسيرة- الأردن.
6. أموري هادي كاظم، وخالد ضاري الطائي, وعبد المنعم كاظم الشكري(2013)، **الإحصاء التطبيقى أسلوب تحليلي باستخدام SPSS**، الطبعة الأولى، الذاكرة للنشر والتوزيع، عمان, الأردن.
7. صالح رشيد بطارسة(2014)، الإحصاء والاحتمالات، الطبعة 1، دار أسامة، عمان الأردن.
8. نبيل جمعة صالح النجار(2015)، **الإحصاء التحليلي مع تطبيقات برمجية SPSS**، الطبعة 1 ، دار الحامد ، عمان الأردن.
9. شفيق العتوم (2015)، **طرق الإحصاء باستخدام SPSS**، د ط، دار الحامد ، عمان الأردن.
10. ملاح الدين حسين الهيتي(2015)، الأساليب الإحصائية في العلوم الإدارية تطبيقات باستخدام **SPSS**، ط 2 ، دار وائل للنشر للتوزيع، عمان الأردن.

11. خالد زهدي خواجة، أساسيات الاحتمالات، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية، عمان المملكة الهاشمية الأردنية.

المراجع الأجنبية:

12. Gilbert Saporta, 2006, **probabilités analyse des données et statistique**, , 2e édition, Editions Teclmip. Paris,

13. Sophie Gaultier Gailard, **Statistique Cours et Exercices** , Editions Archétype 82, parution 4e trimestre 2011, Nouvelle édition 2011-2012,

14. Thérèse Phan , Jean-Pierre Rowenczyk 2012; **Exercices et problèmes de statistique et probabilités**, 2e édition, Dunod, Paris.

الملاحق:

$$\Phi(z) = p(Z \le z); -3.49 \le z \le 0; z \to N(0,1)$$

التوزيع
الطبيعي

Z	0.00	0,01	0.02	0.03	0.04	0.05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

تابع جدول التوزيع الطبيعي

$\Phi(z) = p(Z \leq z); 0 \leq z \leq 3.49; z \to N(0,1)$

التوزيع الطبيعي

Z	0.00	0,01	0.02	0.03	0.04	0.05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

$$\Phi(z) = p(0 \le Z \le z); 0 \le z \le 3.49; z \to N(0,1)$$

التوزيع الطبيعي

(النصف الثاني للمنحنى فقط)

Z	0.00	0,01	0.02	0.03	0.04	0.05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990