



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi –Tébessa
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
Mémoire de Fin d'Etudes

Présenté en vue de l'obtention du diplôme du master

Option : construction Mécanique

Thème

Analyse Théorique et une Potence 'Numérique d d'Atelier

Les membres du jury :

Présenté par :

MERABTI CHAIMA

Younes Ramadan :	MCA	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi	Président
Hadjab Abdelhakim :	MAA	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi	Encadreur
Malim Madani :	MAA	Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi	Examinateur

Promotion : 2023/ 2024

Remerciments

Premièrement, on remercie « Allah » le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je remercie également mes parents, frères et ma sœur pour leur soutien durant mes études. A

tous mes collègues, amis, et tous ceux qui nous ont aidés et soutenus de près ou de loin.

Je voudrais dans un premier temps à remercier mon encadrant Mr. **Hadjab Abdelhakim**,

pour sa confiance et pour avoir accepté de nous encadrer.

Je remercie les membres du jury qui ont supervisé l'évaluation de ce travail Mr. **Younes**

Ramadan et Mr. **Malim Madani**.

Je désire remercier les enseignants et toute l'équipe pédagogique de notre département, qui

nous ont fourni les outils nécessaires à la réussite de nos études universitaires.

Je remercie aussi toute la promo du master-construction mécanique (2023-2024) et je souhaite

à mes collègues une bonne chance dans leurs vies professionnelles

Nomenclature

$u(x)$: Déplacement nodal

$N(x)$: Fonction de forme

$\varepsilon(x)$: Déformation

$\{d\}$: Vecteur déplacements nodaux

U : L'énergie de déformation

P : Le travail extérieur

$\langle \delta u \rangle$: Vecteur des déplacements virtuels nodaux

$\{f\}$: Le vecteur des forces nodales

$[K]$: Matrice de rigidité

M : Moment fléchissant

w : Déplacement transversal

u : Déplacement longitudinale

Liste des figures

Figure 1.1. Les Types classique des éléments de maillage	08
Figure1.2. Traction d'une barre soumise à une force distribuée et une force concentrée.....	08
Figure 1.3. Comportement de l'élément fini poutre.....	11
Figure . 2.1. Potence autoportante potence à fleche.....	16
Figure . 2.2. Potences murales a) avec biellette de maintien b) en porte-à-faux.....	18
Figure . 2.3. Potence pivotante.....	18
Figure .2.4 Construction du modèle à partir des lignes moyennes.....	20
Figure .2.5 Modèle en éléments poutres avec conditions d'appui et de chargement.....	20
Figure 2.6 Orientation des éléments poutre dans le plan X Y.....	23
Figure 3.1. Mouvement transversal et longitudinal du système.	35
Figure 3.2. (a) Compatibilité de déplacement, (b) Compatibilité de force.	37
Figure 4.1 Modèle SOLIDWORKS de la potence.....	43

Sommaire

1.Introduction Générale.....	02
-------------------------------------	-----------

Chapitre I : Généralité sur la méthode des éléments finis

1.1 Introduction	04
1-2 Présentation de la méthode des éléments finis.....	04
1-3 principe de la méthode des éléments finis.....	04
1-4 Domaine d'application des éléments finis	05
1.5. Pour quoi la mécanique des éléments finis	06
1.6. Les outils de MEF.....	06
1.7. Etapes de résolution d'un problème en éléments finis	06
1.8. Les Types des éléments	07
1.9. Elément Barre	08
1.10. Matrice de rigidité	09
1.11.Elément poutre	11

Chapitre II : Analyse statique par éléments finis de la potence

II.1 Introduction.....	16
II.2 Historique de la potence	16
II.3 Types de potences	17
II.3.1 Potence autoportante à fleche.....	17

II.3.2 Potence murale	17
II.3.3 Potence pivotante.....	18
II.4 Objectifs de l'étude statique par éléments finis	19
II.5 Propriétés géométriques des éléments poutres	21
II.5.1. Matrices de passage	22
II.6. Assemblage des 3 matrices de raideur élémentaire	26
II.7 Résolution du système linéaire	27
II.8. Application numérique	29
II.8.1 calcul des déplacements.....	29
II.8.2 Calcul des forces.....	30

Chapitre III : Analyse modale des poutres en flexion

III.1 Introduction	32
III.2 Vibrations transversales d'une poutre.	32
III.2.1 Théorie d'Euler - Bernoulli des poutres.....	32
III.2.2 Résultats pour certaines configurations standard.....	33
III.2 Modélisation d'une potence en tant que structure à ossature.....	35
III.3 Les conditions aux limites de compatibilité	35
III.4 Calcul des fréquences naturelles.....	37

Chapitre IV : Simulation statique et modale de la potence sous

SOLIDWORKS

IV.1 Simulation statique de la potence.....	43
IV.1.1 Informations sur le modèle.....	43
IV.1.2 Propriétés de l'étude.....	44
IV.1.3 Propriétés du matériau.....	44
IV.1.4 Informations sur le maillage.....	45
IV.1.5 Résultats de l'étude.....	48
IV.2 Simulation modale de la potence.....	51
IV.3 Comparaison avec les résultats théoriques.....	57
V. CONCLUSION.....	59
Référence bibliographique.....	61

ملخص

الرافعات الجيبية هي آلات صناعية ضرورية لرفع الأحمال الكبيرة. ولذلك فمن الضروري عند تصميم هذه الرافعات التأكد من قوة عارضات هذه الآلة. ولهذا الغرض تم دراسة السلوك السكوني والنمطي بطريقتين: تحليل العناصر المحدودة (FEM)، والمحاكاة باستخدام برنامج **SOLIDWORKS**. أتاحت لنا الدراسة الساكنة الحصول على صلابة العارضات والهيكل والإزاحات والاجهادات. التحليل النمطي هو تقنية لتحديد الخصائص الديناميكية للهياكل، وهي عملية يتم من خلالها تحديد الترددات الطبيعية وانماط التشوهات للهياكل بسهولة نسبية. ويلاحظ وجود علاقة جيدة بين **FEM** والنتائج التحليلية.

Summary

Jib cranes are industrial machines necessary for lifting large loads. Therefore, it is necessary when designing these jibs to ensure the strength of the beams of this machine. For this, a study of static and modal behavior carried out by two methods: finite element analysis (FEM), and by simulation using **SOLIDWORKS** software. The static study allowed us to obtain the rigidities of the beams and structure, the displacements and the stresses. Modal analysis is the technique for determining the dynamic characteristics of structures, it is a process by which the natural frequencies and modal deformations of structures are determined with relative ease. A good correlation between the FEM and the analytical results is observed.

Résumé

Les potences sont des machines industrielles nécessaires pour soulever des charges importantes. Par conséquent, il est nécessaire lors de la conception de ces potences d'assurer la résistance des poutres de cette machine. Pour cela une étude du comportement statique et modale réalisée par deux méthodes : analytique par éléments finis (FEM), et par simulation en utilisant le logiciel **SOLIDWORKS**. L'étude statique nous a permis d'obtenir les rigidités des poutres et de structure, les déplacements et les contraintes. L'analyse modale est la technique pour déterminer les caractéristiques dynamiques des structures, c'est un processus par lequel les fréquences naturelles et les déformes modales des structures sont déterminés avec une relative facilitée. Une bonne corrélation entre le FEM et les résultats analytique est observée

Introduction Générale

1.Introduction Générale

L'analyse théorique et numérique d'une potence d'atelier est essentielle pour garantir sa performance et sa sécurité dans les environnements industriels et de maintenance. Cette analyse repose sur des principes de mécanique classique et de résistance des matériaux pour modéliser les comportements statiques et dynamiques, ainsi que sur des méthodes numériques, notamment le calcul par éléments finis (MEF), pour simuler et optimiser la conception. Les approches théoriques incluent l'étude des forces, des moments de la flexion et de la compression. Les simulations numériques permettent de créer des modèles 3D détaillés, d'appliquer des charges et d'optimiser les paramètres de conception pour améliorer la performance et minimiser les coûts.

L'objectif principal est de concevoir une potence d'atelier sûre, fiable et conforme aux normes, en identifiant les points faibles, en améliorant la conception et en validant les modèles théoriques et numériques par rapport aux comportements réels observés. Cette approche intégrée assure la sécurité et l'efficacité des opérations de levage, contribuant ainsi à la prévention des accidents et à l'optimisation des opérations industrielles.

Le travail a été réparti en 4 chapitres :

Le 1^{er} chapitre est une recherche bibliographique sur la méthode des éléments finis, et spécialement les éléments finis poutre constituant la potence.

Le 2^{ème} chapitre est une analyse statique par élément finis de potence étudiée.

Le 3^{ème} chapitre est consacré pour l'analyse modale des poutres en flexion.

Le dernier chapitre est une simulation numérique de la potence à l'aide de SOLIDWORKS.

Chapitre I : Généralité sur la méthode des éléments finis

1.1 Introduction :

Effectivement, le développement d'un modèle mathématique pour analyser un phénomène naturel ou un problème d'ingénierie repose souvent sur des postulats de basse et des hypothèses simplificatrices. Ces éléments conduisent généralement à des équations différentielles, auxquelles des conditions aux limites sont ajoutées pour décrire de manière fiable le problème en question.

1.2 Présentation de la méthode des éléments finis :

La résolution analytique des problèmes mécaniques à ses limites, mais les méthodes numériques, en particulier la méthode des éléments finis, offrent une alternative efficace pour aborder des problèmes complexes de géométrie variée. Grâce aux capacités actuelles des ordinateurs et aux outils de simulation, sa mise en œuvre est devenue accessible, élargissant ainsi son champ d'application. La force de cette méthode réside dans sa capacité à traiter divers problèmes en utilisant des techniques numériques les plus puissantes et flexibles. [1]

1.3 principe de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous-domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des Polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments. [1]

Etape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites : La plupart des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivés partiels avec des conditions aux limites sur un domaine et son contour. La méthode des éléments finis nécessite une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites

Etape 2 : Division du domaine en sous-domaines :

La préparation des données géométrique qui consiste à diviser le domaine en sous-domaines et à calculer les connectivités et les coordonnées de chaque élément. Cette étape est importante pour la discrétisation du domaine et permet une meilleure compréhension de sa structure

Etape 3 : Approximation sur un élément :

A approximer les variables telles que le déplacement. La pression et la température dans chaque élément par une fonction linéaire ou polynomiale. Le degré du polynôme est lié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée pour cette étape, qui implique également la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites :

Le processus de modélisation numérique, qui consiste à assembler et appliquer les conditions aux limites. Les propriétés de l'élément, telles que la masse et la rigidité, sont rassemblées pour valeurs nodales des variables physiques. Les connectivités calculées sont utilisées à ce stade pour lier les éléments entre eux.

Etape 5 : Résolution du système global :

Le système global qui peut être linéaire ou non linéaire .il peut être utilisé pour résoudre un problème d'équilibre statique ou un problème de valeurs critiques. et la détermination des valeurs et vecteurs propres d'un système physique, qui correspondent généralement aux fréquence et modes propres .il aborde également un problème de propagation dans la cas transitoire ,ou il faut déterminer les variations dans le temps des variables physique et la propagation d'une valeur initiale .les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus courantes pour résoudre ce problème , telles que la méthode des différences finies centrales , la méthode de New mark et la méthodes de Wilson. Enfin, il est souligné que ces méthodes doivent être associées à des techniques d'itération. [2]

1.4 Domaine d'application des éléments finis :

- a) Analyse des structures

- b) La mécanique des milieux continus solides.
- c) La mécanique des milieux continus fluides.
- d) Transfert de chaleur.
- e) La combustion
- f) Ecoulements sous terrains
- g) Diffusion des polluants
- h) L'électromagnétisme et l'électrostatique[3].

1.5. Pour quoi la mécanique des éléments finis :

La MEF est l'une des méthodes les plus utilisées par les ingénieurs de tous les domaines avec des avantages suivants :

- Permet de vérifier l'adéquation de produits numériquement avant même leur construction.
- Possibilité de représenter facilement des domaines de forme géométrique compliquée et de traiter de façon consistante les conditions aux limites.

1.6. Les outils de MEF :

- Méthode Analytique
- RDM 6
- RDM 7

1.7. Etapes de résolution d'un problème en éléments finis :

La méthode des éléments finis nécessite plusieurs étapes pour être appliquée :

- a) La discrétisation du milieu.
- b) Le choix des fonctions d'interpolation.
- c) La détermination des caractéristiques élémentaires des éléments.
- d) L'assemblage des équations élémentaires.
- e) L'introduction des conditions aux limites.

- f) La résolution du système d'équation global pour déterminer le vecteur des inconnus d .
- g) Calcul des résultats additionnels tels que les contraintes, déformations, réactions. [4]

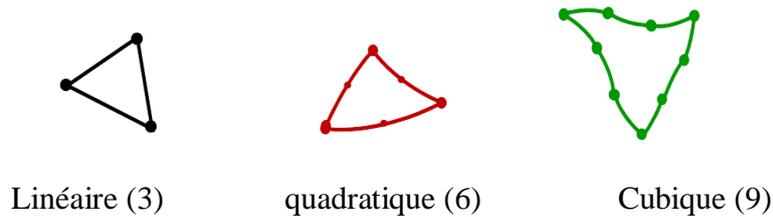
1.8. Les Types des éléments :

Il Existe plusieurs formes d'éléments classiques qui correspondent à des domaines à une deux ou trois dimensions. Chaque type d'élément est identifié par un nom précisant sa forme et le nombre de nœuds géométrique qui le composent.

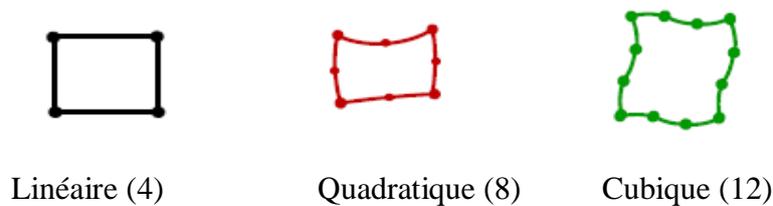
- *Eléments à une dimension*



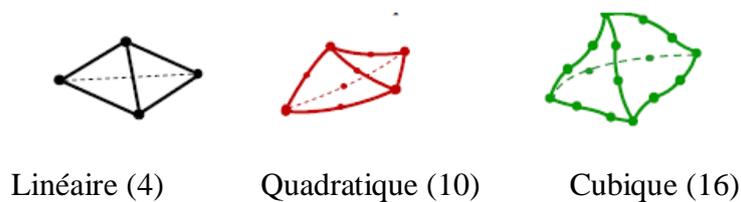
- *Eléments à deux dimensions triangulaires*



- *Eléments à deux dimensions quadrangulaires*



- *Eléments à trois dimensions tétraédriques :*



- *Eléments à trois dimensions hexaédriques (briques)*

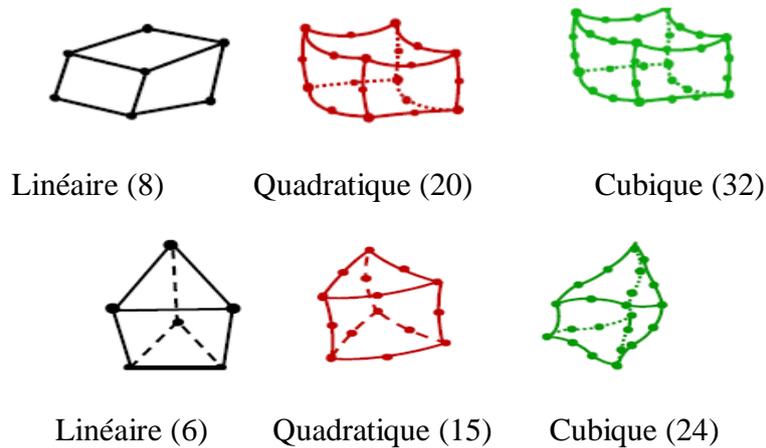


Figure 1.1 les Types classique des éléments de maillage

1.9. Élément Barre :

1.9.1. Introduction :

L'élément barre qui est l'un des éléments de structure le plus simple est le plus utilisés dans les structures en treillis. L'élément barre ne prend que des forces axiales et ne se déforme que dans sa direction axiale. La section transversale de la barre peut être arbitraire, mais doit être beaucoup plus petite que celle dans la direction axiale. Des équations d'éléments finis pour de tels élément seront développée dans ce chapitre, et l'élément développée est communément appelé élément de barre. Les éléments de barre sont applicables pour l'analyse du type treillis à la fois dans les plans bidimensionnels et dans l'espace tridimensionnel. Les concepts procédures et formulations trouvé dans de nombreux manuels. [5]

1.9.2. Les caractéristiques d'un élément barre :

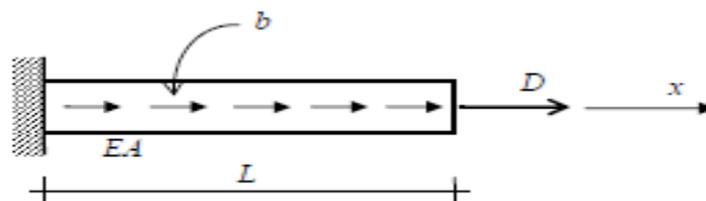


Figure 1.2 Traction d'une barre soumise à une force distribuée et une force concentrée

1. Longueur (L)

2. Section (A)

3. Rigidité (E)

1.10. Matrice de rigidité :

1.10.1. Déformation :

Les fonctions de forme : pour l'élément barre à deux nœuds, la seule possible variation des champs des déplacements est linéaire. Alors nous allons interpoler la valeur de $u(x)$ à partir des valeurs de déplacements nodaux u_1 et u_2

$$u(x) = \langle N \rangle \{d\} = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2 \quad (1.1)$$

$$N_1 = \frac{L-x}{L} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

$$u(x) = \frac{L-x}{L} u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

$$u(x) = \langle \frac{L-x}{L} \quad \frac{x}{L} \rangle \{U_1 \ U_2\}^T = \langle N \rangle \{u\} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{d}{dx} u(x) = \left[\frac{d}{dx} \langle N \rangle \right] \{u\} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \{u\} \quad (1.3)$$

$$\text{Finalement} \quad \varepsilon(x) = \langle B \rangle \{u\} = \langle u \rangle \{B\} \quad (1.4)$$

$$\text{Ou} \quad \langle B \rangle = \frac{d}{dx} \langle N \rangle \quad (1.5)$$

Est appelé la matrice Déformation – Déplacement

1.10.2. Principe de l'énergie potentielle minimum pour dé

L'énergie de déformation

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon^t E \varepsilon A dx \quad (1.6)$$

Le travail extérieur

$$P = \int_0^L b(x) u(x) dx \quad (1.7)$$

L'application du principe de l'énergie potentielle minimum à la barre[6].

$$\delta\Pi = \delta U - \delta P = 0$$

Avec

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon E \delta \varepsilon + \delta \varepsilon E \varepsilon] A dx = \int_0^L \varepsilon E \delta \varepsilon A dx$$

Et

$$\delta P = \int_0^L b(x) \delta u(x) dx$$

Donc,

$$\int_0^L \varepsilon E \delta \varepsilon A dx = \int_0^L b(x) \delta u(x) dx \quad (1.8)$$

La substitution de (1.6) dans (1.8) donne

$$\langle \delta u \rangle \int_0^L \{B\} E A \langle B \rangle \{U\} dx = \langle \delta u \rangle \int_0^L b(x) \{N\} dx$$

Où $\langle \delta u \rangle$ est le vecteur des déplacements virtuels nodaux

Donc

$$\int_0^L \{B\} E A \langle B \rangle dx \cdot \{u\} = \int_0^L b(x) \{N\} dx \quad (1.9)$$

Cela peut être écrit $[K] \{u\} = \{f\}$ (1.10)

Où $[K] = \int_0^L \{B\} E A \langle B \rangle dx$ est la matrice de rigidité élémentaire. (1.11)

Le vecteur des force nodales $\{f\} = \int_0^L b(x) \{N\} dx$ (1.12)

$\{u\}$ est le vecteur de déplacement nodaux ;

Le vecteur force représente les forces nodales dues aux charges agissantes, sur l'élément.

1.10.3 Matrice de rigidité de l'élément barre

$$[K] = \int_0^L E A \left\{ \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\}^T \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle dx = \int_0^L E A \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^L dx$$

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

1.10.4. Vecteur force : dans le cas où $b(x)$ est constante on pose $b(x) = b_x$

$$\{f\} = \int_0^L b_x \left\{ \frac{L-x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\}^T dx = b_x \left\{ \int_0^L \frac{L-x}{L} dx \quad \int_0^L \frac{x}{L} dx \right\}$$

$$\{f_1 \ f_2\}^T = b_x \left\{ \frac{L}{2} \ \frac{L}{2} \right\}^T \quad (1.14)$$

1.11. Elément poutre :

1.11.1. Introduction :

Etudier le comportement élastique d'une structure du type potence en utilisant la méthode éléments finis poutres. Afin de bien s'imprégner de toutes les étapes la démarche (modélisation, définition de l'élément fini, données, assemblage des matrices de raideur, calcul, exploitation des résultats) cette étude est traitée "littéralement" sans utilisation d'un code calcul.

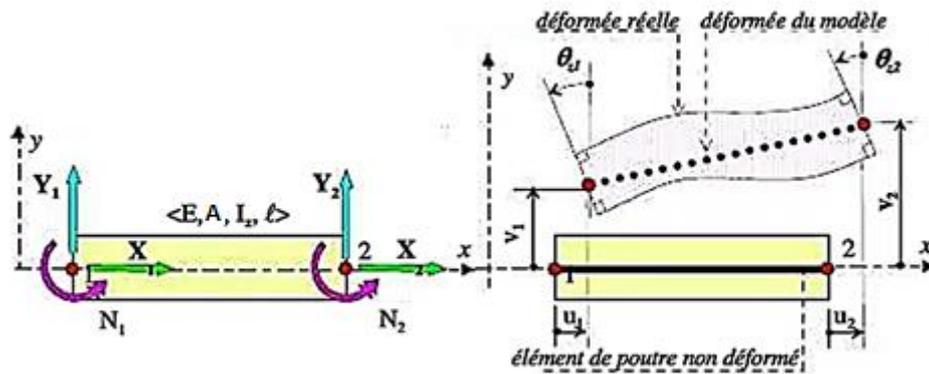


Figure. 1.3 comportement de l'élément fini poutre

1.11.2. Détermination de la matrice de rigidité de l'élément poutre :

1.11.2.1. Energie de déformation :

D'après le comportement mécanique de la poutre, on peut donner l'énergie de déformation interne suivante :

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \int_A \sigma_{xx} dA + \frac{d\theta}{dx} \int_A y \sigma_{xx} dA \right) dx \quad (1.15)$$

Sachant : $\varepsilon = \frac{du}{dx} ; \quad \chi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$ (1.16)

$$U_{int} = \frac{1}{2} \left[\int_0^L (\varepsilon \int_A \sigma_{xx} dA) dx + \chi \left(\int_A y \sigma_{xx} dA \right) \right] \quad (1.17)$$

Sachant aussi que :

$$M = EIy'' = EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad (1.18)$$

$$\int_0^L (\chi \int_A y \sigma_{xx} A) dx = \int_0^L (\chi M) dx \quad (1.19)$$

Donc :

$$\int_0^L (\chi \int_A y \sigma_{xx} A) dx = \int_0^L (\chi \cdot EI \cdot \chi) dx \quad (1.20)$$

$$\int_0^L (\chi \cdot EI \cdot \chi) dx = \int_0^L (dx \langle B \rangle \{v_n\} EI \cdot \langle B \rangle \{v_n\}) dx = \int_0^L (\langle v_n \rangle \{B\} EI \cdot \langle B \rangle \{v_n\}) dx \quad (1.21)$$

$$\text{Avec } \langle B \rangle = \frac{d^2}{dx^2} \langle N \rangle \quad (1.22 \text{ a})$$

Avec $\langle N \rangle$ vecteur des fonctions de formes

$$\langle N \rangle = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \rangle = \langle 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \rangle \quad (1.22 \text{ b})$$

$$\text{Et} \quad \langle B \rangle = \langle -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad ; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad \frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \rangle \quad (1.22 \text{ c})$$

$$\int_0^L (\langle v_n \rangle \{B\} EI \cdot \langle B \rangle \{v_n\}) dx = \langle v_n \rangle (\int_0^L \{B\} EI \cdot \langle B \rangle dx) \{v_n\} = \langle v_n \rangle [k] \{v_n\} \quad (1.23)$$

Donc, l'approche générale pour la détermination de la matrice de rigidité de l'élément est,

$$[K] = \int_0^L \{B\} \cdot EI \cdot \langle B \rangle dx \quad (1.24)$$

La déformation de la poutre est donnée comme suit :

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \langle N \rangle u = \langle B \rangle u \quad (1.25)$$

Quand on remplace, le vecteur u et N, le vecteur B peut défaut de la forme suivante :

$$\langle B \rangle = \frac{d^2}{dx^2} \langle N \rangle = \langle N''_1(x) \quad N''_2(x) \quad N''_3(x) \quad N''_4(x) \rangle \quad (1.26)$$

Finalement le vecteur B et après calcul des données par le vecteur suivant

$$\langle B \rangle = \langle -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad ; \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad ; \quad \frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \rangle \quad (1.27)$$

Pour trouver les composantes de la première colonne de la matrice de rigidité $[K]$

correspondant à l'élément de poutre, respectivement $[K_{11} \quad K_{21} \quad K_{31} \quad K_{41}]^T$ on a utilisé les

conditions suivantes :

- $w_1 = 1$ dans le nœud 1, ce qui conduit à : $\frac{K_{11}L^3}{3EI} - \frac{K_{21}L^2}{2EI} = 1 \quad (1.28)$

- $\theta_1 = 0$ dans le nœud 1, ce qui conduit à : $-\frac{K_{11}L^2}{2EI} + \frac{K_{21}L}{EI} = 0$ (1.29)

A part ces deux équations, les équations d'équilibre de la statique seront ajoutées pour déterminer les deux autres composantes, respectivement K_{31} et K_{41} :

$$\sum F = 0 \Rightarrow K_{11} + K_{31} = 0 \quad (1.30)$$

$$K_{21} + K_{41} - K_{11}L = 0 \quad (1.31)$$

De façon similaire, on aura pour chacun des trois états de déformation restés un groupe de quatre équations. En ce cas, chacun de ces trois états complétera les trois colonnes restées inachevées de la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité $[K]$ opère sur le vecteur des degrés de liberté associés à chaque nœud,

$$[v] = [v_1 \theta_1 v_2 \theta_2]^T \quad (1.32)$$

Le résultat de ce processus sera donc

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot z \quad \text{ou} \quad M = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI \cdot [B] \cdot \{v\} \quad (1.35)$$

Pour l'élément de poutre 2D (bidimensionnel), celui-ci est la combinaison entre un élément de poutre et un élément de barre. Dans ce cas, la matrice de rigidité $[K]$ sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

On donne les deux matrices de raideur élémentaires afin de constituer la matrice de raideur de l'élément résultant pour son utilisation dans la potence[7].

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Matrice de raideur de l'élément

matrice de raideur de l'élément poutre

Barre Recalée (6 × 6)

en flexion recalée (6 × 6)

La relation de comportement s'écrit :

$$\{X_1 Y_1 N_1 X_2 Y_2 N_2\}^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

Chapitre II

Analyse statique par éléments finis de la potence

II.1 Introduction :

Les potences d'atelier ont trois degrés de liberté. Un mouvement vertical de la charge, Radial et rotatif. Ils sont dotés d'un monorail (la flèche) qui est en porte-à-faux par rapport à ses éléments de support et pivoté à une extrémité. La flèche fournit la voie pour le chariot de levage. Cependant, la potence ne peut pas atteindre les coins. Ils sont généralement utilisés là où l'activité est localisée. À partir de 0,5 tonne à 200 tonnes. La capacité de levage de ces grues peut varier et ils s'étendent de quelques mètres à 50 mètres. De telles grues trouvent diverses applications en zone portuaire ou en zone côtière, également utilisé dans des chantiers de construction et d'autres travaux extérieurs. Pour manutention de marchandises diverses, capacités de levage généralement de 1,5 tonne à 5 tonnes avec une portée maximale de 30 mètres. Potence fournie avec des installations de préhension ont généralement une capacité allant de 3 tonnes fonctionnant de 50 à 100 cycles par heure. Hauteurs de levage peut mesurer 30 mètres ou plus. Grues à flèche utilisées pour soulever des charges lourdes équipement de machines à proximité d'un chantier naval, pesant généralement 100 à 300 tonnes sont montés sur pontons. Généralement, ces les grues sont équipées de deux treuils de levage principaux qui peuvent être utilisés seuls ou ensemble pour soulever une charge. Ainsi que pour la manutention de charges légères, possibilité d'agencement auxiliaire manuel localisé, comme dans les ateliers d'usinage. Les utilisations des grues sont couramment utilisées dans l'industrie de l'emballage. De la hauteur de l'opérateur, ces grues sont utilisées pour lever des charges allant jusqu'à 1 tonne.

II.2 Historique de la potence

En 1934, M. Gibb d'Aberdeen accompagné de M. Mitchell, d'Inverness, inspecta le port, et M. Telford étant consulté, des plans furent dessinés pour sa reconstruction. Pour ce travail, une potence à flèche mobile a été utilisée. La première potence à flèche a été utilisée par la David Round Company en 1869.

II.3 Types de potences

II.3.1 Potence autoportante à flèche

Ces potences sont directement fixées au sol sans aucun support pour les maintenir verticales. Pour maintenir sa stabilité et ne pas basculer, on le fixe à une fondation de 1 à 1,5 m de profondeur et jusqu'à 0.4 à 1 m^2 de base, comme le montre la figure 2.1. La fondation dépend de la charge et de la portée. L'avantage de ce type de potence est qu'elle n'a pas besoin de mur ou de structure de support et offre une plage de portée et de contrôle optimale par rapport aux grues murales et à d'autres types de grues à flèche.

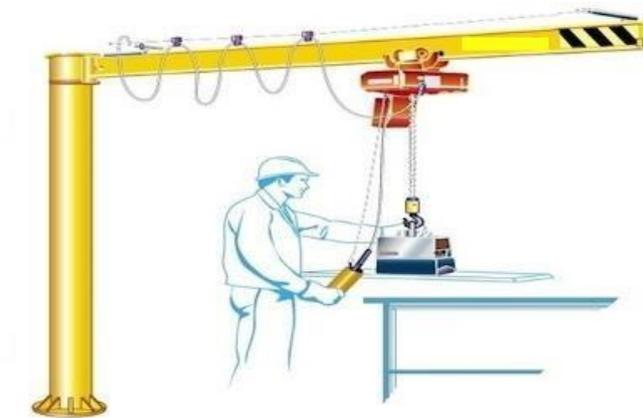


Fig. 2.1. Potence autoportante potence à flèche

II.3.2 Potence murale :

Potence murale. Comme son nom l'indique, ce type de potence à flèche est fixé au mur. Il nécessite très peu d'espace libre, il peut donc être installé très près du dessous des toits, etc. pour fournir une portance maximale au palan. La couverture, comme les autres types de potences, est circulaire et généralement d'environ 6 m. Mais elle nécessite une structure de mur ou de colonne solide pour s'adapter et le degré de rotation est inférieur à celui des grues à flèche autoportantes et à mât, comme le montre la figure 2.2. Cette grue est un moyen très efficace de déplacer des matériaux lorsqu'elle est au sol.

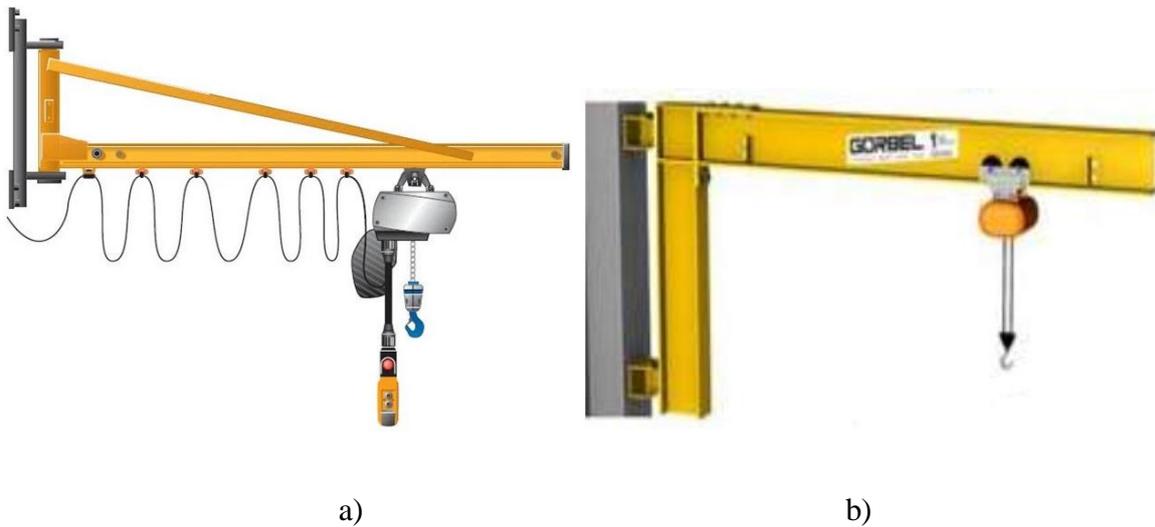


Fig. 2.2. Potences murales a) avec bielle de maintien b) en porte-à-faux.

II.3.3 Potence pivotante

Toute discussion sur les potences serait incomplète sans l'inclusion de la potence pivotante.

Ce dispositif est constitué d'une colonne verticale avec une butée à sa base et un roulement à rouleaux ou à billes de type annulaire, ou une bague, à son sommet, plus un ou plusieurs bras horizontaux (généralement une section de poutre standard de manière à accueillir les roues du chariot).

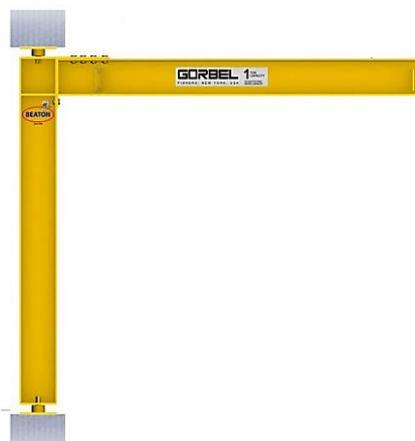


Fig. 2.3. Potence pivotante

II.4 Objectifs de l'étude statique par éléments finis :

L'étude qui suit a pour but de bien détailler la manière d'évaluer le comportement statique d'une potence par la méthode des éléments finis.

La potence étudiée est en liaison d'encastrement avec un bâti, chargée en son extrémité libre par une charge de 10 kN.

La hauteur de la potence est égale à la hauteur de la colonne $L_1 = 2l = 3600 \text{ mm}$.

La longueur de la flèche est $L_2 = l = 1800 \text{ mm}$.

La colonne et flèche sont réalisés en utilisant un profilé IPE360 dont les dimensions sont résumées dans le tableau 2.1.

On fera le bilan des déplacements, des efforts et des contraintes qui agissent sur le système tels que :

- Les déplacements nodaux longitudinaux et transversaux.
- Les efforts de réactions transmissibles par la liaison encastrement.
- Les efforts intérieurs et extérieurs aux nœuds des éléments poutres constituant la potence.
- Les contraintes nodales, normales, de flexions et équivalentes.

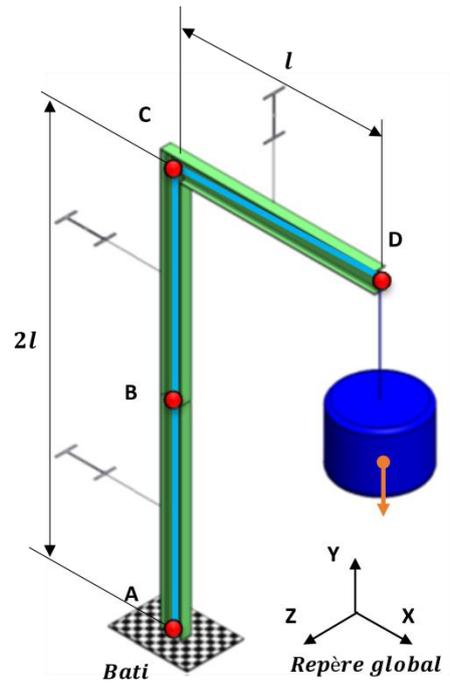


Fig.2.4 Construction du modèle à partir des lignes moyennes.

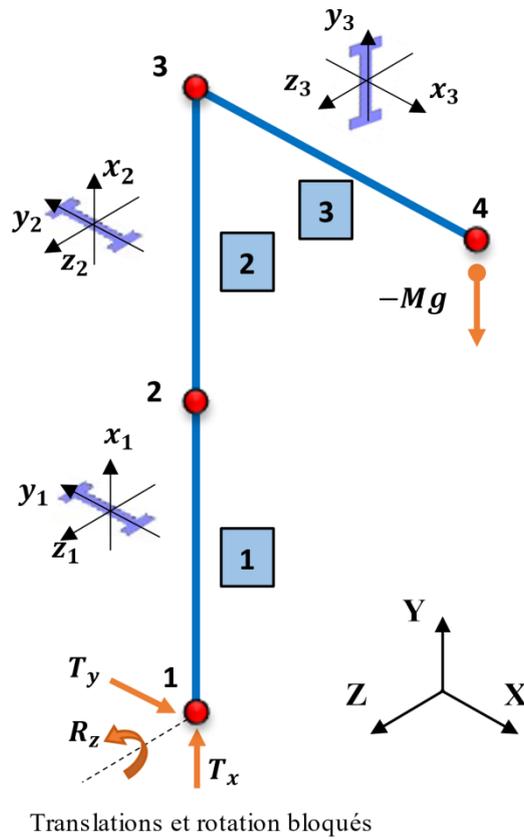


Fig.2.5 Modèle en éléments poutres avec conditions d'appui et de chargement

On sélectionne des nœuds sur le modèle géométrique afin de définir le maillage en éléments finis de poutre. Trois éléments seront retenus, ce qui représentera quatre nœuds (le maillage minimal ne nécessitant que deux éléments). Il y a trois d d l. pour chaque nœud, ce qui donne un total de $3 \times 4 = 12$ d d l. Ainsi, la dimension de la matrice de raideur globale de la potence sera de 12×12 .

II.5 Propriétés géométriques des éléments poutres :

Il est essentiel d'associer à chaque ligne moyenne d'élément un repère local composé des axes principaux (\vec{x} , \vec{y} et \vec{z}) des sections droites des poutres, avec \vec{x} comme normale sortante de la section.

Par exemple, il est possible d'avoir les systèmes de repères locaux :

$$\text{Elément 01 : } \vec{x}_1 = \vec{Y}, \quad \vec{y}_1 = -\vec{X}, \quad \vec{z}_1 = \vec{Z} \quad (2.1)$$

$$\text{Elément 02 : } \vec{x}_2 = \vec{Y}, \quad \vec{y}_2 = -\vec{X}, \quad \vec{z}_2 = \vec{Z} \quad (2.2)$$

$$\text{Elément 03 : } \vec{x}_3 = \vec{X}, \quad \vec{y}_3 = \vec{Y}, \quad \vec{z}_3 = \vec{Z} \quad (2.3)$$

Les trois éléments poutres présentent des propriétés de section identiques (IPE360) qui, pour notre utilisation, se réduisent ici à : A (aire) et I (moment quadratique autour de l'axe local z).

- Matériau : les trois éléments poutres ont des caractéristiques de matériaux identiques qui se limitent ici au module de Young : E . On peut résumer par :
 - Même module de Young E
 - Même section A
 - Même moment quadratique I
- Conditions aux limites :

- liaison structure-bâti : La potence est encastrée dans le bâti. Cela se reflète dans le repère global :

$$\text{- Au nœud 01 : } u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \theta_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$X_1 = ? \quad , \quad Y_1 = ? \quad , \quad N_1 = ?$$

$$\text{- Au nœud 04 : } u_4 = ? \quad v_4 = 0? \quad \theta_4 = ?$$

$$X_4 = 0 \quad Y_4 = -Mg \quad N_4 = 0 \quad (2.5)$$

II.5.1. Matrices de passage :

La relation géométrique entre les d d l d'un élément exprimé dans les repères local et global est de type :

$$\{d\} = [p]_{\text{Local}} \cdot \{d\}_{\text{global}}$$

(2.6)

Il en est de même pour le chargement : $\{F\}_{\text{local}} = [P] \cdot \{F\}_{\text{global}}$

La relation de comportement de l'élément écrit dans le repère local est connue :

$$\{F\}_{\text{local}} = [K]_{\text{local}} \cdot \{d\}_{\text{local}} \quad (2.7)$$

Il est possible de le réécrire dans le repère global.

$$\{F\}_{\text{Global}} = [K]_{\text{Global}} \cdot \{d\}_{\text{Global}} \quad (2.8)$$

$$\{K\}_{\text{global}} = [P]^t \cdot [K]_{\text{local}} \cdot [P] \quad (2.9)$$

Nous pouvons définir les matrices de passage du repère global au repère local en utilisant les relations suivantes :

- Élément 01 et 02 :

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_{\text{local}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_{\text{global}} \quad (2.10)$$

On obtient la matrice [P] de la relation avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_{\text{local}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_{\text{global}} \quad , \quad \text{soit} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{Bmatrix}_{\text{local}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{Bmatrix}_{\text{global}} \quad (2.11)$$

- Élément 03 : $\alpha = 0$

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_{local} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_{global} \quad (2.12)$$

$$\text{Et } \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{Bmatrix}_{local} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{Bmatrix}_{global} \quad (2.13)$$

Matrices de passage du repère global (G) au repère local (L):

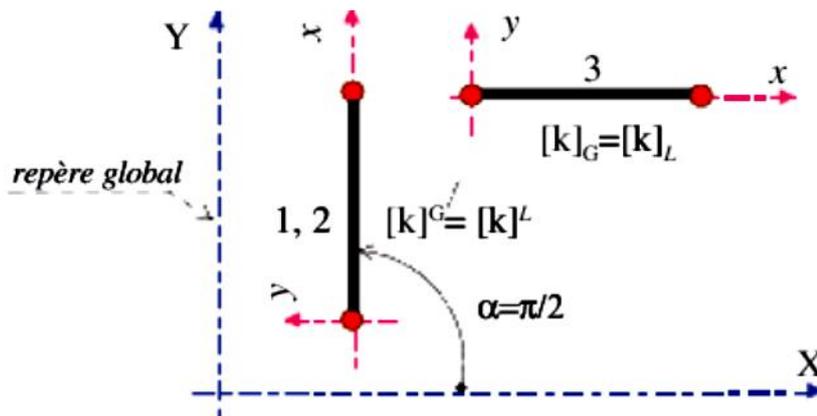


Fig 2.6 Orientation des éléments poutre dans le plan X Y

Pour les éléments 01 et 02 :

Étant donné que les éléments i et j sont notés, la matrice de passage est écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}_{local} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix}_{global} \quad (2.14)$$

$$\{K\}_{global} = [P]^t \cdot [K]_{local} \cdot [P] \quad (2.15)$$

Calculons dans ces conditions $[K]_{él\ global}$ à partir de $[K]_{él\ local}$.

Du chapitre 1 la matrice de raideur de l'élément poutre dans le repère local est :

$$[K]_{\text{él local}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

En posant $\frac{EA}{L} = a$, $\frac{12EI}{L^3} = b$, $\frac{6EI}{L^2} = c$, $d = \frac{4EI}{L}$, $\frac{2EI}{L} = f$.

$$[K]_{\text{él local}} \cdot [P] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & -b & c \\ 0 & c & d & 0 & -c & f \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -c & 0 & b & -c \\ 0 & c & f & 0 & -c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 \\ -b & 0 & c & b & 0 & c \\ -c & 0 & d & c & 0 & f \\ 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & -c & -b & 0 & -c \\ -c & 0 & f & c & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Puis $[K]_{\text{él global}} = [P]^t \cdot [K]_{\text{él local}} \cdot [P] =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 \\ b & 0 & c & b & 0 & c \\ -c & 0 & d & c & 0 & f \\ 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & -c & -b & 0 & -c \\ -c & 0 & f & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & -c \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f \\ -b & 0 & c & b & 0 & c \\ 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 \\ -c & 0 & f & c & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Les éléments 1et 2 étant identiques, leur matrice de raideur dans le repère global a pour expression :

$$[K]_{1\text{ global}} = [K]_{2\text{ global}} = \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & -c \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f \\ -b & 0 & c & b & 0 & c \\ 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 \\ -c & 0 & f & c & 0 & d \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Pour l'élément 3 :

La matrice de passage :

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix}_{local} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix}_{global} \quad (2.19)$$

Rappelons qu'elle a pour expression :

$$[K]_{3\text{ globa}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & -b & c \\ 0 & c & d & 0 & -c & f \\ -a & 0 & 0 & a & - & 0 \\ 0 & -b & -c & 0 & b & -c \\ 0 & c & f & 0 & -c & d \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Tableau 2.1. Propriété de la section

Géométrie			
Hauteur	<i>h</i>	360.0	<i>mm</i>
Largeur	<i>b</i>	170.0	<i>mm</i>
Épaisseur de l'âme	<i>s</i>	8.0	<i>mm</i>
Épaisseur de semelle	<i>t</i>	12.7	<i>mm</i>
Rayon de la courbe	<i>r</i>	18.0	<i>mm</i>
Aire de la section			
Aire de la section	<i>A</i>	7273	<i>mm</i> ²
Flexion			
Moment d'inertie autour de l'axe y	<i>I_y</i>	16266. 10 ⁴	<i>mm</i> ⁴
Moment d'inertie autour de l'axe z	<i>I_z</i>	1043. 10 ⁴	<i>mm</i> ⁴

IPE 360 des éléments

poutre [8]:

Longueur de l'élément poutre $l = 1800 \text{ mm}$, $I = I_y = 16266.10^4 \text{ mm}^4$

Calcul des constantes a, b, c, d , et f

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{EA}{L} = \frac{2.10^5.7273}{1800} = 8,08.10^5 \\
 b &= \frac{12EI}{L^3} = \frac{12.2.10^5.16266.10^4}{1800^3} = 6,69.10^4 \\
 c &= \frac{6EI}{L^2} = \frac{6.2.10^5.16266.10^4}{1800^2} = 6,02.10^7 \quad (2.21) \\
 d &= \frac{4EI}{L} = \frac{4.2.10^5.16266.10^4}{1800} = 7,22.10^{10} \\
 f &= \frac{2EI}{L} = \frac{2.2.10^5.16266.10^4}{1800} = 3,61.10^{10}
 \end{aligned}$$

II.6. Assemblage des 3 matrices de raideur élémentaire :

L'assemblage des trois matrices élémentaires $[K]_1, [K]_2, [K]_3$ trois éléments de poutre de la potence permet d'obtenir la matrice globale de la structure $[K]_{global}$ de dimension 12×12

$[K]_1 + [K]_2 =$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & c & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & f & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & -c & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & c & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & f & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & c & 2b & 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & f & 0 & 0 & 2d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & c & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & f & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

On obtient pour la potence la matrice de raideur globale $[K]$ (12×12)

$$[K]_{\text{glob}} = [K]_{12} + [K]_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & c & 2b & 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & f & 0 & 0 & 2d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & f & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & -b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d & 0 & -c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -c & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & f & 0 & -c & d \end{bmatrix}$$

$$[K]_{\text{glob}} = \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & c & 2b & 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & f & 0 & 0 & 2d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b+a & 0 & c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a+b & c & 0 & -b & c \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & f & c & 0 & 2d & 0 & -c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & -c & d \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Le comportement élastique de la structure assemblée dans le repère global se met ainsi sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 = 0 \\ Y_2 = 0 \\ M_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ Y_3 = 0 \\ M_3 = 0 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -Mg \\ M_4 = 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & -c & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & c & 2b & 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & f & 0 & 0 & 2d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & b+a & 0 & c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a+b & c & 0 & -b & c \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & f & c & 0 & 2d & 0 & -c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & f & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

II.7 Résolution du système linéaire :

$$\{F\} = [K] \cdot \{d\}$$

On rappelle qu'elle se ramène à la création de deux sous-systèmes.

- Sous-système 1 :

On élimine les lignes 1, 2 et 3 ($u_1 = v_1 = \theta_{z1} = 0$) et les colonnes de même rang. Dans le sous-système ainsi obtenu n'apparaissent que les déplacements nodaux inconnus

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & b+a & 0 & c & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & a+b & c & 0 & -b & c \\ -c & 0 & f & c & c & 2d & 0 & -c & f \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -c & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & f & 0 & -c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

La relation de comportement élastique devient alors

$$\{d'\} = [K']^{-1} \cdot \{F'\} \quad (2.26)$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} = [K']^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

On utilise SCIENTIFIQUE WORKPLACE pour obtenir $[K']^{-1}$.

$$[K'] = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 & -b & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d & c & 0 & f & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & b+a & 0 & c & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & a+b & c & 0 & -b & c \\ -c & 0 & f & c & c & 2d & 0 & -c & f \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -c & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & f & 0 & -c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & 24EI/L^3 & 0 & 0 & -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & 2EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 0 & 0 & 8EI/L & 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & EA/L + 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L + 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 8EI/L & 0 & -6EI/L^2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$[K']^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{L^3}{EI} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} & \frac{5}{6} \frac{L^3}{EI} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} & \frac{5}{6} \frac{L^3}{EI} & -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} & -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} \\ 0 & \frac{1}{A} \frac{L}{E} & 0 & 0 & \frac{1}{A} \frac{L}{E} & 0 & 0 & \frac{1}{A} \frac{L}{E} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{L}{EI} & -\frac{3}{2} \frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{1}{A} \frac{L}{E} & -\frac{3}{2} \frac{L^2}{EI} & \frac{L^2}{EI} & \frac{1}{A} \frac{L}{E} \\ \frac{5}{6} \frac{L^3}{EI} & 0 & -\frac{3}{2} \frac{L^2}{EI} & \frac{8}{3} \frac{L^3}{EI} & 0 & -2 \frac{L^2}{EI} & \frac{8}{3} \frac{L^3}{EI} & -2 \frac{L^3}{EI} & -2 \frac{L^2}{EI} \\ 0 & \frac{1}{A} \frac{L}{E} & 0 & 0 & \frac{2}{A} \frac{L}{E} & 0 & 0 & \frac{2}{A} \frac{L}{E} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{L}{EI} & -2 \frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{2}{A} \frac{L}{E} & -2 \frac{L^2}{EI} & 2 \frac{L^2}{EI} & 2 \frac{L}{EI} \\ \frac{5}{6} \frac{L^3}{EI} & 0 & -\frac{3}{2} \frac{L^2}{EI} & \frac{8}{3} \frac{L^3}{EI} & 0 & -2 \frac{L^2}{EI} & \frac{8AL^2+3I}{3AEI} & -2 \frac{L^3}{EI} & -2 \frac{L^2}{EI} \\ -\frac{1}{2} \frac{L^3}{EI} & \frac{1}{A} \frac{L}{E} & \frac{L^2}{EI} & -2 \frac{L^3}{EI} & \frac{2}{A} \frac{L}{E} & 2 \frac{L^2}{EI} & -2 \frac{L^3}{EI} & \frac{7AL^3+6IL}{3AEI} & \frac{5}{2} \frac{L^2}{EI} \\ -\frac{1}{2} \frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{L}{EI} & -2 \frac{L^2}{EI} & 0 & \frac{2}{A} \frac{L}{E} & -2 \frac{L^2}{EI} & \frac{5}{2} \frac{L^2}{EI} & 2 \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Qui permet d'obtenir les déplacements aux nœuds (2), (3) et (4) soit :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{pmatrix} = [K']^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Mg L^3}{2 EI} & -\frac{Mg l}{E A} & -\frac{Mg L^2}{EI} & 2 \frac{Mg L^3}{EI} & -2 \frac{Mg L}{EA} & -2 \frac{Mg L^2}{EI} & 2 \frac{Mg L^3}{EI} & -2 \frac{Mg L}{EA} \left(1 + \frac{7AL^2}{6 I}\right) & -\frac{5 Mg L^2}{2 EI} \end{pmatrix}^t \quad (2.29)$$

II.8.Application numérique

II.8.1 calcul des déplacements :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{Mg L^3}{2 EI} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 16266 \cdot 10^4} = 0,8963 \text{ mm} \\ v_2 &= -\frac{Mg l}{E A} = -\frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800}{2 \cdot 10^5 \cdot 7273} = -0,01237 \text{ mm} \\ \theta_{z2} &= -\frac{Mg L^2}{EI} = -\frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 16266 \cdot 10^4} = -1,9918 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ u_3 &= 2 \frac{Mg L^3}{EI} = 2 \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 16266 \cdot 10^4} = 3,5853 \text{ mm} \\ v_3 &= -2 \frac{Mg L}{EA} = -2 \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800}{2 \cdot 10^5 \cdot 7273} = -0,0247 \text{ mm} \\ \theta_{z3} &= -2 \frac{Mg L^2}{EI} = -2 \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 16266 \cdot 10^4} = -1,9918 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ u_4 &= 2 \frac{Mg L^3}{EI} = 2 \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 16266 \cdot 10^4} = 3,5853 \text{ mm} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$v_4 = -2 \frac{MgL}{EA} \left(1 + \frac{7}{6} \frac{AL^2}{I}\right) = -2 \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800}{2 \cdot 10^5 \cdot 7273} \left(1 + \frac{7}{6} \frac{7273 \cdot 1800^2}{16266 \cdot 10^4}\right) = 4,1993 \text{ mm}$$

$$\theta_{z4} = -\frac{5}{2} \frac{MgL^2}{EI} = -\frac{5}{2} \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1800^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 16266 \cdot 10^4} = -2,4898 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

- Sous-système 2 :

On l'obtient en revenant aux lignes précédemment supprimées dans le système linéaire. Il vient (en éliminant des termes nuls) :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^3} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^3} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$X_1 = -\frac{12EI}{L^3} u_2 - \frac{6EI}{L^3} \theta_{z2}$$

$$Y_1 = -\frac{EA}{L} v_2 \quad (2.32)$$

$$M_1 = \frac{6EI}{L^3} u_2 + \frac{2EI}{L} \theta_{z2}$$

II.8.2 Calcul des forces

$$X_1 = 0 \quad Y_1 = 9996,334 \cong 10000 \text{ N} \quad M_1 = 17658 \text{ N.m}$$

Qui conduit à calculer les actions mécaniques nœud 1 en fonction des d d l (u_2, v_2, θ_{z2}).

On note que l'on peut s'assurer immédiatement ici du bon équilibre global du modèle (application du principe fondamental de la stique).

$$X_1 = 0 \quad Y_1 = Mg \quad M_1 = MgL$$

Chapitre III

Analyse modale des poutres en flexion

III.1 Introduction :

Le thème traité est les vibrations transversales des poutres uniformes à sections constantes. Des résultats détaillés sont donnés pour les poutres d'Euler - Bernoulli soumis à diverses conditions aux limites. Résultats pour une poutre Timoshenko est présentée pour le cas de poutre simplement appuyée.

III.2 Vibrations transversales d'une poutre.

III.2.1 Théorie d'Euler - Bernoulli des poutres :

Dans cette théorie sont traités les charges externes, les sections transversales et les matériaux tels que les mouvements soient plans. La poutre transmet une force de cisaillement, V , et un moment de flexion M (l'axe x est le long de l'axe neutre non déformé de la poutre et $f(x, t)$ est la force latérale externe par unité de longueur). En négligeant les déformations de cisaillement et l'inertie de rotation, l'équation du mouvement pour la poutre homogène de section transversale A est :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{f(x,t)}{EI} \quad (3.1)$$

Ici, w est le déplacement transversal de l'axe neutre,

E et ρ sont respectivement le module d'Young et la densité,

Et I est le moment d'inertie de la section autour de l'axe z .

V et M sont liés à w par :

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

$$V = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.3)$$

Mouvements libres

La solution de l'équation (3.1) pour les vibrations libres $f = 0$ est :

$$W(x, t) = w(x) \sin(\omega t) \quad (3.4)$$

$$w(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x \quad (3.5)$$

$$\beta = \left(\rho \frac{A \omega^2}{EI} \right)^{1/4} \quad (3.6)$$

Et A, B, C, D sont des constantes arbitraires.

Application des conditions aux limites donnent l'Équation des fréquences.

Pour la détermination de β (et donc ω) et les expressions des rapports d'amortissement C_s ,

Qui donnent ensuite les déformés modales associées. Quelques conditions aux limites courantes sont trouvées en utilisant les équations (3.2), (3.3) et (3.4):

$$1) \text{ Bords simplement appuyés : } w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.7)$$

$$2) \text{ Bord encasté : } w' = \frac{dw}{dx} = 0 \quad (3.8)$$

$$3) \text{ Bord libre : } \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (3.9)$$

III.2.2 Résultats pour certaines configurations standard.

Un tableau des cinq premières fréquences naturelles est présenté, ainsi que les déformées modales associées.

Poutre Simplement Appuyée :

$$1. \text{ Équation des fréquences : } \sin \beta_n L = 0 \Rightarrow \beta_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Déformées modales : $w_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Les c_n sont des facteurs d'échelle arbitraires et

ici et dans la suite sont fixés égaux à 1. L est la longueur de la poutre.

2. **Poutre encastée** : ($x = 0$), extrémité libre ($x = L$) :

$$\text{Équation des fréquences[9] : } \cos \beta_n L \cosh \beta_n L = -1 \quad (3.11)$$

Déformés modale :

$$w_n(x) = \sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \left(\frac{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L} \right) (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) \quad (3.12)$$

Voir tableau 1.

Tableau 3.1 résultat du cas encasté-libre

n	$\beta_n L$	Déformés modale
1	1,8751	<p>First mode</p>
2	4,6941	<p>Second mode</p>
3	7,8548	<p>Third mode</p>
4	10,9955	<p>Fourth mode</p>
5	14,1372	<p>Fifth mode</p>

III.2 Modélisation d'une potence en tant que structure à ossature

La potence étudiée, représentée sur la figure 3.1 est divisée en deux éléments poutres : la colonne et la flèche avec des longueurs L_1 et L_2 . Chaque élément est analysé par son mouvement transversal et longitudinal.

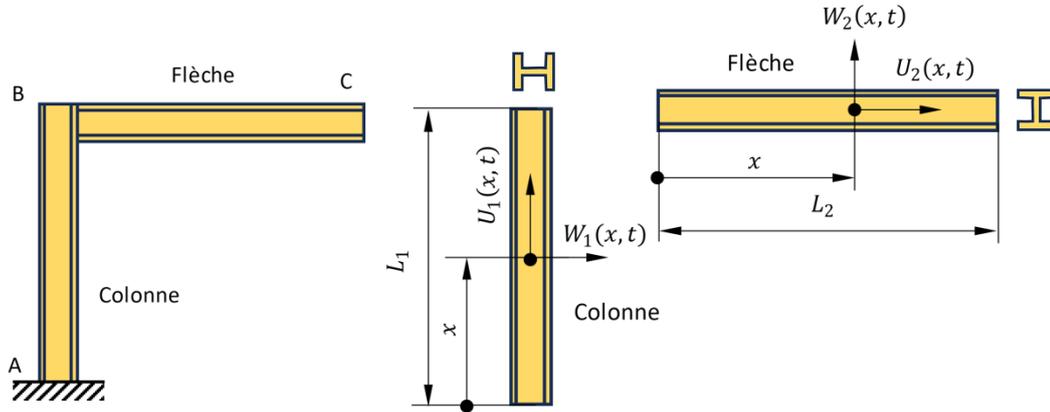


Figure 3.1. Mouvement transversal et longitudinal du système

La colonne et la flèche représentant des éléments indépendants pouvant être traités comme des poutres. Des théories de vibration en flexion pour la poutre d'Euler-Bernoulli et la vibration axiale d'une tige sont utilisées. Les déplacements transversaux et longitudinaux de la colonne et la flèche sont désignés par $W_i(x,t)$ et $U_i(x,t)$. La longueur totale des deux éléments de la potence est $L = (L_1 + L_2)$. Les équations de mouvement pour chaque élément de la potence à section uniforme sont :

$$\text{Vibration transversale [10]: } EI \frac{\partial^4 W_i(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W_i(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.13)$$

$$\text{Vibration longitudinale : } E \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

Où $i = 1, 2$. Avec le 1 pour la colonne et le 2 pour la flèche.

III.3 Les conditions aux limites de compatibilité

- Au point A (Encastrement) :

$$W_1(0, t) = 0, \quad (3.15 \text{ a})$$

$$W_1'(0, t) = 0, \quad (3.15 \text{ b})$$

$$U_1(0, t) = 0, \quad (3.15 c)$$

- Au point B (Conditions de compatibilité) :

$$W_2(2l, t) = U_1(2l, t), \quad (3.16 a)$$

$$U_2(2l, t) = -W_1(2l, t), \quad (3.16 b)$$

$$W_2'(2l, t) = W_1'(2l, t), \quad (3.16 c)$$

$$W_2''(2l, t) = W_1''(2l, t), \quad (3.16 d)$$

$$W_2'''(2l, t) = -U_1'(2l, t). \quad (3.16 e)$$

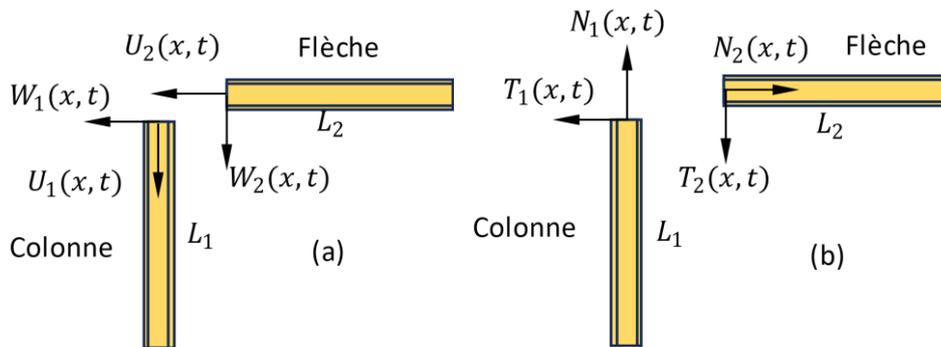
- Au point C (Extrémité libre) :

$$W_2''(3l, t) = 0 \quad (3.17 a)$$

$$W_2'''(3l, t) = 0 \quad (3.17 b)$$

$$U_2'(3l, t) = 0 \quad (3.17 c)$$

Les mouvements transversaux ainsi que longitudinaux à l'extrémité de la colonne contraignent les mouvements de la flèche. Ainsi, les « conditions de compatibilité » assurent des continuités du déplacement transversal et longitudinal, la pente, le moment de flexion, l'effort tranchant et l'effort axial, respectivement de la colonne et la flèche au point B. Les exigences de compatibilité en termes de déplacement au point B sont des déplacements W_1 et U_1 transversaux et longitudinaux, comme indiqué sur la figure 3.2(a) et qui peuvent être exprimés sous forme d'exigences de compatibilité de force : cisaillement T_i et axiales N_i au point B, comme le montre la figure 3.2 (b).



(a) Compatibilité de déplacements,

(b) Compatibilité de forces

Figure 3.2. (a) Compatibilité de déplacement, (b) Compatibilité de force

$$W_2(2l, t) = U_1(2l, t) \text{ Continuité du déplacement} \quad (3.18a)$$

$$U_2(2l, t) = -W_1(2l, t) \text{ Continuité du déplacement} \quad (3.18b)$$

$$W_2'(2l, t) = W_1'(2l, t) \text{ Continuité des pentes} \quad (3.18c)$$

$$W_2''(2l, t) = W_1''(2l, t) \text{ Continuité du moment fléchissant} \quad (3.18d)$$

$$EIW_2'''(2l, t) = -EIU_1'(2l, t) \text{ Continuité de l'effort tranchant} \quad (3.18e)$$

$$EIU_2'(2l, t) = ElW_1'''(2l, t) \text{ Continuité de l'effort axial} \quad (3.18f)$$

III.4. Calcul des fréquences naturelles

Les fréquences naturelles sont obtenues par résolution du système d'équations des conditions aux limites appliquées aux solutions générales des équations de mouvement

L'application de la méthode de séparation de variables en remplaçant $W_i(x, t)$ par $w_i(x)e^{i\omega t}$ et $U_i(x, t)$ par $u_i(x)e^{i\omega t}$ dans les équations (3.13) et (3.14) conduira au problème des fréquences naturelles associé,

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4}(x) - \lambda^4 w_i(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, i = 1, 2 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x) - \beta^2 u_i(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, i = 1, 2 \quad (3.20)$$

$$\text{Où} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}} \text{ et } \beta = \sqrt{\frac{\rho \omega_n^2}{E}} \quad (3.21)$$

$$\text{D'après l'équation (12), la relation entre } k \text{ et } \beta \text{ est exprimée par } \beta = \sqrt{\frac{A}{I}} \lambda^2 = a \lambda^2 \quad (3.22)$$

$$\text{Où } a = \sqrt{\frac{A}{I}} \text{ est une constante.} \quad (3.23)$$

Les solutions générales des équations (3.13) et (3.14):

- Pour la colonne :

$$w_1(x) = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x + C_1 \cosh \lambda x + D_1 \sinh \lambda x \quad (3.24a)$$

$$u_1(x) = E_1 \cos \beta x + F_1 \sin \beta x = E_1 \cos a \lambda^2 x + F_1 \sin a \lambda^2 x, \quad (3.24b)$$

- Pour la flèche :

$$w_2(x) = A_2 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + D_2 \sinh \lambda x \quad (3.25a)$$

$$u_2(x) = E_2 \cos \beta x + F_2 \sin \beta x = E_2 \cos a\lambda^2 x + F_2 \sin a\lambda^2 x, \quad (3.25b)$$

Où A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 et F_1 sont des constantes associées à la colonne et $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2,$ et F_2 sont des constantes associées à la flèche.

- Conditions de compatibilité

Les constantes $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2,$ et F_2 sont liés aux constantes A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 et F_1 à travers les conditions de compatibilité dans les équations (3.18a) – (3.18f), qui peuvent être exprimées sous la forme :

$$w_2(2l) = u_1(2l) \quad (3.26a)$$

$$u_2(2l) = -w_1(2l) \quad (3.26b)$$

$$w_1'(2l) = w_2'(2l) \quad (3.26c)$$

$$w_1''(2l) = w_2''(2l) \quad (3.26d)$$

$$EIw_2'''(2l) = -EAu_1'(2l) \quad (3.26e)$$

$$EIw_1'''(2l) = EAu_2'(2l) \quad (3.26f)$$

Les six équations de compatibilité donnent le système d'équations suivant :

$$A_2 \cos 2\lambda l + B_2 \sin 2\lambda l + C_2 \cosh 2\lambda l + D_2 \sinh 2\lambda l = E_1 \cosh 2a\lambda^2 l + F_1 \sinh 2a\lambda^2 l \quad (3.27a)$$

$$E_2 \cos 2a\lambda^2 l + F_2 \sin 2a\lambda^2 l = -A_1 \cos 2\lambda l - B_1 \sin 2\lambda l - C_1 \cosh 2\lambda l - D_1 \sinh 2\lambda l \quad (3.27b)$$

$$-A_2 \sin 2\lambda l + B_2 \cos 2\lambda l + C_2 \sinh 2\lambda l + D_2 \cosh 2\lambda l = -A_1 \sin 2\lambda l + B_1 \cos 2\lambda l + C_1 \sinh 2\lambda l + D_1 \cosh 2\lambda l \quad (3.27c)$$

$$-A_2 \cos 2\lambda l - B_2 \sin 2\lambda l + C_2 \cosh 2\lambda l + D_2 \sinh 2\lambda l = -A_1 \cos 2\lambda l - B_1 \sin 2\lambda l + C_1 \cosh 2\lambda l + D_1 \sinh 2\lambda l \quad (3.27d)$$

$$A_2 \sin 2\lambda l - B_2 \cos 2\lambda l + C_2 \sinh 2\lambda l + D_2 \cosh 2\lambda l = \frac{aA}{I\lambda} \cdot E_1 \sin 2a\lambda^2 l - \frac{aA}{I\lambda} \cdot F_1 \cos 2a\lambda^2 l \quad (3.27e)$$

$$-\frac{aA}{I\lambda} \cdot E_2 \sin 2a\lambda^2 l + \frac{aA}{I\lambda} \cdot F_2 \cos 2a\lambda^2 l = A_1 \sin 2\lambda l - B_1 \cos 2\lambda l + C_1 \sinh 2\lambda l + D_1 \cosh 2\lambda l \quad (3.27f)$$

Les équations (3.27 a-f) s'expriment sous forme matriciel comme suit :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \cos 2\lambda l & \sin 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 2a\lambda^2 l & \sin 2a\lambda^2 l \\ -\sin 2\lambda l & \cos 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & 0 & 0 \\ -\cos 2\lambda l & -\sin 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & 0 & 0 \\ \sin 2\lambda l & -\cos 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{aA}{I\lambda} \cdot \sin 2a\lambda^2 l & \frac{aA}{I\lambda} \cdot \cos 2a\lambda^2 l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ E_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh 2a\lambda^2 l & \sinh 2a\lambda^2 l \\ -\cos 2\lambda l & -\sin 2\lambda l & -\cosh 2\lambda l & -\sinh 2\lambda l & 0 & 0 \\ -\sin 2\lambda l & \cos 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & 0 & 0 \\ -\cos 2\lambda l & -\sin 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{aA}{I\lambda} \cdot \sin 2a\lambda^2 l & -\frac{aA}{I\lambda} \cdot \cos 2a\lambda^2 l \\ \sin 2\lambda l & -\cos 2\lambda l & \sinh 2\lambda l & \cosh 2\lambda l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ E_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

De la forme :

$$[b_{6 \times 6}] \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ E_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [d_{6 \times 6}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ E_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$D'où \quad \{A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2 \ E_2 \ F_2\}^T = [b_{6 \times 6}]^{-1} [d_{6 \times 6}] \{A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ E_1 \ F_1\}^T \quad (3.30 \text{ a})$$

$$\text{et } \{A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2 \ E_2 \ F_2\}^T = [T_{6 \times 6}] \{A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ E_1 \ F_1\}^T \quad (3.31 \text{ b})$$

Avec $[T_{6 \times 6}] = [b_{6 \times 6}]^{-1} [d_{6 \times 6}]$ est la fonction de transfert entre deux poutres jointes par une liaison complète dans notre cas entre la colonne et la flèche.

D'après [11] la fonction de transfert $[T_{6 \times 6}]$ prend la forme suivante :

$$[T_{6 \times 6}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos 2\lambda l & -\frac{1}{2} \sin 2\lambda l & \frac{1}{2} \cosh 2\lambda l & \frac{1}{2} \sinh 2\lambda l & \frac{a}{2\lambda} \cos 2a\lambda^2 l & -\frac{1}{2} \frac{a}{\lambda} \sin 2a\lambda^2 l \\ \frac{1}{2} \sin 2\lambda l & \frac{1}{2} \cos 2\lambda l & -\frac{1}{2} \sinh 2\lambda l & -\frac{1}{2} \cosh 2\lambda l & \frac{1}{2} \sin 2a\lambda^2 l & \frac{1}{2} \cos 2a\lambda^2 l \\ \frac{1}{2} \cos 2\lambda l & -\frac{1}{2} \sin 2\lambda l & \frac{1}{2} \cosh 2\lambda l & \frac{1}{2} \sinh 2\lambda l & -\frac{a}{2\lambda} \cos 2a\lambda^2 l & \frac{1}{2} \frac{a}{\lambda} \sin 2a\lambda^2 l \\ -\frac{1}{2} \sin 2\lambda l & -\frac{1}{2} \cos 2\lambda l & \frac{1}{2} \sinh 2\lambda l & \frac{1}{2} \cosh 2\lambda l & \frac{1}{2} \sin 2a\lambda^2 l & \frac{1}{2} \cos 2a\lambda^2 l \\ -\frac{\lambda}{a} \cos 2\lambda l & \frac{\lambda}{a} \sin 2\lambda l & \frac{\lambda}{a} \cosh 2\lambda l & \frac{\lambda}{a} \sinh 2\lambda l & 0 & 0 \\ -\sin 2\lambda l & -\cos 2\lambda l & -\sinh 2\lambda l & -\cosh 2\lambda l & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

- Les conditions aux limites

- Au point A (encastrement),

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= A_1 + C_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -C_1 \\
w_1'(0) &= B_1 + D_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -D_1 \\
u_1(0) &= E_1 = 0
\end{aligned} \quad (3.33 \text{ a-c})$$

- Au point C (extrémité libre) :

$$w_2''(3l) = -A_2 \lambda^2 \cos 3\lambda l - B_2 \lambda^2 \sin 3\lambda l + C_2 \lambda^2 \cosh 3\lambda l + D_2 \lambda^2 \sinh 3\lambda l = 0$$

$$w_2'''(3l) = A_2\lambda^3 \sin 3kl - B_2\lambda^3 \cos 3\lambda l + C_2\lambda^3 \sinh 3\lambda l + D_2\lambda^3 \cosh 3\lambda l = 0 \quad (3.34 \text{ a-c})$$

$$u_2'(3l) = -a\lambda^2 E_2 \sin 3a\lambda^2 l + a\lambda^2 F_2 \cos 3a\lambda^2 l = 0$$

Après simplification on a :

$$-A_2 \cos 3\lambda l - B_2 \sin 3\lambda l + C_2 \cosh 3\lambda l + D_2 \sinh 3\lambda l = 0$$

$$A_2 \sin 3\lambda l - B_2 \cos 3\lambda l + C_2 \sinh 3\lambda l + D_2 \cosh 3\lambda l = 0 \quad (3.35 \text{ a-c})$$

$$-E_2 \sin 3a\lambda^2 l + F_2 \cos 3a\lambda^2 l = 0$$

Sous forme matriciel on a :

$$\begin{bmatrix} -\cos 3\lambda l & -\sin 3\lambda l & \cosh 3\lambda l & \sinh 3\lambda l & 0 & 0 \\ \sin 3\lambda l & -\cos 3\lambda l & \sinh 3\lambda l & \cosh 3\lambda l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 3a\lambda^2 l & \cos 3a\lambda^2 l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ E_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

$$[L_{3 \times 6}] \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ E_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\text{Avec } [L_{3 \times 6}] = \begin{bmatrix} -\cos 3\lambda l & -\sin 3\lambda l & \cosh 3\lambda l & \sinh 3\lambda l & 0 & 0 \\ \sin 3\lambda l & -\cos 3\lambda l & \sinh 3\lambda l & \cosh 3\lambda l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 3a\lambda^2 l & \cos 3a\lambda^2 l \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

La substitution de l'équation (3.31 b) par l'équation (3.37) donne :

$$[L_{3 \times 6}][T_{6 \times 6}]\{A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ E_1 \ F_1\}^T = \{0\} \quad (3.39)$$

Et en utilisant les équations (3.33a) - (3.33c) donnent

$$[L_{3 \times 6}][T_{6 \times 6}]\{A_1 \ B_1 \ -A_1 \ -B_1 \ E_1 \ 0\}^T = \{0\} \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} -\cos 3\lambda l & -\sin 3\lambda l & \cosh 3\lambda l & \sinh 3\lambda l & 0 & 0 \\ \sin 3\lambda l & -\cos 3\lambda l & \sinh 3\lambda l & \cosh 3\lambda l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 3a\lambda^2 l & \cos 3a\lambda^2 l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos 2\lambda l & -\frac{1}{2}\sin 2\lambda l & \frac{1}{2}\cosh 2\lambda l & \frac{1}{2}\sinh 2\lambda l & \frac{a}{2\lambda}\cos 2a\lambda^2 l & -\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda}\sin 2a\lambda^2 l \\ \frac{1}{2}\sin 2\lambda l & \frac{1}{2}\cos 2\lambda l & -\frac{1}{2}\sinh 2\lambda l & -\frac{1}{2}\cosh 2\lambda l & \frac{1}{2}\sin 2a\lambda^2 l & \frac{1}{2}\cos 2a\lambda^2 l \\ \frac{1}{2}\cos 2\lambda l & -\frac{1}{2}\sin 2\lambda l & \frac{1}{2}\cosh 2\lambda l & \frac{1}{2}\sinh 2\lambda l & -\frac{a}{2\lambda}\cos 2a\lambda^2 l & \frac{1}{2}\frac{a}{\lambda}\sin 2a\lambda^2 l \\ -\frac{1}{2}\sin 2\lambda l & -\frac{1}{2}\cos 2\lambda l & \frac{1}{2}\sinh 2\lambda l & \frac{1}{2}\cosh 2\lambda l & \frac{1}{2}\sin 2a\lambda^2 l & \frac{1}{2}\cos 2a\lambda^2 l \\ -\frac{\lambda}{a}\cos 2\lambda l & \frac{\lambda}{a}\sin 2\lambda l & \frac{\lambda}{a}\cosh 2\lambda l & \frac{\lambda}{a}\sinh 2\lambda l & 0 & 0 \\ -\sin 2\lambda l & -\cos 2\lambda l & -\sinh 2\lambda l & -\cosh 2\lambda l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ -A_1 \\ -B_1 \\ E_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Avec $\lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}}$

D’après [11] une poutre coudée encastree d’un bout et libre de l’autre a des fréquences naturelles

proche de celles de la poutre encastree libre de fréquences : $\omega_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

Selon les propriétés géométriques et de matériau on a : $\frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 0,259$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Mode (n)	ω_n rd/s	f_n Hertz
1	5,575576	0,887381
2	50,18019	7,986425
3	139,3894	22,18451
4	273,2032	43,48165
5	451,6217	71,87782
6	674,6447	107,373
7	942,2724	149,9673

Chapitre IV

Simulation statique et modale de la potence sous

SOLIDWORKS

IV.1 Simulation statique de la potence.

IV.1.1 Informations sur le modèle

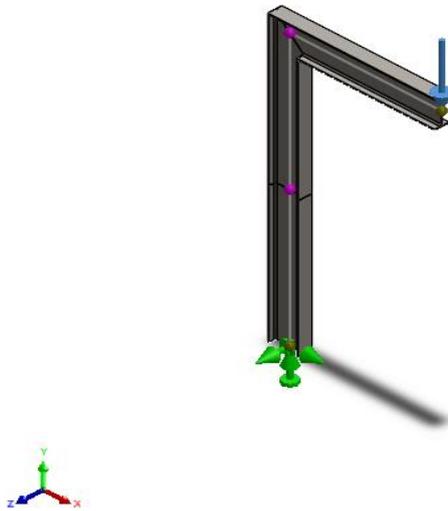
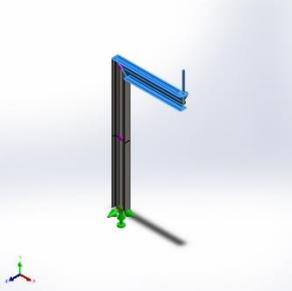


Figure 4.1 Modèle SOLIDWORKS de la potence

Tableau 4.1 Informations sur le modèle

Poutres:		
Nom du document et référence	Formulation	Propriétés
<p>Corps volumique 1(Ipe Poutre IPE360</p> 	<p>Poutre à inertie constante</p>	<p>Section Standard-DIN/IPE Poutre/IPE360 Aire de la section: 7273mm² Longueur:5400mm Masse volumique:7 850kg/m³ Masse:102,76kg Poids:3 022,05N</p>

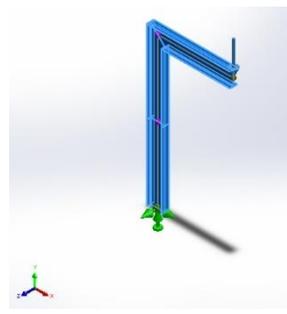
IV.1.2 Propriétés de l'étude

Nom d'étude	Simulation statique de la potence
Type d'analyse	Statique
Type de maillage	Maillage de poutre
Type de solveur	Solveur direct
Options de contact solidaire	Automatique
Grand déplacement	Désactivé(e)

Unités

Système d'unités:	SI (MKS)
Longueur/Déplacement	Mm
Température	Celsius
Pression/Contrainte	N/mm ² (MPa)

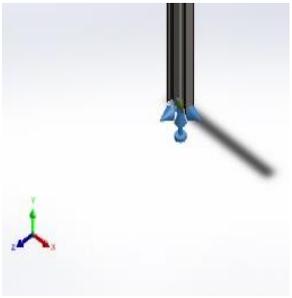
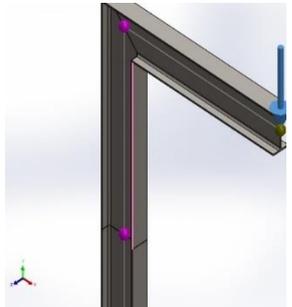
IV.1.3 Propriétés du matériau

Référence du modèle	Propriétés		Composants
	Nom:	AISI 1045 Acier étiré à froid	Corps volumique poutre IPE360
	Type de modèle:	Linéaire élastique isotropique	
	Critère de ruine par défaut:	Contrainte de von Mises max.	
	Limite d'élasticité:	530 N/mm ²	
	Limite de traction:	625 N/mm ²	
	Module d'élasticité:	205 000 N/mm ²	
	Coefficient de Poisson:	0,29	
	Masse volumique:	7,85 g/cm ³	
	Module de cisaillement:	80 000 N/mm ²	
	Coefficient de dilatation thermique:	1,15e-05 /Kelvin	

IV.1.4 Informations sur le maillage

- Actions extérieures

Nombre total de noeuds	103
Nombre total d'éléments	99
Durée de création du maillage (hh:mm:ss):	00:00:02
Type de maillage	Maillage de poutre
<p>Nom du modèle: Potence Nom de l'étude: Statique 1(-Défaut<Brut d'usinage>-) Type de maillage:</p> 	

Nom du déplacement imposé	Image du déplacement impose	Détails du déplacement imposé	
Fixe-1		Entités: 1 Connexion(s) Type: Géométrie fixe	
Nom du chargement	Image du chargement	Détails du chargement	
Force-1		Entités:	1 Connexion(s)
		Référence:	Arête< 1 >
		Type:	Force
		Valeurs:	---; ---; 10 000 N
		Moments:	---; ---; --- N.m

Poutres

- Forces dans les poutres

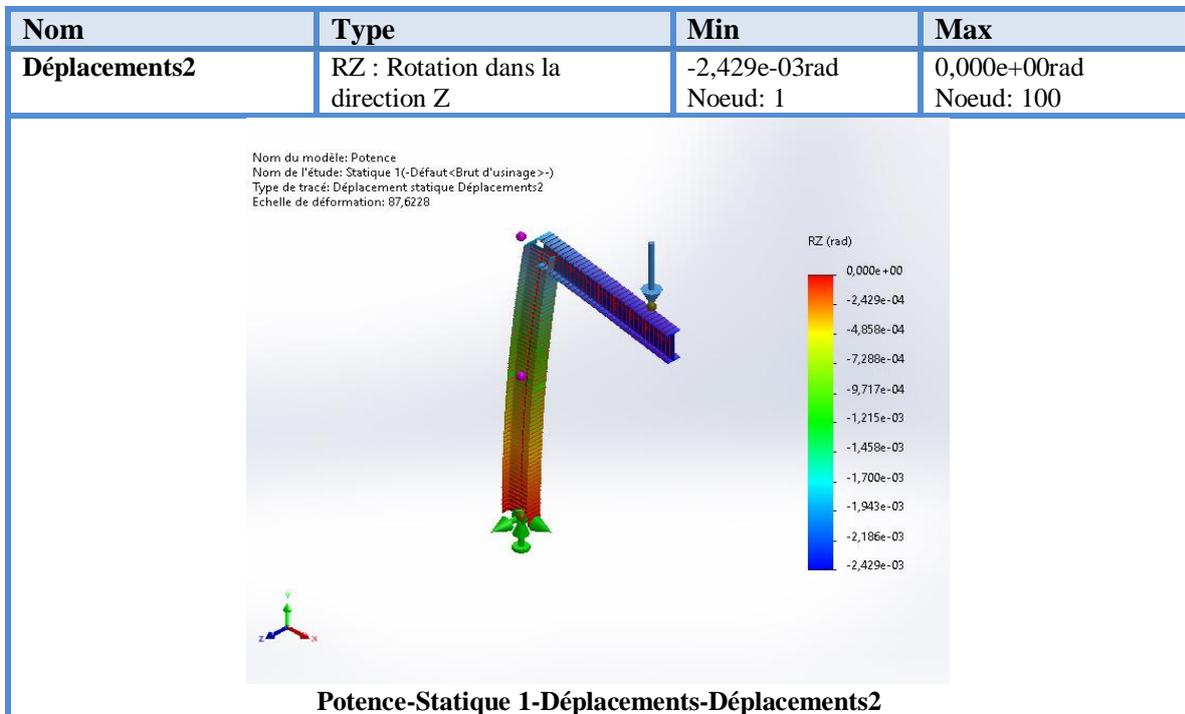
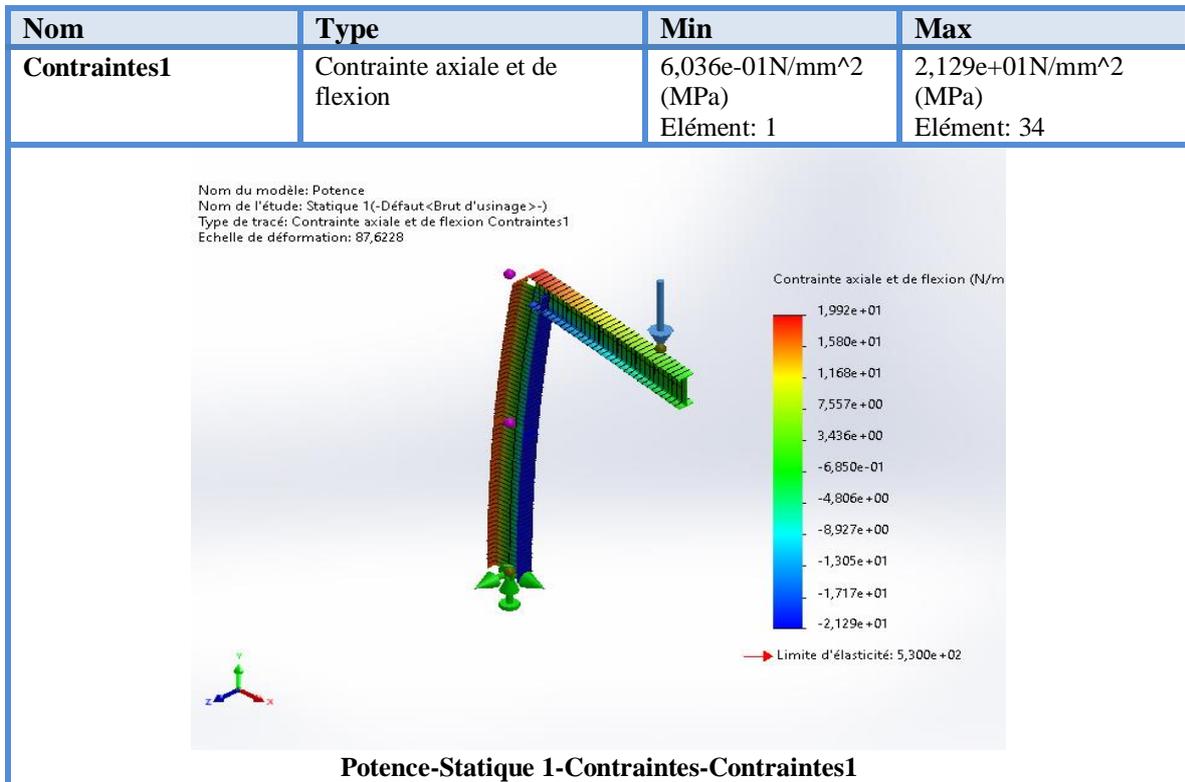
Nom de la poutre	Connexions	Axial(N)	Cisaillemen t1(N)	Cisaillemen t2(N)	Moment1(N.m)	Moment2(N.m)	Couple(N.m)
------------------	------------	----------	-------------------	-------------------	--------------	--------------	-------------

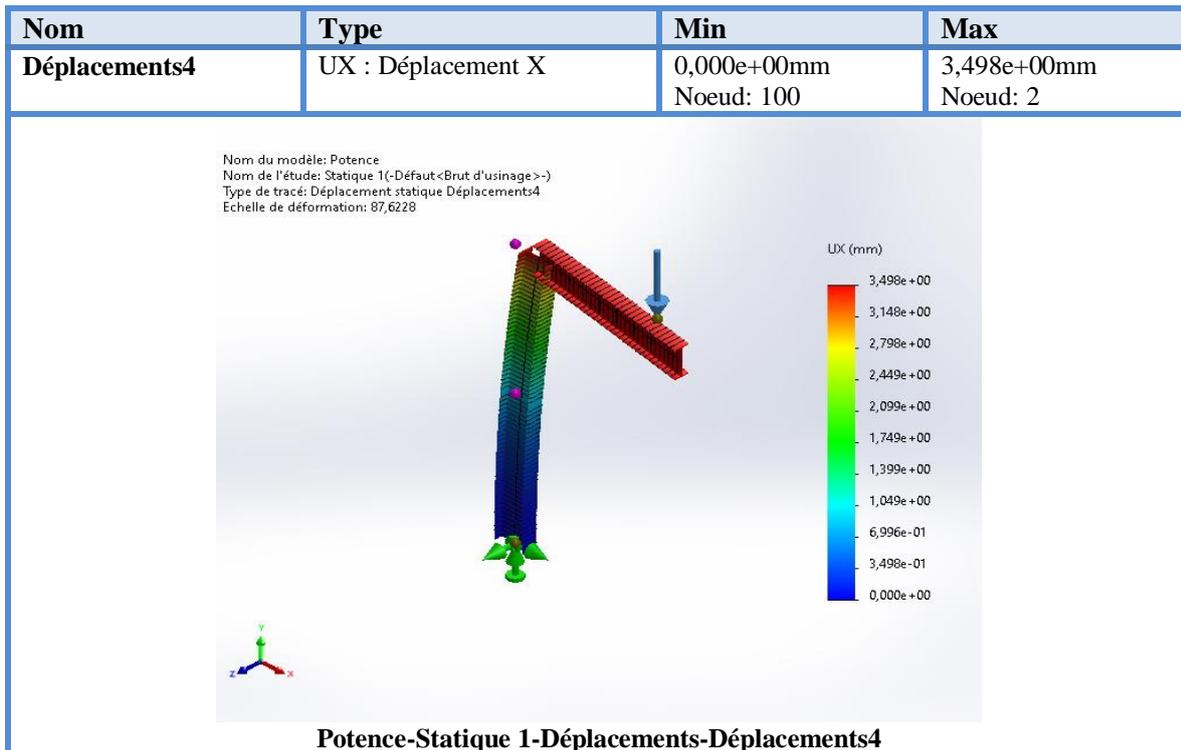
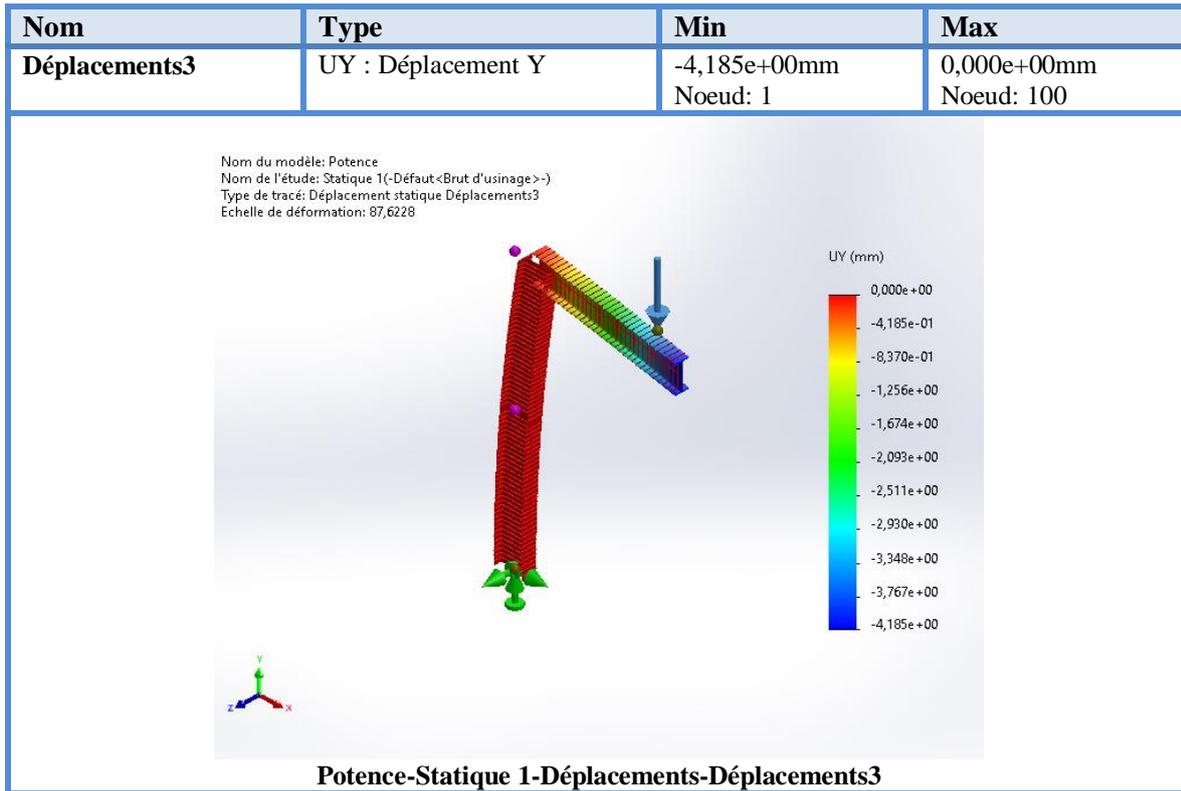
Poutre-1(Ipe beam IPE360(1)[3])	1	- 0,0437 101	-10 000	-2,67834e-11	0	2,32831e-10	6,20385e-25
	2	- 0,0437 102	10 000	2,67834e-11	4,82102e-11	-18 000	-6,6215e-20
Poutre-2(Ipe beam IPE360(1)[2])	1	10 000	7,177e-08	1,10314e-12	-2,31816e-11	18 000	- 1,98566e-12
	2	- 10 000	-5,71745e-08	6,06146e-19	4,81472e-11	-18 000	- 1,09216e-18
Poutre-3(Ipe beam IPE360(1)[1])	1	- 10 000	-5,58189e-08	2,42584e-18	4,69259e-11	-18 000	-4,3678e-18
	2	10 000	5,63887e-08	2,23895e-11	4,59779e-10	18 000	- 4,03011e-11

Contraintes dans les poutres

Nom de la poutre	Connexions	Axial(N/m ²)	Dir. de flexion1(N/m ²)	Dir. de flexion2(N/m ²)	Torsion (N/m ²)	Contrainte axiale et de flexion limite supérieure(N/m ²)
Poutre IPE360(3)	1	6,00998	0	2,57657e-07	3,22436e-19	6,00998
	2	-6,00998	3,92722e-07	1,99193e+07	- 3,44142e-14	1,99193e+07
Poutre IPE360(2)	1	- 1,37496e+06	1,88838e-07	1,99193e+07	- 1,03201e-06	2,12943e+07
	2	- 1,37496e+06	3,92209e-07	1,99193e+07	- 5,67636e-13	2,12943e+07
Poutre IPE360(1)	1	- 1,37496e+06	3,82261e-07	1,99193e+07	- 2,27009e-12	2,12943e+07
	2	- 1,37496e+06	-3,74538e-06	1,99193e+07	- 2,09459e-05	2,12943e+07

IV.1.5 Résultats de l'étude



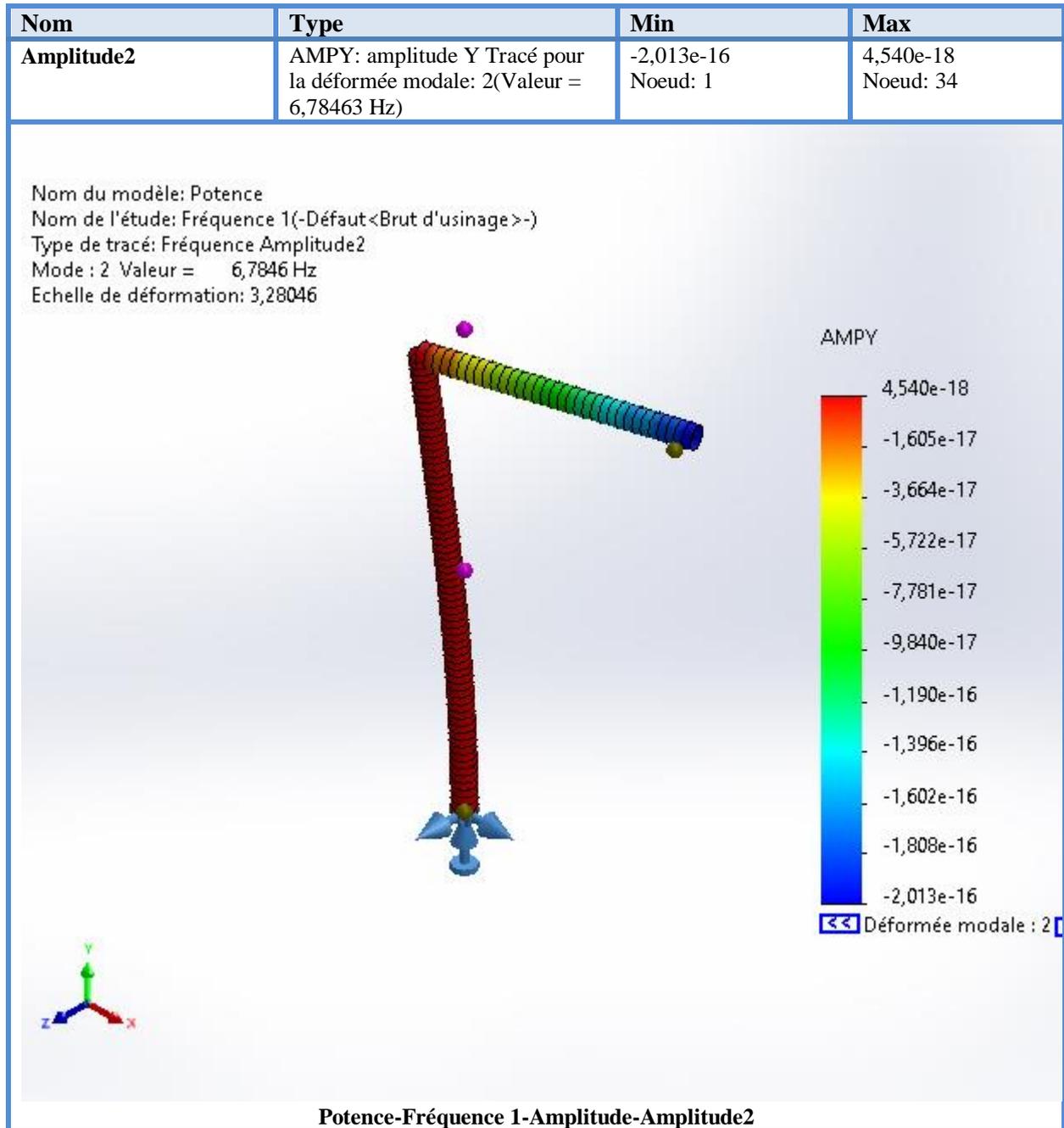


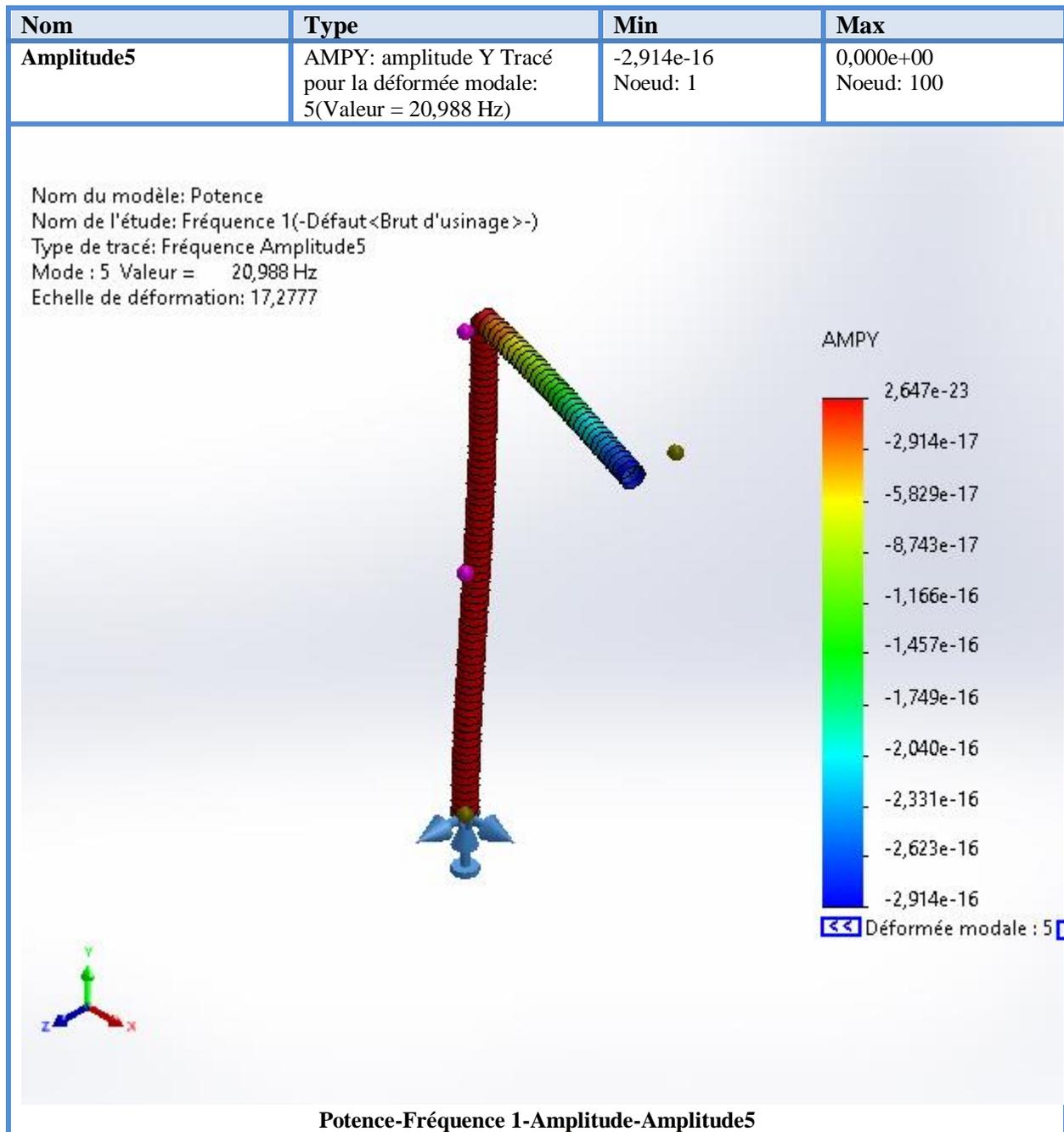
Conclusion

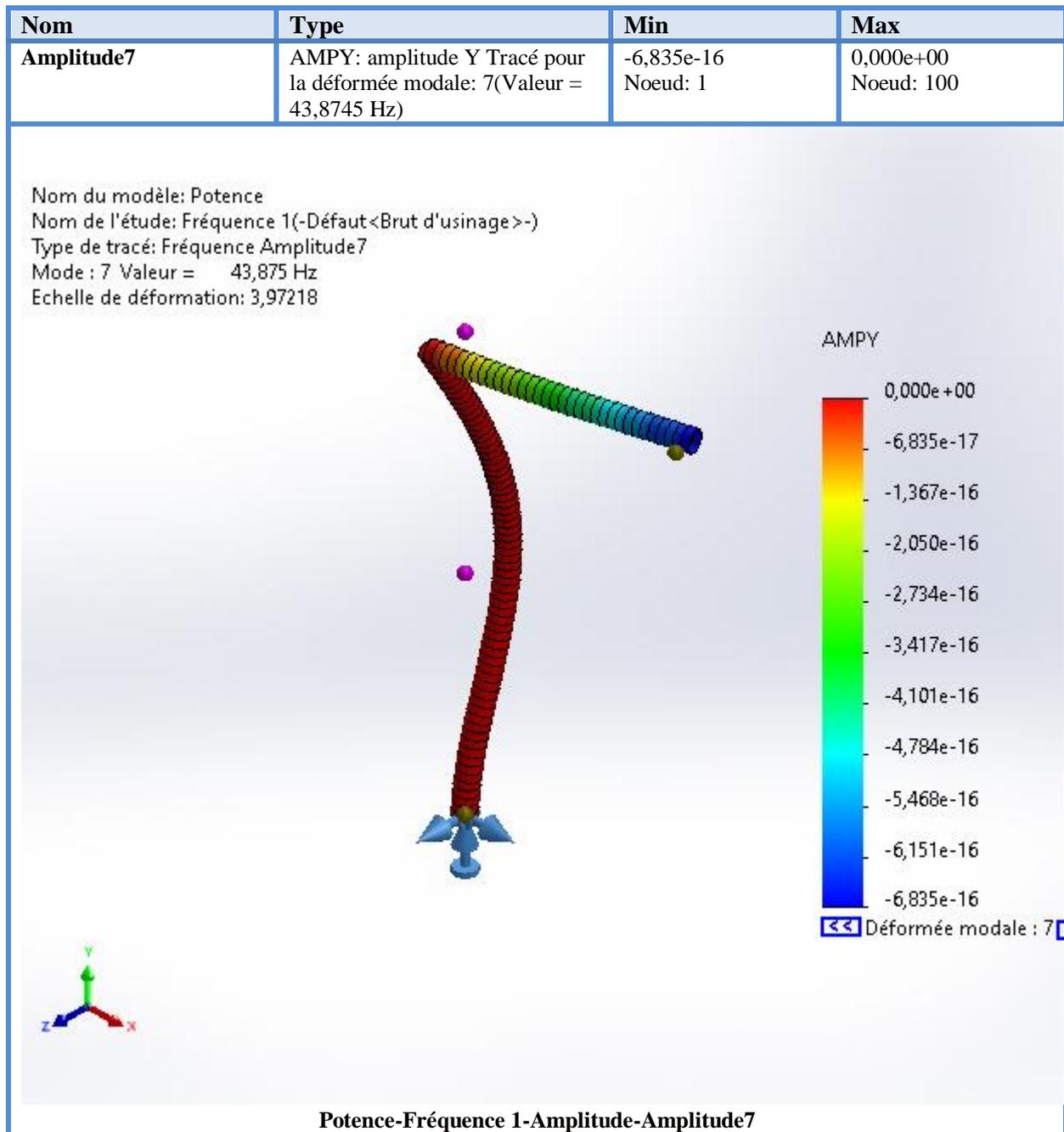
Théorique	Simulation
$u_4 = 3,5853 \text{ mm}$	3,498 mm
$v_4 = -4,1993 \text{ mm}$	-4,185 mm
$\theta_{z4} = -2,4898 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	$-2,429 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

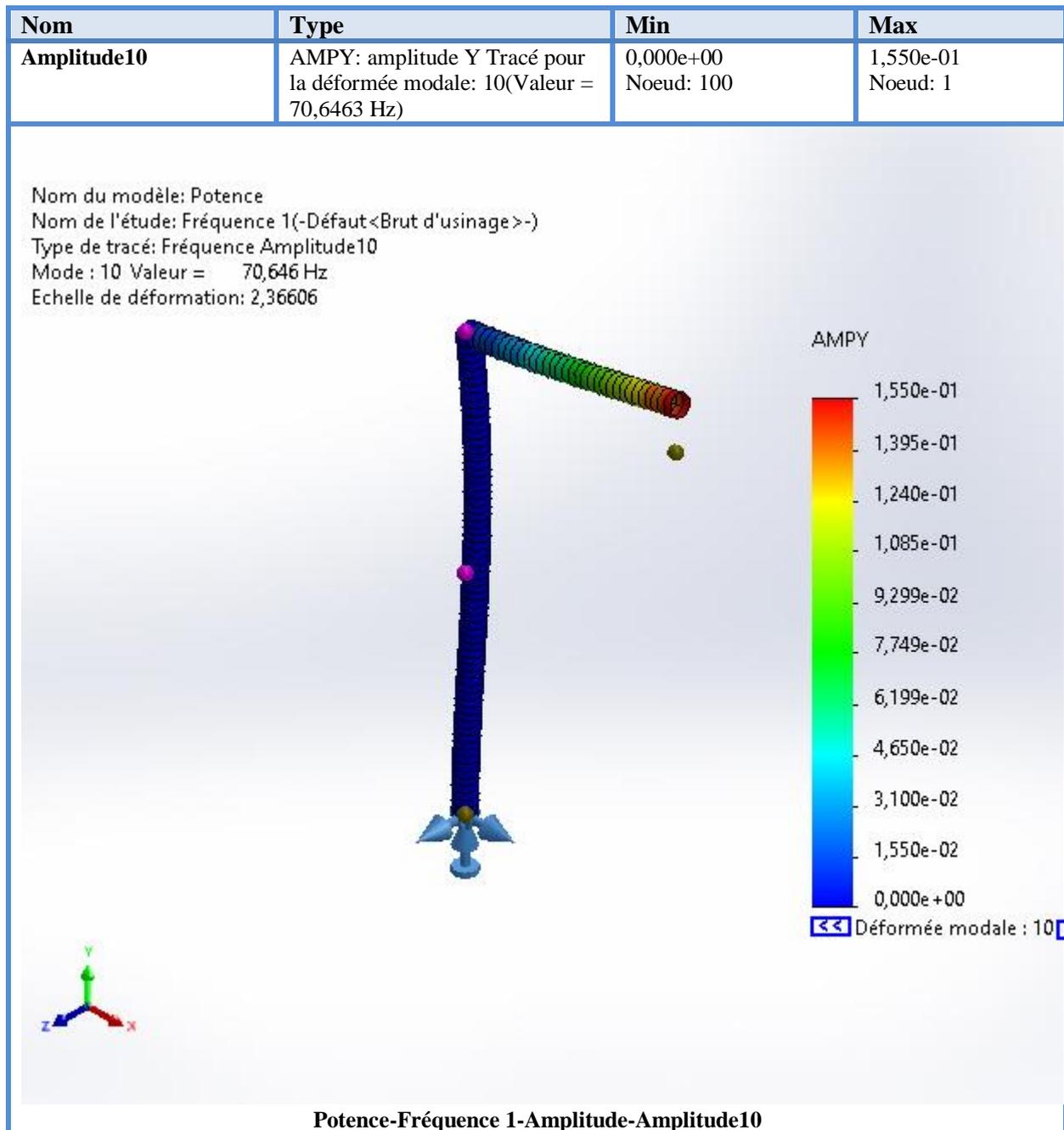
Les résultats de la simulation sont très proches des résultats théoriques.

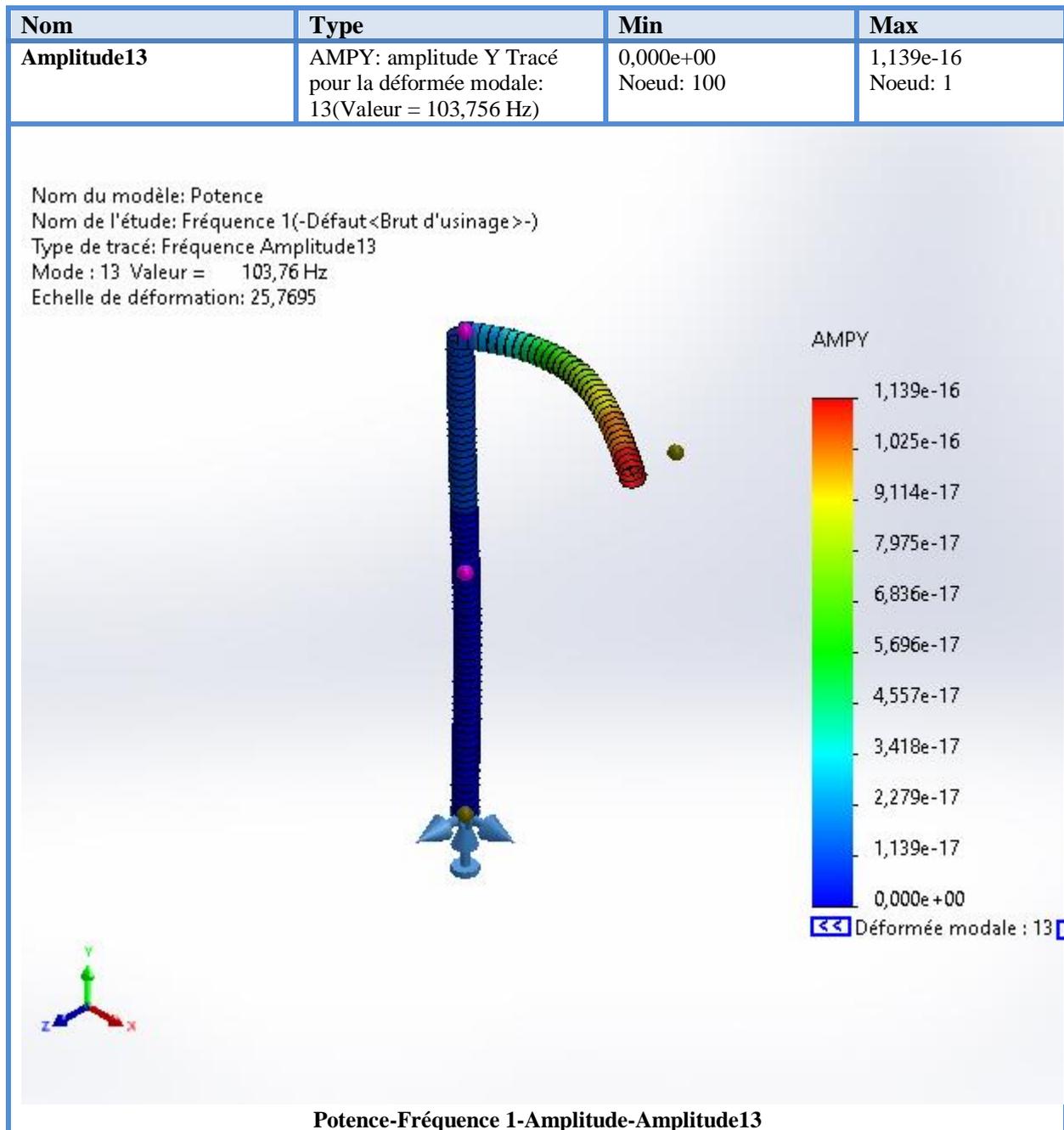
IV.2 Simulation modale de la potence.

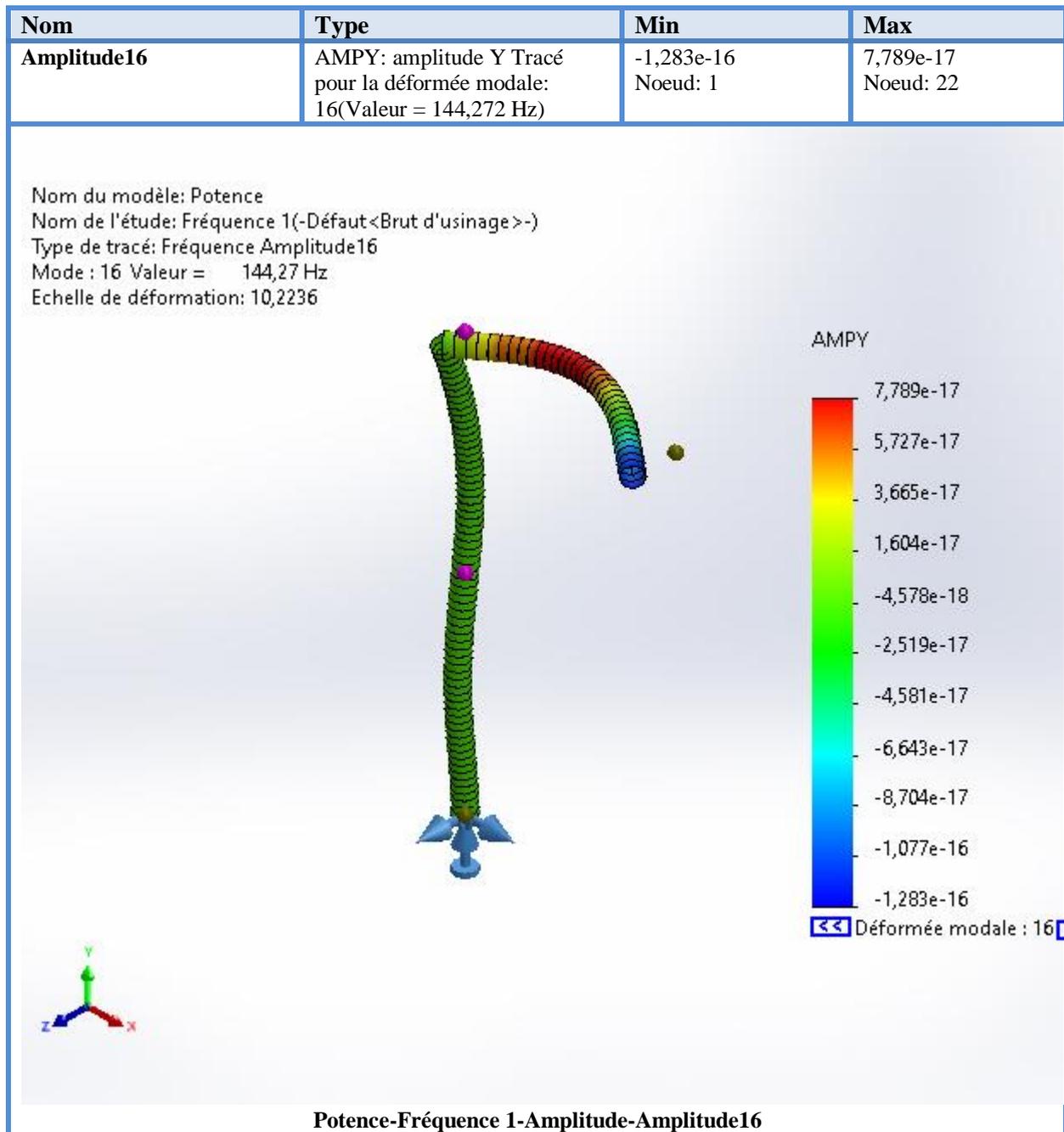












Liste des modes

Fréquence No	Rad/sec	Hertz	secondes
1	42,629	6,7846	0,14739
2	131,87	20,988	0,047646
3	275,67	43,875	0,022792
4	443,88	70,646	0,014155
5	651,92	103,76	0,009638
6	906,49	144,27	0,0069314

IV.3 Comparaison avec les résultats théoriques

Fréquence No	Théoriques (Hertz)	SOLIDWORKS (Hertz)
1	7,986425	6,7846
2	22,18451	20,988
3	43,48165	43,875
4	71,87782	70,646
5	107,373	103,76
6	149,9673	144,27

V. CONCLUSION

En conclusion, l'utilisation de la méthode des éléments finis (FEM) pour l'analyse théorique et numérique d'une potence d'atelier s'avère être une approche extrêmement efficace et précise.

Les résultats analytiques et MEF (SOLIDWORKS) obtenus sont très proches. D'après l'analyse statique et analytique, il est clair que la potence à section en I présente moins de déformations et de contraintes. La poutre ayant une section transversale en forme de IPE 360 est recommandée pour la colonne et la flèche de la potence ayant une capacité de charge de 1 000 kg. Comme les valeurs de contrainte calculées dans la flèche sont inférieures à la contrainte admissible du matériau (acier de construction) des composants. Les résultats obtenus par l'analyse FEM montrent que les conditions aux limites ont été choisies correctement. L'utilisation de la méthode FEM pour l'analyse structurelle des poutres de potence à flèche est validée.

La validation des résultats obtenus par FEM avec SOLIDWORKS garantit que les analyses théoriques et les simulations numériques correspondent étroitement aux comportements réels observés, assurant ainsi une conception optimisée et conforme aux normes de sécurité et de performance.

Référence bibliographique

- [1] D. Samir, “METHODE DES ELEMENTS FINIS,” 2018
- [2] J.-J. BARRAU and M. SUDRE, “Modélisation des structures par éléments finis,” *Fonct. Compos. mécaniques*, pp. 1–13, 1997, doi: 10.51257/a-v1-bm5015.
- [3] A. B. M. A. Mohamed, “COURS ET APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS,” 2021, [Online]. Available: Universitaire d’Ain Témouchent
- [4] M. Cazenave, “M éthode des éléments finis Approche pratique,” 2010.
- [5] Y. Debard, “Yves Debard,” *Résistance des matériaux élasticité, méthodes énergétiques, méthode des éléments fini*, 2011, [Online]. Available: <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>
- [6] A. Legay, “Calcul des structures par éléments finis,” 2016.
- [7] J. Craveur, “Modélisation des éléments finis,” p. 322, 2008.
- [8] DIN, “Propriétés des sections IPE 360 Géométrie,” 1994.
- [9] J.-M. Berthelot, “Mécanique des Matériaux et Structures Composites ISMANS Institut Supérieur des Matériaux Le Mans, France et Mécaniques Avancés.”
- [10] S. (Simon G. . Braun, D. J. Ewins, and S. S. Rao, *Encyclopedia of vibration*. Academic Press, 2002.
- [11] H. P. Lin and J. Ro, “Vibration analysis of planar serial-frame structures,” 2003. [Online]. Available: www.elsevier.com/locate/jsvi