République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Théorie spectrale des opérateurs linéaire dans les espaces normés

Présenté Par:
GattaL Narimanne

Devant le jury :

Mr, Zarai Abderrahmane	PROF	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr, Elhafsi Boukhalfa	M.C.B	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr, Mecheri Hacene	M.C.A	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 08/06/2024

بسم الله الرحمن الرحيم

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة نظرية الطيف لمؤثرات الخطية في الفضاءات باناخ وهيلبيرت ، وخصائص الطيف، ونصف قطر الطيف. ويتكون من ثلاثة فصول رئيسية:

1. **الفصل الأول**:

مقدمة وعرض للمفاهيم الأساسية المتعلقة بالمساحات الوظيفية والمؤثرات الخطية المحدودة.

2. **الفصل الثاني**: تفصيل مفاهيم طيف المؤثرين ، بدءا من مفهوم نصف القطر الطيفي وانتهاء بتحليل الطيف لأنواعه المختلفة مثل الطيف النقطي والطيف المستمر.

3. **الفصل الثالث**: عرض نظريات مؤثرات P - SYMMETRIC ودراسة طيف عامل الاشتقاق المعمم $\delta_{A,B}$ و مؤثرات P - SYMMETRIC.

Résumé

Le but de cette mémoire est d'étudier la théorie spectral des opérateurs linéaires dans les espaces normés. Cela implique l'explorer des espaces, propriétés des spectre et le rayon spectrale.

Elle se compose de trois chapitres principaux :

Chapitre 1: Introduction et exposition des concepts principaux relatifs aux espaces fonctionnels et aux opérateurs linéaires bornés.

Chapitre 2: Détaillant les concepts du spectre des opérateurs, en commençant par le concept de rayon spectral et en terminant par l'analyse du spectre à ses différents types tels que le spectre ponctuel et le spectre continu.

Chapitre 3: En étude des théories des opérateurs P-symétriques et étude du spectre de l'opérateur de dérivation généralisé $\delta_{A,B}$ ***et des opérateurs P-symétriques.***

Abstract

The purpose of this memory is to study the spectral theory of linear operators in normed spaces. This involves exploring spaces, properties of the spectral, and the spectral radius. It consists of three chapters:

Chapter 1: Introduction and exposition of the concepts relating to functional spaces and bounded linear operators.

Chapter 2: We study the concepts of the spectral operators, starting from the concept of spectral radius and ending with the analysis of the spectral to its various types such as point spectral and continuous spectral.

Chapter 3: We study the theories of P-symmetric operators and the spectral of the generalized derivation operator $\delta_{A,B}$ ***and the P-symmetric operators .***

Dédicace

- *Pour ma grand-mère, que Dieu vous accorde une longue vie. Il n'y a pas de monde comparable au vôtre, ni de patrie qui vous équivaille, car le monde a besoin de cœurs aussi purs que le vôtre.*
- *Pour celle de qui j'ai appris la générosité et l'amour, la lumière de mes yeux, ma mère.*
- *Pour celui qui m'a tenu la main pour m'apprendre mes premiers pas vers mes rêves, l'âme de mon cœur, mon père.*
- *Que Dieu vous garde en bonne santé et vous protège de tout mal. À tous mes amis " Amina, Aya, wiam, wafa, Kanza "*

Remerciement

Au début de mon discours, je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude à Dieu Tout-Puissant, qui m'a permis d'atteindre ce niveau académique élevé et qui a tracé la voie pour que je sois parmi vous aujourd'hui pour discuter de ma thèse de maîtrise. Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements au Dr. Mecheri Hacene , qui a accepté de superviser ma thèse de maîtrise, et qui m'a accordé de son précieux temps ainsi que partagé son vaste savoir et expérience, ce qui a été d'une grande valeur pour mon travail de recherche. Ses conseils avisés ont été une lumière tout au long de mon parcours de recherche. Que Dieu Tout-Puissant le récompense généreusement.Je remercie le comité de discussion, Dr. Zarai abderrahmane et Dr. Boukhalfa elhafsi d'avoir supervisé la discussion de ce travail , Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes chers parents, qui ont été mon principal soutien pour atteindre ce que j'ai accompli jusqu'à présent.

Table des matières

Introduction

Le concept du spectre a une histoire riche et profonde dans le domaine des mathématiques. Il a été initialement introduit par David Hilbert en 1897, basé sur les travaux pionniers de Wilhelm Wirtinger sur l'équation différentielle de Hillén.[19] Le terme "spectre" lui-même a ses racines dans le latin médiéval "spectrum", signifiant "apparition" ou "fantôme", suggérant la nature énigmatique et complexe des phénomènes mathématiques qu'il représente.

Les premières investigations sur le spectre étaient centrées sur les propriétés des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert. Ces travaux ont conduit à des avancées significatives dans la compréhension des structures mathématiques sous-jacentes et de leurs applications pratiques. En 1990, Diederich Hinrichsen et Tony Pritchard ont étendu ce concept en introduisant le concept d'ensemble de valeurs spectrales (spectral value set), initialement dans le cadre du contrôle des théories.[4]

Au fil du temps, le concept du spectre a évolué pour englober une multitude de domaines des mathématiques et de la physique. La théorie spectrale a des ramifications importantes en physique mathématique, en particulier en physique quartique, ainsi que dans la résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Elle trouve également des applications cruciales en géométrie différentielle, en théorie de représentations de groupes et en analyse harmonique en théorie des algèbres d'opérateurs.[16]

Ce travail de recherche se compose de trois chapitres : le premier chapitre passe en revue les différentes définitions et propriétés concernant les espaces fonctionnels et les opérateurs linéaires bornés, souvent utilisés dans la suite. Dans le deuxième chapitre, nous explorons en détail le concept du spectre des opérateurs, abordant notamment le rayon spectral, le spectre des opérateurs adjoints, le spectre des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert, ainsi que le spectre des opérateurs linéaires compacts. Enfin, Le chapitre trois donne un pref panorama des théories fondamentales des opérateurs P-symétrique ont été étudié par **J. H. Anderson, J.W. Bunce, J.A.Deddens**, **J. P. Williams, Said. Bouali** , **J.Charles**[13], **J.G. Stampfli**, puis on présente le spectre d'opérateur de dérivation généralisé présenté par **Salah Mecheri**[14], le spectre d'opérateur P-symétrique par **Said. Bouali**, **J.Charles**[13].

Cette recherche s'appuie sur une analyse approfondie de la littérature existante et des résultats antérieurs, tout en apportant de nouvelles perspectives sur le concept du spectre et ses implications dans divers domaines des mathématiques et de la physique.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre vise à rappeler au lecteur quelques concepts mathématiques et compléments pertinents dans ce contexte. Nous mettrons particulièrement l'accent sur les théories de certains espaces fonctionnels et les propriétés fondamentales des opérateurs linéaires bornés.

1.1 Les espaces fonctionnelles

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{k}$*. l'application* $p : E \to \mathbb{R}^+$ *est appelée semi-norme si elle satisfait les propriétés suivantes :*
(i) $\forall x, y \in E, p(x+y) = p(x) + p(y)$.
(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *(homogénéité).*

Remarque 1.1 *(ii) implique si* $x = 0$ *alors* $p(x) = 0$*, la réciproque n'est pas vrais en général.*

Définition 1.2 *Une semi-norme p est une norme si* $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel et p une norme sur E, le couple (E, p), est appelée espace normé, on note généralement p par* $\|.\|$ *ou* $\|.\|_E$.

Définition 1.4 *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle norme sur E, toute application* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i)$\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
(ii)$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
(iii)$\forall x, y \in E : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.5 *On dit que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une **distance** si elle vérifiée les propriétés suivantes :*
i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
ii) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in E$.
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y, z \in E$.

Définition 1.6 *Soit E un espace vectoriel et d est une distance sur E, le couple (E, d) est appelé un espace **métrique**.*

Définition 1.7 *On dit que E est un espace métrique **complet** si tout suite de Couchy convergente dans E.*

Définition 1.8 *(i) Une partie U de E est un ouvert de E si pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.*
(ii) Une partie F de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire F^c dans E est ouvert.

Théorème 1.1 ***(Baire)***[4]
Soit (E, d) un espace métrique complet, alors l'intersection de toutes familles dénombrable de sous ensemble ouverts dense dans E est dense dans E .

Corollaire 1.1 [4] *Soit (E, d) un espace métrique complet, alors :*
(i) Tout fermé de E est un espace de Baire.
(ii) Tout ouvert de E est un espace de Baire.

Définition 1.9 *Un espace vectoriel E muni du produit scalaire s'appelle un espace **préhilbertien**.*

Proposition 1.1 [1] *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ muni d'un produit scalaire, tel que* $\forall x \in E, \|x\| = |\langle x.x \rangle|^{\frac{1}{2}}$, *alors :*
i) $\|.\|$ *définit une norme sur E.*

ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x.y\rangle) + \|y\|^2, \forall x, y \in E.$

iii) ***(Cauchy-Schwartz)***

$|\langle x.y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \forall x, y \in E.$

iv) ***(Identité du parallélogramme)***

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2, \forall x, y \in E.$

Définition 1.10 *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace vectoriel muni du produit scalaire et qui est complet pour la norme associé a ce produit scalaire*

Définition 1.11 [19] *Soit E un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *,* ***un produit scalaire*** *sur* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$*, notée* $\langle . \rangle$ *, possédant les propriétés suivantes :*

(i) $\langle \alpha x + y.z\rangle = \alpha\langle x.z\rangle + \langle y.z\rangle.$

(ii) $\langle x.y\rangle = \langle yx\rangle.$

(iii) $\langle x.x\rangle \geq 0.$

(iv) $\langle x.x\rangle = 0 impliquex = 0.$

Définition 1.12 *On appelle espace de* ***Banach*** *tout espace normé complet pour la norme associée à la distance.*

1.2 Les opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Les opérateurs linéaires

Définition 1.13 [14,16] *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur* T *définit sur E dans F est dite linéaire, s'il vèrifié les conditions suivantes :*

condition additive

$\forall \varphi_1 \varphi_2 \in E$*, on a :*$T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2).$

condition homogéne

$\forall \varphi \in E, \lambda \in \Bbbk$*, on a :* $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi).$

1.2.2 Les opérateurs linéaires continus

Définition 1.14 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire T définit sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite **continu** au point x_0 de G, si on a la propriétée suivante :*
pour , loàtout suite x_n de G converge vers x_0, la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire
$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = T(x_0)$

Remarque 1.2 [14] *L'opérteur linéaire T est dit continu sur G s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.*

1.2.3 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.15 [14,16] *Un opérateur linéaire T définit sur E dans F est dite **borné** s'il existe une constante strictement positive C, telle que*

$$\|T(x)\|_F \leq C\|X\|_E \forall x \in E. \tag{1.1}$$

Notation 1.1 *On note l'espace des opérateurs linéaires bornés par $L(E,F)$.*

Proposition 1.2 [14] *La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.1) est appellé norme de T, notée*

$$\|T\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|T(x)\|_F. \tag{1.2}$$

Proposition 1.3 *Toute norme définit dans (1.2) sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.*

Théorème 1.2 [14] *Soit E un espace de dimension fini, alors tout opérateur linéaire T est dit continu, si et seulement s'il est borné.*

Théorème 1.3 [14] ***(Banach Steinhaus)***
Soit E un espace de Banach, F un espace normé et $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ $L(E,F)$, (I non nécessairement denombrable). On suppose

$$\sup_{\alpha\in I}\| T_\alpha(x)\| < \infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{\alpha\in I}\| T_\alpha\| < \infty \, .$$

C'est à dire : $\exists C > 0$ *tel que*

$$\| T_\alpha(x)\| \leq C\| X\|, \forall x \in E.$$

1.3 Les opérateurs inversibles

Pour un opérateur $T \in L(E,F)$, on définit son image par l'ensemble

$$Im(T) = \{y \in F : \exists x \in E, y = Tx\}$$

et son noyau par l'ensemble

$$ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$$

On dit que T est **injectif** si $ker(T) = 0$ et qu'il est **surjectif** si $Im(T) = F$.
Lopérateur T est **bijectif** s'il est à la fois injectif et surjectif.

Définition 1.16 [14] *Soit $T \in L(E)$, s'il existe un opérateur $S \in L(E)$ tel que $ST = TS = I$, alors on dit que T est inversible et S son inverse.*

Notation 1.2 *On désigne par $I(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et continue* ***inversibles*** *de E dans F.*

Corollaire 1.2 ***(Isomorphisme de Banach)***
Soient E et F deux espaces de Banach, $T \in L(E,F)$ bijectif, alors $T^{-1} \in L(E,F)$.

Lemme 1.1 *Soit $T \in L(E)$ tel que $\|T\| < 1$, alors $(I-T) \in I(E)$ et on a*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n.$$

De plus $I(E)$ est un ouvert de $L(E)$, et l'application $J : I(E) \longrightarrow L(E)$ telle que $J(T) = T^{-1}$ est continue.

Preuve : Comme $\|T\| < 1$, la série $\sum_n T^n$. est normalement convergente dans $L(E)$ qui est un espace de Banach donc elle converge dans $L(E)$. De plus, on vérifie facilement que

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right)(I-T) = I - T^{N+1},$$

et comme

$$\|T^{N+1}\| \leqslant \|T\|^{N+1} \underset{N\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on en déduit que

$$(I-T)\left(\sum_{n\geq 0} T^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} T^n\right)(I-T) = I,$$

d'où la résultat.

Montrons que $I(E)$ est un ouvert de $L(E)$

Soit $T_0 \in I(E)$ et $T \in L(E)$ on a

$$T = T_0 + T - T_0 = T_0(I - (I - T_0^{-1}T)).$$

De plus

$$\|I - T_0^{-1}T\| \leqslant \|T_0^{-1}(T_0 - T)\| \leqslant \|T_0^{-1}\|\|T_0 - T\|$$

Alors si $\|T_0 - T\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$, on obtient $\|I - T_0^{-1}T\| < 1$ et donc $I - (I - T_0^{-1}T)$ est inversible.

Par suite T est inversible. Finalement on obtient $B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1}) \subset I(E)$ donc $I(E)$ est ouverte de $L(E)$.

De plus si $T \in B(T_0, \|T_0^{-1}\|^{-1})$ son inverse est donné par

$$T^{-1} = \left(\sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1}T)^n\right)T_0^{-1} = \sum_{n\geq 0}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\|T^{-1}-T_0^{-1}\| &= \|\sum_{n\geq 0}(I-T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}-T_0^{-1}\| = \|\sum_{n\geq 1}(I-T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}\| \\ &\leqslant \sum_{n\geq 1}\|(I-T_0^{-1}T)^n\|\|T_0^{-1}\| \\ &= \frac{\|I-T_0^{-1}T\|}{1-\|I-T_0^{-1}T\|\|T_0^{-1}\|} \\ &= \|T_0^{-1}\|^2\frac{\|T-T_0\|}{1-\|I-T_0^{-1}T\|},\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque T tend vers T_0 .Ce qui montre la continuité de l'application $T \longrightarrow T^{-1}$ sur $I(E)$.

Corollaire 1.3 [14] *Soient $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur un corps $\Bbbk$ et $T \in L(E,F)$ bijectif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $T^{-1} \in L(E,F)$. ii) Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$
. iii) $(F, \|.\|)$ est un espace de Banach sur $\Bbbk$.

Corollaire 1.4 [14] *Soient $(F, \|.\|)$ un espace de Banach et $T \in L(E,F)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$
. ii) T est injectif et $Im(T)$ est fermé dans F.

1.4 Les formes sesquilinéaire

Définition 1.17 *Soit H un espace vectoriel sur C, l'application B de $H \times H$ dans C est une forme sesquilinéaire si :*
i) Pour tout $x \in H$, l'application $x \longrightarrow B(x,y)$ (de H dans $\mathbb{C}$) est linéaire.
ii) Pour tout $y \in H$, l'application $y \longrightarrow B(x,y)$ (de H dans $\mathbb{C}$) est anti-linéaire.

$$\begin{gathered}(i.e)\forall x,y,z \in H,\ \forall\lambda \in \mathbb{C} B(x,\lambda y+z) = \overline{\lambda}B(x,y)+B(x,z) \\ ou\ B(x+\lambda y,z) = B(x,z)+\lambda B(y,z)\end{gathered}$$

Définition 1.18 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, l'application B de $H \times H$ dans C est une forme **hermitienne** si*

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}, \forall (x,y) \in H \times H.$$

Remarque 1.3 $[Si B est hermitienne] \Rightarrow \left[B(x,x) est r e l l puisque B(x,x) = \overline{B(x,x)}\right]$.
Le plus souvent un produit scalaire est noté au lieu de B.

Définition 1.19 *Soient E un espace vectoriel sur un corps* $\mathbb{k}$ *et B une forme sesquilinéaire sur E, alors :*
i) B est dite ***positive*** *si, pour tout* $x \in E, B(x,x) \geq 0$
ii) B est dite ***définie positive*** *si, pour tout* $x \in E \setminus \{0\}, B(x,x) > 0$.

Proposition 1.4 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur un corps* $\mathbb{k}$ *et B une forme sesquilinéaire sur E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) B est continue.
ii) B est continue en $(0,0)$.
iii) Il existe $k \geq 0$ *telle que* $\forall x, y \in X \ |B(x,y)| \leq k\|x\|\|y\|$.

Notation 1.3 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur un corps* $\mathbb{k}$ *on note* $S_2(E)$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *des formes sesquilinéaires continues sur E.*

Définition 1.20 [14] *Soit* $B \in S_2(E)$, *on pose*

$$\|B\| = \sup_{\forall x,y \in E} |B(x,y)|, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1,$$

ce qui définit une norme sur $S_2(E)$. *En particulier :*

$$\forall x, y \in E \ |B(x,y)| \leqslant \|B\|\|x\|\|y\|.$$

Proposition 1.5 [14] *Soit* $T \in L(H)$, $B_T \in S_2(H)$ *l'application définie par :*

$$\forall x, y \in H, B_T(x,y) = \langle Tx.y \rangle \tag{1.3}$$

Alors, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : L(H) &\longrightarrow S_2(H) \\ T &\longmapsto B_T \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique, (i.e) une application linéaire bijective telle que pour tout

$T \in L(H), \|\Phi(T)\|_S = \|T\|_{L(H)}$.

Définition 1.21 *Soit $T \in L(H)$, on dit que T est positif (resp défini positif) si l'application B_T définie par (1.3) est une forme sesquilinéaire positive (resp. définie positive).*

1.5 Les opérateurs adjoints

Définition 1.22 [14] *Soient E et F deux espaces de Banach, E^* et F^* leurs dual respectivement et $T \in L(E,F)$.**L'adjoint** de T est T^* de F^* dans E^* vérifiente :*
i) T^* est continu, $ii)\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Proposition 1.6 [14] *Soient E et F deux espaces de Banach, E^* et F^* les espaces duales alors l'application*

$$\Phi : L(E,F) \longrightarrow L(F^*,E^*)$$
$$T \mapsto T^*$$

est une isométrie.
Soit H un espace de Hilbert, C une isométrie unitaire de H dans H (donné par le lemme de Reiz[10]) définit par : $x \mapsto \langle .x\rangle$. Soit $T \in L(H)$ on définit l'adjoint hilbertien T^* de T par la formule $T^* = C^{-1}T^*C$.

Définition 1.23 [14] *Soient H un espace de Hilbert complexe, $T \in L(H)$ et T^* l'adjoint de T définit par :*

$$\forall x, y \in H, \langle Tx.y\rangle = \langle x.T^* y\rangle.$$

Proposition 1.7 [14] *L'application qui transforme T a T^* est une isométrie bijective anti-linéaire de $L(H)$ dans lui-même. Elle vérifie de plus les propriétés suivantes :*
i) $(TS)^* = S^*T^*$. $iii)(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
ii) $(T^*)^* = T$. $iv)\|TT^*\| = \|T\|^2$.

Démonstration.iv) Soient $T \in L(H)$, T est auto-adjoint $\Leftrightarrow \langle Tx.x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$.

$$\|T^*\| = \|T\|$$

on a :

$$\begin{aligned}\langle Tx.Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \langle x.T^*Tx\rangle \\ &\Rightarrow \|Tx\|^2 \leq \|x\|\|T^*\|\|T\|\|x\| \\ &\leq \|T^*\|\|T\|\|x\|^2 \\ &\Rightarrow \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \leq \|T^*\|\|T\| \\ &\Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\|\end{aligned}$$

On répète la *même* opération avec

$$\langle T^*x.T^*x\rangle = \|T^*x\|^2 = \langle x.TT^*x\rangle$$

Pour obtient

$$\|T^*\| = \|T\|$$

d'aprés(1.3)

$$\begin{aligned}\|TT^*\| &\leq \|T\|\|T\| \\ &\leq \|T\|^2\end{aligned}$$

Proposition 1.8 *Orthogonal pour $ker(T)$ adjoint , soit $T \in L(H)$, T^* adjoint, alors :*
i) $ker(T) = (Im(T^*))^{\perp}$.
ii) $\overline{Im(T)} = (ker(T^*))$.

Preuve i) On a
$ker(T) = \{x \in H, Tx = 0\}$
$= \{x \in H, \forall y \in H, \langle Tx.y\rangle = 0\}$
$= \{x \in H, \forall y \in H, \langle x.T^*y\rangle = 0\}$
$= (Im(T^*))^{\perp}$.
ii) D'aprés i) on a $(ker(T^*))^{\perp} = (Im(T)^{\perp})^{\perp} = \overline{Im(T)}$

1.6 Les opérateurs coercifs

Définition 1.24 *Soit $T \in L(H)$, on dit que T est **coercif** s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in H, |\langle Tx.x\rangle| \geq C\|x\|^2.$$

De même, si $B \in S_2(H)$ est dite coercife (ou elliptique) s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in H, |B(x,x)| \geq C\|x\|^2.$$

Remarque 1.4 *Soit $T \in L(H)$, alors, d'après la proposition (1.6) il est clair que l'application $B_T \in S_2(H)$ définie par (1.3) est coercife si et seulement si $T \in L(H)$ est coercif.*

Proposition 1.9 *Soit $T \in L(H)$ est coercif, alors T est inversible dans $L(H)$.*

Preuve D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\forall x \in H, \|Tx\|\|x\| \geq |\langle Tx.x\rangle| \geq C\|x\|^2,$$

d'où

$$\forall x \in H, \|Tx\| \geq C\|x\|.$$

Daprès le Corollaire (1.4), il suffit de vérifier que $\overline{Im(T)} = H$. Or, pour tout $x \in H$, on a

$$|\langle T^* x.x\rangle| = |\langle x.Tx\rangle| \geq C\|x\|^2.$$

Donc T^* est aussi coercif, ce qui entraîne l'njectivité de T^*. Alors, d'après la Proposition (1.8), on obtient

$$\overline{Im(T)} = (ker(T^*))^{\perp} = 0^{\perp} = H,$$

ce qui donne le résultat.

1.7 Les opérateurs auto-adjoints

Définition 1.25 *Soit $T \in L(H)$, on dit que T est* ***auto-adjoint*** *si et seulement si $T = T^*$.*

Remarque 1.5 *T est auto-adjoint si et seulement si :*

$$\forall x, y \in H, \langle Tx.y\rangle = \langle x.Ty\rangle.$$

Notation 1.4 *Notons par $A(H)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert H.*

Proposition 1.10 *Si T est auto-adjoint, alors*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Th.h\rangle|, \|h\| = 1\}.$$

1.8 Les opérateurs linéaires compacts

Définition 1.26 *Un opérateur $T \in L(E,F)$ est compact si et seulement si, de toute suite bornée (x_n) de E, on peut extraite une sous suite (x_{n_k}) telle que la suite (Tx_{n_k}) soit convergente.*

Proposition 1.11 *Soit $T \in L(E,F)$ et $S \in L(F,G)$, si S ou T est compact alors ST est compact.*

Théorème 1.4 *Soit $T \in K(E)$, alors , $T - I$ est injectif si et seulement si $T - I$ est inversible.*

Définition 1.27 *Soit $T \in L(H)$, on dit que T est un opérateur de* ***rang finie*** *si $Im(T)$ est de dimension finie.*

Proposition 1.12 *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Théorème 1.5 ***(Schauder)***
Soit $T \in L(E,F)$, où F est complet, l'opérateur T est compact si et seulement si son adjoint T^* est compact.

Chapitre 2

Spectre des opérateurs

Nous présentons les théories spectrales des opérateurs bornés et généralisons la notion de valeur propre en dimension infinie, puis nous étudions ces propriétés dans le cadre des espaces de Banach et Hilbert.

Définition 2.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in L(H)$.*
L'ensemble :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$$

*est appelé le **spectre** de T.*
*Un élément de $\sigma(T)$ est appelé **valeur spectrale** de T.*
L'ensemble :

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ est inversible}\}$$

est appelé résolvante de T.
*Un élément de $\rho(T)$ est appelé **valeur résolvante** de T.*
*Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit **la résolvante** $R_\lambda(T)$ de T au point λ par*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Remarque 2.1 $\sigma(T) = (\rho(T))^c$.

Théorème 2.1 [1] *Le spectre de tout opérateur $T \in L(E)$ est une partie compact de* $\mathbb{k}$

Théorème 2.2 [1]*et*[4] ***(Stone)*** *Si l'espace E est complexe, alors le spectre de T n'est jamais vide.*

Exemple 2.1 *Soit $I =]0,1[$, $X = L^2(I)$ et T l'opérateur de dérivation au sens des distributions :*

$$Tu = \frac{du}{dt},$$

de domaine

$$D(T) = \{u \in L^2(I), \frac{du}{dt} \in L^2(I), u(0) = 0\} .$$

Pour $f \in L^2(I)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on remarque que l'équation

$$\frac{du}{dt} - \lambda u = f$$

admet une solution unique de la forme

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$$

dans l'espace $D(T)$. Donc $\rho(T) = \mathbb{C}$ et $\sigma(T) = \phi$.

Lemme 2.1 [1] ***(Identité de la résolvante)*** *: Soit $\lambda, \lambda_0 \in \rho(T)$, alors*

$$R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T) = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T).$$

Preuve En utilisant le fait que $(T - \lambda I)$ et $(T - \lambda_0 I)$ commutent, on a

$$\begin{aligned}(R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T))(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) &= R_\lambda(T)(T - \lambda I)(T - \lambda_0 I) - R_{\lambda_0}(T)(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) \\ &= (T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) \\ &= (\lambda - \lambda_0) I\end{aligned}$$

En composant a droite par $R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T)$, on obtient le résultat.

Définition 2.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in L(H)$, On appelle* ***spectre ponctuel****de T, l'ensemble des valeurs propres de T définit par*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{k} : T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Remarque 2.2 *On a toujours $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.*

Proposition 2.1 [1] *Soit $T \in L(E)$, alors :*
i)Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\lambda \in \rho(T)$. En particulier, on a $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$.
ii) $\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{k}$.
iii) $\sigma(T)$ est un compact non vide de $\mathbb{k}$.
iv) $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma(T)$.

Preuve i) Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\lambda \neq 0$ et $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ donc, D'après le Notation(1.2), $I - \lambda^{-1}T$ est inversible, i.e. $\lambda \in \rho(T)$.
ii) D'après le i)$\rho(T)$ est non vide. Soit l'application définie de $\mathbb{k}$ dans $L(E)$ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{k}, \varphi(\lambda) = \lambda I - T.$$

Alors $\rho(T) = \varphi^{-1}I(E)$. De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, on a

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| \leqslant |\lambda - \mu|,$$

donc φ est continue. Or d'après le Notation(1.2) $I(E)$ est un ouvert de $L(E)$. Ainsi $\varphi^{-1}I(E)$ est un ouvert de $\mathbb{k}$.
iii) D'après le ii) $\sigma(T) = \mathbb{k} \backslash \rho(T)$ est fermé, or il est borné d'après le i) donc compact.
iv) D'après la remarque (2.2) $\sigma_{p(T)} \subset \sigma(T)$. De plus $\sigma(T)$ est fermé donc $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma(T)$
.

2.1 Rayon spectral

Définition 2.3 *Le* ***rayon spectral*** *de T noté $r(T)$ et définit par*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Exemple 2.2 *Lorsque $E = C([0,1])$ et $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, on a $\sigma(T) = \{0\}$ et donc $r(T) = 0$.*

Remarque 2.3 *Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors $r(T) = 0$.*

Théorème 2.3 [1]*Soit $T \in L(E)$, alors :*
i) $\lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et est égale à $r(T)$.
ii) Si $E = H$ est un espace de Hilbert complexe et si $T \in L(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$.

Proposition 2.2 [1]*et* [14] *Soit H un espace de Hilbert complexe, le rayon spectrale de tout élément normal de $L(H)$ est égale à sa norme.*

Preuve Soit d'abord T un élément auto-adjoint, on a $\|T^2\| = \|TT\| = \|T\|^2$(proposition 1.7), on en déduit par récurrence que $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ pour tout $n \geq 0$, donc $r(T) = \|T\|$. Soit maintenant S un élément normal de $L(H)$, par récurrence sur n, on a $(S^*S)^n = (S^*)^n S^n$ donc $\|(S^*S)^n\| = \|S^n\|^2$ et $r(S^*S) = r(S)^2$. Or $T = S^*S$ est auto-adjoint, donc $r(T)^2 = r(S^*S) = \|S\|^2$.

Exemple 2.3 *Soit T un opérateur auto-adjoint sur espace Hilbert complexe H le rayon spectral de T est égale à sa norme.*

Exemple 2.4 *Soit U un opérateur unitaire sur espace Hilbert complexe H le rayon spectral de U est égale à sa norme.*

2.2 Spectre des opérateurs adjoints

2.2.1 Spectre des opérateurs adjoints dans un espace de Banach

Théorème 2.4 [1]***(Théorème de Phillips)***
Soit E un espace de Banach complexe, $T \in L(E)$ et $T^* \in L(E^*)$ l'adjoint de T, alors
i) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$
ii) $\forall \lambda \in \rho(T)$, $R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*$

Proposition 2.3 [1] *Soit E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$. Alors*
i) Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $Im(T^* - \lambda I)$ n'est pas dense dans E^*.
ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $Im(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans E, alors $\lambda \in \sigma_p(T^*)$.
iii) Si E est réflexif, i.e. si $(E^*)^* = E$, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $Im(T^* - \lambda I)$ n'est pas dense dans E^*.

Lemme 2.2 [1] *Soit E un espace vectoriel complexe normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel complexe. Alors $\overline{F} \neq E$ si et seulement si il existe une forme linéaire $\Phi \in E^*$ non nulle telle que $F \subset ker\Phi$.*

2.2.2 Spectre des opérateurs adjoints dans un espace de Hilbert

Définition 2.4 *Une involution sur une algèbre U est une application $\varphi : U \to U$ telle que :*
i) $\varphi^2 = Id_U$.
ii) $\varphi(\lambda T) = \overline{\lambda}\varphi(T)$.
iii) $\varphi(TS) = \varphi(S)\varphi(T)$.

Définition 2.5 *Une algèbre de Banach U munie d'une involution $T \to T^*$ vérifant*

$$\forall T \in U \ \|TT^*\| = \|T\|^2$$

est appelée une C^* ***-algèbre****.*
$L(H)$ munie de l'opération "adjoint" est une C^* ***-algèbre****.*
Cet résultat est une conséquence du théorème (2.4), dans le cas particulier où $E = H$(H est un espace de Hilbert complexe)

Proposition 2.4 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in L(H)$ et $T^* \in L(H^*)$ l'adjoint hilbertien de T. Alors*
i)$\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \{|\overline{\lambda}|\lambda \in \sigma(T)\}$.
ii)$\forall \lambda \in \rho(T), R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

Preuve Si T est inversible, alors d'aprés la proposition (1.8) on a

$$\begin{cases} (T^{-1})^*T^* = (T(T^{-1}))^* = I^* = I \\ T^*(T^{-1})^* = ((T^{-1})T)^* = I^* = I \end{cases}$$

ce qui signifie que T^* est aussi inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Comme $T \mapsto T^*$ est une involution, la réciproque est immédiate, autrement dit : T est inversible si est seulement si T^* est inversible.
Donc $\forall \lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T)$ est inversible $\Leftrightarrow (\overline{\lambda} I - T^*)$ est inversible $\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$
Et alors

$$((\lambda I - T)^{-1})^* = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1}.$$

2.3 Spectre des opérateurs auto-adjoint dans un espace de Hilbert

Théorème 2.5 *$T \in L(H)$ est un opérateur auto-adjoint, on suppose $H \neq \{0\}$ avec*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx.x\rangle et M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx.x\rangle$$

Alors
i)$m, M \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$.
ii)$m, M \in \sigma(T)$.
iii)$\sigma(T) \subset [m, M]$.

Exemple 2.5 *(i) L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.*
(ii) les opérateurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$ donné par des matrices hermitiennes (a_{ij}), c'est à dire telles que $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$;
(iii) Un opérateur intégral $(Tf)(t) = \int_0^1 k(s,t)f(s)ds$ sur $L^2([0,1],\mathbb{C})$ avec un noyau hermitien, c'est à dire tel que $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$;
(iv) Les projections orthogonales sur des sous-espaces de H.

Remarque 2.4 *Tout opérateur $T \in L(H)$ peut être représenté de manière unique comme*

$$T = A + iS$$

où $A, S \in L(H)$ sont opérateurs auto-adjoints.
En effet, si on écrit $T = A + iS$, alors $T^* = A - iS$. La résolution de ce système d'équations, donne $A = \frac{T+T^*}{2}$ et $S = \frac{T-T^*}{2i}$

Corollaire 2.1 *i) Soit $T \in L(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.*
ii) Un opérateur auto-adjoint T sur H est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$.

Preuve du théorème(2.5) :
i) Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|\langle Tx.x\rangle| \leq \|T\|.$$

Or, T étant auto-adjoint, $\langle Tx.x\rangle \in \mathbb{R}$ et donc

$$\langle Tx.x\rangle \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}.$$

On en déduit $m, M \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$.
ii) On pose $S = T - mI$ et on note, pour touts $x, y \in H, B_S(x, y) = \langle Sx.y\rangle$. Alors $B_S \in S_2$.
De plus, m étant réel, on obtient pour tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned} B_S(x, y) &= \langle Tx - mx.y\rangle = \langle Tx.y\rangle - \langle mx.y\rangle \\ &= \langle x.Ty\rangle - \langle x.my\rangle = \langle x.Sy\rangle \\ &= \overline{B_S(y, x)} \end{aligned}$$

Donc B_S est hermitienne. Enfin, D'aprés définition de $(1, 24)$ pour tout $x \in H \setminus \{0\}$, on a

$$m \leq \langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right).\frac{x}{\|x\|}\rangle$$

d'où $m\|x\|^2 \leq \langle Tx.x\rangle$. Ainsi, on obtient

$$B_S(x, x) = \langle Tx - mx.x\rangle = \langle Tx.x\rangle - m\|x\|^2 \geq 0,$$

et donc B_S est une forme sesquilinéaire, hermitienne et positive sur H. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour touts $x, y \in H$, on a

$$|B_S(x, y)|^2 \leq B_S(x, x)B_S(y, y),$$

soit encore

$$|\langle Sx.y\rangle|^2 \leq \langle Sx.x\rangle\langle Sy.y\rangle. \tag{2.1}$$

D'une part, par définition de m, il existe une suite $(x_n)_n \geq 0$ de H avec $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\langle T(x_n).x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} m,$$

autrement dit

$$\langle S(x_n).x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \tag{2.2}$$

D'autre part, en appliquant (2.1) avec $x = x_n$ et $y = Sx_n$, où $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|\langle S(x_n).S(x_n)\rangle|^2 \leq \langle S(x_n).x_n\rangle\langle S(S(x_n)).S(x_n)\rangle.$$

On en déduit

$$\|S(x_n)\|^4 \leq \langle S(x_n).x_n\rangle \|S\| \|S(x_n)\| \|S(x_n)\|,$$

et donc

$$\|S(x_n)\|^2 \leq \langle S(x_n).x_n\rangle \|S\|. \tag{2.3}$$

Alors, d'après (2.2) et (2.3), on obtient

$$S(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Finalement, supposons que $m \notin \sigma(T)$, alors $S = T - mI$ est inversible et on a

$$x_n = S^{-1}S(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui est absurde puisque $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $m \in \sigma(T)$. De plus, en considérant l'opérateur $-T$, on obtient

$$\inf_{\|x_n\|=1} \langle -Tx.x\rangle \in \sigma(-T),$$

d'où

$$M = \sup_{\|x_n\|=1} \langle Tx.x \rangle = \inf_{\|x_n\|=1} \langle -Tx.x \rangle \in \sigma(T).$$

iii) Si $\lambda \in \mathbb{k} \setminus [m, M]$, alors $d = dist(\lambda, [m, M]) > 0$. Or, pour tout $x \in H \setminus \{0\}$, on a

$$\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right).\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\rangle \in [m, M],$$

donc

$$|\langle \lambda x - Tx.x \rangle| = |\lambda - \langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right).\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\rangle| \|x\|^2 \geq d\|x\|^2.$$

On en déduit que $T - \lambda I$ est coercif donc inversible, (i.e) $\lambda \in \rho(T)$.

Corollaire 2.2 *Soit T un opérateur auto-adjoint dans $L(H)$ telle que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.*

Démonstration- D'après la théorème :(2.5) on sait que

$$(Tx, x) = 0 \ \forall x \in H.$$

Il en résulte que

$$2(Tx, y) = (T(x+y), x+y) - (Ty, y) = 0 \ \forall x, y \in H.$$

Donc $T = 0$.

Le résultat suivant est fondamental, il montre qu'un opérateur auto-adjoint compact est **diagonalisable** dans une base convenablement choisie.

Proposition 2.5 *Soit T un opérateur auto-adjoint positif alors $\|T\| = M$.*

Définition 2.6 *Un opérateur $T \in L(H)$ est défini positif et pour tout $x \in H$:*

$$\langle Tx.x \rangle \geq 0$$

Exemple 2.6 *Pour tout opérateur $T \in L(H)$, on a $T^*T \geq 0$ car pour tout $x \in H$*

$$\langle T^*Tx.x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0.$$

2.4 Spectre des opérateurs linéaires compacts

2.4.1 Spectre des opérateurs linéaire compacts dans un espace de Banach

Lemme 2.3 *Si $T \in K(E)$, alors $ker(T - I)$ est de dimension finie.*

Lemme 2.4 *Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$, $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble*

$$\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

est fini.

Proposition 2.6 *Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$, et $\lambda \in \sigma_p(T)$. Si $\lambda \neq 0$, alors l'espace propre $ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.*

Preuve Supposons par l'absurde que $ker(T-\lambda I)$ contienne une suite orthonormale infinie (e_n). Comme T est compact, on peut en extraire une sous-suite (e_{n_k}) telle que (Te_{n_k}) converge.
Mais pour $n_k \neq n_j$, on a

$$\|Te_{n_k} - Te_{n_j}\| = |\lambda|\|e_{n_k} - e_{n_j}\| \leq \sqrt{2}|\lambda|$$

ce qui contredit le fait que (Te_{n_k}) est une suite de Cauchy.

Proposition 2.7 *Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$, $\lambda \neq 0$, si $\inf\{\|(T - \lambda I)h\| : \|h\| = 1\} = 0$, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Preuve Par hypothèse, il existe une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que

$$\|(T - \lambda Id)h_n\| \to 0.$$

Comme T est compact, il existe une sous-suite (h_{n_k}) telle que (Th_{n_k}) converge vers $f \in E$. En écrivant $h_{n_k} = \lambda^{-1}\left[Th_{n_k} - (T - \lambda Id)h_{n_k}\right]$, on voit que h_{n_k} converge vers $\lambda^{-1}f$. En particulier $\|f\| = |\lambda|$ donc

$f \neq 0$.
De plus, (Th_{n_k}) converge vers $\lambda^{-1}Tf$, ce qui montre que $\lambda^{-1}Tf = f$, donc $Tf = \lambda f$. On a donc bien trouvé un vecteur propre, et $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Proposition 2.8 *Si T est auto-adjoint, alors $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.*

Théorème 2.6 *Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$, alors*
i) Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$.
ii) $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$ et pour tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ le sous-espace propre associé $ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.
iii) Le spectre de T est dénombrable. De plus, s'il est infini, les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ forment une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{k}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0.$$

Preuve i) Si $0 \notin \sigma(T)$ alors T est inversible dans $L(E)$ et $I = T^{-1}T \in K(E)$ d'après la Proposition (1.11), l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.
ii) On a $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $T - \lambda I$ est non inversible dans $L(E)$, ce qui équivaut encore à $\lambda \neq 0$ et $\lambda^{-1}T - I$ est non inversible dans $L(E)$. Or, d'après le théorème (1.4) appliquée à $\lambda^{-1}T$, $\lambda^{-1}T - I$ n'est pas inversible dans $L(E)$ si et seulement si $T - \lambda I$ n'est pas injectif. Donc $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(T)$. De plus, d'après le Lemme(2.3), $ker(\lambda^{-1}T - I)$ est de dimension finie donc $ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.
iii) D'après le Lemme (2.4) et ii), pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T), |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T), |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ est fini, soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n_0}$ ses éléments classés de la façon suivante :

$$|\lambda_0| \geq ... \geq |\lambda_{n_0}| \geq \frac{1}{n}.$$

De même, l'ensemble

$$\Lambda_n = \{\lambda \in \sigma(T), \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n}\}.$$

est fini. On pose $\Lambda_n = \{\lambda_{n_0+1}, ..., \lambda_{n_1}\}$ où les λ_i sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq \ldots \leq |\lambda_{n_0+1}| \leq \frac{1}{n} \leq |\lambda_{n_0}| \leq \ldots \leq |\lambda_0|$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroît en module vers 0.

2.4.2 Spectre des opérateurs linéaires compacts dans un espace de Hilbert

Théorème 2.7 [18] *Soit H un espace de Hilbert et $T \in K(H)$. Si T est hermitien, il existe un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{k}$ qui est fini ou dénombrable avec 0 comme unique valeur d'adhérence et des projections orthogonales p_λ sur des espaces vectoriels fermés N_λ deux à deux orthogonaux, de dimension finie sauf éventuellement pour $\lambda = 0$, tels que*

$$T = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda p_\lambda,$$

En fait, $\Lambda = \sigma(T)$, $N_\lambda = ker(T - \lambda I)$ et $H = \overline{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda}$
En particulier, T a une valeur propre de module $\|T\|$. Ce résultat vaut encore si T est normal lorsque $\mathbb{k}$.

Théorème 2.8 [18] *Soit $T \in K(H)$. Il existe des systèmes orthonormés (x_j) et (y_j) et une suite réelle (z_j) qui décroît vers 0 tels que*

$$T(x) = \sum z_j \langle x.x_j \rangle y_j \, pour \, tout \, x \in H. \tag{2.4}$$

En fait, les z_j sont les valeurs propres de $|T|$ répétées selon leur multiplicité et associées avec les vecteurs propres x_j : ce sont les valeurs singulières de T.

2.5 Spectre des opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace de Hilbert

2.5.1 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints de rang fini

Théorème 2.9 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie, alors*
i) Les sous-espaces propres $ker(T - \lambda I)$, où $\lambda \in \sigma_p(T)$, sont deux à deux orthogonaux,
ii) T est diagonalisable dans une base orthonormale et $H = \bigoplus^{\perp}_{\lambda\in\sigma_p(T)} ker(T - \lambda I)$.

iii) T admet la décomposition spectrale suivante :

$$T = \sum_{\lambda\in\sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $ker(T-\lambda I)$.

Proposition 2.9 *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini. Alors*
i) $H = Im(T)\bigoplus^{\perp} ker(T)$.
ii) $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.
iii) Pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}$, $ker(T-\lambda I)$ est de dimension finie.

Preuve D'après la Proposition (1.8), on a

$$ker(T) = (Im(T^*))^{\perp} = (Im(T))^{\perp}.$$

Or $Im(T)$ est fermé, car de dimension finie, donc

$$H = Im(T)\bigoplus(Im(T))^{\perp} = Im(T)\bigoplus ker(T),$$

ce qui donne le résultat.
Les propriétés ii) et iii) sont alors simplement des conséquences du théorème spectral des opérateurs compacts (Théorème (2.6)).

Lemme 2.5 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini et T_1 sa restriction à $Im(T)$, i.e. $T_1 = T_{|Im(T)}$, alors*
i) $T_1 \in L(Im(T))$ est auto-adjoint.
ii) T_1 est inversible et $0 \notin \sigma_p(T_1)$.
iii) $\sigma_p(T_1) = \sigma_p(T)\setminus\{0\}$.
iv) Pour tout $\lambda \in \sigma_p(T_1)$, $ker(T_1-\lambda I) = ker(T-\lambda I)$.

Preuve Si $Im(T) = \{0\}$, alors $H = ker(T)$ donc $T = 0$ et le résultat est trivial.
Dans la suite, on suppose $Im(T) \neq \{0\}$
i) T_1 est un opérateur auto-adjoint continu car T l'est.

ii) Si $x \in Im(T)$ vérifie $T_1 x = 0$, alors

$$x \in Im(T) \cap ker(T) = \{0\},$$

d'après la Proposition (2.9). Donc T_1 est injectif et comme $Im(T)$ est de dimension finie, T_1 est inversible.

Puisque T_1 est injectif, on obtient aussi $0 \notin \sigma_p(T_1)$.

iii) Comme $T_1 = T_{|Im(T)}$, il est clair que $\sigma_p(T_1) \subset \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

Réciproquement, si $Tx = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors

$$x = T(\lambda^{-1}x) \in Im(T),$$

donc

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(T_1).$$

iv) Soit $\lambda \in \sigma_p(T_1)$. Si $x \in ker(T_1 - \lambda I)$, alors

$$\lambda x = T_1 x = Tx$$

donc

$$x \in ker(T - \lambda I)$$

Réciproquement, si $x \in ker(T - \lambda I)$, alors

$$x = T(\lambda^{-1}x) \in Im(T)$$

d'où

$$\lambda x = Tx = T_1 x \text{ et } x \in ker(T_1 - \lambda I).$$

Théorème 2.10 *$T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini, alors :*

i) $\sigma_p(T)$ est fini.

ii) $H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}^{\perp} ker(T - \lambda I)$.

iii) T admet la décomposition spectrale suivante :

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $ker(T - \lambda I)$.

Preuve On note $T_1 = T_{|Im(T)}$.
i) Comme $Im(T)$ est de dimension finie, $\sigma_p(T_1)$ est fini. Or d'après le Lemme(2.5),

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T_1),$$

d'où le résultat.
ii) Puisque $T_1 \in L(Im(T))$ est auto-adjoint et que $Im(T)$ est de dimension finie le Théorème(2.9) appliqué à T_1 entraîne

$$Im(T) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T_1)}^{\perp} ker(T_1 - \lambda I) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}}^{\perp} ker(T - \lambda I),$$

Si $0 \notin \sigma_p(T)$, alors $ker(T) = \{0\}$ donc

$$H = Im(T) \bigoplus ker(T) = Im(T) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}}^{\perp} ker(T - \lambda I) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}^{\perp} ker(T - \lambda I).$$

Si $0 \in \sigma_p(T)$ alors

$$H = Im(T) \bigoplus ker(T) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}}^{\perp} ker(T - \lambda I) \bigoplus^{\perp} ker(T) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}^{\perp} ker(T - \lambda I).$$

iii) Pour $x \in H$, d'après le ii), on a

$$x = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} x_\lambda \text{ où } x \in ker(T - \lambda I)$$

On en déduit

$$Tx = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} Tx_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda x_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda x.$$

2.5.2 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compact

Lemme 2.6 *Soit T est un opérateur auto-adjoint compact, alors l'un des deux nombres $+\|T\|, -\|T\|$ sont des valeurs propres de T.*

Preuve Si $T=0$, c'est évident. Sinon, la proposition (1.10) fournit une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $|\langle Th_n.h_n\rangle| \longrightarrow \|T\|$. Quitte à remplacer (h_n) par une de ses sous-suites, on peut supposer que $|\langle Th_n.h_n\rangle| \longrightarrow \lambda$, avec $\lambda = \underline{+}\|T\|$. On a

$$0 \leq \|(T-\lambda I)h_n\|^2 = \|Th_n\|^2 - 2\lambda\langle Th_n.h_n\rangle + \lambda^2 \to 0$$

et donc $\lim \|(T-Id)h_n\| = 0$. Par la proposition (2.7), cela implique que $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Lemme 2.7 *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors*

$$\|T\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(T)\}.$$

En particulier, si $\sigma_p(T)\setminus\{0\} = \phi$ .alors $T=0$.

Lemme 2.8 *Soient $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact et $\lambda_1,...,\lambda_k$ des valeurs propres non nulles, deux à deux distinctes, de T. Alors*
i)$H = G\bigoplus^{\perp} F$, où $G = \bigoplus_{j=1}^{k} ker(T-\lambda_i I)$ et $F = G^{\perp}$.
ii) $T(G) \subset G, T(F) \subset F$ et l'opérateur T_F induit par T sur F est un opérateur auto-adjoint compact.
iii) $\sigma_p(T_F) = \sigma_p(T)\setminus\{\lambda_1,....,\lambda_k\}$
iv) Si $\sigma_p(T)\setminus\{0\} = \{\lambda_1,....,\lambda_k\}$ alors T est de rang fini.

Preuve i) Soit $j \in \{1,..,k\}$. Comme $\lambda_j \neq 0$ et T est compact, $ker(T-\lambda_j I)$ est de dimension finie. On en déduit que $G = \bigoplus_{j=1}^{k} ker(T-\lambda_j I)$ est un sous-espace de dimension finie de H, donc un fermé, d'où $H = G\bigoplus G^{\perp}$.
ii) Si $x \in G$ alors $x = \sum_{j=1}^{k} e_j$, où $e_j \in ker(T-\lambda_j I)$, $j = 1,...,k$, donc

$$Tx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j \in G.$$

Donc $T(G) \subset G$. Soit $x \in F$. Alors, pour tout $y \in G$, $T_y \in G$ donc $\langle x.T_y \rangle = 0$ car $F = G^{\perp}$.
Puisque T est auto-adjoint, on obtien

$$\forall y \in G, \langle Tx.y \rangle = \langle x.T_y \rangle = 0,$$

i.e.$Tx \in G^{\perp} = F$, d'où $T(F) \subset F$. De plus $T(B_F) = T(B_E \cap F) \subset T(B_E) \cap F$.
Comme T est compact et F fermé, on en déduit que T_F est compact.
iii) Il est clair que on a l'inclusion $\sigma_p(T_F) \subset \sigma_p(T)$. Supposons $\lambda_i \in \sigma_p(T_F)$, où $i \in \{1, ..., k\}$, alors il existe $e \in F \setminus \{0\}$ tel que $T_F e = \lambda_i e$, d'où

$$e \in ker(T - \lambda_i I) \subset G = \bigoplus_{j=1}^{k} ker(T - \lambda_j I).$$

Donc $e \in F \setminus \{0\} \cap G = \phi$ d'où une contradiction. On en déduit

$$\sigma_p(T_F) \subset \sigma_p(T) \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$$

Réciproquement, si $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ alors il existe $e \in ker(T - \lambda I) \setminus \{0\}$ tel que $Te = \lambda e$.
comme $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, $ker(T - \lambda I)$ est orthogonal à G. Donc

$$ker(T - \lambda I) \subset G^{\perp} = F.$$

d'où $T_F e = \lambda e$ avec $e \in F \setminus \{0\}$, i.e $\lambda \in \sigma_p(T_F)$.
iv) Si $\sigma_p(T) \setminus \{0\} - \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, alors $\sigma_p(T_F) \setminus \{0\} = \phi$.
Donc, d'après le Lemme(2.7), $T_F = 0$. Or si $y \in Im(T)$ alors il existe $x \in H$ tel que $Tx = y$.
Ainsi, il existe $(x_G, x_F) \in G \times F$ tel que

$$y = T(x_G + x_F) = Tx_G + T_F x_F.$$

Or $T_F x_F = 0$, d'où $y \in T(G) \subset G$. On en déduit $Im(T) \subset G$ et le résultat puisque G est de dimension finie.

2.6 Décomposition en spectre ponctuel, résiduel et continu

Définition 2.7 *Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé et $T \in L(E)$ l'ensemble*

$$\begin{aligned} \sigma_r(T) &= \lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) injectif et \overline{Im(T - \lambda I)} \neq E\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) injectif et {}^t(T - \lambda I) n'est pas injectif\} \end{aligned}$$

est appelée ***le spectre résiduel*** *de* T.

Définition 2.8 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace normé et* $T \in L(E)$ *l'ensemble*

$$\sigma_r(T) = \lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) injectif et \overline{Im(T - \lambda I)} = E\}$$
$$= \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) injectif et^t (T - \lambda I) injectif\}$$

est appelée ***le spectre continu*** *de* T.

Proposition 2.10 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in L(E)$*, on a*

$$\sigma(T^t) = \sigma(T).$$

Proposition 2.11 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in L(E)$*, alors*
i) $\sigma_r(T) = \sigma_p(T^t) \setminus \sigma_p(T)$.
ii) $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(T^t)$.

Preuve
i) Par définition de $\sigma_r(T), \lambda \in \sigma_r(T)$ si et seulement si est valeur propre de T^t mais pas de T.
ii) Par la proposition (2.9) $\sigma(T^t) = \sigma(T)$.

Théorème 2.11 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in L(E)$*, l'ensemble* $\sigma(T)$ *se décompose on l'union disjointe :*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

2.7 Exemple

Nous considérons l'opérateur de décalage $T \in L(\ell^1)$ défini par :

$$\forall x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^1, T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

et son adjoint $T^* \in L(\ell^\infty)$ satisfait :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \ell^\infty, T^*(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$$

On les résultats suivantes :

$$\begin{cases} \sigma(T) = \overline{B(0.1)} et \sigma(T^*) = \overline{B(0.1)}. \\ \sigma_p(T) = B(0.1) et \sigma_p(T^*) = \phi. \\ \sigma_r(T) = \phi et \sigma_r(T^*) = \overline{B(0.1)}. \\ \sigma_c(T) = B(0.1) et \sigma_c(T^*) = \phi. \end{cases}$$

Solution

$\sigma(T) = \sigma(T^*) = \overline{B(0.1)}$:

Notons que $\| T^n \| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème (2.3), on a :

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

alors $\sigma(T) = \overline{B(0.1)}$.

D'aprés le théorème de **Phillips**(2.4) on résulte que $\sigma(T^*) = \overline{B(0.1)}$.

$\sigma_p(T) = B(0.1)$:

D'aprés la remarque (2.2) on a

$$\sigma_p(T) \subset (T) \Leftrightarrow \sigma_p(T) \subset \overline{B(0.1)}$$

il reste de montrer que $B(0,1) \subset \sigma_p(T)$.

Il suffit de montrer que $\forall \lambda \in B(0,1), ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Pour $\lambda = 0$ (évidente) puisqu'il est facile de remarquer que $(1,0,0,...)$ est dans le noyau de T. Pour $\lambda \neq 0$. Posons

$$x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...).$$

Alors $x_\lambda \in \ell^1$. De plus

$$T(x_\lambda) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, ...) = \lambda x_\lambda$$

donc $\lambda \in \sigma_p(T)$, d'où le résultat.

$\sigma_p(T) = B(0.1)$: daprès ce qui précède, il suffit de montrer que $\partial B(0.1) \cap \sigma_p(T) = \phi$, c'est à dire que, pour tout λ tel que $|\lambda| = 1$, $T - \lambda I$ est injectif. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe

$\lambda \in \partial B(0,1)$ tel que $ker(T-\lambda I) \neq \{0\}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in ker(T-\lambda I)$ non nul, alors $(T-\lambda I)(x) = 0$ équivaut au système infini d'équations

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que :

$$x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...).$$

Mais on remarque que, à cause du fait que $|\lambda| = 1$, x ne peut pas être dans ℓ^1 sauf si $x_1 = 1$ (une contradiction).

$\sigma_p(T^*) = \phi$:

Supposons que $\exists \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $(T^* - \lambda I)\alpha = 0$ ce qui équivaut aux relations

$$\lambda \alpha_1 = 0$$

$$\lambda \alpha_2 = \alpha_1$$

$$\lambda \alpha_3 = \alpha_2$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

alors on déduit que$(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, 0, ...)$ ce qui donne le résultat.

$\sigma_r(T^*) = \overline{B(0.1)}$

a) $B(0.1) \subset \sigma_r(T^*)$: Rappelons que

$$\sigma_r(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{Im(T^* - \overline{\lambda} I)} \neq \ell^\infty\} \setminus \sigma_p(T^*).$$

Comme $\sigma_p(T^*) = \phi$, alors $\sigma_r(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{Im(T^* - \overline{\lambda} I)} \neq \ell^\infty\}$ pour tout $\lambda \in B(0.1), x_\lambda \in \ell^1$, nous notons

$$f_\lambda : \ell^\infty \to \ell^\infty$$

$$\alpha \mapsto f_\lambda(\alpha) = \alpha(x_\lambda).$$

Alors

$$f_\lambda((T^* - \overline{\lambda} I)\alpha) = \left[(T^* - \overline{\lambda} I)\right](x_\lambda) = \alpha((T - \lambda I)(x_\lambda)) = \alpha(0) = 0$$

(i.e)

$$(T^* - \overline{\lambda} I)\alpha \in ker(f_\lambda) \Rightarrow Im(T^* - \overline{\lambda} I) \subset ker(f_\lambda)$$

Ce qui entraine que la fermeture de $Im(T^* - \overline{\lambda} I)$ ne peut pas étre égale ℓ^∞ donc $\lambda \in \sigma_r(T^*)$.
b) $\sigma_r(T^*) = \overline{B(0.1)}$: à cause de ce qui précède, il suffit de montrer que toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ est aussi dans $\sigma_r(T^*)$. Soit λ une telle valeur. Commençons par calculer un inverse formel de $T^* - \lambda I$: si $a \in \ell^\infty$ et si b est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'équation $(T^* - \lambda I)(b) = a$ s'écrit

$$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 - b_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n = \lambda b_n - b_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \overline{\lambda} a_1 \\ b_2 = \overline{\lambda}(a_2 + b_1) \\ . \\ . \\ . \\ b_n = \overline{\lambda}(a_n + b_{n-1}) \end{cases}$$

Donc cette équation a pour solution $b_n = \overline{\lambda} a_n + \overline{\lambda^2} a_{n-1} + ... + \overline{\lambda^n} a_n$. Nous voyons déjà que $\lambda I - T^*$ n'est pas surjectif car, pour $a = a_{\overline{\lambda}} = (1, \overline{\lambda}, \overline{\lambda^2}, ...) \in \ell^\infty$, la solution est $b_n = n\overline{\lambda^n}$ et cette suite n'est manifestement pas dans ℓ^∞ : donc $a_{\overline{\lambda}} \notin Im(\lambda I - T^*)$.
Mais nous devons montrer un résultat plus fort, à savoir que $Im(T^* - \lambda I)$ n'est pas dense dans ℓ^∞. Pour cela, nous allons montrer que, dans ℓ^∞, $B(a_{\overline{\lambda}}, \frac{1}{2}) \cap Im(T^* - \lambda I) = \phi$. Soit $a \in B(a_{\overline{\lambda}}, \frac{1}{2})$, nous pouvons écrire $a = a_{\overline{\lambda}} + \beta$, où $\|\beta\|_{\ell\infty} < \frac{1}{2}$. La solution dans l'espace des séries à valeurs complexes de l'équation

$$(T^* - \lambda I)b = a = a_{\overline{\lambda}} + \beta$$

est $b = (b_1, b_2, b_3, ...)$, avec

$$b_n = n\overline{\lambda}^n + \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}^{n-j} \beta_j,$$

ce qui entraîne que :

$$|b_n - n\overline{\lambda}^n| = |\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}^{n-j}\beta_j| < \tfrac{n}{2}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $n = |n\overline{\lambda}^n| \leq |b_n - n\overline{\lambda}^n|$, on en déduit que

$$b_n \geq n - |b_n - n\overline{\lambda}^n| > n - \tfrac{n}{2} = \tfrac{n}{2}.$$

Donc b n'est pas dans ℓ^∞.

$\sigma_r(T) = \phi$, pour cela il suffit d'établir que, si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Supposons le contraire, cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $Im(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans ℓ^1. Alors, d'après le ii) de la proposition (2.3), $\lambda \in \sigma_p(T^*)$. Or ce n'est pas possible car nous avons $\sigma_p(T) = \phi$.

$\sigma_c(T) = \partial B(0.1)$: On a

$$\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)),$$

alors

$$\sigma_c(T) = \overline{B(0.1)} \setminus (B(0.1) \cup \phi) = \partial B(0.1).$$

$\sigma_c(T^*) = \phi$:On a

$$\sigma_c(T^*) = \sigma(T^*) \setminus (\sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)),$$

alors

$$\sigma_c(T^*) = \overline{B(0.1)} \setminus (\phi \cup \overline{B(0.1)}) = \phi.$$

Chapitre 3

Spectre des opérateurs P-symétrique

Dans ce chapitre on intéresse à l'étude des opérateurs P-symétrique puis a la représentions du spectre d'opérateur de dérivation généralisé et du spectre d'opérateur P-symétrique.

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1 [1] *Soit $A \in L(H)$, le commutant de A, $\{A\}^{'}$ est défini par*

$$\{A\}^{'} = \{B \in L(H) : AB = BA\}.$$

Définition 3.2 [1] *Soit $A \in L(H)$, le bicommutant de A, $\{A\}^{''}$ est défini par*

$$\{A\}^{''} = \{Z \in L(H) : ZB = BZ \text{ pour } B \in \{A\}^{'}\}.$$

Définition 3.3 [16] *Soit $A \in L(H)$, l'opérateur de **dérivation interieur***

$$\delta_A : L(H) \to L(H)$$

définit par

$$\delta_A(X) = AX - XA.$$

Définition 3.4 [16] *Soit A et B deux opérateurs de $L(H)$, l'opérateur de **dérivation généralisé***

$$\delta_{A,B} : L(H) \to L(H)$$

définit par

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB$$

Soit A et B deux opérateurs de $L(H)$, ***l'opérateur élémentaire***

$$\Delta_{A,B} : L(H) \to L(H)$$

définit par

$$\Delta_{A,B}(X) = AXB - X.$$

Si $A = B$ on écrivons $\Delta_A = \Delta_{A,A}$.

Définition 3.5 [7] *Soit $K(H)$ un sous espace fermé de $L(H)$, contient tout les opérateurs compacts de H. On définit* ***l'algébre de Calkin*** *par le quotion*

$$L(H) \setminus K(H) = \{[A] : A \in L(H)\},$$

telle que

$$[A] = \{A + B : B \in K(H)\},$$

est noté $C(H)$.

Définition 3.6 [6] *Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des opérateurs dans $L(H)$, on dit que T_n converge en* ***norme*** *vers $0(i.eT_n \xrightarrow{n} 0)$ si $\|T_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$ ou $\|T\| = sup\{\|Ax\| : x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$. La fermeture en* ***norme*** *d'un sous espace E de $L(H)$ est notée $\overline{E}$.*

Définition 3.7 [6] *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des opérateurs dans $L(H)$, on dit que T_n converge* ***faiblement*** *vers 0 $(i.eT_n \xrightarrow{W} 0)$ si $\langle T_n x.y\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$ ou pour tout $x, y \in H$.*
La fermeture ***faible*** *d'un sous espace E de $L(H)$ est notée $\overline{E}^W$.*

Définition 3.8 [16]*Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et H un espace de Hilbert complexe séparable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des opérateurs dans $L(H)$, on dit que (T_n) converge* ***ultra-faiblement*** *vers* 0 *si $f(T_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout forme linéaire f dans $L(H)$.*
Si E est sous ensemble de $L(H)$, $\overline{E}^{W^*}$ est la fermeture ***ultra-faible*** *de E.*

Définition 3.9 [16] *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$, l'ensemble*

$$\sigma_{ap}(T) = \{\inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \|(T-\lambda I)x\|, \|x\| = 1\} = 0\},$$

est appelé le spectre de point approximatif.

Définition 3.10 [16] *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$, l'ensemble*

$$\sigma_{\delta}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas surjective}\},$$

est appelé le spectre par défaut de T.

3.2 Spectre d'une dérivation et dérivation généralisée

Définition 3.11 [16] *Soit E un espace de Banach, A et B deux opérateurs dans $L(E)$, l'ensemble*

$$\sigma(\delta_{A,B}) = \{\alpha - \beta : \alpha \in \sigma(A) \text{ et } \beta \in \sigma(B)\},$$

est le spectre de l'opérateur dérivation généralisé.

Remarque 3.1 [16] *i)* $\sigma(\delta_{A,0}) = \{\alpha : \alpha \in \sigma(A)\}$.
ii) $\sigma(\delta_{0,B}) = \{-\beta : \beta \in \sigma(B)\}$.

Lemme 3.1 [16] *Soit $T \in L(E)$, où E est un espace de Banach complexe, alors, il existe un espace de Banach complexe E^0 et $T^0 \in L(E^0)$ tel que*
i) $E \subset E^0$, $T^0(x) = T(x)$ et l'application

$$L(E) \to L(E^0)$$
$$T \mapsto T^0$$

est isométrique respecte la structure d'une algèbre.
ii) $\sigma_p(T^0) = \sigma_{ap}(T^0) = \sigma_{ap}(T)$.

Lemme 3.2 [16] *Soient* A, B *deux opérateurs de* $L(E)$, *où* E *est un espace de Banach complexe alors*
i) $\sigma_{ap}(\delta_{A,0}) = \sigma_{ap}(A), \sigma_{\delta}(A) \subset \sigma_{\delta}(\delta_{A,0})$.
ii) $\sigma_{ap}(\delta_{0,B}) = \sigma_{\delta}(B), \sigma_{ap}(B) \subset \sigma_{\delta}(\delta_{0,B})$.
iii) Si E *est un espace de Hilbert alors*

$$\sigma_{\delta}(A) = \sigma_{\delta}(\delta_{A,0}), \sigma_{ap}(B) = \sigma_{\delta}(\delta_{0,B}).$$

Proposition 3.1 [16] *Soit* E *un espace de Banach et* $A, B \in L(E)$. *Alors*

$$\sigma_{ap}(\delta_{A,B}) = \sigma_{ap}(A) - \sigma_{\delta}(B).$$

$$\sigma_{\delta}(\delta_{A,B}) \supset \sigma_{\delta}(A) - \sigma_{ap}(B).$$

Si E *est un espace de Hilbert, alors*

$$\sigma_{\delta}(\delta_{A,B}) = \sigma_{\delta}(A) - \sigma_{ap}(B).$$

Preuve Nous avons

$$\lambda \in \sigma_{ap}(\delta_{A,B}) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_{ap}(\delta_{A-\lambda,B}).$$

$$\lambda \in \big(\sigma_{ap}(A) - \sigma_{\delta}(B)\big) \Leftrightarrow \big(\exists t \in \sigma_{ap}(A), s \in \sigma_{\delta}(B) : \lambda = t - s\big).$$

$$\Leftrightarrow \big(\exists t \in \sigma_{ap}(A - \lambda I) - \sigma_{\delta}(B)\big).$$

i) Soit $0 \in \sigma_{ap}(A) - \sigma_{\delta}(B)$, nous avons

$$\lambda \in \sigma_{ap}(A) \Leftrightarrow \inf\{\|(A - \lambda I)x\|, \|x\| = 1\} = 0,$$

$$\lambda \in \sigma_\delta(B) \Leftrightarrow \inf\left\{\|(B^* - \lambda I)x^*\|, \|x^*\| = 1\right\} = 0.$$

Choisissez $X = x \bigotimes x^*$, $x \in E$, $\|x\| = 1$, $x^* \in E^*$, et $\|x^*\| = 1$. Ainsi $\|X\| = 1$ et

$$(A - \lambda I)X - X(B - \lambda I) = AX - XB = ((T(x)) \bigotimes x^*) - (x \bigotimes (B^*(x^*))).$$

Par conséquent

$$\inf\{\|\delta_{A,B}X\|, \|X\| = 1\} = 0,$$

autrement dit, $0 \in \sigma_{ap}(\delta_{A,B})$ et nous avons montré que

$$\sigma_{ap}(\delta_{A,B}) \supset \sigma_{ap}(A) - \sigma_\delta(B).$$

ii) Depuis $\delta_{A,0}$ et $\delta_{0,-B}$ commutent, il résulte du Lemme (3.1) et Lemme (3.2) que

$$\sigma_{ap}(\delta_{A,0} + \delta_{0,-B}) = \sigma_{ap}(\delta_{A,B}) \subset \sigma_{ap}(\delta_{A,0}) - \sigma_{ap}(\delta_{0,-B}) = \sigma_{ap}(T) - \sigma_\delta(B).$$

iii) Comme ci-dessus, pour établir l'inclusion $\sigma_\delta(\delta_{A,B}) \supset \sigma_\delta(A) - \sigma_{ap}(B)$, nous avons de prouver que

$$0 \in (\sigma_\delta(A) - \sigma_{ap}(B)) \Rightarrow 0 \in \sigma_\delta(\delta_{A,B})$$

Ou

$$\delta_{A,B} \text{ surjective} \Rightarrow 0 \notin (\sigma_\delta(A) - \sigma_{ap}(B)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \delta_{A,B} surjective \Leftrightarrow \delta_{A,B} : L(E)/ker\delta_{A,B} &\mapsto L(E) \\ X &\mapsto AX - XB, \end{aligned}$$

est bijective, donc si $\delta_{A,B}$ est surjective, alors il existe $h > 0$ tel que

$$2h\|X\| \leq \|AX - XB\|.$$

Si nous prenons pour $X \neq 0$ un représentant de X avec une norme proche de $\|X\|$, alors nous obtenir $h(X) \leq \|AX - XB\|$. Ainsi, pour tous les $Y \in L(E)$, il existe $X \in L(E)$ de telle que

$$AX - XB = Y \text{ et } h(X) \leq \|AX - XB\|.$$

Supposons que $0 \in \sigma_\delta(A) - \sigma_{ap}(B)$, i.e., il existe $\lambda \in \sigma_\delta(A) \bigcap \sigma_{ap}(B)$. Ainsi

$$\inf\left\{(A^* - \lambda)x^*, \|x^*\| = 1\right\} = 0, \text{ et } \inf\{(B - \lambda)x, \|x\| = 1\} = 0,$$

Alors

$$\begin{aligned}|\langle x^*.(AX - XB)x\rangle| &= |\langle x^*.((A - \lambda I)X - X(B - \lambda I))x\rangle| \\ &\leq \|(A^* - \lambda I)x^*\| + \|(B - \lambda I)x\|, pour tout X \in L(E).\end{aligned}$$

Si $\delta_{A,B}$ est surjective, alors $Y \in L(E)$, choisissez X telle que $h\|X\| \leq \|AX - XB\|$ et $AX - XB = Y$ nous avons

$$|\langle x^*.Yx\rangle| \leq (\|(A^* - \lambda I)x^*\| + \|(B - \lambda I)x\|)\, h^{-1}\|Y\|.$$

Choisissez $Y = y \bigotimes y^*$ est telle que l'élément gauche de la dernière inégalité soit bornée ci-dessous et

$$\|Y\| = 1, \langle x^*.Yx\rangle = \langle y^*.x\rangle\langle x^*.y\rangle.$$

En appliquant le théorème de Hahn Banach, il en résulte qu'il existe y^* tels que $\langle y^*.x\rangle = 1$ et $\|y^*\| = 1$
Il existe y^* tel que $\|y^*\| = 1$ et $\langle x^*.y\rangle > \frac{1}{2}$, par la définition de $\|x^*\|$. Ainsi $\|Y\| = 1$, en outre

$$\tfrac{1}{2} \leq h^{-1}\left(\|(A^* - \lambda I)x^*\| + \|\|(B - \lambda I)x\|\|\right).$$

Cela contredit le fait que l'inf du droit membre est 0.
iv) Nous devons montrer $\sigma_\delta(\delta_{A,B}) = \sigma_\delta(A) - \sigma_{ap}(B)$.
Soit H un espace de Hilbert, A et B deux opérateurs dans $L(H)$ alors :

$$\delta_{A,B} = \delta_{A,0} + \delta_{0,-B}.$$

D'aprés le lemme(3.2), on resulte que

$$\sigma_\delta(\delta_{A,B}) \subset \sigma_\delta(\delta_{A,0}) + \sigma_\delta(\delta_{0,-B}) = \sigma_\delta(T) - \sigma_{ap}(B).$$

Notation 3.1 [1] *$C_1(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs de classe trace.*

Définition 3.12 [1] *Soit $T \in L(H)$, T est dit de trace classe si* $\|T\| = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T| e_n . e_n \rangle < \infty$, *telle que* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthonormal dans H.*

Remarque 3.2 [2] *Si T est normal alors $T^* \in ker(\delta_T)$.*

Définition 3.13 [3] *Soit $T \in L(H)$, T est dit opérateur* ***isométrie*** *si*

$$T^*T = I.$$

Définition 3.14 [4] *Soit $T \in L(H)$, T est dite* ***essentiellement normal*** *si $TT^* - T^*T$ est compact.*

Définition 3.15 [5] *Soit $T \in L(H)$, T est dit opérateur* ***subnormal*** *si elle a une extension normal.*

Définition 3.16 [6] *Nous disons qu'un vecteur Ψ est cyclique pour un opérateur T, si la combainisons linéaire fini des éléments $\{T^n\Psi\}_{n=0}^{\infty}$ est dense dans H.*

3.3 Les opérateurs P-symétriques

Définition 3.17 [7] *Soit $T \in L(H)$, on dit que T est P-****symétrique*** *si $TB = BT$ implique $TB^* = B^*T$, $\forall B \in C_1(H)$, l'ensemble des opérateurs P-symétrique notée par $P(H)$.*

Théorème 3.1 [7]*Soit $T \in L(H)$, alors*
i) T est P-symétrique ssi $\overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ est auto-adjoint.
ii) $P(H)$ est auto-adjoint.

Théorème 3.2 [7] *Soit $C^2 = 0$ et $T \neq 0$ alors T n'est pas P-symétrique.*

Preuve[7] iI existe $f = Th$, vecteur non nul dans $Im(T).\langle T^* f.h\rangle = \|Th\|^2 \neq 0$, donc $Tf = 0$ et $T^* f \neq 0$. Comme $(T^*)^2 = 0$, on choisit de même g non nul tel que $T^* g = 0$. Notons $T^* f = W, \langle W.f\rangle = \langle T^* f, f\rangle = \langle f.Tf\rangle = 0$ (i.e) ω et f sont orthogonaux. Si $X = \|\omega\|^{-2}(g \otimes \omega)$ et $Y \in L(H)$, alors il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\langle (T^*X - XT^*)f.g\rangle &= \langle 0.g\rangle - \langle X\omega.g\rangle \\ &= -\langle g.g\rangle = -\|g\|^2\end{aligned}$$

et

$$\langle (TY - YT)f.g\rangle = \langle Yf.T^*g\rangle - \langle 0.g\rangle = 0.$$

Supposons que $T^*X - XT^* \in \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ Alors il existe une suite généralisée (Y_α) de $L(H)$ telle que pour tout $x, y de H$, on a

$$\langle (TY_\alpha - Y_\alpha T)x.y\rangle \underset{\alpha}{\rightarrow} \langle (T^*X - XT^*)x.y\rangle.$$

On en déduit que

$$0 = \langle (TY_\alpha - Y_\alpha T)f.g\rangle \underset{\alpha}{\rightarrow} \langle (T^*X - XT^*)f.g\rangle = -\|g\|^2.$$

Il s'ensuit que $g = 0$ et ceci montre que $T^*X - XT^* \notin \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$
(i.e)$\overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ n'est pas auto-adjoint, en conséquence on obtient d'après le théorème (3.4)que T n'est pas P-symétrique.
Puisque l'étude des opérateurs P-symétriques revient à étudier les opérateurs $T \in L(H)$ est tels que $\overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ auto-adjoint, alors il est naturel d'introduire les ensembles suivants :

$$C_0 = \left\{C \in L(H) : CL(H) + L(H)C \subset \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}\right\},$$

$$I_0 = \left\{Z \in L(H) : ZIm(\delta_T) + Im(\delta_T)Z \subset \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}\right\},$$

$$B_0 = \left\{B \in L(H) : Im(\delta_B) \subset \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}\right\}:$$

Théorème 3.3 [7] *Soit T est P-symétrique, alors*
i) $C_0(T)$, $I_0(T)$ et $B_0(T)$ sont des $C^* - algbres$ fermées pour la topologies ultra-faible dans $L(H)$ (algèbres de Von Neumann).
ii) $C_0(T)$ est un idéal bilatère de $I_0(T)$.
iii) $Im(\delta_B) \subset \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ pour tout $B \in C^*(T)$, la $C^* - algbre$ engendrée par T.

Théorème 3.4 *Soit $T \in L(H)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) T est P-symétrique.
ii) $TT^* - T^*T \in C_0(H)$.
iii) $T^*Im(\delta_T) + Im(\delta_T)T^* \subset \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$.

Lemme 3.3 *Soit T est un opérateur de $L(H)$ alors*

$$I_0(T) = \{z \in L(H), \delta_z(T) \in C_0(H)\}.$$

Corollaire 3.1 *Soit T un opérateur P-symétrique et $X \in L(H)$, si $TX - XT \in C_0(T)$, alors $TX^* - X^*T \in C_0(T)$.*

3.4 Spectre des opérateurs P-symétriques

Lemme 3.4 *Soit $T \in L(H)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a les propriétés suivantes :*
i) Il existe $x \in H$, $x \neq 0$ avec $Tx = \lambda x$ et $T^*x = \overline{\lambda}x$.
ii) Il existe $y \in H$, $y \neq 0$ avec $T^*y = \overline{\lambda}y$. Alors $\overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ est auto-adjoint.

Remarque 3.3 *Si $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$ alors T est p-symétrique.*

Théorème 3.5 *Soit T et B dans $L(H)$ sont deux opérateurs P-symétriques, si $\sigma(T) \cap \sigma(B) = \{0\}$, alors $T \bigoplus B$ est P-symétrique.*

Corollaire 3.2 *Soit T un opérateur P-symétrique à spectre dénombrable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $C_0(T) = \{0\}$.
ii) T est diagonalisable.
iii) $I_0(T) = \{T\}^*$

Preuve i)$\Rightarrow$ ii) : Supposons que $C_0(T) = \{0\}$. Compte tenu du théorème (3.4), on en déduit que $T^*T - TT^* = 0$ i.e. T est normal. Puisque le spectre de T est dénombrable, il s'ensuit que T est diagonalisable.
ii)$\Rightarrow$ iii) : En vertu du théorème (3.4) et du lemme(5.5)[13], le résultat est immédiat.

iii)$\Rightarrow$ i) : Supposons que $I_0(T) = \{T\}^*$. Il suit du théorème (3.3) que $I_0(T)$ est une $C^* - algbre$ et du théorème (3.4) que $T^* \in I_0(T)$ i.e. T est normal. Comme $\sigma(T)$ est dénombrable, alors T est diagonalisable. Compte tenu du théorème (4.2)[13] et du lemme (5.5)[13] on obtient le résultat.

Théorème 3.6 *Soit T un opérateur normal, si $\sigma(T)$ est finie, alors on a $C_0(T) = \{0\}$, $I_0(T) = \{T\}^*$ et $B_0(T) = \{T\}^{**}$.*

Preuve Puisque T est normal à spectre fini, il vient de corollaire(3.2) que $C_0(T) = \{0\}$ et $I_0(T) = \{T\}^*$. Montrons que $B_0(T) \subset \{T\}^{**}$: En effet, soient $B \in B_0(T)$, $A \in \{T\}^*$ et $X \in L(H)$, comme $\delta_T(B)X = T\delta_B(X) - \delta_B(TX)$, alors $\delta_T(B)X \in \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$ par conséquense en obtient $[\delta_T(B)][\delta_T(B)]^* \in \overline{Im(\delta_T)}^{W^*}$. Il vient du théorème(4.2)[13] que $[\delta_T(B)][\delta_T(B)]^* = 0$ i.e $AB = BA$. Ainsi on a montré que $\{T\}^* \subset \{B\}^*$i.e $B \in \{T\}^{**}$.
Réciproquement, supposons que $B \in \{T\}^{**}$. On sait que B est un polynôme en T. D'après le théorème(3.3), $B_0(T)$ est une algèbre contenant T, par conséquence on a $B \in B_0(T)$

Bibliographie

[1] A.Bonanomi, Théorie spectrale des opérateurs linéaires, EPFL -Mathématiques - Projet de semestre, 28 juin 2007.

[2] Bouhafsi youssef , thése de doctorat : on the range and the kernel of elementary faculté des sciences rabat, 5 Juin 2009. Operators, université mohammed vagdal.

[3] D. Hilbert. "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen." Verlag von Leipzig, 1909.

[4] D. Hinrichsen and Anthony J. Pritchard. "Mathematical Systems Theory I : Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness." Springer Science Business Media, 2005.

[5] Frédéric Paulin, Compléments de théorie spectrale et danalyse harmonique, Cours de deuxième année de magistère, Année 2012-2013, Version préliminaire.

[6] H. Brezis, analyse fonctionnelle : théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[7] Mostafa mbekhta, résolvant généralisé et théorie spectrale, J.operator theory 21(1989), 69-105, copyright by incert , 1989.

[8] H.Mecheri.B.Rebiai, Birhaff-Jae Orthogonaty and Best approxiant in $L^1(x)$, the Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volune 15, lssue 1, Article 3, pp.1-6,2018.

[9] H.Mecheri and ibrahi Oaer Ahmed, Some Properties p-symmetric Operators, transylvanian Review :Vol XXVII, No.47, March 2020.

[10] H.Mecheri, The Numerical Range and Numerical Radius of Derivation operator δ_A Generalized Derivation operator $\delta_{A,B}$, transylvanian Review :Vol 29, No.1, March 2021.

[11] M.khedija, Spectre d'un opérateur, Univ.de Larbi Tébessi -Tébessa 29/05/2016

[12] Pierre Lévy-Bruhl, Introduction la théorie spectrale cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2003

[13] S. Bouali et J. Charles, extension de la notion d'opérateur D-symitrique. iI^*, université montpellier il institut de mathématiques Place eugène bataillon 34095 montpellier, france.Submitted by rajendra bhatia

[14] S.Mecheri, Some recent results on operator commutators and related operators with applications, 1-51.

[15] S.Mecheri and H. Mecheri, The Gâteaux derivative and orthogonality in C_∞, An. St. Univ.Ovidius Constanta, Vol. 20 (1), 2012, 275-284.

[16] S.Mecheri. "On the Spectral Theory of Generalized Derivation Operators." Journal of Mathematical Analysis and Applications 312.2 (2005) : 440-455.

[17] S.Bouali and Jean-Pierre Charles. "Spectral Properties of P-Symmetric Operators." Journal of Mathematical Physics 48.3 (2007) : 032106.

[18] Stefan Neuwirth, Théories spectrales

[19] W. Wirtinger. "Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen." Journal für die reine und angewandte Mathematik 133 (1908) : 77-85.