



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Echahid Chikh Larbi Tébessi
-Tébessa-

*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature
et de la Vie*

Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

Mémoire de Master

Domaine : Sciences de la matière

Filière : Physique

Option : Matière Condensée

Thème

**L'étude de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau
(DKP) dans un espace courbé : Cas de la corde
cosmique**

Présenté par :

Berrah Hamida et Fares Bouchra

Devant le jury

Dr.Messai Nadjette

Rapporteur

Université Echahid Cheikh Larbi-Tébessi, Tébessa

Pr. Benkhedir Mohamed Louf

Président

Université Echahid Cheikh Larbi-Tébessi, Tébessa

Dr. Chaouche Yassine

Examineur

Université Echahid Cheikh Larbi-Tébessi, Tébessa

Date de Soutenance : 09 Juin 2024

© *Mémoire effectué au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



**L'ÉTUDE DE L'OSCILLATEUR DE
DUFFIN-KEMMER-PETIAU (DKP) DANS UN
ESPACE COURBÉ : CAS DE LA CORDE COSMIQUE**

Berrah Hamida^{*} et *Fares Bouchra*[†]

berrahamida@gmail.com
bouchrabouchra3@gmail.com

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الهزازات التوافقية DKP التي تصف الجسيمات النسبية ذات سبين-0 و السبين 1 ، ووجدنا حلولها الدقيقة في فضاء مستوي وفضاء منحنى في وجود عيب طوبولوجي ممثل بجبل كوني بتأثير المجال المغناطيسي الخارجى المنتظم وبدونه، ثم ناقشنا هذه الحلول.

Abstract

In this memoir, we studied the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) oscillators describing relativistic spin-0 and spin-1 particles, and we found their exact solutions in a flat space and a curved space in the presence of a topological defect presented by a cosmic string with and without the influence of an external uniform magnetic field, then we discussed these solutions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les oscillateurs Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) décrivant les particules relativistes de spin-0 et de spin-1, et nous avons trouvé leurs solutions exactes dans un espace plat et un espace courbé en présence d'un défaut topologique présenté par une corde cosmique avec et sans l'influence d'un champ magnétique uniforme externe, puis nous avons discuté ces solutions .

Dédicace

A Allah le tout puissant ,
A l'âme de mon père, que Dieu lui fasse miséricorde.
A la prunelle des yeux de ma chère mère
A mes sœurs Nabila , Ismahene , Karima, Imene , soudjoud
A mes frères Addel , Saïd , Doudi
A Salwa , Akila , Hadjr, Soumia, B. Amel, Noura, D. Hassiba, sanaa , Z. Amel, Safaa, Dabel, Fayrouz
A L. Leïla, Naima, Fatiha, Siheme, Amina, Radia, Wakiba, Fatima, Lamia, J. Leïla
A tout mes amies Akila, Safia, Yamina , Housna Chi, Iness,
AL. Dallel, Omama, Awhatf, Manel, Zina, Karima, Ahleme, Kh. Zoura, Sonia,
A tout mes amies Bouchra, Haroun, Haïfa, Hiba, Nabila, assia, Marwa, Wiame, Chiraz, Ikram,
A tout mes collègues dans les renseignements ,
A ceux dont les connaissances restent fermement ancrées dans nos esprits,
notre honorable professeur Maasmi Abdel Rahman, que Dieu lui fasse miséricorde
A tout mes enseignants Zaidi Layla, Zaidi sania, Safaa , Hati samia et Zaidi
Salika , Khamissa
A tout mes enseignants , Pr. Boumali Abdelmalek , Pr. Chemam Faïcel ,
Pr. Benkhedir Mouhamed Loutfi , Dr. Mohamed Elhadi mansouri , Dr. Zouai Sou-
hila et Pr. Bouhlel Mouna. Dr. A. R. Bchiri
A tout mes enseignants , Pr. Serdouk Fadila, D. Begith Hanaa, Pr. Ferdi Abdel-
hamid, Dr. Swan, Dr. Taki,
Et Spécialement mon encadreur Messai Nadjette

Je dédie cet humble travail.

Berrah Hamida

Dédicace

Avant toute personne, je remercie mon dieu le Tout-Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à bien ce travail.

À la personne que j'aime le plus dans cette vie, mon père Je voudrais te remercier pour ton amour, ta générosité et ta compréhension. Ton soutien fut une lumière tout au long de mon parcours. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours eus pour toi. Ce modeste travail est le fruit de tous les sacrifices que tu as déployés pour mon éducation.

À la femme qui a sacrifié sa vie pour mon confort et mes études, ma chère mère. Il n'y a pas assez de mots pour exprimer ma gratitude pour tout ce que tu as fait pour moi.

À mes chers frères que j'aime beaucoup, ILYAS, LOTFI, SAMIR et MOHAMED,

Aux sœurs que la vie m'a données, HASSNA, NAWAL, SAFA et ses enfants,

À tous mes amis, Ichrak, Nour, Mariem, Warda, Ilhem, Hanine, Noujoud, Rania, Youssra et Housseem...

À tous mes collègues de promotion, HAROUN, ASSIA, HEBA, SOUNDOUS et spécialement ma binome BERRAH HAMIDA,

À toute L'équipe de l'écol Rahal Abdelhafid et spécialement à mes collègues enseignants, Issra, Chaima, Hayam, Nadia, Rachida, Amani Mounia, Radhia, Dhouka, Selma, Abd anour, Baha, Abd lmajid ...

Et à tout mes enseignants,

Et je dédie le fruit de ce modeste travail Spécialement à mon encadrante Messai Nadjette,

Et en fin à tous ceux qui par un mot, m'ont donné la force de continuer...

Fares Bouchra

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Dieu Tout-Puissant. Qui nous a donné la force, la patience, la détermination et la volonté qui nous ont permis d'accomplir cet humble travail que nous espérons être à la hauteur requis. A cette occasion, nous adressons nos plus vifs remerciements et nos plus sincères expressions En l'honneur de notre superviseur, Dr Messai Nadjette, enseignante à l'Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi, grâce à ses précieux conseils, son orientation, son souci pour nous, sa confiance, sa patience et son esprit joyeux avec nous. Nous adressons également nos sincères remerciements aux membres du jury : Pr. Benkhedir Mohamed Loutfi, Professeur à l'Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le comité d'arbitrage de notre mémoire, et Dr. Chaouche Yassine, Professeur à l'Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi - Tebessa - qui a accepté d'arbitrer cette recherche. Nous les remercions sincèrement.

Enfin, nous adressons nos sincères remerciements au Professeur Abdelmalek Boumali "le père du physique" pour son soutien constant et continu. Notons que ce mémoire a été rédigée en utilisant \LaTeX par le biais du logiciel Lyx (www.lyx.org), la classe utilisée ici a été proposée par Pr. Boumali Abdelmalek supportant la langue arabe.

Nous n'oublions pas non plus de remercier tous nos proches et amis qui nous ont toujours encouragés à mener à bien cette recherche. Merci à tous.

Table des matières

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace 1	iv
Dédicace 2	v
Remerciements	vi
Liste des Figures	x
Liste des symboles	xii
Les Chapitres	
Introduction	1
Les Chapitres	
1 Rappel mathématique et formalisme	4
1.1 La géométrie de l'espace	4

1.1.1	Méthode du référentiel de Lorentz	6
1.1.2	Méthode des repères mobiles	7
1.2	Les équations relativistes dans un espace plat	8
1.2.1	L'équation de Klein-Gordon :	8
1.2.2	L'équation de Dirac	11
1.2.3	L'équation de Duffin-Petiau-Kemmer	13
1.3	Les équations relativistes dans un espace-temps Courbé :	15
1.3.1	L'équation de Klein-Gordon :	15
1.3.2	L'équation de Dirac	16
1.3.3	L'équation de DKP	16
1.3.4	La corde cosmique	18
2	Les solutions de l'oscillateur Duffin-Kemmer-Petiau dans un espace-temps Plat	21
2.1	Particule de Spin-0	24
2.1.1	Cas libre sans interaction externe	24
2.1.2	En présence du champ magnétique	26
2.2	Particule de Spin-1	28
2.2.1	Cas libre (sans interaction)	28
2.2.2	En présence du champ magnétique	31
3	L'oscillateur DKP en présence d'une corde cosmique	33
3.1	Particule de Spin-0	33
3.1.1	Cas libre (Sans interaction externe)	34
3.1.2	En présence du champ magnétique	39
3.2	Particule se Spin-1	41
3.2.1	Cas libre (Absence d'interaction)	41
3.2.2	En présence du champ magnétique	47
	Conclusion	50

Les Annexes	55
A L'oscillateur bidimensionnel de Klein-Gordon	55
B Les connexions des spin	59
B.1 Les symboles des christoffel	59
B.2 Les Cartans	62
C La méthode de Nikiforov-Uvarov (Nu)	65

Table des figures

Figure	page
Figure	page
1.1 Représentation d'une corde cosmique	19
1.2 Simulation des cordes cosmiques par des vortex	19
3.1 La solution positive de l'énergie en fonction de α	38
3.2 La solution négative de l'énergie en fonction de α	39

Liste des symboles

j^μ Le quadricourant

A^ν Le quadripotentiel

H_D L'Hamiltonien de Dirac

ψ_{DKP} La fonction d'onde de l'équation DKP

\square Le dalembertien

(DO) L'oscillateur de Dirac

$H_n(x)$ La Fonction de Hermite

DKP L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

β Les matrices de Kemmer

$\vec{\alpha}$ Les matrices de Dirac

Δ Laplacien

ψ_{KG} La fonction d'onde de Klein-Gordon

ψ_D La fonction d'onde de Dirac

ψ_K La fonction d'onde de Kemmer

η_b^a La métrique de l'espace Minkowskien

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ Symboles de Christoffel

e_μ^a les tétrades de l'espace

$g_{\mu\nu}$ Le tenseur fondamental

(*KGO*) L'oscillateur de Klein-Gordon

$\vec{\gamma}$ Les matrices gamma de Dirac

Introduction

La mécanique quantique est l'une des plus grandes réalisations de la science, car elle poursuit un objectif pratique très éloigné de la relativité générale, ce qui a conduit les physiciens à tenter de les combiner ou à rechercher une nouvelle théorie pour résoudre cette contradiction. ont eu du mal : Paul Dirac - Pauli Et d'autres à formuler une équation mathématique compatible avec la relativité restreinte, ils sont donc arrivés à l'équation de Schrödinger (1887-1961). En fait, ce n'était qu'une description approximative de la physique microscopique. Cependant, Schrödinger n'a pas pris compte de la relativité restreinte, qui fut l'une des plus grandes réalisations du scientifique Albert Einstein (1905) [1, 2], dans sa propre théorie, où il travailla sur l'électromagnétisme pour son développement et fut très convaincu par les équations de Maxwell [1, 3, 4] .

L'analyse des interactions de la gravité avec le système de mécanique quantique a suscité un grand intérêt en physique des particules et constitue un domaine de recherche vaste et actif. Cependant, pour comprendre l'interaction entre les particules de mécanique quantique relativiste et la gravité, il faut résoudre la forme de relativité générale de celle-ci. équations d'onde . Cela nécessite de s'appuyer sur les oscillations harmoniques, qui ont été un outil essentiel pendant des siècles dans le développement de la physique théorique en présence de la mécanique quantique. Elles ont également des applications non seulement dans les calculs directs, mais aussi dans la compréhension de problèmes plus complexes. L'interaction des hadrons avec les

spins ($S = 0$ et $S = 1$) a été décrite par une équation d'onde relativiste du second ordre appelée équation de Klein-Gordon « KG », pour les particules de spin $S = 0$, et par l'équation de Proca pour les particules dont le spin est $S = 1$ [5--8]. Il est très difficile de traiter ces équations et de déterminer mathématiquement leur aspect physique [9]. La question se pose : comment ces trois-là sont-ils arrivés à cette équation importante, l'équation « DKP », et quel est son but ? L'équation de Klein-Gordon (KG) était destinée uniquement aux particules libres [10--12], mais elle s'est heurtée à quelques difficultés, et pour éviter toutes les difficultés et obstacles qui découlent de l'existence de dérivées par rapport au temps et à l'espace du premier ordre [4, 13], le physicien Paul Dirac a pu proposer en 1928 une équation différentielle du premier ordre. Elle a introduit un nouveau type d'objet mathématique, où des matrices B étaient utilisées à la place des quantités standards [14]. Puis vint l'équation de Kemmer, qui représente une extension de la forme variable de l'équation de Dirac pour les particules de spin $S = 0$ et les particules de spin $S = 1$. Les trois physiciens ont pu, (Duffin, 1938, Kemmer 1939, Petiau 1936) [8, 15, 16], C'est une équation relativiste du premier ordre pour les bosons de spins $S=0$ et $S=1$ [17--19], Ce type d'équations relativistes permet de traiter les effets quantiques des champs gravitationnels [5, 17, 19], et est très utile pour comprendre le comportement physique des particules dans l'espace et le temps courbes en astrophysique, ainsi qu'en cosmologie [20]. La cosmologie a présenté un certain nombre de mystères déroutants et très passionnants pour les scientifiques

, qui ont donné naissance à ce que l'on appelle des défauts topologiques [20--22], et ces défauts dans la gravité, tels que les cordes cosmiques [23--25], les murs de domaine et les monopôles, et dans la physique de la matière condensée, comme des vortex dans les supraconducteurs ou les superfluides [26--29], pour prédire la formation de structures similaires existent dans l'univers lors de son expansion. Elles ont été imaginées et émises par Kibble en 1976, et des études et recherches théoriques ont été menées pour vérifier leur existence. Ces défauts topologiques trouvent leur origine dans différents domaines de la physique, de la matière condensée à la cosmologie, et sont liés à des transitions de rupture de symétrie, qui se produisent lorsqu'un système physique subit une transition d'un état à un autre au cours de

laquelle la symétrie du système est rompue, ce qui entraîne des défauts topologiques aux propriétés géométriques uniques [23]. L'un de ces défauts topologiques générés dans la phase de transition de l'univers sont des défauts linéaires dans l'espace triangulaire de l'univers où la structure linéaire du tenseur cosmique de l'espace-temps est représentée de manière spectaculaire, l'espace plat se transformant en espace cosmique [23, 30--33]. Physiquement, il existe deux types d'espace courbe : l'espace sphérique (ou elliptique), c'est un espace qui se courbe sur lui-même comme la surface d'une sphère et la géométrie de cet espace est similaire à celle de la surface d'une sphère, l'espace hyperbolique c'est un espace qui se courbe dans le sens opposé à la sphère comme une selle de cheval et la géométrie de cet espace est différent de celle de l'espace euclidien, ceux deux types d'espace courbés sont étudiés en relativité générale d'Einstein [34,35].

Ce mémoire comporte trois chapitres composés de la façon suivante : Dans le premier, on rappelle quelques généralités sur les équations relativistes les plus importantes utilisées dans l'espace plat et l'espace courbé. Le deuxième chapitre est consacré aux solutions des oscillateurs de DKP à deux dimensions dans le cas de l'espace plat en l'absence et en présence d'un champ magnétique pour les particules de spin $S=0$ et de spin $S=1$. Dans le troisième chapitre donne les résultats concernant l'étude de l'oscillateur DKP dans un espace courbé (cas de la corde cosmique) pour les bosons de spin $0=S$ et de spin $1=S$ en présence et en absence d'un champ magnétique, nous représentons également les spectres d'énergie obtenus à l'aide du programme Mathematica.

Rappel mathématique et formalisme

في هذا الفصل سنقوم بعرض أهم العلاقات الرياضية التي تستعمل في كتابة معادلات الحركة داخل الفضاء المستوي و الفضاء المنحني .

Dans ce chapitre, nous allons écrire les relations mathématiques les plus importantes pour écrire les équations du mouvement dans l'espace plat et dans l'espace courbé.

1.1 La géométrie de l'espace

Le concept de temps et d'espace mathématiquement en physique est constitué de deux concepts liés l'un à l'autre de telle manière que chacun d'eux affecte l'autre. Dans cette représentation, nous combinerons les trois coordonnées de l'espace et la coordonnée du temps que nous exprimons. un point dans l'espace - temps utilisant par le quadrivecteur [34--36] .

$$x^\mu = (t, x) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (1.1)$$

le quadrivecteur peut exister sous deux formes : covariant et contravariant

x^μ :est la version contravariant d'un quadrivecteur et le passage à la version covariante x_μ se fait par le tenseur métrique de (Minkowski) $g_{\mu\nu}$ comme suit :

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad (1.2)$$

avec :

$$x_\mu = (-t, x) = (-t, x_1, x_2, x_3) \quad (1.3)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

ainsi que $x_0 = x^0$ et $x_i = -x^i$, $i = 1, 2, 3$

La structure de Poincaré-Minkowski est une structure géométrique de l'espace-temps de la relativité restreinte, elle est donnée par une généralisation de la structure géométrique et se définit comme suit :

$$dS^2 = L^2 - c^2 T^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c(\Delta t)^2 \quad (1.5)$$

c : désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

La transformation de Lorentz, remplace les coordonnées temporelle t par le "temps-lumière"

veut dire que $x^0 \equiv ct$ et $x^\mu \equiv (x^0, x^i)$ et $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ et la formule (1.5) devient :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (1.6)$$

ou : $\eta_{\mu\nu}$, la matrice diagonale se définit avec $\{-1, 1, 1, 1\}$, ou bien on écrit les seuls éléments non nuls comme ça $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \eta_{00} = -1$

Selon Poincaré-Minkowski, le groupe symétrie de l'espace de temps est l'enveloppe des transformations de Lorentz-Poincaré

$$x'^\mu = e^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.7)$$

ou :

$$g_{\mu\nu} = e^\alpha_\mu e^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

Ainsi que : e_μ^a, e_ν^b sont les tétrades (vierbein)

De l'autre coté l'espace courbé ou bien s'appelle l'espace riemannien se définit avec un coefficient $g_{\mu\nu}(x)$ "métrique quadratique" est cette métrique obtient la longueur infinitésimal ds^2 ainsi que :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (1.9)$$

la liaison entre les deux tenseurs η_{ab} et $g_{\mu\nu}$, se fait par l'intermédiaire des connexions qui assurent le transport parallèle des vecteurs au long d'une courbe sans changer sa direction. Ces derniers peuvent être calculer via deux méthodes : la première dite la méthode de Vierbein (référentiel de Lorentz), et la deuxième méthode se base sur les repères mobiles .

1.1.1 Méthode du référentiel de Lorentz

cette méthode est aussi applée référentiel de Lorentz ou bien la méthode de Vierbein , Nous y allons d'abord de la dérivée covariante du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$.

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \nabla_\mu (e_\nu^a e_\lambda^b) \eta_{ab} = (\nabla_\mu e_\nu^a) e_\lambda^b \eta_{ab} + e_\nu^a (\nabla_\mu e_\lambda^b) \eta_{ab} = 0 \quad (1.10)$$

avec : $\nabla_\mu \eta_{ab} = 0$ dans l'espace plat , la permutation des indices de l'équation précédente donne par

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} \quad (1.11)$$

$g^{\mu\nu}$ désigne la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$ ou le symbole de Kronecker vaut 1 quand $\mu = \nu$ et 0 sinon

le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ se calcule en fonction des Christoffel "coefficients de connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ qui définit dans l'annexe B :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu k \nu}^k \quad (1.12)$$

$$R_{\mu\nu} - R_{\mu k \nu}^k = 0 \quad (1.13)$$

1.1.2 Méthode des repères mobiles

Nous développons la notion des repères mobiles en utilisant des formes différentielles pour calculer les coefficients de connexion et la courbure, sans utiliser les symboles de Christoffel : On attribue un repère local orthonormé à chaque point de l'espace-temps, avec les vecteurs de base e_a écrits. Dans ces repères, la métrique est de type Minkowskien η^{ab} . Les coordonnées e^μ_ν de ces vecteurs sont différentes des repères naturels définis par les vecteurs e_a , les formes différentielles de degré 1 données par :

$$\omega^a = e^\mu_\nu(x^\nu) dx^\mu \quad (1.14)$$

avec des indices grecs (μ, ν) , soit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ et (a, b) sont des indices latins

ou :

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b \quad (1.15)$$

la différentiation absolue d'un vecteur A est définie par :

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \omega^\alpha_\beta A^\beta \quad (1.16)$$

on peut également exprimer explicitement le tenseur de torsion de la géométrie de Riemann en utilisant une connexion affine comme suit :

$$T^\lambda_{\mu\nu} = e^\lambda_a T^a_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = e^\lambda_a \left(\partial_\mu e^\alpha_\nu - \partial_\nu e^\alpha_\mu + \omega^a_{\mu b} e^b_\mu + \omega^a_{\nu b} e^b_\nu \right) \quad (1.18)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad (1.19)$$

l'équation de Maurer-Cartan et s'appelle aussi la condition de torsion dont comme suivant :

$$\omega^a_b \wedge e^b = -de^a \quad (1.20)$$

où :

$$\omega_b^a \wedge e^b + de^a = 0 \quad (1.21)$$

1.2 Les équations relativistes dans un espace plat

1.2.1 L'équation de Klein-Gordon :

par les coordonnées de la position définie par $\vec{r}(x^1, x^2, x^3)$ ou $\vec{r}(x, y, z)$ et par le principe de correspondance de la mécanique quantique en appliquant l'équation de schrodinger [37--39], nous permis d'écrire :

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.22)$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.23)$$

L'énergie d'une particule non relativiste peut s'écrire selon le principe de correspondance sous la forme suivante :

$$E = \frac{P^2}{2M} + V(\vec{r}) \quad (1.24)$$

conduit aussi à l'équation de schrodinger pour une fonction d'onde, $\psi(\vec{r}, t)$ comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left\{ -\frac{\Delta}{2M} + V(\vec{r}) \right\} \psi(\vec{r}, t) \quad (1.25)$$

dont $[\Delta = \nabla^2]$ est le laplacien. Pour le cas d'une particule relativiste libre dont l'énergie est donnée par la relation

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^2} \quad (1.26)$$

L'équation de Klein-Gordon pour les particules relativistes sans spin peut être obtenue en adoptant des unités naturelles : $\hbar = c = 1$ ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h : la constant de plank et c : la vitesse de la lumière) sous la forme suivante :

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) + M^2 \right\} \psi_{KG} = 0 \quad (1.27)$$

où :

$$\{ \square + M^2 \} \psi_{KG} = 0 \quad (1.28)$$

dont : $\square = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$: les vecteur D'Alembertien , dans l'équation de Klein-Gordon (K.G), nous utilisons le formalisme tensoriel et on définit l'opérateur gradient par sous composantes covariantes ∂_μ par :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.29)$$

les composantes contravariants ∂^μ on écrit sous la forme :

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (1.30)$$

par les deux relations et peut être consulté à :

$$\partial^\mu \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \quad (1.31)$$

la contraction de l'opérateur gradient avec lui même donne l'opérateur invariant de Lorenz \square , qui représente D'Alembertien

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \quad (1.32)$$

Grâce à la dernière relation(1.28) et la relation (1.25) nous obtenons :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + M^2) \psi_{KG} = 0 \quad (1.33)$$

dans le cas d'une interaction électromagnétique on effectue la substitution suivante :

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + ieA^\mu \quad (1.34)$$

dont le quadripotentiel A^μ est défini par :

$$A^\mu = (A^0, A^i) = (\varphi, \vec{A}) \quad (1.35)$$

Dans ce cas l'équation (1.27) devient :

$$\{(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + M^2\} \psi_{KG} = 0 \quad (1.36)$$

l'équation conjugué de l'équation de (K.G) (1.33) est :

Par simples manipulations , nous trouvons :

$$\partial_\mu \{ \psi^*(x) \partial^\mu \psi(x) - \psi(x) \partial^\mu \psi^*(x) \} = 0 \iff \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.37)$$

où :

$$J^\mu = \psi^*(x) \partial^\mu \psi(x) - \psi(x) \partial^\mu \psi^*(x) \quad (1.38)$$

J^μ : un quadrivecteur du courant défini par : $J^\mu = (\rho, \vec{j})$, où ρ la densité de charge électrique et \vec{j} la densité du courant

aussi le quadricourant dans cette dernière équation définit l'équation de continuité par :

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \quad (1.39)$$

avec :

$$\rho(x, t) = \psi^*(x) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial t} \quad (1.40)$$

la dernière relation (1.40) que nous avons obtenue peut avoir des valeurs positives ou négative tandis que $\rho(x, t)$ n'est pas définie positive, De là, nous pouvons identifier deux difficultés principales pour K-G, qui sont : premièrement, la présence de solutions d'énergie négative, pour

lesquelles nous n'avons aucune explication physique, et l'absence d'une densité de probabilité positive spécifique pour elles. L'équation de Klein-Gordon était considérée comme insatisfaisante dans les années où elle a été proposée .

1.2.2 L'équation de Dirac

Paul Dirac, mathématicien et physicien, a proposé une équation différentielle en 1928 pour éviter les obstacles dans l'équation de deuxième ordre. Cette équation explique le mouvement de certaines particules élémentaires qui ont des spins , en utilisant des matrices au lieu de quantités normales. L'équation de Dirac était relativiste et covariante linéaire, permettant un meilleur calcul du mouvement des particules. certaines particules élémentaires avec spin demi-entier, en utilisant des matrices au lieu de quantités normales [5, 40] .

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \gamma^0 M \right) \psi_D = H\psi_D \quad (1.41)$$

$$E = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \gamma^0 M \quad (1.42)$$

dont $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et γ^0 sont des matrices hermitiennes de l'ordre 4 , qui sont vérifiées les relations d'anticommution suivants :

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad (1.43)$$

$i \neq j$

;

$$\alpha_i \gamma^0 + \gamma^0 \alpha_i = \{\alpha_i, \gamma^0\} = 0 \quad (1.44)$$

ou : $\gamma^0 = I, j \neq i$ et $\alpha_i^2 = 1$

α_i et γ^0 sont les matrices de Dirac , leur relation est de forme :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

dont : $0, I$ sont respectivement la matrice nulle et unité de dimensions 2×2 et σ_i sont les matrices de Pauli données par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

puisque α_i et β sont des matrices de dimension 4×4 , cela signifie que la fonction d'onde ψ dans l'équation de "Dirac" prend la forme d'une matrice colonne à quatre composantes :

$$\psi_D = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T \quad (1.47)$$

L'équation de "Dirac" (1.41) peut être écrite sous forme covariante comme suit :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi_D = 0 \quad (1.48)$$

dont : $\gamma^\mu, \mu = 0 \dots 3$, sont des matrices de dimension " 4×4 ", ∂_μ : est la dérivée covariante.

M : la masse de particule et ψ : a fonction d'onde, les matrices γ^μ aussi connues comme matrice de "Dirac" construits du manière suivante :

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \beta \quad (1.49)$$

$$\gamma^1 = \gamma_1 = \gamma^0 \alpha_i = \beta \alpha_i \quad (1.50)$$

les matrices :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Nous utilisons la relation de substitution précédente (1.34) et la substituons dans l'équation (1.48) :

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - M) \psi_D = 0 \quad (1.52)$$

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^0 eA_0 + i\gamma^i \partial_i - \gamma^i eA_i - M \right) \psi_D = 0 \quad (1.53)$$

Multiplions la dernière équation a gauche par γ^0 :

avec : $(\gamma^0)^2 = I$, on a :

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \alpha_i (i\partial_i - eA_i) - \gamma^0 M \right) \psi_D = 0 \quad (1.54)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_D = H_0 \psi_D + V \psi_D \quad (1.55)$$

où :

$$H_0 = -i\alpha_i \partial_i + \gamma^0 M \quad (1.56)$$

$$V = eA_0 + e\alpha^i A_i \quad (1.57)$$

L'équation (1.55) est peu similaire à l'équation de schrodinger dans l'interaction classique avec la présence d'un champ électromagnétique , bien que la fonction d'onde est un spineur , notamment , dans le cas particulier ou $A_\mu = (\varphi, 0)$ le potentiel se réduit au potentiel électrique multiplié par charge de la particule.

1.2.3 L'équation de Duffin-Petiau-Kemmer

L'équation de kemmer est une extension de formalisme covariant de Dirac , aux particules scalaires de spin 0 et vectorielles de spin 1 , dans lequel on remplace les matrices gamma γ^μ par des matrices bêta β^μ , vérifiant une algèbre plus compliquée connue sous le nom de l'algèbre de "kemmer" [13].

l'équation libre de kemmer est :

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - M) \psi_K = 0 \quad (1.58)$$

où β^μ Ce sont des matrices qui ont trois représentation irréductible , la triviale de dimension 0, et celles de dimensions 5 et 10 , pour le cas des particules de spin S=0 et S=1 respectivement, elles génèrent l'algèbre de kemmer :

$$\beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\rho + g^{\nu\rho} \beta^\mu \quad (1.59)$$

$g^{\mu\nu}$: le tenseur métrique avec la signature $(-+++)$, contrairement aux matrices des algèbres de spin demi-entier, tel que l'algèbre de Dirac, elles possèdent la propriété des algèbres de spin entier, celle d'être non inversibles. On choisit une représentation laquelle :

$$\begin{aligned}\beta^{k+} &= -\beta^k \\ \beta^{0+} &= \beta^0\end{aligned}\quad (1.60)$$

Dans le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique A^μ , prend la forme :

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$$

dont :

$$\{i\beta^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M\} \psi = 0 \quad (1.61)$$

conjuguons maintenant l'équation

$$-i\partial_\mu \psi^* \beta^\mu - M\psi^* = 0 \quad (1.62)$$

$$i\partial_\mu \psi^* \beta^\mu + M\psi^* = 0 \quad (1.63)$$

on définit :

$$\bar{\psi} = \psi^* \left\{ 2(\beta^0)^2 - 1 \right\} \quad (1.64)$$

avec :

$$\bar{\psi}\beta^0 = \psi^*\beta^0 \quad (1.65)$$

D'où $\bar{\psi}$ étant l'adjointe de ψ , Ce qui répond à l'équation suivante :

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu)\bar{\psi} + M\bar{\psi} = 0 \quad (1.66)$$

sachant que :

$$\bar{\psi}\beta^\mu\beta^0 = \psi^*\beta^{\mu*}\beta^0 \quad (1.67)$$

on obtient l'équation de continuité :

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.68)$$

où :

$$J^\mu = (J^0, J^k) = \bar{\psi} \beta^\mu \psi \quad (1.69)$$

1.3 Les équations relativistes dans un espace-temps Courbé :

1.3.1 L'équation de Klein-Gordon :

L'équation de Klein-Gordon KG généralisée dans un espace courbe pour une particule de spin 0 et de masse M Dans le champ gravitationnel [41, 42], est donnée par cette équation :

$$(\square - \xi R - M^2) \psi_{KG} = 0 \quad (1.70)$$

ξ : est une constante de couplage réelle sans dimension

R : est le scalaire de courbure de Ricci ,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure de Ricci .

où l'opérateur \square : est le Dalemberdien dans un espace courbé , qui définit par

$$\square = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.71)$$

$g^{\mu\nu}$: le tenseur métrique inverse dans l'espace courbé , avec $g = \det(g_{\mu\nu})$. En fin de compte , nous obtenons cette équation :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - M^2 + \xi R \right\} \psi_{KG} = 0 \quad (1.72)$$

L'équation de Klein-Gordon (KG) dans le cas d'une interaction externe où $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ (e : est la charge du particule de spin 0) représentée sous la forme :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + ieA_\mu) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\nu + ieA_\nu) - M^2 \right] \psi_{KG} = 0 \quad (1.73)$$

1.3.2 L'équation de Dirac

L'équation de Dirac en présence du potentiel A^μ est écrite sous la forme suivante :

$$\{i\tilde{\gamma}^\mu [(\partial_\mu + ieA_\mu) - \Gamma_\mu] - M\} \psi_D = 0 \quad (1.74)$$

$\tilde{\gamma}^\mu(x)$:sont les matrices de Dirac dans une espace courbé : sa relation avec les matrices γ^a de l'espace plat est donnée par :

$$\gamma(x) = E_a^\mu(x) \gamma^a \quad (1.75)$$

ces matrices vérifient l'équation (1.53),(1.54)(1.55). $E_a^\mu(x)$ sont des matrices inverse de la tétrade dont

$$g^{\mu\nu} = E_a^\mu E_b^\nu \eta^{ab} \quad (1.76)$$

les connections spinorielles Γ_μ sont calculées en utilisant la relation

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4} \omega_{\mu ab} \sum^{ab} \quad (1.77)$$

où :

$$\sum^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b] \quad (1.78)$$

Notons ici que les indices $(a, b, c) = 0, 1, 2, 3$ indiquent le repère de référence plat , et les indices (μ, ν) indiquent un espace-temps courbé.

1.3.3 L'équation de DKP

Dans un espace courbé ,l'équation de DkP (1.58) est donnée par l'equation :

$$\left(i\tilde{\beta}^\mu \nabla_\mu - M \right) \psi_{DKP} = 0 \quad (1.79)$$

avec M est la masse du boson et $\tilde{\beta}^\mu$ sont les matrices de Kemmer dans la nouvelle configuration satisfaisant à la relation :

$$\tilde{\beta}^\mu = E_a^\mu(x) \beta^a \quad (1.80)$$

la dérivée covariante dans l'équation (1.79) est défini par :

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \sum_\mu \quad (1.81)$$

la connexion affine \sum_μ est donnée par :

$$\sum_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} [\beta^a, \beta^b] \quad (1.82)$$

enfin les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ peuvent écrire en fonction de symboles de Christoffel (Nous en parlerons dans le troisième chapitre) (1.83) comme suit :

$$\omega_\mu^{ab} = e_\alpha^a e^{\nu b} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a \quad (1.83)$$

Les Symboles du Christoffel, également connus sous le nom de connexions Levi-Civita , joue un rôle crucial dans la théorie de la relativité générale. Il est utilisé pour décrire la dérivée différentielle des tenseurs le long d'une courbe dans un espace-temps courbé [36, 41]. Ces symboles sont déterminés à partir de l'échelle spatio-temporelle, qui définit la distance Entre deux points finis. Les symboles de Christofel apparaissent sous la forme de coefficients qui mesurent la contribution de la courbure locale de l'espace-temps à la dérivée variable. Les symboles de Christofel ne sont pas considérés comme des tenseurs, car la transformation sous des coordonnées changeantes n'est pas facile. Cependant, en les combinant Vecteurs et tenseurs appropriés, on obtient des quantités tensorielles qui permettent de les décrire La courbure de l'espace-temps de manière variable. Ces symboles ont également des propriétés intéressantes

et sont nécessaires pour décrire des phénomènes physiques, comme décrire le parcours de l'espace-temps [41].

1.3.4 La corde cosmique

Les défauts topologiques sont des configurations stables de la matière formée une brisure de symétrie dans l'univers primitif, ils persistent après une transition de phase. Ils se manifestent en des monopôles, cordes et parois.... Dans la physique de la matière condensée, ils apparaissent comme des vortex dans les supraconducteurs ; parois des domaines dans les matériaux magnétiques, et les dislocations ou disclinations dans les solides désordonnés et les cristaux liquides [43--45].

La corde cosmique est un objet virtuel doté d'une structure fondamentalement linéaire qui semble s'être formé au cours d'une transition dans l'univers primitif liée à des transitions de rupture de symétrie telles que les murs de champ et les cordes cosmiques, ces dernières faisant partie des défauts topologiques identifiés en cosmologie en raison de leur impact sur la formation de la structure cosmique, l'énergie de l'univers étant libérée sous la forme de particules de haute énergie qui créent des défauts tels que les cordes cosmiques, les monopôles ou les murs de domaine. Ces défauts, y compris les cordes cosmiques, ont une géométrie spatiale unique qui peut avoir des effets importants sur la structure à grande échelle de l'univers, de sorte qu'ils exercent une influence sur le champ gravitationnel et, comme il s'agit d'objets étendus, leur influence ne se limite pas aux seules particules proches, mais va au-delà pour affecter leur trajectoire [23, 46, 47].

De nombreuses études et expériences sur les cordes cosmiques suggèrent qu'elles sont particulièrement importantes, l'une des plus importantes décrivant l'effet d'une corde cosmique d'épaisseur nulle sur la géométrie de l'espace-temps. Il a été considéré comme un fil qui représente la corde cosmique comme un tube mince avec un très petit rayon et une densité d'énergie constante, ce qui aide à comprendre de nombreuses questions plus complexes. La géométrie de l'espace autour de la corde cosmique a été décrite en coordonnées cylindriques, comme le montre la relation :

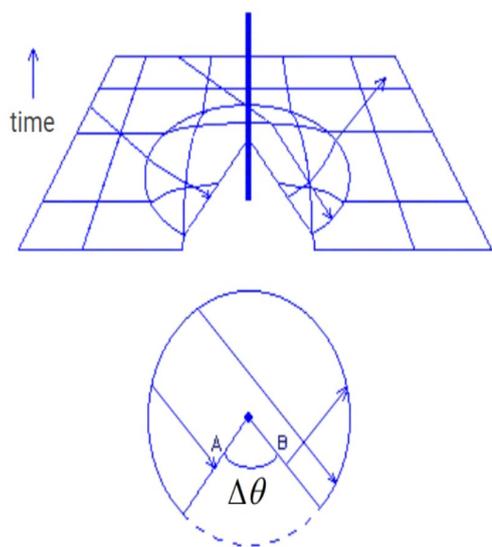


Fig. 1.1 : Représentation d'une corde cosmique

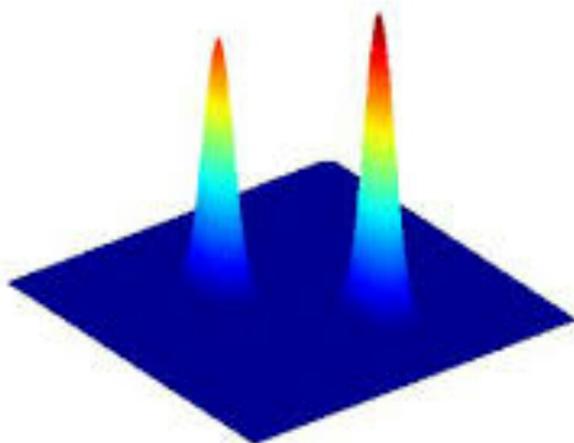


Fig. 1.2 : Simulation des cordes cosmiques par des vortex

$$dS^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 - dz^2 \quad (1.84)$$

Elle a également été décrite en coordonnées sphériques, mais nous avons choisi d'étudier l'espace courbe en coordonnées cylindriques parce qu'il est le plus proche de la géométrie de la corde cosmique, où apparaît ce que l'on appelle l'angle de déficit ($0 < \alpha \leq 1$), qui indique la formation d'une corde cosmique, ce qui est l'inverse dans l'espace courbé, où : $\alpha = 1$.

Les solutions de l'oscillateur Duffin-Kemmer-Petiau dans un espace-temps Plat

في هذا الفصل سنقوم بإيجاد حلول الهزاز النسبي ثنائي البعد DKP للجسيمات ذات السبين 1
والجسيمات ذات السبين 0 في فضاء مستوي في غياب وجود حقل مغناطيسي .

Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation de "DKP" libre, [9, 13] est donnée par l'équation :

$$(i\beta^\mu \nabla_\mu - M) \psi_{DKP} = 0 \quad (2.1)$$

L'introduction de l'interaction de l'oscillateur de Dirac se fait par la substitution $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - iM\omega \vec{r}$, avec ω est la fréquence. Dans ce cas, l'équation fondamentale de l'oscillateur de Kemmer bidimensionnel , est donnée par :

$$\{i\beta^0 \partial_0 + i\beta^1 (\partial_1 + M\omega \eta x) + i\beta^2 (\partial_2 + M\omega \eta y) - M\} \psi_{DKP} = 0 \quad (2.2)$$

les matrices $\beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3$ pour le spin 0 :

$$\beta^i = \begin{pmatrix} \theta_{2 \times 2} & \rho^i \\ -\rho_T^i & \theta_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta_{2 \times 2} & \rho^0 \\ -\rho_T^0 & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho^1 \\ -\rho_T^1 & \theta_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho^2 \\ -\rho_T^2 & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho^3 \\ -\rho_T^3 & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

les matrices $\beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3$ pour le spin 1 :

ρ_T : représentant la matrice transposée de ρ pour le spin 1.

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_i \\ -e^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & iS_i & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, (i = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

avec :

$$\bar{0} = (0, 0, 0), e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

$1_{3 \times 3}$: est la matrice unité, les S_i sont les matrices standards nom : relativistes du spin 1

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_1 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_1 \\ -e^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & iS_1 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

,

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_2 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_2 \\ -e^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_3 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_3 \\ -e^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & iS_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Nous substituerons ces matrices précédentes dans l'équation (2.2) afin d'en extraire des solutions en fonction de chaque cas de spin.

2.1 Particule de Spin-0

2.1.1 Cas libre sans interaction externe

Avant la substitution des matrices dans l'équation (2.2), nous calculons les produits suivantes :

$$\eta = 2\beta^{02} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$\beta^1 \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\beta^2 \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Par simple calcul, nous obtenons: $-M\psi_1 + i\partial_0\psi_2 - i(\partial_1 - M\omega x)\psi_3 - i(\partial_2 - M\omega y)\psi_4 = 0$

$$-M\psi_1 + E\psi_2 - i(\partial_X - M\omega x)\psi_3 - i(\partial_Y - M\omega y)\psi_4 = 0 \quad (2.17)$$

$$E\psi_1 - M\psi_2 = 0 \quad (2.18)$$

$$i(\partial_x + M\omega x)\psi_1 - M\psi_3 = 0 \quad (2.19)$$

$$i(\partial_y + M\omega y)\psi_1 - M\psi_4 = 0 \quad (2.20)$$

$$M\psi_5 = 0 \quad (2.21)$$

Ce système d'équations conduit à

$$\psi_2 = \frac{E}{M}\psi_1 \quad (2.22)$$

$$\psi_3 = \frac{i(\partial_x + M\omega x)}{M}\psi_1 \quad (2.23)$$

$$\psi_4 = \frac{i(\partial_y + M\omega y)}{M}\psi_1 \quad (2.24)$$

l'insertion de (2.21),(2.22),(2.23) dans l'équation (2.17) nous donne :

$$((\partial_x - M\omega x)(\partial_x + M\omega x) + (\partial_y - M\omega y)(\partial_y + M\omega y) + E^2 - M^2) \psi_1 = 0 \quad (2.25)$$

Cette dernière équation peut être réécrite par une autre façon comme suit :

$$((p_x - M\omega x)(p_x + M\omega x) + (p_y - M\omega y)(p_y + M\omega y)) \psi_1 = (E^2 - M^2) \psi_1 \quad (2.26)$$

Nous simplifions la relation précédente et obtenons une équation pour un oscillateur harmonique bidimensionnel comme suit :

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 y^2 \right) \right\} \psi_1 = \left(\frac{E^2 - M^2}{2M} + \omega \right) \psi_1 \quad (2.27)$$

on pose $E' = \left(\frac{E^2 - M^2}{2M} + \omega \right)$

Pour résoudre cette équation, nous suivons les mêmes étapes suivies pour résoudre l'équation de l'oscillateur de Klein-Gordon bidimensionnel (voir AnnexA).

L'équation(2.27) similaire à celle trouvé pour le cas de l'oscillateur de (K-G), donc les solutions sont

$$E_{n_x n_y} = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega(n_x + n_y)} \quad (2.28)$$

$$\psi_{DKP}(x, y) = \frac{1}{2^{n_x n_y}} \sqrt{\frac{M\omega}{\pi}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E}{M} \\ \frac{i(\partial_x + M\omega x)}{M} \\ \frac{i(\partial_y + M\omega y)}{M} \\ 0 \end{bmatrix} H_{n_x}(M\omega x) H_{n_y} \times (M\omega y) e^{(-\frac{M\omega}{2})(x^2 + y^2)} \quad (2.29)$$

2.1.2 En présence du champ magnétique

En présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{A}_\phi = i\frac{\phi_B}{2\pi} \vec{e}_\phi$, l'équation de l'oscillateur bidimensionnelle de "DKP" devient :

$$\left\{ i\beta^0 \partial_0 + i\beta^1 (\partial_1 + M\omega \eta x) + i\beta^2 (\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega \eta y) - M \right\} \psi_{DKP} = 0 \quad (2.30)$$

Suivant les mêmes étapes cités dans la section précédente, On trouve après simplification :

$$\begin{bmatrix} 0 & i\partial_0 & -i(\partial_1 - M\omega x) & -i(\partial_2 - \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y) & 0 \\ i\partial_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_1 + iM\omega x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_2 + iM\omega y + i\frac{e\phi_B}{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} - M \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

alors

$$-M\psi_1 + E\psi_2 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_3 - i(\partial_y - \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y)\psi_4 = 0 \quad (2.32)$$

$$\psi_2 = \frac{E}{M}\psi_1 \quad (2.33)$$

$$\psi_3 = \frac{i(\partial_x + M\omega x)}{M}\psi_1 \quad (2.34)$$

$$\psi_4 = \frac{i(\partial_y + \frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega y)}{M}\psi_1 \quad (2.35)$$

$$\psi_5 = 0 \quad (2.36)$$

Ces résultats conduisent à l'équation suivante:

$$\left((\partial_x - M\omega x)(\partial_x + M\omega x) + (\partial_y - \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y)(\partial_y + \frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega y) + E^2 - M^2 \right) \psi_1 = 0 \quad (2.37)$$

La relation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \left(\frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y \right)^2 \right) \right\} \psi_1 = \left(\frac{E^2 - M^2}{2M} + \omega \right) \psi_1 \quad (2.38)$$

$$\text{avec : } Y = \frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y$$

Suivant les mêmes étapes que celles utilisées précédemment pour résoudre l'équation (2.27), nous obtenons le spectre d'énergie suivant :

$$E_{n_x n_y} = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega(n_x + n_y)} \quad (2.39)$$

La fonction d'onde et ses composantes sont :

$$\psi_{DKP}(x, y) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{M\omega}{\pi}} \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ \frac{i(\partial_x + M\omega x)}{M} \\ \frac{i(\partial_y + \frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega y)}{M} \\ 0 \end{bmatrix} H_{n_x}(M\omega x) H_{n_y}(M\omega(\frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y)) e^{(-\frac{M\omega}{2})(x^2 + (\frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y)^2)} \quad (2.40)$$

2.2 Particule de Spin-1

2.2.1 Cas libre (sans interaction)

La fonction d'onde de la particule de spin -1 est une fonction d'onde à dix composantes : elle est donnée par:

$$\psi_{DKP} = \{ \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5 \ \psi_6 \ \psi_7 \ \psi_8 \ \psi_9 \ \psi_{10} \}^T \quad (2.41)$$

Utilisant les expressions (2.10), (2.11) et (2.12) pour trouver :

$$\eta = 2(\beta^0)^2 - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\beta^1 \eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\beta^2 \eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

on substitue les matrices précédentes dans la relation (2.2) et on obtient le système des équations suivant:

$$i(\partial_x + M\omega x)\psi_5 + i(\partial_y + M\omega x)\psi_6 - M\psi_1 = 0 \quad (2.45)$$

$$E\psi_2 + i(\partial_y - M\omega y)\psi_{10} - M\psi_2 = 0 \quad (2.46)$$

$$E\psi_6 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_5 - M\psi_3 = 0 \quad (2.47)$$

$$E\psi_7 - i(\partial_y - M\omega y)\psi_8 + i(\partial_x - M\omega x)\psi_9 - M\psi_4 = 0 \quad (2.48)$$

$$E\psi_2 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_1 - M\psi_5 = 0 \quad (2.49)$$

$$E\psi_3 - i(\partial_Y - M\omega y)\psi_1 - M\psi_6 = 0 \quad (2.50)$$

$$E\psi_4 - M\psi_7 = 0 \quad (2.51)$$

$$-i(\partial_y + M\omega y)\psi_4 - M\psi_8 = 0 \quad (2.52)$$

$$-i(\partial_x + M\omega x)\psi_4 - M\psi_9 = 0 \quad (2.53)$$

$$-i(\partial_y - M\omega y)\psi_2 + i(\partial_x + M\omega x)\psi_3 - M\psi_{10} = 0 \quad (2.54)$$

Alors :

$$\psi_7 = \frac{E}{M}\psi_4 \quad (2.55)$$

$$\psi_8 = \frac{-i(\partial_y + M\omega y)}{M}\psi_4 \quad (2.56)$$

$$\psi_9 = \frac{-i(\partial_x + M\omega x)}{M}\psi_4 \quad (2.57)$$

Insérant les équations (2.55), (2.56), (2.57) dans l'équation (2.48) nous trouvons :

$$((\partial_x - M\omega x)(\partial_x + M\omega x) + (\partial_y - M\omega y)(\partial_y + M\omega y) + E^2 - M^2)\psi_4 = 0 \quad (2.58)$$

On remarque de ce qui précède que l'équation différentielle correspondant à la composante ψ_4 Semblable à l'équation (2.25),

on obtient donc les mêmes résultats : alors Les solutions dans ce cas sont (voir Annex A) :

$$E_{n_x n_y} = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega(n_x + n_y)} \quad (2.59)$$

$$\psi_4(x, y) = \frac{1}{2^{n_x} n_x!} \sqrt{\frac{M\omega}{\pi}} H_{n_x}(M\omega x) H_{n_y}(M\omega y) e^{(-\frac{M\omega}{2})(x^2 + y^2)} \quad (2.60)$$

2.2.2 En présence du champ magnétique

Nous suivons les mêmes étapes précédentes que la section précédente , On trouve après simplification :

$$i(\partial_x + M\omega x)\psi_5 + i(\partial_y + \frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega x)\psi_6 - M\psi_1 = 0 \quad (2.61)$$

$$E\psi_2 + i(\partial_y + \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y)\psi_{10} - M\psi_2 = 0 \quad (2.62)$$

$$E\psi_6 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_5 - M\psi_3 = 0 \quad (2.63)$$

$$E\psi_7 - i(\partial_y - \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y)\psi_8 + i(\partial_x - M\omega x)\psi_9 - M\psi_4 = 0 \quad (2.64)$$

$$E\psi_2 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_1 - M\psi_5 = 0 \quad (2.65)$$

$$E\psi_3 - i(\partial_y - \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y)\psi_1 - M\psi_6 = 0 \quad (2.66)$$

$$E\psi_4 - M\psi_7 = 0 \quad (2.67)$$

$$-i(\partial_y - \frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega y)\psi_4 - M\psi_8 = 0 \quad (2.68)$$

$$-i(\partial_x - \frac{e\phi_b}{2\pi} + M\omega x)\psi_4 - M\psi_9 = 0 \quad (2.69)$$

$$-i(\partial_y - \frac{e\phi_b}{2\pi} - M\omega y)\psi_2 + i(\partial_x + M\omega x)\psi_3 - M\psi_{10} = 0 \quad (2.70)$$

donc :

$$\psi_7 = \frac{E}{M}\psi_4 \quad (2.71)$$

$$\psi_8 = \frac{-i(\partial_y - \frac{e\phi_b}{2\pi} + M\omega y)}{M} \psi_4 \quad (2.72)$$

$$\psi_9 = \frac{-i(\partial_x + M\omega x)}{M} \psi_4 \quad (2.73)$$

Nous substituons (2.71),(2.72),(2.73) dans l'équation (2.64) on trouve :

$$\left((\partial_x - M\omega x)(\partial_x + M\omega x) + (\partial_y - \frac{e\phi_B}{2\pi} - M\omega y)(\partial_y + \frac{e\phi_B}{2\pi} + M\omega y) + E^2 - M^2 \right) \psi_4 = 0 \quad (2.74)$$

C'est une équation de la même forme que l'équation précédente (2.38):

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \left(\frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y \right)^2 \right) \right\} \psi_4 = \left(\frac{E^2 - M^2}{2M} + \omega \right) \psi_4 \quad (2.75)$$

Ses solutions sont donc données comme suit :

$$E_{n_x n_y} = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega(n_x + n_y)} \quad (2.76)$$

$$\psi_4(x, y) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{M\omega}{\pi}} H_{n_x}(M\omega x) H_{n_y} \left(M\omega \left(\frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y \right) \right) e^{(-\frac{M\omega}{2})(x^2 + (\frac{e\phi_B}{2\pi M\omega} + y)^2)} \quad (2.77)$$

On peut extraire le reste des composants par substitution des ces solutions dans les relations (2.77).

L'oscillateur DKP en présence d'une corde cosmique

في هذا الفصل سنقوم بإيجاد حلول الهزاز النسبي DKP للجسيمات ذات السبين 1 والجسيمات ذات السبين 0 في فضاء منحنى بحضور حبل كوني .

A partir de les équations (1.81,1.82,1.83) et lors de l'introduction du terme de l'oscillateur de Dirac $\partial_\rho \rightarrow \partial_\rho + M\omega\tilde{\eta}\rho$, l'équation de l'oscillateur de DKP en présence d'un défaut topologique présenté par une corde cosmique [?,9], donnée par :

$$\left[i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} \right) - M \right] \psi_{DKP} = 0 \quad (3.1)$$

avec :

$$S^{ab} = [\beta^a, \beta^b] \quad (3.2)$$

les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ sont calculés à l'intermédiaire de l'équation (1.83), et le détail de ce calcul pour le cas du métrique (1.84) est trouvé dans l'annex B.

où :

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 \partial_0 + i\tilde{\beta}^1 (\partial_1 + M\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2 (\partial_2 + \alpha [\beta^1, \beta^2]) - M \right\} \psi_{DKP} = 0 \quad (3.3)$$

3.1 Particule de Spin-0

3.1.1 Cas libre (Sans interaction externe)

l'état stationnaire ψ_{DKP} d'une particule de spin-0 est une fonction d'onde de cinq composants de la forme suivant :

$$\psi_{DKP} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T \quad (3.4)$$

On a :

$$\tilde{\beta}^\mu = E_a^\mu(x) \beta^a \quad (3.5)$$

$$\tilde{\beta}^0 = \beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\beta}^1 = \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{1}{\alpha\rho} \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\tilde{\eta} = 2 \left(\tilde{\beta}^0 \right)^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Nous calculons maintenant le commutateur : $[\beta^1, \beta^2]$

$$\tilde{\beta}^1 \tilde{\beta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\beta}^2 \tilde{\beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$[\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2] = \tilde{\beta}^1 \tilde{\beta}^2 - \tilde{\beta}^2 \tilde{\beta}^1 = \frac{1}{\alpha\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Nous pouvons écrire :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \partial_0 i & \left(M\omega\rho - \frac{1}{\rho} - \partial_1\right) i & \frac{-i\partial_2}{\alpha\rho} & 0 \\ i\partial_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i(\partial_1 + M\omega\rho) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - M \right] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

On trouve les équations suivants :

$$E\psi_2 + i \left(M\omega\rho - \frac{1}{\rho} - \partial_1\right) \psi_3 - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_1 = 0 \quad (3.13)$$

$$E\psi_1 - M\psi_2 = 0 \quad (3.14)$$

$$i(\partial_1 + M\omega\rho) \psi_1 - M\psi_3 = 0 \quad (3.15)$$

$$i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \psi_1 - M\psi_4 = 0 \quad (3.16)$$

$$-M\psi_5 = 0 \quad (3.17)$$

Alors, nous obtenons :

$$\psi_2 = \frac{E}{M}\psi_1 \quad (3.18)$$

$$\psi_3 = \frac{i(\partial_1 + M\omega\rho)}{M}\psi_1 \quad (3.19)$$

$$\psi_4 = \frac{i\partial_2}{\alpha\rho M}\psi_1 \quad (3.20)$$

$$\psi_5 = 0 \quad (3.21)$$

La substitution des ces équations dans la relation (3.13) nous donne :

$$\left[\left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_1 + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \partial_2^2 + E^2 - M^2 \right] \psi_1 = 0 \quad (3.22)$$

une simple simplification nous conduit à trouver

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_1 + 2M\omega - (M\omega\rho)^2 + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \partial_\phi^2 + E^2 - M^2 \right\} \psi_1 = 0 \quad (3.23)$$

La solution de la dernière équation est donnée par la forme :

$$\psi_1(\rho) = e^{-iEt + ij\phi} R(\rho) \quad (3.24)$$

Nous substituons la solution proposée dans cette relation(3.23), Ensuite, on pose : $\nu = E^2 - M^2 + 2M\omega$

Alors :

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} + M^2\rho^2\omega^2 - \nu \right) \right\} R(\rho) = 0 \quad (3.25)$$

Prenons maintenant $\zeta = M\omega\rho^2$,Nous effectuons un processus de différenciation pour la dernière relation par rapport à ρ et nous changeons les variables :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 2M\omega\rho \text{ et } \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} = 2M\omega\rho \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

On différencie encore par rapport à ρ et trouvons que

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} (2M\omega\rho \frac{\partial}{\partial \zeta}) = 2M\omega \frac{\partial}{\partial \zeta} + 4M^2\omega^2\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

En substituant dans l'équation (3.25), nous trouvons :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \left(\frac{\lambda^2}{4\zeta^2} + \frac{1}{4} - \frac{\nu}{4M\omega\zeta} \right) \right\} R(\rho) = 0 \quad (3.26)$$

pour obtenir des solutions régulières à cette dernière équation, nous utilisons la méthode de Nikiforov-Uvarov [13] (voir Annexe C) Après avoir organisé l'équation précédente tous les paramètres de cette méthode sont donnés par les expressions suivantes :

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 \quad (3.27)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{\nu}{4M\omega}, \xi_3 = \frac{\lambda^2}{4} \quad (3.28)$$

$$\alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0 \quad (3.29)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4}, \alpha_7 = \frac{-\nu}{4M\omega}, \alpha_8 = \frac{\lambda^2}{4} \quad (3.30)$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{4}, \alpha_{10} = 1 + |\lambda|, \alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = \frac{|\lambda|}{2}, \alpha_{13} = -\frac{1}{2} \quad (3.31)$$

Nous substituons ces paramètres dans la relation (C.2) (voir Annexe C) Nous trouvons :

$$\frac{(2n+1)}{2} + \left(\frac{-\nu}{4M\omega} \right) + \frac{|\lambda|}{2} = 0 \text{ donc}$$

$$-n = \frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4M\omega} \quad (3.32)$$

avec $\nu = E^2 - M^2 + 2M\omega$ et $\lambda = \frac{j}{\alpha}$ En effectuant des opérations simples et directes, on obtient le spectre énergétique de cet oscillateur comme suit :

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} \right) \quad (3.33)$$

donc :

$$E = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} \right)} \quad (3.34)$$

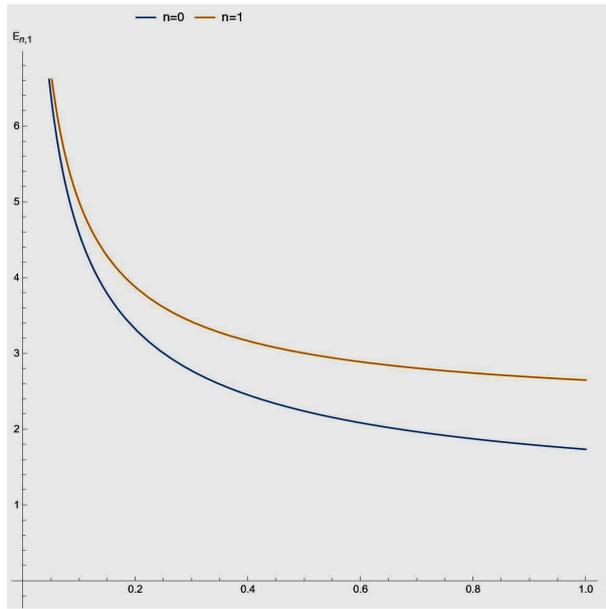


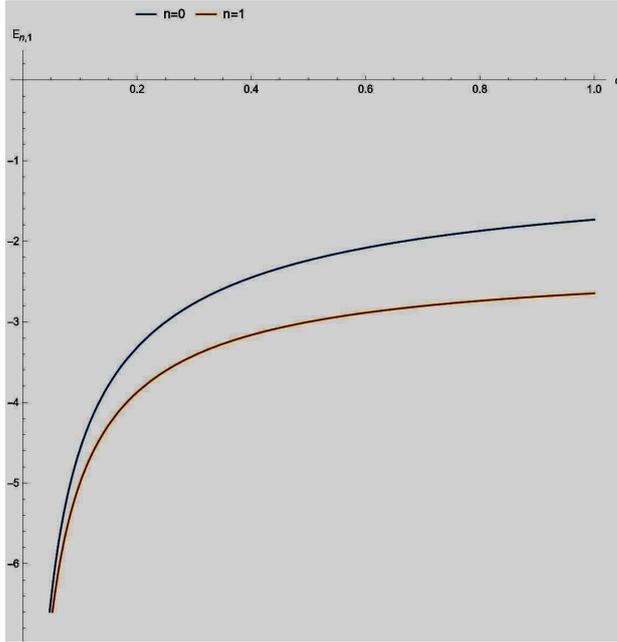
Fig. 3.1 : La solution positive de l'énergie en fonction de α

avec $j = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \dots$ (On prend le module de ce nombre pour éviter le cas du résultat négatif sous la racine)

Selon cette équation, on constate que la présence de l'angle de déficit α de la corde cosmique modifié bien le spectre de la particule : contrairement au cas de l'espace plat : la présence de cette dernière brise bien la dégénérescence des niveaux d'énergies. Dans la limite $\alpha \rightarrow 1$, dont $N = 2n + |j|$, est le nombre quantique principal, le spectre d'énergie de l'oscillateur de DKP dans l'espace plat (2.39) est bien reproduit.

Les figures (3.1) et (3.2) illustrent le profil de la solution positive et la solution négative de l'énergie respectivement en fonction de α pour les premiers états ($n = 0$ et $n = 1$). Les deux graphes sont tracés pour $M = \omega = j = 1$, pour α variant entre 0 et 1.

On remarque que dans l'intervalle $0 < \alpha \leq 1$: L'énergie positive diminue quant α augmente, et la solution négative de l'énergie augmente pour l'augmentation de valeur de α . Comme prévu, l'énergie tend à se comporter dans un espace-temps plat lorsque α tend vers 1. (nous permet de conclure que la valeur de l'énergie varie inversement à la valeur de l'angle α , tandis que la valeur négative de l'énergie est directement proportionnelle à la valeur de l'angle α).

Fig. 3.2 : La solution négative de l'énergie en fonction de α

Enfin, avec $F \equiv F_1$ la fonction d'onde totale de notre oscillateur est donnée par l'équation :

$$\psi_1 = e^{-iEt + ij\phi} (M\omega\rho^2)^{|j|/2\alpha} e^{-\left(\frac{M\omega\rho^2}{2}\right)} \times {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha} + 1, M\omega\rho^2\right) \quad (3.35)$$

On peut également extraire les fonctions d'onde restantes pour ce oscillateur en s'appuyant sur les relations extraites précédemment : (3.18) et (3.19) et (3.20) . Passons maintenant au cas de la présence d'un champ magnétique externe.

3.1.2 En présence du champ magnétique

L'équation de l'oscillateur DKP est donnée dans une corde cosmique et en présence d'un champ magnétique décrit par le potentiel vecteur $\vec{A}_\phi = i\frac{\phi_B}{2\pi\alpha\rho}\vec{e}_\phi$, est :

$$\left(i\tilde{\beta}^0\partial_0 + i\tilde{\beta}^1(\partial_1 + M\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2\left\{\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi}\right\} + \alpha[\beta^1, \beta^2] - M \right) \psi_{DKP} = 0 \quad (3.36)$$

Nous suivons les mêmes étapes précédentes que dans le cas traité dans la section précédente, l'équation (3.36) devient :

$$E\psi_2 + i \left(M\omega\rho - \frac{1}{\rho} - \partial_1 \right) \psi_3 - \frac{i(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$E\psi_1 - M\psi_2 = 0 \quad (3.38)$$

$$i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_1 - M\psi_3 = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{i(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_1 - M\psi_4 = 0 \quad (3.40)$$

$$-M\psi_5 = 0 \quad (3.41)$$

Ce système conduit à :

$$\psi_2 = \frac{E}{M} \psi_1 \quad (3.42)$$

$$\psi_3 = \frac{i}{M} (\partial_1 + M\omega\rho) \psi_1 \quad (3.43)$$

$$\psi_4 = \frac{i(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{M\alpha\rho} \psi_1 \quad (3.44)$$

$$\psi_5 = 0 \quad (3.45)$$

dans ce cas l'équations (3.37) après la compensation de (3.42), (3.43), (3.44) nous trouvons :

$$\left\{ (\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho})(\partial_1 + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} (\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})^2 + E^2 - M^2 \right\} \psi_1 = 0 \quad (3.46)$$

Après simplification :

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - M^2 \omega^2 \rho^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\alpha^2 \rho^2} + \frac{e\phi_B \partial_\phi}{\alpha^2 \rho^2 \pi} - \left(\frac{e\phi_B}{2\pi} \right)^2 + 2M\omega + E^2 - M^2 \right\} \psi_1 = 0 \quad (3.47)$$

avec

$$\psi_1 = e^{-ij\phi} \Phi(\rho) \quad (3.48)$$

Nous trouvons :

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(\frac{\Gamma^2}{\rho^2} + M^2 \omega^2 \rho^2 - v \right) \right\} \Phi(\rho) = 0 \quad (3.49)$$

avec : $v = E^2 - M^2 + 2M\omega$ et $\Gamma = \frac{j - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha}$

On remarque que la dernière équation (3.49) est similaire à l'équation (3.25), donc nous obtenons les solutions suivantes :

$$E = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{\left| j - \frac{e\phi_B}{2\pi} \right|}{\alpha} \right)} \quad (3.50)$$

Nous définissons l'expression $\left(j - \frac{e\phi_B}{2\pi} \right)$ en valeur absolue pour que l'expression à l'intérieur de la racine soit positive.

$$\psi_1(\rho) = e^{-iEt + ij\phi} (M\omega\rho^2)^{\left| j - \frac{e\phi_B}{2\pi} \right| / 2\alpha} e^{-\left(\frac{M\omega\rho^2}{2} \right)} \times {}_1F_1 \left(-n, \frac{\left| j - \frac{e\phi_B}{2\pi} \right|}{\alpha} + 1, M\omega\rho^2 \right) \quad (3.51)$$

Le cas particulier $\phi_B = 0$, conduit au spectre d'énergie donné par l'équation (3.34) .

3.2 Particule se Spin-1

3.2.1 Cas libre (Absence d'interaction)

l'état stationnaire ψ_{DKP} dans ce cas est une fonction d'onde de dix composantes comme ce suit :

$$\psi_{DKP} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T \quad (3.52)$$

Nous citons précédemment les matrices dans l'espace plat, et nous l'utilisons maintenant pour trouver les matrices dans l'espace courbé on appliquant la relation (3.3) :

$$\tilde{\beta}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\tilde{\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\tilde{\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\tilde{\eta} = 2(\beta^0)^2 - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Le calcul de $[\beta^1, \beta^2]$ est comme suit :

$$[\beta^1, \tilde{\beta}^2] = \beta^1 \tilde{\beta}^2 - \tilde{\beta}^2 \beta^1 = \frac{1}{\alpha\rho} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

on obtient lesystème de dix équations suivant :

$$-M\psi_1 - i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_5 + i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_6 = 0 \quad (3.58)$$

$$-M\psi_2 + E\psi_5 + i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_{10} = 0 \quad (3.59)$$

$$-M\psi_3 + E\psi_6 - i(\partial_1 - M\omega\rho)\psi_{10} = 0 \quad (3.60)$$

$$-M\psi_4 + E\psi_7 - i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_8 + i(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho})\psi_9 = 0 \quad (3.61)$$

$$-i(\partial_1 - M\omega\rho)\psi_1 + E\psi_2 - M\psi_5 = 0 \quad (3.62)$$

$$-i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_1 + E\psi_3 - M\psi_6 = 0 \quad (3.63)$$

$$E\psi_4 - M\psi_7 = 0 \quad (3.64)$$

$$i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_4 - M\psi_8 = 0 \quad (3.65)$$

$$-i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_4 - M\psi_9 = 0 \quad (3.66)$$

$$i\left(-\frac{\partial_2}{\alpha\rho} + \frac{1}{\rho}\right)\psi_2 + i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_3 - M\psi_{10} = 0 \quad (3.67)$$

Ce système conduit à :

$$\psi_7 = \frac{E}{M}\psi_4 \quad (3.68)$$

$$\psi_8 = i\frac{\partial_2}{\alpha\rho M}\psi_4 \quad (3.69)$$

$$\psi_9 = -i\left(\frac{\partial_1 + M\omega\rho}{M}\right)\psi_4 \quad (3.70)$$

dans ce cas l'équations (3.61) après la compensation de (3.68), (3.69), (3.70) nous trouvons :

$$-M\psi_4 + \frac{E^2}{M}\psi_4 - i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\left(i\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\right)\frac{1}{M}\psi_4 + i\left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho}\right)\left(-i\left(\frac{\partial_1 + M\omega\rho}{M}\right)\right)\psi_4 = 0 \quad (3.71)$$

et cette équation devient :

$$\left\{\left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho}\right)(\partial_\rho + M\omega\rho) + \frac{(\partial_\varphi)^2}{\alpha^2\rho^2} + E^2 - M^2\right\}\psi_4 = 0 \quad (3.72)$$

où :

$$\left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho}\right)(\partial_1 + M\omega\rho) = \partial_1^2 + \frac{1}{\rho}\partial_1 + 2M\omega \quad (3.73)$$

nous trouvons :

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_1 + 2M\omega - (M\omega\rho)^2 + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \partial_\phi^2 + E^2 - M^2 \right\} \psi_4 = 0 \quad (3.74)$$

la solution sous la forme :

$$\psi_4 = e^{-iEt} e^{ij\phi} R(\rho) \quad (3.75)$$

ce qui donne :

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - M\omega\rho^2 + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \partial_\varphi^2 + 2M\omega + E^2 - M^2 \right\} R(\rho) = 0 \quad (3.76)$$

nous posons le changement de variable $\zeta' = M\omega\rho^2$ cela conduit à l'équation différentielle dont la forme est :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta'^2} + \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \zeta'} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{4\zeta'^2} - \frac{\nu}{4M\omega\zeta'} \right) \right\} R = 0 \quad (3.77)$$

On pose : $\nu = E^2 - M^2 + 2M\omega$. L'équation (3.76) se transforme à :

$$\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} + M^2 \omega^2 \rho^2 - \nu \right) R = 0 \quad (3.78)$$

$$\left\{ \partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \lambda^2 \frac{1}{\rho^2} + \nu \right\} R(\rho) = 0 \quad (3.79)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta'^2} + \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \zeta'} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{4\zeta'^2} - \frac{\nu}{4M\omega\zeta'} \right) \right\} R(\rho) = 0 \quad (3.80)$$

On prend

$$R(\rho) = \zeta'^{\frac{|\lambda|}{2}} e^{-\left(\frac{\zeta'}{2}\right)} F(\zeta') \quad (3.81)$$

On différencie la dernière expression par rapport à ζ' nous trouvons que :

$$\frac{\partial R(\rho)}{\partial \zeta'} = \left(\frac{|\lambda|}{2} \zeta'^{-1} F(\zeta') - \frac{1}{2} F(\zeta') + F'(\zeta') \right) \zeta'^{\frac{|\lambda|}{2}} e^{-\frac{\zeta'}{2}} \quad (3.82)$$

Nous différencions encore par rapport à ζ' :

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \zeta'^2} = \left(\left(\frac{|\lambda|}{2} \left(\frac{|\lambda|}{2} - 1 \right) \zeta'^{-2} + \frac{|\lambda|}{4} \zeta'^{-1} + \frac{1}{4} \right) F(\zeta') - (|\lambda| - 1) F'(\zeta') + F''(\zeta') \right) \zeta'^{\frac{|\lambda|}{2}} \quad (3.83)$$

On différencie la dernière expression par rapport à ζ' nous trouvons que :

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\zeta F''(\zeta) + (|\lambda| + 1 - \zeta) F' - \left(\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4M\omega} \right) F = 0 \quad (3.84)$$

Cette équation admet comme solution fonction hypergéométrique confluyente. Pour obtenir des fonctions d'ondes normalisées, il faut que les séries infinies deviennent des polynômes. Cette exigence n'est satisfaite que dans le cas où le terme indépendant a est un entier négatif, $a = -n$. Ainsi, nous avons : $x F''(x) + (c - x) F' - a F(x) = 0$

les solutions propres de cette équation sont obtenues en posant que : $a = -n$ et $c = |\lambda| + 1$

nous avons $-n = \frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4M\omega}$ avec $\nu = E^2 - M^2 + 2M\omega$ et $\lambda = \frac{j}{\alpha}$ En effectuant des opérations simples et directes, on obtient le spectre énergétique de cet oscillateur comme suit :

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} \right) \quad (3.85)$$

Donc

$$E = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} \right)} \quad (3.86)$$

Nous définissons le nombre quantique "j" en valeur absolue pour que l'expression à l'intérieur de la racine soit positive.

avec $j = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \dots$

La présence d'une corde cosmique, par le biais du paramètre α , brise la dégénérescence de notre spectre. En outre, dans la limite où $\alpha \rightarrow 1$ en equation. (3.86), le résultat exact de l'oscillateur à deux dimensions de l'oscillateur de DKP dans l'espace de Minkowski.

Enfin, avec $F \equiv F_1$ [48] la fonction d'onde totale de notre oscillateur est donnée par l'équation :

$$\psi_4(\rho) = e^{-iEt+iJ\phi} (M\omega\rho^2)^{|J/2\alpha|} e^{-\left(\frac{M\omega\rho^2}{2}\right)} \times_1 F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha} + 1, M\omega\rho^2\right) \quad (3.87)$$

$$\psi_7 = \frac{E}{M}\psi_4, \psi_8 = \frac{i}{M} \frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_4, \psi_9 = -i\left(\frac{\partial_1 + M\omega\rho}{M}\right)\psi_4 \quad (3.88)$$

et

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_5 = \psi_6 = \psi_{10} = 0 \quad (3.89)$$

Ce résultat est justifié selon la nature de l'équation de DKP : en effet la fonction d'onde de l'équation de DKP admet uniquement six composantes physiques et quatre composante redondante : ces dernières sont à la base du problème de découplage du système des équations. Ce qui justifié l'existence des composantes nulles dans la fonction d'onde de DKP.

3.2.2 En présence du champ magnétique

Nous suivons les mêmes étapes précédentes la section précédente concernant le cas de spin-1 , et nous substituons dans ,On trouve alors :

$$-M\psi_1 - i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_5 + i\frac{(\partial_2 + \frac{i e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho}\psi_6 = 0 \quad (3.90)$$

$$-M\psi_2 + E\psi_5 + i\frac{(\partial_2 + \frac{i e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho}\psi_{10} = 0 \quad (3.91)$$

$$-M\psi_3 + E\psi_6 - i(\partial_1 - M\omega\rho)\psi_{10} = 0 \quad (3.92)$$

$$-M\psi_4 + E\psi_7 - i\frac{(\partial_2 + \frac{i e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho}\psi_8 + i(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho})\psi_9 = 0 \quad (3.93)$$

$$-i(\partial_1 - M\omega\rho)\psi_1 + E\psi_2 - M\psi_5 = 0 \quad (3.94)$$

$$-i\frac{(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho}\psi_1 + E\psi_3 - M\psi_6 = 0 \quad (3.95)$$

$$i\frac{(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho}\psi_4 - M\psi_8 = 0 \quad (3.96)$$

$$-i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_4 - M\psi_9 = 0 \quad (3.97)$$

$$i\left(-\frac{(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} + \frac{1}{\rho}\right)\psi_2 + i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_3 - M\psi_{10} = 0 \quad (3.98)$$

Ce système conduit à :

$$\psi_7 = \frac{E}{M}\psi_4 \quad (3.99)$$

$$\psi_8 = i\frac{(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})}{M\alpha\rho}\psi_4 \quad (3.100)$$

$$\psi_9 = -\frac{i(\partial_1 + M\omega\rho)}{M}\psi_4 \quad (3.101)$$

$$\left\{(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho})(\partial_1 + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2}(\partial_2 + \frac{ie\phi_B}{2\pi})^2 + E^2 - M^2\right\}\psi_4 = 0 \quad (3.102)$$

Cette équation est similaire à l'équation (3.46), et par conséquent les solutions sont :

$$E = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|J - \frac{e\phi_B}{2\pi}|}{\alpha}\right)} \quad (3.103)$$

$$\psi_4(\rho) = e^{-iEt + iJ\phi} (M\omega\rho^2)^{|J - \frac{e\phi_B}{2\pi}|/2\alpha} e^{-\left(\frac{M\omega\rho^2}{2}\right)} \times {}_1F_1\left(-n, \frac{|J - \frac{e\phi_B}{2\pi}|}{\alpha} + 1, M\omega\rho^2\right) \quad (3.104)$$

Pour trouver les composantes restantes de la fonction d'onde ψ_7, ψ_8, ψ_9 , nous les substituons dans les équations précédentes, à l'exception des composantes nulles, qui sont : $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_5 = \psi_6 = \psi_{10} = 0$

Conclusion

La beauté et la cohérence mathématiques, comme l'a décrit Dirac, sont un outil puissant pour écrire et comprendre les lois de la nature, bien qu'il n'y ait aucune explication physique à ce fait. De là est née l'équation d'onde relativiste de Dirac, qui fut l'une des réalisations les plus importantes du XXe siècle, et en la généralisant, est née l'équation DKP, qui a permis aux physiciens théoriciens d'étudier les particules de spin 0 et les particules de spin 1 dans le système relativiste. En plus, des résultats réussis obtenus par l'oscillateur DKP dans divers domaines de la physique, notamment la physique des particules et la physique nucléaire, cet oscillateur suscite également un intérêt croissant dans le contexte d'une chaîne magnétique cosmique, ce qui le rend plus susceptible de fonctionner. Les défauts topologiques font l'objet de nombreuses études récentes selon les concepts modernes de la physique, ils sont liés à des transformations de rupture de symétrie, car elles se produisent lorsque le système physique passe par une phase de transition d'un état à un autre. Ces défauts peuvent également avoir des effets profonds sur les propriétés des matériaux, telles que la conductivité électrique ou la résistance mécanique. Par exemple, les défauts topologiques des supraconducteurs sont utilisés pour créer des qubits pour l'informatique quantique. En fait, nous avons étudié les oscillateurs DKP afin de déduire leur comportement dans le champ gravitationnel produit par des défauts topologiques tel que la corde cosmique.

Cette équation a été traitée dans un espace plat et courbé et en présence d'un champ ma-

gnétique. Nous avons choisi la corde cosmique par rapport au reste des autres défauts pour la simplicité de sa géométrie de forme et aussi en raison de son importance, notamment en astronomie et en cosmologie. Ce problème a été résolu en utilisant les équations DKP en présence de l'oscillateur de Dirac , et nous pouvons résumer les résultats comme suit :

1. ***Pour le cas de l'espace plat*** l'oscillateur DKP qui a été décrit le mouvement des particules de spin-0 et spin-1 est résolu dans le cas libre et sous l'influence d'un champ magnétique externe, nous avons obtenu l'expression des fonctions d'onde, et nous avons également obtenu le spectre d'énergie, et nous remarquons que les niveaux énergétiques étaient dégénérés.
2. ***Pour le cas de l'espace courbé*** l'équation de l'oscillateur DKP a été résolue en présence d'une corde cosmique pour les deux types de particules de spin-0 et 1, respectivement. Ces solutions ont été traités aussi en absence d'interaction externe et en présence d'un champ magnétique uniforme parallèle à la corde. Nous avons discuté l'influence de la présence de l'angle déficit α sur les solutions propres : Nous pouvons voir que les solutions propres dépendent explicitement du paramètre non local de l'espace-temps considéré même dans le cas où l'espace-temps de la corde est localement plat. Contrairement au cas d'un oscillateur de DKP dans un espace-temps plat , la présence des défauts topologiques brise totalement la dégénérescence du spectre de l'oscillateur de KG.

Bibliographie

- [1] A. Arvind, K. Dorai, S. Chaturvedi, *ResearchGate* **2018**.
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Prinsiples and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley Sons, Inc., **1971**.
- [3] M. R. Anderson, *The Mathematical Theory of Cosmic Stringe*, Intitute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, **2003**.
- [4] D. Bouchefra, Ph.D. thesis, Centre UniversitaireAbdelhafid Boussouf - Mila, **2022**.
- [5] D. B. et Badredine Boudjedaa **2019**.
- [6] S. T. Andrew.Rex, *Physique moderne*, de beock, **2006**.
- [7] A. B. et Nadjette Messai, *Canadana journal of physics* **2016**.
- [8] N. Unal, *concepts of physics* **2005**, II, 273--282.
- [9] N. Messai, Ph.D. thesis, Université Larbi Tébessi -Tébessa-, **2017**.
- [10] K. B. et C. Furtado, *Ann. Phys* **2015**, 355, 48--54.
- [11] S. B. et P. Minning, *Nuovo Cimento A* **1993**, 106.
- [12] N. R. et B.A. Kagali, *Phys. Scr* **2008**, 77, 015003.
- [13] A. B. et Houcine Aounallah, *Advances in High Energy Physics* **2018**.

- [14] A. Alhaidari, *Annals of Physics* **2005**.
- [15] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. Lond. A* **1939**, 173.
- [16] B. N. D, D. P. C. W, *Quantum fields in curved space*, Cambridge [Cambridgeshire] ; New York : Cambridge University Press, **1982**.
- [17] H. Hassanabadi, Z. Molaei, A. Boumali, *Chin. Phys. C* **2013**, 37, 073104.
- [18] H. Hassanabadi, Z. Molaei, A. Boumali, *Found. Phys* **2013**, 43, 225--235.
- [19] H. Hassanabadi, M. Hosseinpour, M. de Montigny, *RezercheGate* **2016**.
- [20] H. Aounallah, Ph.D. thesis, Université Larbi Tébessi -Tébessa-, **2019**.
- [21] E. R. B. de Mello et A A Saharian, *CLASSICAL AND QUANTUM GRAVITY* **2012**.
- [22] J. A. G. Vickers, *Class. Quantum. Grav* **1987**, 4, 1-- 9.
- [23] B. Belbaki, Ph.D. thesis, University of Jijel - Mohammed Seddik Benyahia -, **2023**.
- [24] C.-J. Feng, X. Gao, M. Li, W. Song, Y. Song, *Nuclear Physics B* 800 **2008**.
- [25] C. F. et Fernando Moraes, *Physics Letters A* 361 **2007**.
- [26] M. Asano, *Nuclear Physics B* 503 **1997**.
- [27] E. M. et Robert H. Brandenberger, *Cosmology et Astroparticle Physics* **2013**.
- [28] M. P. et A.C. Davis, *Physics Letters B* 520 **2001**.
- [29] J. Gutowski, G. Papadopoulos, *Physics Letters B* 514 **2001**.
- [30] A. Gangua, L. Pogosian, S. Winitzkida, *New Astronomy Reviews* 46 **2002**.
- [31] J. Karouby, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 216 **2011**.
- [32] E. B. et V. Dokuchaev, *Nuclear Physics B* 645 **2002**.

- [33] L. Perivolaropoulos, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 148 **2005**.
- [34] S. Carroll, *Space and geometry An Introduction to General Relativity*, Pearson New International, **2014**.
- [35] S. Carroll, *Santa Barbara, CA 93106* **1997**.
- [36] J. Holten (Ed.), *Gravity , Geometry and physics*, NIKHEF.P.O.Box 41882, **1996**.
- [37] M. Falek, M. Merad, *Cent. Eur. J. Phys* **2010**, 8, 408--414.
- [38] M. Falek, M. Merad, T. Birkandan, *J. Math. Phys* **2017**, 58, 023501.
- [39] S. Zina, Master's thesis, Université de Tébessa, **2013**.
- [40] M.SCHONBERG, *Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de Sao Paulo*.
- [41] B. Abdelmalek, Ph.D. thesis, Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi -Tébessa-, **2024**.
- [42] K. F. Z. et Yousfi Rime, Master's thesis, Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi -Tébessa-, **2019**.
- [43] K. B. et C. Furtado, *Phys. Rev. A* **2013**, 87, 1--7.
- [44] K. B. et F. Moraes, *Phys. Lett. A* **2012**, 376, 2838--2841.
- [45] K. Bakke, J. R. Nascimento, C. Furtado, *Phys. Rev. D* **2008**, 78, 064012.
- [46] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. D* **2009**, 80, 1--8.
- [47] K. B. et C. Furtado, *Eur. Phys. J. B* **2014**, 87.
- [48] M. A. et Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., **1970**.

L'oscillateur bidimensionnel de Klein-Gordon

l'équation bidimensionnelle libre de (K-G) est donnée par la relation [39] suivante:

$$(p_x^2 - p_y^2)\psi_{KG} = (E^2 - M^2)\psi_{KG} \quad (\text{A.1})$$

nous introduisons une interaction de l'oscillateur de " Dirac" se fait par la substitutions : $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - iM\omega \vec{r}$ (2) ; l'équation avec et la fréquence dans ce cas, l'oscillateur de " K-G" (3) s'écrira donc comme suit :

$$\{(p_x + iM\omega x)(p_x - iM\omega x) + (p_y + iM\omega y)(p_y - iM\omega y)\} \psi_{KG} = (E^2 - M^2)\psi_{KG} \quad (\text{A.2})$$

dont :

$$(p_x + iM\omega x)(p_x - iM\omega x) = p_x^2 + iM\omega xp_x - p_x iM\omega x + M^2\omega^2 x^2 \quad (\text{A.3})$$

$$p_x^2 + iM\omega [xp_x - p_x x] + M^2\omega^2 x^2 = p_x^2 + iM\omega [xp_x] + M^2\omega^2 x^2 \quad (\text{A.4})$$

$$[x, p_x] = i \quad (\text{A.5})$$

De la même manière, nous trouverons :

$$(p_y + iM\omega y)(p_y - iM\omega y) = p_y^2 + M^2\omega^2 y^2 - M\omega \quad (\text{A.6})$$

la substitution de deux équation (A.4 et A.6) dans l'équation (A.3) mène à l'équation suivante :

$$\{p_x^2 + p_y^2 + M^2\omega^2(x^2 + y^2)\} \psi_{KG} = (E^2 - M^2 + 2M\omega)\psi_{KG} \quad (\text{A.7})$$

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 y^2 \right) \right\} \psi_{KG} = \left(\frac{E^2 - M^2}{2M} + \omega \right) \psi_{KG} \quad (\text{A.8})$$

on pose: $E' = \frac{E^2 - M^2}{2M} + \omega$

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 y^2 \right) \right\} \psi_{KG} = E' \psi_{KG} \quad (\text{A.9})$$

Cette dernière équation est similaire à celle de l'équation de l'oscillateur harmonique bidimensionnel dont les solutions sont bien connus. Les solutions propres sont :

$$E_n'^2 = M^2 + \frac{2M}{\omega} \text{ donc } E_{n_x, n_y}'^2 = M^2 + 2M\omega(n_x + n_y)$$

$$E_{n_x n_y}' = \pm \sqrt{M^2 + 2M\omega(n_x + n_y)} \quad (\text{A.10})$$

La solution :

$$-\frac{1}{2M} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \psi(x, y) + \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2)\psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (\text{A.11})$$

on pose :

$$\psi(x, y) = \chi(x)\Upsilon(y) \quad (\text{A.12})$$

donc:

$$-\frac{1}{2M}\left(\frac{1}{\chi}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\Upsilon}\frac{d^2}{dy^2}\right)\psi(x, y) + \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2)\psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (\text{A.13})$$

$$-\frac{1}{2M}\left(\frac{1}{\chi}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\Upsilon}\frac{d^2}{dy^2}\right)\psi(x, y) + \frac{1}{2}M\omega^2(x^2 + y^2)\psi(x, y) = (E_1 + E_2)\psi(x, y) \quad (\text{A.14})$$

Nous pouvons écrire :

$$-\frac{1}{2M}\frac{d^2\chi}{dx^2} + \frac{1}{2}M\omega^2x^2\chi = E_1\chi \quad (\text{A.15})$$

$$-\frac{1}{2M}\frac{d^2\Upsilon}{dy^2} + \frac{1}{2}M\omega^2y^2\Upsilon = E_2\Upsilon \quad (\text{A.16})$$

Les solutions approuvées sont :

$$E_1 = \epsilon_{n_1} = \omega\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.17})$$

$$E_2 = \epsilon_{n_2} = \omega\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.18})$$

donc :

$$E = E_1 + E_2 = \epsilon_{n_1} + \epsilon_{n_2} = (n_1 + n_2 + 1)\omega \quad (\text{A.19})$$

Nous pouvons écrire les fonctions d'onde à deux dimensions de la forme :

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_x}n_x!}}\left(\frac{M\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega x^2}{2}}H_{n_x}\left\{(M\omega)^{\frac{1}{2}}x\right\} \quad (\text{A.20})$$

$$\Upsilon(y) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_y}n_y!}}\left(\frac{M\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{M\omega y^2}{2}}H_{n_y}\left\{(M\omega)^{\frac{1}{2}}y\right\} \quad (\text{A.21})$$

ou :

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^{n_x} n_x!}} \left(\frac{M\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{M\omega x^2}{2}} H_{n_x} \left((M\omega)^{\frac{1}{2}} x \right) \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^{n_y} n_y!}} \left(\frac{M\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{M\omega y^2}{2}} H_{n_y} \left((M\omega)^{\frac{1}{2}} y \right) \right\} \quad (\text{A.22})$$

Il est aussi possible d'écrire :

$$\psi_{KG}(x, y) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{M\omega}{\pi}} H_{n_x}(M\omega x) H_{n_y}(M\omega y) e^{(-\frac{M\omega}{2})(x^2+y^2)} \quad (\text{A.23})$$

Les connexions des spin

B.1 Les symboles des christoffel

Généralement on utilise l'equation [13, 36, 41] suivante :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu}) \quad (\text{B.1})$$

La métrique dans un espace cylindrique s'écrit sous la forme :

$$dS^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2\alpha^2d\varphi^2 + dz^2 \quad (\text{B.2})$$

Le tenseur métrique dans cet espace s'écrit :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$g^{\mu\nu}$ est l'inverse du tenseur $g_{\mu\nu}$.

avec $g_{\mu i}g^{i\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ On peut calculer les Symboles de Christoffel comme suit :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{0\rho}(\partial_0g_{0\rho} - \partial_{\rho}g_{00} + \partial_0g_{\rho 0}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{00} - \partial_0g_{00} + \partial_0g_{00}) + \frac{1}{2}g^{01}(\partial_0g_{00} - \partial_1g_{00} + \partial_0g_{10}) + \frac{1}{2}g^{02}(\partial_0g_{00} - \partial_2g_{00} + \partial_0g_{20}) + \frac{1}{2}g^{03}(\partial_0g_{00} - \partial_3g_{00} + \partial_0g_{30}) = 0$$

Pour la valeur de $\sigma = 0$, toutes les expressions de Christofel sont nulles pour toutes les valeurs de μ et ν et ρ : $\Gamma_{\mu\nu}^0 = 0$

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{01} + \partial_1 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{02} + \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{12} + \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{20} - \partial_0 g_{21} + \partial_1 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{03} + \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{13} + \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{31} + \partial_1 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{23} + \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{32} + \partial_2 g_{03}) = 0$$

donc :

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{30}^0 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{32}^0 = \Gamma_{23}^0 = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{1\rho}(\partial_0 g_{0\rho} - \partial_\rho g_{00} + \partial_0 g_{\rho 0}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{10}(\partial_0 g_{00} - \partial_0 g_0 + \partial_0 g_{00}) + \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{10}) + \frac{1}{2}g^{12}(\partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{20}) + \frac{1}{2}g^{13}(\partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00} + \partial_3 g_{30}) = 0$$

Pour la valeur $\sigma = 1$, toutes les expressions de Christofel sont nulles pour toutes les valeurs de μ et ν et ρ

sauf Γ_{22}^1 ou $\mu = 2$ et $\nu = 2$.

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{11} - \partial_1g_{10} + \partial_0g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{11} - \partial_1g_{11} + \partial_1g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{01} - \partial_1g_{02} + \partial_2g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{21} - \partial_1g_{20} + \partial_0g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{11} - \partial_1g_{11} + \partial_1g_{11}) = 0$$

donc :

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{30}^1 = \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{33}^1 = 0 \quad (B.7)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} = -\frac{1}{2}\partial_\rho(\rho^2\alpha^2) = -\alpha^2\rho \quad (B.8)$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{3\rho}(\partial_0g_{0\rho} - \partial_\rho g_{00} + \partial_0g_{\rho 0})$$

$$= \frac{1}{2}g^{20}(\partial_0g_{00} - \partial_0g_{00} + \partial_0g_{00}) + \frac{1}{2}g^{01}(\partial_0g_{01} - \partial_1g_{00} + \partial_0g_{10}) + \frac{1}{2}g^{02}(\partial_0g_{02} - \partial_2g_{00} + \partial_0g_{20}) + \frac{1}{2}g^{03}(\partial_0g_{03} - \partial_3g_{00} + \partial_3g_{30}) = 0$$

Pour la valeur de $\sigma = 2$, toutes les expressions de Christoffel sont nulles pour toutes les valeurs de μ et ν et ρ sauf

$$\Gamma_{12}^2 \text{ et } \Gamma_{21}^2 \text{ ou } \mu=(1,2) \text{ et } \nu=(2,1) .$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{12} - \partial_2g_{01} + \partial_1g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{02} - \partial_2g_{10} + \partial_0g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{12} - \partial_2g_{11} + \partial_1g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{22} - \partial_2g_{02} + \partial_2g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{02} - \partial_2g_{20} + \partial_0g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{22} - \partial_2g_{22} + \partial_2g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{22} - \partial_2g_{12} + \partial_2g_{21}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1g_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2\rho^2}\right)\partial_\rho(\rho^2\alpha^2) = \frac{1}{\rho}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{12} - \partial_2g_{22} + \partial_1g_{22}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1g_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2\rho^2}\right)\partial_\rho(\rho^2\alpha^2) = \frac{1}{\rho}$$

$$\Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0g_{32} - \partial_2g_{03} + \partial_1g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{02} - \partial_2g_{30} + \partial_1g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{32} - \partial_2g_{33} + \partial_3g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1g_{32} - \partial_2g_{13} + \partial_3g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{12} - \partial_2g_{31} + \partial_1g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{32} - \partial_2g_{23} + \partial_3g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{22} - \partial_2g_{32} + \partial_2g_{23}) = 0$$

donc :

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho} \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}g^{0\rho}(\partial_0g_{0\rho} - \partial_\rho g_{00} + \partial_0g_{\rho 0}) \\ &= \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0g_{00} - \partial_0g_{00} + \partial_0g_{00}) + \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0g_{01} - \partial_1g_{00} + \partial_0g_{10}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0g_{02} - \partial_2g_{00} + \\ &\partial_0g_{20}) + \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{03} - \partial_3g_{00} + \partial_0g_{30}) = 0 \end{aligned}$$

Pour la valeur de $\sigma = 0$, toutes les expressions de Christoffel sont nulles pour toutes les valeurs de μ et ν et ρ : $\Gamma_{\mu\nu}^3 = 0$.

$$\Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{13} - \partial_3g_{01} + \partial_1g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{03} - \partial_3g_{10} + \partial_0g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{13} - \partial_3g_{11} + \partial_3g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{23} - \partial_3g_{02} + \partial_2g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{03} - \partial_3g_{20} + \partial_0g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{23} - \partial_3g_{22} + \partial_2g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{33} - \partial_3g_{03} + \partial_3g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{03} - \partial_3g_{30} + \partial_0g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{33} - \partial_3g_{33} + \partial_3g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{33} - \partial_3g_{23} + \partial_3g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{23} - \partial_3g_{32} + \partial_2g_{33}) = 0$$

donc :

$$\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = \Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = 0 \quad (\text{B.11})$$

B.2 Les Cartans

Le cartan $\omega_{\mu ab}$ est défini comme une fonction des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$, peuvent être écrites comme suit :

$$\omega_{\mu ab} = e_{a\nu} E_b^j \Gamma_{j\mu}^\nu - E_b^j \partial_\mu e_{aj} \quad (\text{B.12})$$

avec $e_{a\nu}$ et E_b^j sont les tetrades et les inverses de tetrades. Nous avons choisis les tetrades :

$$e_\mu^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_a^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\text{et } E_a^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } e_{b\mu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$e_\mu^a E_b^\mu = \delta_b^a \quad (\text{B.14})$$

η_{ab} : la metrique de Minkowski. On peut calculer les cartans cela en revenant à l'équation précédente comme suit :

pour la valeur de $\mu= 0$

$$\omega_{0ab} = e_{a\nu} E_b^j \Gamma_{j0}^\nu - E_b^j \partial_0 e_{aj} = 0 \quad (\text{B.15})$$

toutes les expressions des cartan sont nulles.

pour la valeur de $\mu= 1$

$$\omega_{1ab} = e_{a\nu} E_b^j \Gamma_{j1}^\nu - E_b^j \partial_1 e_{aj} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\omega_{122} = e_{22} E_2^2 \Gamma_{21}^2 - E_2^2 \partial_1 e_{22} = \rho\alpha \frac{1}{\rho\alpha} \left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho\alpha} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\alpha) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} = 0 \quad (\text{B.17})$$

toutes les expressions des cartan sont nulles.

pour la valeur de $\mu= 2$, On trouve deux cartan ω_{212} , ω_{212} et les autres sont nuls.

$$\omega_{212} = e_{11} E_2^2 \Gamma_{22}^1 - E_2^2 \partial_2 e_{12} = 1 \cdot \frac{1}{\alpha\rho} (-\alpha^2\rho) - 0 = -\alpha \quad (\text{B.18})$$

$$\omega_{221} = e_{22}E_1^1\Gamma_{12}^1 - E_1^1\partial_2e_{22} = \alpha\rho.\frac{1}{\rho} = \alpha \quad (\text{B.19})$$

donc $\omega_{212} = -\omega_{221}$

Nous remarquons que :

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba} \quad (\text{B.20})$$

Donc

$$\omega_{2ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

La méthode de Nikiforov-Uvarov (Nu)

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) est une puissante méthode utiliser pour résoudre les équations différentielles de deuxième ordre [9, 13], ayant sur la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \xi}{\xi(1 - \alpha_3 \xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{-\zeta_1 \xi^2 + \zeta_2 - \zeta_3}{[\xi(1 - \alpha_3 \xi)]^2} \right] \psi = 0 \quad (\text{C.1})$$

Dans cette méthode, les solutions propres satisfaisaient les relations :

$$\alpha_2 n - (2n + 1) \alpha_5 + (2n + 1) (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n + 1) \alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\psi(\xi) = \xi^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 \xi)^{-\alpha_{12} - (\alpha_{13}/\alpha_3)} P^{\alpha_{10} - 1, (\alpha_{11}/\alpha_3) - \alpha_{10} - 1} (1 - 2\alpha_3 \xi) \quad (\text{C.3})$$

dans la limite : $\alpha_3 \rightarrow 0$ on a

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3)^{-\alpha_{12}(\alpha_{13}/\alpha_3)} = e^{\alpha_{13}\xi} \quad (\text{C.4})$$

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3)^{-\alpha_{12}(\alpha_{13}/\alpha_3)} P^{\alpha_{10} - 1, (\alpha_{11}/\alpha_3) - \alpha_{10} - 1} (1 - 2\alpha_3 \xi) = L_n^{\alpha_{10}}(\alpha_{11}\xi) \quad (\text{C.5})$$

l'expression finale de la fonction d'onde est donc

$$\psi(\xi) = \xi^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}\xi} L_n^{\alpha_{10}}(\alpha_{11}\xi) \quad (\text{C.6})$$

$L_n^{\alpha_{10}}(\alpha_{11}\xi)$: le plynome générale de Laguerre et :

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \quad (\text{C.7})$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) \quad (\text{C.8})$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \zeta_1 \quad (\text{C.9})$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \zeta_2 \quad (\text{C.10})$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \zeta_3 \quad (\text{C.11})$$

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_7 + \alpha_6 \quad (\text{C.12})$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad (\text{C.13})$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad (\text{C.14})$$

$$\alpha_{12} = \alpha_2 + \sqrt{\alpha_8} \quad (\text{C.15})$$



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Echahid Chikh Larbi Tébessi
-Tébessa-

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature
et de la Vie

Département : Sciences de la Matière



Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature
et de la Vie

N d'ordre :.....
Série :.....



Mémoire de Master

Domaine : Sciences de la matière
Filière : Physique
Option : Matière Condensée

Thème

L'étude de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans un espace courbé : Cas de la corde cosmique

Présenté par :

Berrah Hamida et Farès Bouchra

Devant le jury

Dr.Messai Nadjette	Rapporteur	Université Echahid Cheikh Larbi-Tébessi, Tébessa
Pr. Benkhedir Mohamed Loufi	Président	Université Echahid Cheikh Larbi-Tébessi, Tébessa
Dr. Chaouche Yassine	Examineur	Université Echahid Cheikh Larbi-Tébessi, Tébessa

Date de Soutenance : 09 Juin 2024



Département : Sciences de la matière.

Filière :فيزياء.....

Spécialité :فيزياء المادة المكثفة.....

Année universitaire 2023/2024

Formulaire de levée de réserves après soutenance d'un Mémoire de Master

Données d'identification du candidats(es) :

Nom et prénom du candidat :براح حميدة.....
.....فاز من بشرى.....
.....

Intitulé du Sujet : L'étude de l'oscillateur de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans un espace courbé : Cas de la corde cosmique.....

Données d'identification du membre de jury :

Nom et prénom :بن خذير محمد لطفي.....
Grade :أستاذ.....
Lieu d'exercice : Université Larbi Tebessi- Tébessa

Vu le procès-verbal de soutenance de la thèse sus citée comportant les réserves suivantes :

.....
..... لا شيء
.....
.....

Et après constatation des modifications et corrections suivantes :

.....
..... لا شيء
.....
.....

Je déclare en ma qualité de président de jury de soutenance que le mémoire cité remplit toutes les conditions exigées et permet au candidat de déposer son mémoire en vue de l'obtention de l'attestation de succès.

Le.....30/06/2024

Président de jury de soutenance : (Nom/Prénom et signature)



Déclaration sur l'honneur de non-Plagiat
(À joindre obligatoirement au mémoire; Remplie et signée)

Nous soussignons

Nom, prénom: **Berrah Hamida & Fares Bachra**

N° de carte d'étudiant: (1) **2202602196** (2) **1616340213194**

Régulièrement inscrits (es) en **Master** au **Département Sciences de la Matière**

Année universitaire: **2023/2024**

Domaine: **Sciences de la matière**

Filière: **Physique**

Spécialité: **Physique de la matière condensée**

Intitulé du mémoire: **L'étude de l'oscillateur de Duffin - Kemmer - Petiau (DKP) dans un espace courbé : Cas de la corde cosmique.**

Attestons que notre mémoire est un travail original et que toutes les sources utilisées ont été indiquées dans leur totalité. Nous certifions également que nous n'avons ni recopié ni utilisé des idées ou des formulations tirées d'un ouvrage, article, ou mémoire, en version imprimée ou électronique, sans mentionner précisément leur origine et que les citations intégrales sont signalées entre guillemets.

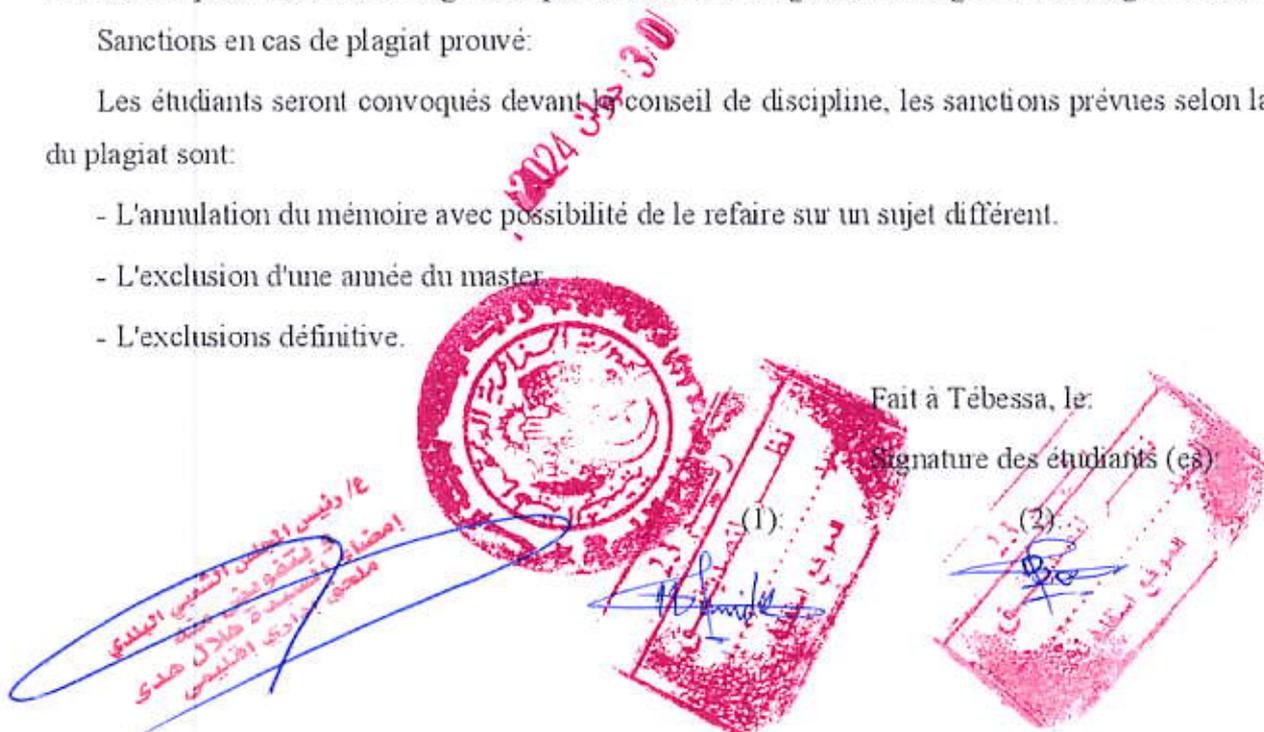
Sanctions en cas de plagiat prouvé:

Les étudiants seront convoqués devant le conseil de discipline, les sanctions prévues selon la gravité du plagiat sont:

- L'annulation du mémoire avec possibilité de le refaire sur un sujet différent.
- L'exclusion d'une année du master
- L'exclusions définitive.

Fait à Tébessa, le:

Signature des étudiants (es)



4/ رئيس المجلس العلمي البلدي
مجلس أمناء جامعة الشهيد لاربي تبessi
مجلس أمناء كلية العلوم الطبيعية والبيولوجية
مجلس أمناء كلية العلوم الدقيقة والكمبيوترية