République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equation aux deriveés partielles et applications

Thème

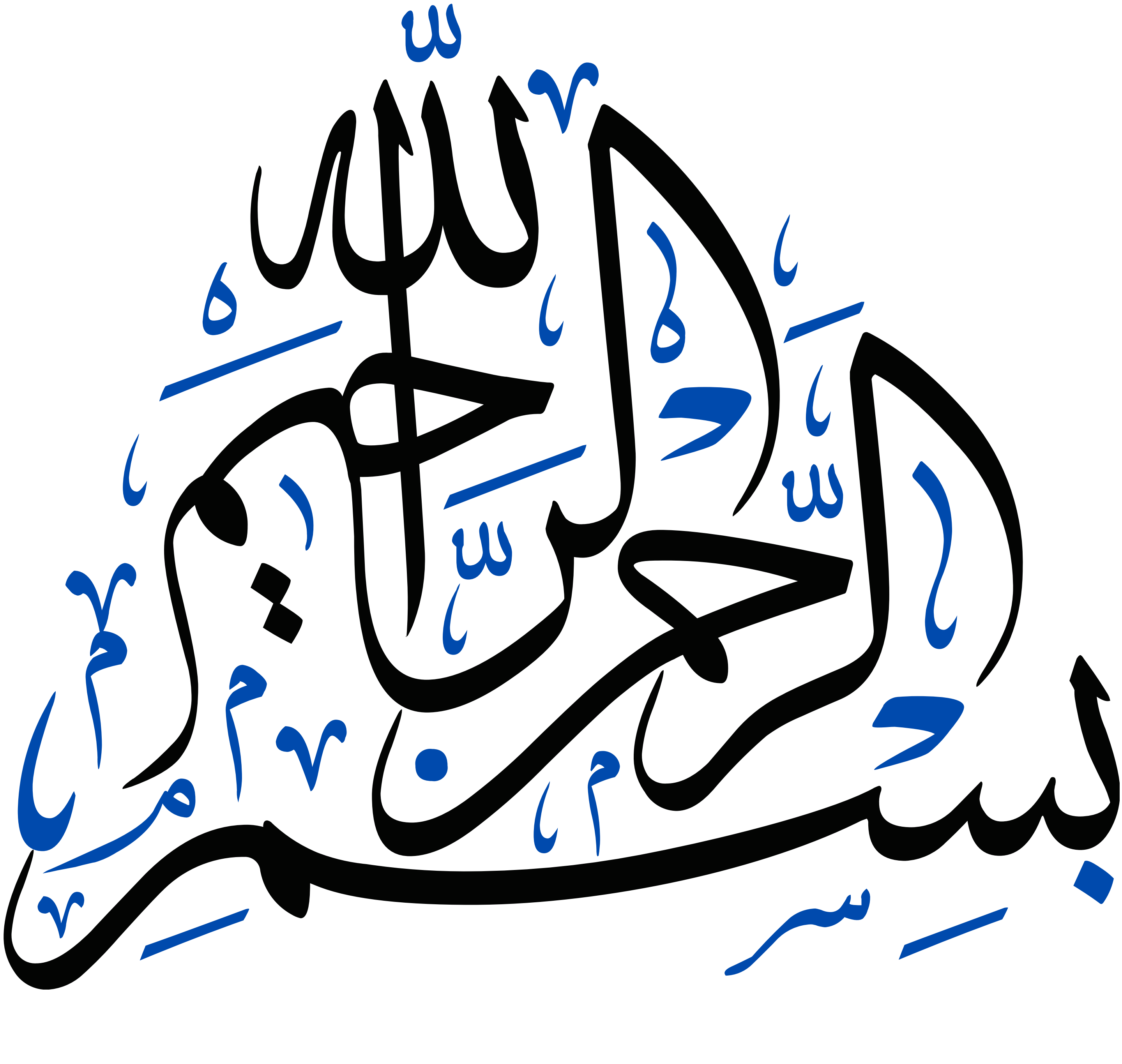
Problèmes d'explosion de solutions pour des équations d'évolution fractionnaires non linéaires

Présenté Par :
Tabet Soundes

Devant le jury :

Mr Haouam Kamel	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr Rebiai Belgacem	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur
Mr Hafdallah Abdelhak	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur

Date de soutenance : 08/06/2024


بسم الله الرحمن الرحيم

الشكر والتقدير

باسم الله، والصّلاة والسّلام على أشرف خلق الله أجمعين، خاتم المرسلين وإمام المجاهدين بعثه الله رحمة للعالمين، وأيّده بقرآنه المعجز وكلامه المبين ورضي الله عن أصحابه والتّابعين، ومن اتّبع سبيلهم فاتّبع هدى القرآن وصراطه المستقيم إلى يوم الدّين

وبعد:

ومن باب الاعتراف بالفضل لأهل الفضل نتقدم بجزيل الشكر و التقدير إلى الصرح العلمي الشامخ "جامعة الشيخ العربي التبسي" تبسة.

كما يشرفني أن أقدم تحية عطرة وشكر خاص إلى الأستاذ المشرف: البروفسيور ربيعي بلقاسم الذي أشرف على هذه الدراسة وأمدني بالدعم فكان نعم المرشد والموجه منذ أن كان موضوع الدراسة مجرد فكرة إلى أن خرجت إلى حيز الوجود وساعدني على السير بخطى ثابتة مسترشدة بتوجيهاته وارشاداته القيمة فجزاه الله عني خير الجزاء.

كما أتقدم بوافر الشكر والتقدير والامتنان لأعضاء لجنة المناقشة الأفاضل الذين شرفونا بقبول مناقشة الدراسة ولدورهم الكبير في إثراء الدراسة من علمهم وخبرتهم:

الشكر والتقدير

كما أشكر أعضاء لجنة المناقشة التي شرفتني بقبولها مناقشة مذكرتي
،كل من البروفيسور كمال هوام رئيسا
و الدكتور حفظ الله عبد الحق ممتحنا اللذين لاشك أنهما سيفيضون
عليا بتوجيهاتهما القيمة وملاحظاتهما السديدة.
دون أن أغض الطرف بالشكر والثناء على إخواننا الطلبة العقربين
بصلة العلم في فيحاء الأخوة والسند.
وخاصة طلبة ماستر 2 دفعة *2024* راجين من العولى العلي القدير
كل التوفيق والفلاح.
وفي الأخير أشكر كل من قدم لي يد العون والمساعدة سواء من قريب
أو من بعيد ولو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو
حتى بدعوة في ظهر الغيب لهم جزيل الشكر والعرفان.
ولكم مني فائق التقدير والاحترام

الإِهْدَاء

الحمد لله حبا وشكرا وامتنانا على البدء و الختام

{وآخر دعواهمْ أنْ الحمْدُ للّه ربَ العالمين }

أرى مرحلتي الدراسية قد شارفت على الإنتهاء بالفعل ، بعد تعب ومشقة دامت سنين في سبيل الحلم والعلم حملت في طياتها أمنيات الليالي، ها أنا اليوم أقف على عتبة تخرجي أقطف ثمار تعبي وأرفع قبعتي بكل فخر،فاللّهم لك الحمد قبل أن ترضى ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضا، لأنك وفقتني على إتمام هذا النجاح وتحقيق حلمي.

وبكل حُب أهدي ثمرة نجاحي وتخرجي:

إلى الذي دعمني بلا حدود وأعطاني بلا مقابل إلى من علمني أن الدنيا كفاح وسلاحها العلم ،داعمي الأول في مسيرتي وسندي وقوتي وملاذي بعد اللّه فخري واعتزازي : أبي أدامك الله لنا.. إلى من جعل اللّه الجنة تحت قدميها، واحتضنتني قلبها قبل يديها وسهلت لي الشدائد بدعائها إلى أغلى إنسانة في الوجود: أمي الغالية أطال الله في عمرك.. إلى أمي الثانية التي لطالما حفتني دعواتها : جدتي حفظها اللّه لي.. إلى تلك النجمة التي رزقني الله بها لأعرف طعم الحياة : أختي صغيرة سيدرا .. إلى اختي وقطعة من قلبي آلاء الرحمن إلى من شد الله بهم عضدي :(اخوتي عبد الجليل وأنس) .. إلى رفيقة طفولتي وانيسة دربي وكل العمر صديقتي وأختي نسرين ... ولا أنسى رفقاء الرُوح الذين شاركوني خطوات الطريق و جمعتنا مسألة رياضيات معقدة معتنة لكن :(كاملة - أمينة-نور الهدى- ألفي-رحمة-نريمان)

ما سلكنا البدايات الا بتيسيره وما بلغنا النهايات الا بتوفيقه وما حققنا الغايات الا بفضله فالحمد لله

فجزاكم الله خير واثابكم خير الجزاء

ثابت سندس

Resumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de certains problèmes liés aux équations d'évolution fractionnaires et des non linéarités de croissance polynomiale. Tout d'abord, nous avons présenté certaines définitions et notions de base, puis nous avons abordé l'étude de l'existence locale en utilisant le théorème du point fixe de Banach et l'explosion de solutions en temps fini via la fonction de test pour une équation d'évolution d'ordre fractionnaire en temps, puis pour une équations d'évolution fractionnaire spatio-temporelle avec une non linéarité non locale en temps.

Mots clés: Dérivées et intégrales fractionnaires, équations d'évolution fractionnaires, existence locale, explosion de solutions.

Abstract

In this memory, we are interested in the study of certain problems related to fractional evolution equations with polynomial growth nonlinearities. Firstly, we presented some definitions and basic notions, and then we studied the local existence using the Banach fixed-point theorem and the blow-up of solutions in finite time employing the test function approach for both fractional-order time evolution equations and spatio-temporal fractional evolution equations with nonlocal in time nonlinearities.

Keywords: Fractional derivatives and integrals, fractional evolution equations, local existence, blow-up of solutions.

ملخص

في هذه المذكرة، إهتممنا بدراسة بعض المسائل المرتبطة بمعادلات التطور ذات المشتقات الكسرية والحدود غير الخطية ذات التزايد الكثير حدودي. في البداية قمنا بعرض بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية، ثم تطرقنا لدراسة الوجود المحلي بإستخدام نظرية النقطة الثابتة لبناخ وإنفجار الحلول في زمن منته بواسطة دالة الإختبار لمعادلة تطور ذات مشتق كسري بالنسبة للزمن، ثم لمعادلة تطور ذات مشتقات كسرية بالنسبة للزمن والمكان وذات حد غير خطي وغير محلي بالنسبة للزمن.

الكلمات المفتاحية: المشتقات والتكاملات الكسرية ، المعادلات التطورية الكسرية، الوجود المحلي، إنفجار الحلول.

Table des matières

Notations et abréviations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
Ω	Un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^N$.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables de Lebesgue.
$L^p(0,T;E)$	L' espace de Lebesgue.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables de carrés sommables dans Ω.
$L^\infty_{loc}(\Omega)$	L'espace des fonctions localement intégrable
H^1, $W^{m,p}$, $W^{m,2}$	L' espace de sobolev.
$H^\beta(\mathbb{R}^N)$	L'espace de Sobolev homogène d'ordre β.
S'	L'espace des distributions de Schwartz.
$D(A)$	Le domaine de définition de l'opérateur A.
$C_0(\mathbb{R}^N)$	L'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$.
$\Gamma(\alpha)$	Fonction Gamma.
$\beta(p,q)$	Fonction Bêta.
E_α	Fonction de Mittag-Leffler.
ϕ_α	Fonction de type Wright.
$I^\alpha f$	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
${}^{RL}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
${}^{C}D^\alpha f$	La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α.
Δ	L'opérateur laplacien.
$(-\Delta)^{\beta/2}$	L'opérateur laplacien fractionnaire d'ordre $\beta/2$.
$\varphi(t), \psi(t)$	La fonction de test.
$T(t)$	un semi-groupe.

Introduction générale

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du dix-septième siècle, à partir de quelques conjectures faites par Leibniz en relation avec une question posée par l'Hôpital en 1695 sur le signe de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$.

Le calcul fractionnaire n'est devenu populaire et important que dans les deux dernières décennies du vingtième siècle. De nombreuses applications ont été développées en utilisant ce concept, qui est d'une grande importance pour changer la façon dont nous voyons, modélisons et contrôlons la nature qui nous entoure dans différents domaines tels que la physique, l'ingénierie et autres (voir par exemple [9], [14], [23] − [25]). C'est pourquoi de nombreux chercheurs ont accordé une grande attention à l'étude des questions liées aux équations différentielles fractionnaires.

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier certaines équations d'évolution non linéaires avec des dérivées fractionnaires et d'aborder les sujets de l'existence locale et de l'explosion en temps fini.

Le problème de l'explosion se pose lorsque la solution d'une équation fractionnaire non linéaire devient infiniment grande en temps fini, ce qui peut avoir des conséquences importantes pour les applications. Cela signifie que le modèle mathématique ne peut pas prédire un comportement réaliste sur de longues périodes de temps.

Les solutions de ces équations peuvent exploser en temps fini. Dans ce cas, le temps d'existence maximal est associé à un temps d'explosion alternatif. Cependant, pour donner un sens précis au concept d'explosion en temps fini, il est nécessaire de définir l'espace dans lequel nous travaillons et le critère par lequel nous mesurons la solution.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notations et concepts de base, tels que la différenciation et l'intégration fractionnaires selon certaines approches (Riemann-Liouville et Caputo), ainsi que quelques applications des dérivées fractionnaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème de Cauchy suivant pour une équation d'évolution d'ordre fractionnaire en temps avec un terme source non linéaire :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0|t}u - \Delta u = |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

tels que ${}^{C}D^{\alpha}_{0|t}$ est la dérivée de Caputo d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ et $p > 1$. Notre but est de montrer l'existence locale de solutions en utilisant le théorème du point fixe de Banach et l'explosion de solutions en temps fini via la fonction test sous certaines conditions sur les données initiales.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le problème de Cauchy suivant pour une équation d'évolution fractionnaire en espace-temps avec une non-linéarité non locale en temps :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta/2}u = I^{\gamma}_{0|t}\,|u|^{p-1}\,u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right), \end{cases}$$

tels que ${}^{C}D^{\alpha}_{0|t}$ est la dérivée de Caputo d'ordre α, $0 < \alpha < 1 - \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$ et $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2}v(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta}\,\mathcal{F}(v)(\xi))(x), v \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^{\beta}(\mathbb{R}^N),$$

où $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre β et $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$son inverse. Nous conservons le même objectif que dans le chapitre précédent, avec en plus, nous donnons une estimation de la limite supérieure de la durée de vie des solutions d'explosion pour la même équation, mais complétée par des données initiales appropriées.
Enfin, ce travail se conclut par un résumé des principaux résultats étudiés et offre des perspectives pour l'avenir.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre vise à rappeler quelques concepts et résultats préliminaires qui seront bénéfiques pour les chapitres suivants. Tout d'abord, nous rappelons brièvement quelques concepts et observations fondamentaux : les espaces fonctionnels, les inégalités connues et l'existence à la fois locale et globale. Ensuite, nous détaillons brièvement l'intégration et la dérivation fractionnaire (non entière) selon certaines méthodes (Riemann-Liouville et Caputo), où nous nécessitons des fonctions telles que Gamma, Bêta et Mittag-Leffler.

1.1 Notations et notions de base

Dans cette section nous avons défini quelques espaces fonctionnels (voir [3]).

1.1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1 *[3] L' espace* $L^p(\Omega)$
Soit $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$*.On appelle espace de Lebesgue* $L^p(\Omega)$ *l'espace*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^p}$ *est une norme.*

Définition 1.2 *[3] L' espace $L^{\infty}(\Omega)$*

Si $p=\infty$ on a

$$L^{\infty}(\Omega)=\left\{\begin{array}{c} u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et } \exists\, C>0, \text{ tel que} \\ |u(x)|\leq C \text{ p.p sur } \Omega\ . \end{array}\right\}.$$

On note

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\sup_{t\in\Omega} ess\,|u(x)|=inf\,\{C>0,|u(x)|\leq C\ \text{,p.p sur } \Omega\}\,.$$

Définition 1.3 ***L' espace de Lebesgue** [16]*

Soient E un espace de Banach, $1\leq p\leq\infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans E et on note $L^{p}((0,T),E)$ l'espace des fonctions $u:]0,T[\longrightarrow E$, mesurable qui vérifient

$$\begin{aligned} i)\ \text{Si } 1 &\leq p\leq\infty,\ \|u\|_{L^{p}((0,T),E)}=\left(\int_{0}^{T}\|u\|_{E}^{p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty. \\ ii)\ \text{Si } p &= \infty,\ \|u\|_{L^{\infty}((0,T),E)}=ess\sup_{t\in(0,T)}|u(x)|<\infty. \end{aligned}$$

· Naturellement on a

$$L^{p}((0,T),L^{p}(\Omega))=L^{p}((0,T)\times\Omega),\quad 1\leq p\leq\infty.$$

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continués et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)}=\max_{x\in\Omega}|u(x)|$$

Définition 1.4 *[3]$C_{0}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^{N}$ tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.*

Définition 1.5 ***(Support d'une fonction)** on appelle support d'une fonction $\varphi(x)$ et que l'on note φ le plus petit ensemble fermé de Ω en dehors du quel la fontion φ s'annule presque partout.$C_{0}(\Omega)$ l'espace des fonctions continués à support compact dans Ω.*

Définition 1.6 ***(Espace de fonction test)**On appelle espace de fonctions d'essai et que l'on note $D(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonction φ indéfiniment différentiables sur à support compact dans Ω . Autrement dit, l'ensemble des fonctions φ de l'espace $C^{\infty}(\Omega)$ telles que supp $\varphi\subset K$, où K est un compact de Ω.*

Définition 1.7 *[3] **L' espace de sobolev** $H^1(\Omega)$*
On appelle espace de Sobolev d'ordre un sur l'ouvert Ω , et que l'on note par $H^1(\Omega)$; l'ensemble des fonctions de $L^p(\Omega)$ ayant des dérivées au sens des distributions dans $L^p(\Omega)$ .En d'autre terme

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\},$$

Définition 1.8 *[3] (**L' espace** $W^{m,p}(\Omega)$)*
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$, $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ avec } 0 \leq |\alpha| \leq m, \ \exists\, f_\alpha \in L^p(\Omega) \ \textit{tel que} \\ \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\},$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}+\partial x_2^{\alpha_2}+...+\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.9 *[3] (**L' espace** $W^{m,2}(\Omega)$)*
Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left(\|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel muni du le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

pour tout $u, v \in H^m(\Omega)$.

Définition 1.10 *[3] (**L' espace** $L^\infty_{loc}(\Omega)$)*
$L^\infty_{loc}(\Omega)$ est l'espace des fonctions localement intégrable défini par

$$L^\infty_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int_K |u|^p dx < \infty \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \right\}.$$

1.1.2 Inégalités utiles

Dans cette section, nous connaissons quelques inégalités utiles.

• Inégalité de Hölder [3]

Soient $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soient u une fonction de $L^p(\Omega)$ et v ne fonction de $L^q(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} |uv|\, dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

• Inégalité de Young [3]

Soient a, b deux nombres réels et p, q deux nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a l'inégalité de Young suivante :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

• Inégalité de $\varepsilon-$Young [7]

Soient $u \geq 0$, $v \geq 0$ et p, q deux nombres réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, alors l'inégalite de $\varepsilon-$Young s'écrit comme suit :

$$uv \leq \varepsilon u^P + C(\varepsilon) v^q.$$

• Inégalité de Ju [3]

Soient $N \geq 1$, $\delta \in [0.2]$ et $q \geq 1$, pour toute fonction non négative de Schwartz ψ, on a :

$$(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}} \psi^q \leq q\psi^{q-1} (-\triangle)^{\frac{\delta}{2}} \psi.$$

où $\triangle$ est le Laplacien.

1.1.3 Théorèmes importants

Théorème 1.1 ***(Théorème du point fixe de Banach [14])***

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide , $0 < \varpi < 1$ et $T : E \to E$ une application telle que pour tout $u, v \in E$, ona

$$d(Tu, Tv) \leq \varpi d(u, v). \tag{1.1}$$

Alors l'opérateur T admet un unique point fixe $u^\star \in E$. Deplus, si T^k $(k \in \mathbb{N})$ est la suite d'opérateur définie par

$$T^1 = T \text{ et } T^k = TT^{k-1} (k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}),$$

alors, pour tout $u_0 \in E$ la suite $\left\{T^k u_0\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe $u^\star$. On note que l'application $T : E \to E$ vérifiant (1.1) est dite application contractante.

Théorème 1.2 ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue [23])***

Soient E un ensemble mesurable et $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables telles que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in E$ et pour tout $n \in N$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque par tout dans E, où g est une fonction intégrable sur E. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

1.1.4 Existence locale et globale

L'étude d'existence locale et d'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaires abstraites (voir A.Friedman, D. Henry, A. Pazy). Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, et $f : X \to X$. Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f, \ t > 0, \\ u\,(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.11 *On dit qu'une fonction u de la variable $t \geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (1.2), s'il existe un intervalle maximal $[0, T)$, sur le quel u est définie, et elle est l'unique solution de (1.2) dans $C^1([0, T), X)$.*
En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu
i) $T = +\infty$.
ii) $T < +\infty$ et $\lim_{t\to T} \|u\| = +\infty$.
On dit que la solution est globale si i) est satisfaite, et que la solution explose en temps fini si on a ii).

1.2 Dérivation et intégration fractionnaire

Avant de donner la définition de la dérivation et l'intégration fractionnaires, on introduit les définitions de quelques fonctions utiles pour la suite.

Fonction Gamma [14]

La fonction Gamma prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (sauf en certains points), elle est définie comme suit.

Définition 1.12 *[14] Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.On trouve, en intégrant par parties, que

$$\Gamma\left(\alpha+1\right)=\alpha\Gamma\left(\alpha\right),\ Re(\alpha)>0.$$

Et en particulier

$$\Gamma\left(n+1\right)=n!,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.13 *[14] La fonction Bêta est définie par :*

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^1\tau^{p-1}\left(1-\tau\right)^{q-1}d\tau,Re\left(p\right)>0,Re(q)>0.$$

Remarque 1.1 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$\beta\left(p,q\right)=\frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)},Re\left(p\right)>0,Re(q)>0.$$

On note que l'idée de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et l'intégration itérées.

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953 - 1954 et elle est définie par un développement en série suivant :

Définition 1.14 *pour $z\in\mathbb{C}$, la fonction Mittag-Leffler est définie par :*

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},\ \alpha\in\mathbb{C},\ \Re e(\alpha)>0,\ z\in\mathbb{C},$$

et son intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville satisfait

$$I_{0|t}^{1-\alpha}(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))=E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha).$$

Fonction de type Wright

la fonction de type Wright qui a été considérée par Mainardi [17]

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k\Gamma(k+1)\sin(\pi(k+1)\alpha)}{k!},\ 0<\alpha<1;\end{aligned}$$

ϕ_α est une fonction entière et possède les propriétés suivantes

(a) $\phi_\alpha(\theta)\geq 0$, pour $\theta\geq 0$ et $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta=1$;

(b) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\theta^r d\theta=\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha r)}$, pour $r>-1$;

(c) $\int_0^\infty \phi_\alpha\left(\theta\right)e^{-z\theta}d\theta=E_{\alpha,1}(-z), z\in\mathbb{C}$;

(d) $\alpha\int_0^\infty \phi_\alpha\left(\theta\right)e^{-z\theta}d\theta=E_{\alpha,\alpha}(-z), z\in\mathbb{C}$.

1.2.1 Intégration fractionnaire

Soit $f\in C([a,b]), x\in\,]a,b[$ la primitive d'ordre 1et 2 de f est donnée par :

$$I_a^1 f\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt,$$

et

$$I_a^2 f\left(x\right)=\int_a^x dt\int_a^t f\left(u\right)du=\int_a^x\left(x-t\right)f\left(t\right)dt.$$

Et la primitive d'ordre n est définie par :

$$I_a^n f\left(x\right)=\int_a^x dx_1\int_a^{x_1}dx_2...\int_a^{x_{n-1}}f\left(x_n\right)dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(x-t\right)^{(n-1)}f\left(t\right)dt,$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy.

Riemann a généralisé cette formule pour n non entier, et l'intégration fractionnaire est définie par

Définition 1.15 *[14] Soient $f\in C\left([a,b]\right)$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, On appelle intégrale de (R-L) d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_{a|t}^\alpha f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}f\left(\tau\right)d\tau,\ t>a$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale

$$I_{t|b}^\alpha f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^b\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}f\left(\tau\right)d\tau,\ t<b$$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Proposition 1.1 *pour toute fonction continue f , on a :*
$\bullet I_{a|t}^{\alpha} f(t)\left[I_{a|t}^{\beta} f(t)\right]=I_{a|t}^{\alpha+\beta} f(t)\,,\ \alpha,\beta>0$. *on montre :*

$$\begin{aligned}
I_{a|t}^{\alpha} f(t)\left[I_{a|t}^{\beta} f(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[I^{\beta} f(\tau)\right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau} (\tau-s)^{\beta-1} f(s)ds\right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_a^{\tau} (\tau-s)^{\beta-1} f(s)ds \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \\
&= I_{a|t}^{\alpha+\beta} f(t)\,.
\end{aligned}$$

$\bullet \frac{d}{dt}\left[I_{a|t}^{\alpha} f(t)\right]=I_{a|t}^{(\alpha-1)} f(t)\,,\ \alpha>1$. *on montre :*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[I_{a|t}^{\alpha} f(t)\right] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\left[\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right]
\end{aligned}$$

puisque $f(\tau)$ et $(t-\tau)^{\alpha-1}$ sont continues donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[I_{a|t}^{\alpha} f(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left[\frac{d}{dt}(t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\alpha-1)(t-\tau)^{\alpha-2} f(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-2} f(\tau)\, d\tau \\
&= I_{a|t}^{(\alpha-1)} f(t)\,.
\end{aligned}$$

Exemple 1.1 *Soit $\alpha>0, \beta>-1$ et $f(t)=(t-a)^{\beta}$,alors :*

$$I_{a|t}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}\, d\tau$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau=a+(t-a)\,s\,;\ (0\leq s\leq 1)$$

alors

$$\begin{aligned}
I_{a|t}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-(t-a)s)^{\alpha-1} [t+(t-a)s-t]^{\beta} (t-a)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(t-a)(1-s)]^{\alpha-1} (t-a)^{\beta+1} s^{\beta} ds \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Soit $f(t) = t^{\beta}$ avec $\beta > -1$ on a*

$$I_{a|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau$$

En posant $\tau = ts$,

$$\begin{aligned}
I_{a|t}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} (ts)^{\beta}\, t ds \\
&= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\
&= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t)^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

1.2.2 Dérivation fractionnaire

On va citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α, avec $n-1 \leq \alpha < n$, au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$^{RL}D_{a|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-\alpha} f(t)\right).$$

Exemple 1.3 ***1)-Dérivée d'une fonction constante***

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction constante, en générale, n'est pas nulle ni constante, et on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}C &= \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}C\right) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}C\,d\tau\right) \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}\right) \\
&= \frac{C}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left((t-\tau)^{n-\alpha}\right),
\end{aligned}$$

on utilise $\frac{d^m}{dt^m}(t^n) = \frac{n!}{(n-m)!}t^{n-m}$,
et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n+1) = n!$, *alors*

$$\begin{aligned}
{}_a^{RL}D_t^{\alpha}C &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{(n-\alpha)!}{(-\alpha)!}(t-\tau)^{-\alpha} \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha} \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

2) -La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$:

Soit α un nombre non entier, $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ et $\beta > -1$, alors on a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}(t-a)^{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right].
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}\,(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[\int_0^1 (t-a-s(t-a))^{n-\alpha-1}(s(t-a))^{\beta}(t-a)\,ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{n-\alpha-1}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}(t-a)^{\beta+1}\,ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right]\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right]\beta(\beta+1,n-\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{(n-\alpha+\beta)!}{(\beta-\alpha)!}(t-a)^{\alpha-p}\beta(\alpha+1,n-\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

3)-La dérivée de la fonction $f(t) = t^{\beta}$:

$$\begin{aligned}
{}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}t^{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{n-\alpha-1}\int_a^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau\right]
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s = \frac{\tau}{t}$, on obtient

$${}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t}\left(t^{\beta}\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{n-\alpha-1}\int_{\frac{a}{t}}^1 (1-s)^{n-\alpha-1}(st)^{\beta}\,tds\right],$$

on pose $a = 0$, alors

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha-1}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}s^{\beta}t^{\beta+1}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha+\beta}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha-\beta}\right]\beta\left(\beta+1,n-\alpha\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(n-\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}\frac{\left(n-\alpha+\beta\right)!}{\left(\beta-\alpha\right)!}t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}\frac{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

4)-**La dérivée de la fonction** $f\left(t\right) = e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_{a|t}^{\alpha}e^{\lambda t} &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}e^{\lambda t}dt\right] \\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}\tau^{k}}{k!}d\tau\right] \\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\lambda^{k}}{k!}\int_{a}^{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\tau^{k}d\tau\right]
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s = \frac{\tau}{t}$, on obtient dans le cas $a = 0$,

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}e^{\lambda t} &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}(st)^k\, tds\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^k t^{k+1}ds\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^k ds\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{k!}\beta(k+1,n-\alpha)\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1)}\beta(k+1,n-\alpha)\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-\alpha+k)!}{(k-\alpha)!}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}t^{k-\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\alpha+k+1)}{(k-\alpha)!}\frac{t^{k-\alpha}\lambda^k}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-\alpha}\lambda^k}{\Gamma(k-\alpha)}
\end{aligned}$$

À titre d'exemple

$${}^{RL}D^{\frac{1}{2}}\sqrt{t} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)\,.$$

Propriétés

1)- Composition avec l'intégrale fractionnaire [14]

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, c-à-d

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}\left(I^{\alpha}_{0|t}f(t)\right) = f(t)\,.$$

Mais en générale, on a

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}\left(I^{\beta}_{0|t}f(t)\right) = {}^{RL}D^{\alpha-\beta}_{a|t}f(t)\,.$$

Si $p-q<0$, ${}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)=I^{\beta-\alpha}f(t)$.
Généralement les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires ne commutent pas

$$ {}^{RL}D^{-\alpha}\left({}^{RL}D^{\beta}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{\beta-\alpha}_{a|t}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left({}^{RL}D^{\beta-k}_{a|t}f(t)\right)_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)}, $$

avec $m-1\leq\beta<m$.

2)- Composition avec les dérivées d'ordre entier [14]

La dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si $f^{(k)}\left(a\right)=0,k=0,1,2,...,n$, on a dans ce cas

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{n+\alpha}_{a|t}f\left(t\right), $$

et

$$ {}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}\left(\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{n+\alpha}_{a|t}f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma\left(k-\alpha-n+1\right)}. $$

3)- Composition avec les dérivées fractionnaires [14]

Soit $n-1\leq\alpha<n$ et $m-1\leq\beta<m$, alors

$$ {}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}\left({}^{RL}_{a}D^{\beta}_{t}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{\alpha+\beta}_{a|t}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[D^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)}, $$

et

$$ {}^{RL}D^{\beta}_{a|t}\left({}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{\beta+\alpha}_{a|t}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[D^{\alpha-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma\left(\beta-k+1\right)}. $$

Donc pour que les opérateurs de dérivations fractionnaires ${}^{RL}D^{\beta}_{a|t}$ et ${}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}$ $(\alpha\neq\beta)$, commutent, il faut que $\left[D^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}=0$, et $\left[D^{\alpha-k}f(t)\right]_{t=a}=0$. pour tout $k=0,1,2,...,m$.

Approche de Caputo [14]

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c-à-d, contient les valeurs limites des dérivées d'ordres entiers des fonctions inconnues en borne inférieur $x=a$.

Définition 1.16 *[14] Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $n-1<\alpha<n$, et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n}f\in L_1[a,b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par*

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a|t}f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau=I^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\right). $$

Propriétés :

1)- Soit $p>0$ avec $n-1<p<n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que ${}^{C}D^{\alpha}_{a|t}f(t)$ et ${}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}f(t)$ existent, alors

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a|t}f(t)={}^{RL}D^{\alpha}_{a|t}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}, $$

et on remarque que si $f^{(k)}(a) = 0$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura

$$^{C}D^{\alpha}_{a|t}f(t) =^{RL} D^{\alpha}_{a|t}f(t).$$

2)- Soit $T > 0$ et $0 < \alpha < 1$, si $^{C}D^{\alpha}_{0|t}f \in L^1(0,T), g \in C^1([0,T])$ et $g(T) = 0$, alors nous avons la formule suivante d'intégration par parties (voir par exemple [18])

$$\int_0^T g(t)^C D^{\alpha}_{0|t}f(t)dt = \int_0^T (f(t) - f(0))^C D^{\alpha}_{t|T}g(t)dt, \tag{1.3}$$

où

$$^{C}D^{\alpha}_{t|T}g(t) = -\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{t|T}g(t),$$

$$I^{1-\alpha}_{t|T}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T (s-t)^{-\alpha}g(s)ds,$$

3)- Si f est une fonction continue, on a :

$$^{C}D^{\alpha}_{a|t}\left(^{RL}I^{\alpha}_{a|t}f\,(t)\right) = f\,(t) \text{ et } ^{RL}I^{\alpha}_{a|t}\left(^{C}D^{\alpha}_{a|t}f(t)\right) = f\,(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{k}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais n'est pas un inverse à droite.

4)- La dérivée fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha}f(t) + \mu D^{\alpha}g(t).$$

5)- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées ; la formule de Leibniz (voir [14]) est

$$D^{\alpha}(f(t) \times g(t)) = \sum_{k=o}^{n}\tbinom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)D^{(\alpha-k)}g(t).$$

Exemples :

1)- La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{C}D^{\alpha}_{a|t}C = 0.$$

2)- La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Caputo est

$$f^{(n)}\,(\tau) = \frac{\Gamma\,(\beta+1)}{\Gamma\,(\beta-n+1)}\,(\tau-a)^{\beta-n}\,.$$

Et pour le prouver, on a

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}_{a|t}\,(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma\,(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\,f^{(n)}\,(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{\Gamma\,(\beta+1)}{\Gamma\,(n-\alpha)\,\Gamma\,(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\,(\tau-a)^{\beta-n}\,d\tau. \end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_{0}^{1}(t-a-s(t-a))^{n-\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-n}(t-a)\,ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{n-\alpha-1}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}(t-a)^{\beta-n+1}\,ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\,\beta(\beta-n+1,n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

3)- La dérivée de la fonction $f(t) = t^{\beta}$ est

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\tau^{\beta-n}.$$

Et pour démontrer cela, nous avons

$$\begin{aligned}
{}^{C}D_{a|t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\tau^{\beta-n}d\tau.
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s = \frac{\tau}{t}$, on obtient

$${}^{C}D_{a|t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) = \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\int_{\frac{a}{t}}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}(st)^{\beta-n}\,tds.$$

On pose $a = 0$ alors

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}_{a|t}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} t^{\beta-n+1} ds \\
&= \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\beta(\beta-n+1, n-\alpha) \\
&= \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

4)-La dérivée de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$ est

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n}{d\tau^n}\left(e^{\lambda\tau}\right) = \lambda^n e^{\lambda\tau}.$$

Parce que

$$\begin{aligned}
{}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}\left(e^{\lambda t}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(e^{\lambda\tau}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\lambda^n e^{\lambda\tau} d\tau \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} e^{\lambda\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $y = t - \tau$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}_{a|t}\left(e^{\lambda t}\right) &= \frac{-\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t-a}^0 y^{n-\alpha-1} e^{\lambda(t-y)} dy \\
&= \frac{\lambda^n e^{\lambda t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{t-a} y^{n-\alpha-1} e^{-\lambda y} dy.
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s = \lambda y$, on obtient

$${}^{C}D^{\alpha}_{a|t}\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{\lambda^n e^{\lambda t}}{\Gamma(n-p)}\int_0^{\lambda(t-a)}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{n-\alpha-1} e^{-s}\frac{ds}{\lambda}.$$

On pose $a = -\infty$, alors

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{p}\left(e^{\lambda t}\right) &= \frac{\lambda^{n}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{0}^{+\infty}\lambda^{\alpha-n}s^{n-\alpha-1}e^{-s}ds \\
&= \frac{\lambda^{\alpha}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{0}^{+\infty}s^{n-\alpha-1}e^{-s}ds \\
&= \frac{\lambda^{\alpha}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\Gamma\left(n-\alpha\right) \\
&= \lambda^{\alpha}e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

1.3 Applications des dérivées et intégrales fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science.

Cependant, le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années.

1.3.1 Interprétation physique de l'intégration fractionnaire

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture [14]. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse de conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ.

Cependant, le temps τ affiché par l'horloge est incorrect. Nous supposons que la relation entre le temps incorrect (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact), et le temps exact T est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ telle que $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left[t^{\alpha}-(t-\tau)^{\alpha}\right]. \tag{1.4}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.Le conducteur A représente le conducteur de la voiture ; ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique

$$S_A\left(t\right) = \int_{0}^{t}V\left(\tau\right)d\tau, \tag{1.5}$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture

$$S_0\left(t\right) = \int_{0}^{t}V\left(\tau\right)dg_t(\tau) = I^{\alpha}V\left(t\right), \tag{1.6}$$

avec

$$I^{\alpha}V(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}V(\tau)\,d\tau.$$

L'intégrale donnée par l'équation (1.5) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :

Une mesure correct de la vitesse et une mesure incorrect du temps. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation (1.6) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour le quel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $V(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur locale du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donnée par la fonction $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile. quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.

La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent ; l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet mobile.

Donc, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la vitesse individuelle $V(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T=g_t(\tau)$, décrite par l'équation (1.4) représente la véritable distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet.

1.3.2 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire

En utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, on peut exprimer l'expression de la vitesse individuelle $V(\tau)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_0(t)$ [14].

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse individuelle $V(t)$: $V(\tau)=D^{\alpha}S_0(t)$ avec

$$D^{\alpha}S_0(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{S_0(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\ 0\leq\alpha\leq 1.$$

On peut aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport à la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $V_0(t)=S_0'(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $V(t)$:

$$V_0(t)=\frac{d}{dt}I^{\alpha}V(t)=D^{1-\alpha}V(t)\,.$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $V(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $V_0(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[t^\alpha - (t-\tau)^\alpha\right],$$

pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident :

$$V_0(t) = V(t).$$

Chapitre 2

Explosion de solutions d'une classe d'équations d'évolution d'ordre fractionnaire en temps

2.1 Introduction

Dans ce chapitre [22], nous considérons l'équation d'évolution fractionnaire suivante

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0|t}u - \Delta u = |u|^{p-1}\, u, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.1}$$

avec les données initiales

$$ u(x,0) = u_0(x) \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{2.2}$$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in C(\mathbb{R}^N) | \lim_{|x|\to\infty} u\,(x) = 0\right\}$, $0 < \alpha < 1$, $p > 1$ et ${}^{C}D^{\alpha}_{0|t}$ est la dérivée de caputo d'ordre α définie, pour une fonction différentiable u, par

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0|t}u(t) = (\frac{\partial}{\partial t})I^{1-\alpha}_{0|t}(u(x,t) - u_0(x)).$$

${}_0I^{1-\alpha}_t$ désigne l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ définie, pour une fonction intégrable u, par

$$ I^{1-\alpha}_{0|t}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds.$$

Lorsque $\alpha = 1$, le problème $(2.1) - (2.2)$ se réduit a l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante

$$ u_t - \Delta u = |u|^{p-1}\, u, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{2.3}$$

Cette équation a été traité par Fujita dans [13]. Il a montré que si

$$u_0 \geq 0, u_0(x) \not\equiv 0 \text{ et } 1 < \ p < 1 + \frac{2}{N},$$

alors toute solution explose en temps fini.
Dans [4], Cazenave, Dickstein et Weissler ont considéré l'équation thermique suivante avec mémoire non linéaire,

$$u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(s) ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0. \tag{2.5}$$

avec (2.2), lorsque $p > 0, 0 \leq \gamma < 1$ et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Ils ont prouvé que si

$$u_0 \geq 0, \ u_0 \not\equiv 0 \text{ et } p \leq \max \{1 + 2(2-\gamma)/(N-2+2\gamma)_+, \ 1/\gamma\},$$

alors la solution u de $(2.5) - (2.2)$explose en temps fini.
Dans ce chapitre, nous étudierons l'existence locale et l'explosion de solutions pour le problème (2.1)-(2.2).

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques préliminaires qui seront utilisés dans la suite de cette étude. Pour $T > 0$ et $n > 0$, si on pose (voir par exemple [14])

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 - t/T)^n, & t \leq T, \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

alors

$${}^C D^{\alpha}_{t|T} \varphi(t) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} T^{-\alpha} (1 - \frac{t}{T})^{n-\alpha}, t \leq T.$$

On note $A = \Delta$ et il génère un semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur $C_0(\mathbb{R}^N)$ avec domaine

$$D(A) = \{u \in C_0(\mathbb{R}^N) \,|\Delta u \in C_0(\mathbb{R}^N)\},$$

alors $T(t)$ est un semigroupe analytique et contractif sur $C_0(\mathbb{R}^N)$ (voir par exemple ([4] , [19])), et pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

$$T(t)u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t) u_0(y) dy, \qquad G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, \tag{2.7}$$

et $T(t)$ est un semigroupe contractif sur $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour $q \geq 1$ [6], et

$$\|T(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t)^{-(N/2)(1/q-1/p)} \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.8}$$

pour $u_0 \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, $q \leq p \leq +\infty$,On définit les opérateurs $P_\alpha(t)$ et $S_\alpha(t)$ par

$$P_\alpha(t)u_0 = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0, \tag{2.9}$$

et

$$S_\alpha(t)u_0 = \alpha\int_0^\infty \theta\phi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0. \tag{2.10}$$

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire temps-espace linéaire suivante

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha_{0|t}u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^1((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$. Si u est une solution de (2.11), alors par [2] (voir aussi [21]),on obtient

$$u(x,t) = P_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_\alpha(t-s)f(x,s)ds,$$

où $P_\alpha(t)$ et $S_\alpha(t)$ sont respectivement données par (2.9) et (2.10).
On pose

$$K(x,t) = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)G(x,t^\alpha\theta)d\theta\ ,\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\ , t > 0.$$

Notez que pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $G(x, t^\alpha\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$, alors K est bien défini.
Puisque $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta = 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} G(x,t)dx = 1$, on a

$$\|K(t,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1, \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Lemme 2.1 *L'opérateur$\{P_\alpha(t)\}_{t>0}$, a les propriétés suivantes :*
(a) si $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $P_\alpha(t)u_0 > 0$ et $\|P_\alpha(t)u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$,
(b) si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2}{N}$, alors

$$\|P_\alpha(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{2r}} \frac{\Gamma(1-N/2r)}{\Gamma(1-\alpha N/2r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.12}$$

Preuve. *(a)découle de $T(t)u_0 > 0, \phi_\alpha \geq 0$ et $\|K(t,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$.pour (b) par (2.8) et les propriétés* *de ϕ_α, nous avons*

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^{+\infty}\phi_\alpha(\theta)\,T(t^\alpha\theta)\,u_0 d\theta\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \int_0^{+\infty}\phi_\alpha(\theta)\,(4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{2r}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\,d\theta \\ &= (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{2r}}\int_0^{+\infty}\phi_\alpha(\theta)\,\theta^{\frac{-N}{2r}}d\theta\,\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{2r}}\frac{\Gamma(1-N/2r)}{\Gamma(1-\alpha N/2r)}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous déduisons que (2.12) *est valable.* ■

Lemme 2.2 *Pour l'opérateur $S_\alpha(t),\ t>0$, nous avons les résultats suivants*
(a) si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $S_\alpha(t)u_0 > 0$ et

$$\|S_\alpha(t)u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

(b) Pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, soit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, si $\frac{1}{r} < \frac{4}{N}$, alors

$$\|S_\alpha(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha(4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{2r}}\frac{\Gamma(2-N/2r)}{\Gamma(1+\alpha-\alpha N/2r)}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.13}$$

Preuve. *La preuve étant similaire à celle du Lemma2.1.* ■

Lemme 2.3 *Pour $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, nous avons $P_\alpha(t)u_0 \in D(A)$, pour $t>0$, et*

$$\begin{aligned}{}^C D^\alpha_{0|t}P_\alpha(t)u_0 &= AP_\alpha(t)u_0,\ t>0, \\ \|AP_\alpha(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{C}{t^\alpha}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\ t>0,\end{aligned}$$

pour certaine constante $C>0$.

Lemme 2.4 *Supposons que $f \in L^q((0,T),C_0(\mathbb{R}^N))$, $q>1$, et soit*

$$w(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_\alpha(t-s)f(s)ds,$$

alors

$$I^{1-\alpha}_{0|t}w(t) = \int_0^t P_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

De plus, si $\alpha q > 1$, alors $w \in C((0,T),C_0(\mathbb{R}^N))$.

2.3 Existence locale

Dans cette section, nous donnons l'existence locale et l'unicité d'une solution douce du problème (2.1)-(2.2).
Premièrement, nous donnons la définition de la solution douce (lisse) de (2.1)-(2.2)

Définition 2.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T > 0$. On dit que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce de (2.1)-(2.2), si u satisfait :*

$$u(x,t) = P_\alpha(t)u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s) |u|^{p-1} u(s)ds, \ t \in [0,T]. \tag{2.14}$$

Théorème 2.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps maximale $T_{\max} = T(u_0) > 0$ et une solution douce unique $u \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ du problème $(2.1)-(2.2)$. De plus,*
- Soit $T_{\max} = +\infty$;
- Soit $T_{\max} < +\infty$, et dans ce cas $\|u\|_{L^\infty((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))} \to +\infty$ quand $t \to T_{\max}$.
- Si, en outre, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t) > 0$ et $u(t) \geq P_\alpha(t)u_0$ pour $t \in (0, T_{\max})$. De plus,
- Si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour certains $r \in [1,\infty)$, alors $u \in C([0,T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. Pour $T > 0$ et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, on définit

$$E_T = \left\{ u \mid u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) : \|u\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right\},$$

et

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \ u,v \in E_T.$$

Puisque $C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, (E_T, d) est un espace métrique complet.Nous définissons l'opérateur G sur E_T comme

$$G(u)(t) = P_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s) |u(s)|^{p-1} u(s) \ ds, \ u \in E_T.$$

alors $G(u) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ au vu de Lemme 2.4.si $u \in E_T$,alors par (2.12) et (2.13), pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
&\|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= &\left\| P_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq &\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\| |u|^{p-1}u \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \\
\leq &\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \\
\leq &\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u\|^p_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq &\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^pT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u_0\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
\leq &\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^pT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Si nous choisissons T assez petit telle que

$$\frac{2^pT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 1,$$

nous obtenons

$$\|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

En outre, pour $u, v \in E_T$, que nous avons pour $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\|G(u)(t) - G(v)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
= &\left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)ds \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \\
\leq &\frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
\leq &\frac{p4^{p-1}T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq &\frac{1}{2} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))},
\end{aligned}$$

où T est choisi assez petit pour que

$$\frac{p4^{p-1}T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u_0(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, G est contractif sur E_T. Donc, G a un point fixe $u \in E_T$ par le principe de contraction des carte.
Ensuite, en utilisant l'unicité de la solution, nous concluons que l'existence de la solution sur un intervalle maximal $[0, T_{max})$, où

$$T_{\max} = \sup \left\{ T > 0 : \text{il existe une solution lisse } u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) \text{ pour } (2.1) - (2.2) \right\}.$$

Supposons que $T_{\max} < +\infty$ et qu'il existe $M > 0$ tel que pour $t \in [0, T_{\max})$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M.$$

Puisque $P_\alpha(t)u_0$ est uniformément continue sur $[0, T_{\max}]$, donc la limite $\lim_{t \to T_{\max}^-} u(x,t)$ existe. On note $u_{T_{\max}} = \lim_{t \to T_{\max}^-} u(x,t)$. et définir $u(T_{max}) = u_{T_{max}}$. Par conséquent, $u \in C([0, T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ et donc, par le Lemme 2.4,

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s) \left| u(s) \right|^{p-1} u(s)\, ds \in C([0, T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N)).$$

Pour $h > 0$, $\delta > 0$, soit

$$E_{h,\delta} = \left\{ u \in C([T_{\max}, T_{\max} + h], C_0(\mathbb{R}^N)) \mid u(T_{\max}) = u_{T_{\max}}, d(u, u_{T_{\max}}) \leq \delta \right\},$$

où

$$d(u,v) = \max_{t \in [T_{\max}, T_{\max}+h]} \|u - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \qquad u, v \in E_{h,\delta}.$$

Comme $C([T_{\max}, T_{\max} + h], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, alors $(E_{h,\delta}, d)$ est un espace métrique complet.
Nous définissons l'opérateur G sur $E_{h,\delta}$ par

$$\begin{matrix} G(v)(t) = P_\alpha(t)u_0 + \int_0^{T_{\max}} (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(t-\tau) \left| u \right|^{p-1} u(\tau)\, d\tau \\ + \int_{T_{\max}}^t (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(t-\tau) \left| v \right|^{p-1} v(\tau)\, d\tau, \end{matrix} \quad v \in E_{h,\delta}$$

Clairement, on a $G(v) \in C([T_{\max}, T_{\max} + h], C_0(\mathbb{R}^N))$, et $G(v)(T_{\max}) = u_{T_{\max}}$.

Si $v \in E_{h,\delta}$, alors pour $t \in [T_{max}, T_{max} + h]$,

$$\left\| G(v)(t) - u_{T_{\max}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \left\| P_\alpha(t)u_0 - P_\alpha(T_{\max}) u_0 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left\| I_1 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left\| I_2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

où

$$I_1 = \int_0^{T_{\max}} (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(t-\tau) \left| u \right|^{p-1} u(\tau)\, d\tau - (T_{\max} - \tau)^{\alpha-1} S_\alpha(T_{\max} - \tau) \left| u \right|^{p-1} u(\tau)\, d\tau,$$

$$I_2 = \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(t-\tau) |v|^{p-1} v(\tau) \, d\tau.$$

En prenant h suffisamment petit pour que

$$\|P_\alpha(t)u_0 - P_\alpha(T_{\max}) u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\delta}{3},$$

$$\|I_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\delta}{3}, \quad \text{pour } t \in [T_{max}, T_{max}+h],$$

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \left\| \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(T_{\max}-\tau) |v|^{p-1} v(\tau) - |u_{T_{\max}}|^{p-1} u_{T_{\max}} d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \left\| \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(T_{\max}-\tau) |u_{T_{\max}}|^{p-1} u_{T_{\max}} d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C\delta \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \|u_{T_{\max}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{C\delta}{\alpha} (t-T_{\max})^\alpha + \frac{\|u_{T_{\max}}\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\Gamma(\alpha+1)} (t-T_{\max})^\alpha \leq \frac{\delta}{3},
\end{aligned}$$

pour $t \in [T_{max}, T_{max}+h]$. On a alors $\|G(v)(t) - u_{T_{max}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$, $t \in [T_{max}, T_{max}+h]$. Ensuite, nous prouverons que G est contractive sur $E_{h,\delta}$ pour h suffisamment petit. En effet, pour $w, v \in E_{h,\delta}$, $t \in [T_{max}, T_{max}+h]$,

$$\begin{aligned}
&\|w(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} \left\| S_\alpha(t-\tau) \left(|w|^{p-1} w(\tau) - |v|^{p-1} v(\tau) \right) \right\| d\tau \\
&\leq \|w-v\|_{L^\infty((T_{max}, T_{max}+h), L^\infty(\mathbb{R}^N))} (\|w\|_{L^\infty((T_{max}, T_{max}+h), L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
&\quad + \|v\|_{L^\infty((T_{max}, T_{max}+h), L^\infty(\mathbb{R}^N))})^{p-1} \frac{p}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_{\max}}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&\leq \frac{2^{p-1} p}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\delta + \|u_{T_{\max}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{p-1} (t-T_{\max})^\alpha d(w,v).
\end{aligned}$$

En choisissant h suffisamment petit pour que

$$\frac{2^{p-1} p}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\delta + \|u_{T_{\max}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{p-1} h^\alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Alors, G est contractif sur $E_{h,\delta}$. Nous savons donc que G a un point fixe $v \in E_{h,\delta}$.
Puisque

$$v(T_{\max}) = G(v(T_{\max})) = u(T_{\max}),$$

si on pose

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, T_{\max}[\,, \\ v(t), & t \in [T_{\max}, T_{\max} + h]\,, \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in C([0, T_{\max} + h]\,, C_0(\mathbb{R}^N))$ et

$$\tilde{u}(x,t) = P_\alpha(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)\, |\tilde{u}|^{p-1}\, \tilde{u}\,(\tau)\, ds.$$

Ensuite, $\tilde{u}$ est une solution de (2.1)-(2.2), ce qui est en contradiction avec la définition de $T_{\max}$. Supposons que $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq r < \infty$, alors en répétant l'argument ci-dessus, on obtient la conclusion. De plus, si $u_0 \geq 0$, on peut obtenir la variable non négative solution de (2.1) en appliquant l'argument ci-dessus dans l'ensemble $E_T^+ = \{u \in E_T |\ u \geq 0\}$. On sait alors que $u(t) \geq P_\alpha(t)u_0 > 0$ sur $t \in (0, T_{\max})$. ■

2.4 Explosions de solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible de (2.1)-(2.2) et après nous prouvons l'explosion de solutions.

Définition 2.2 *On dit que $u \in L^p((0,T), L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N))$, pour $u_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $T \succ 0$ est u solution faible de (2.1)-(2.2) si*

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p-1} u\varphi + u_0{}^C D^\alpha_{t|T}\varphi\right) dxdt \\ &= \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta\varphi(x,t))dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^C D^\alpha_{t|T}\varphi(x,t)dxdt, \end{aligned} \tag{2.15}$$

pour toute $\varphi \in C^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ avec $\operatorname{supp}_x \varphi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\varphi(.,T) = 0$.

Lemme 2.5 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, et $u \in C([0,T]\,, C_0(\mathbb{R}^N))$ une solution lisse de (2.1)-(2.2). Alors u est une solution faible de (2.1)-(2.2).*

Preuve. *Supposons que $u \in C([0,T]\,, C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution lisse de (2.1)-(2.2), alors nous avons*

$$u - u_0 = P_\alpha(t)u_0 - u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(t-\tau)\, |u|^{p-1}\, ud\tau.$$

En utilisant le Lemme 2.4, nous obtenons

$$I^{1-\alpha}_{0|t}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} S_\alpha(t-\tau)\, |u|^{p-1}\, ud\tau\right) = \int_0^t P_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}\, u)ds,$$

donc, nous savons

$$I^{1-\alpha}_{0|t}(u-u_0) = I^{1-\alpha}_{0|t}(P_\alpha\,(t)\, u_0 - u_0) + \int_0^t P_\alpha(t-\tau)(|u|^{p-1}\, u)d\tau.$$

Alors, pour tout $\varphi \in C^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *avec* $\operatorname{supp}_x \varphi \subset\subset \mathbb{R}^N$ *et* $\varphi(x,T) = 0$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(u-u_0)\varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(P_\alpha(t)\,u_0 - u_0)\varphi dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_\alpha(t-s)\left(|u|^{p-1}u\right)\varphi ds dx \\ &= H_1(t) + H_2(t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Par le $Lemme 2.3$*, nous obtenons*

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^N} {}^C D^\alpha_{0|t}(P_\alpha(t)u_0)\varphi dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(P_\alpha(t)u_0 - u_0)\varphi_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} A(P_\alpha(t)u_0)\varphi dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(P_\alpha(t)u_0 - u_0)\varphi_t dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Soit $h > 0, t \in [0,T)$ *et* $t + h \leq T$, *alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{H_2(t+h) - H_2(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N} P_\alpha(t+h-s)(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t+h) dx ds \\ &-\frac{1}{h}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} P_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t) dx ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t+h) d\theta dx ds \\ &-\frac{1}{h}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \Phi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t) d\theta dx ds \\ &= H_3 + H_4 + H_5, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
H_3 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{t}^{t+h}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad\times\varphi(x,t+h)dx, \\
H_4 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta)-T((t-s)^\alpha\theta)\right)(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad\times\varphi(x,t)dx, \\
H_5 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad\times(\varphi(x,t+h)-\varphi(x,t))dx.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée,quand $h\to 0$, *nous concluons que*

$$\begin{aligned}
H_3 &\to \int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-1}u\varphi dx, \\
H_4 &\to \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u)dsA\varphi dx, \\
H_5 &\to \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u)ds\varphi_t dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée droite de H_2 *sur* $[0,T)$ *est*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-1}u\varphi dx+\int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(t-s)^{\alpha-1}S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u)A\varphi dxds \\
+\quad&\int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}P_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u)\varphi_t dxds,
\end{aligned}$$

et il est continu dans $[0;T)$. *Donc,*

$$\begin{aligned}\frac{dH_2}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p-1}u)\varphi dx + \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u) A\varphi dx ds \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int_0^t P_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u) ds \varphi_t dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\varphi dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u) ds A\varphi dx \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} I_{0|t}^{1-\alpha}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u) ds\right)\varphi_t dx,\end{aligned} \tag{2,18}$$

pour $t \in [0,T)$ *. Par (2.16)-(2,18), nous avons*

$$0 = \int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} I_{0|t}^{1-\alpha}(u-u_0)\varphi dx dt = \int_0^T \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt} dt$$

$$\begin{aligned}&= \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} P_\alpha(t) u_0 \Delta\varphi dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (u-u_0)^C D_{t|T}^\alpha \varphi dx dt \\ &+ \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p-1}u)\varphi dx dt \\ &+ \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_\alpha(t-s)(|u|^{p-1}u) ds \Delta\varphi dx dt \\ \\ &= \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (u-u_0)^C D_{t|T}^\alpha \varphi dx dt \\ &+ \textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\varphi dx dt.\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

Ce qui complète la preuve du Lemme2.5. Maintenant, nous donnons un résultat d'explosion pour les solutions du problème (2.1)-(2.2). ■

Théorème 2.2 *Soit* $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $u_0 \geq 0,\ u_0 \not\equiv 0$. *Si*

$$1 < p < 1 + \frac{2}{N},$$

alors la solution douce de (2.1)-(2.2) explose en un temps fini.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u est une solution globale lisse pour le problème (2.1)-(2.2). En utilisant le Lemme 2.5 et la Définition 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^T (u^p\varphi_n) dx dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^T \left(u_0{}^C D_{t|T}^\alpha \varphi_n\right) dx dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^T \left(-u\Delta\varphi_n + u^C D_{t|T}^\alpha \varphi_n\right) dx dt,\end{aligned}$$

Soit $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(s) = 1$ pour $|s| \leq 1$, $\Phi(s) = 0$ pour $|s| > 2$ et $0 \leq \Phi(s) \leq 1$.
pour $T > 0$ Maintenant, nous prenons

$$\varphi_1(x) = \left(\Phi\left(T^{-\frac{\alpha}{2}}|x|\right)\right)^{\frac{2p}{P-1}},\ \varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^m,\ m \geq \max\left\{1, \frac{p\alpha}{p-1}\right\},$$

pour $t \in [0, T]$.En supposant que u est une solution douce de (2.1)-(2.2), alors, par le Lemme 2.5, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi_1\varphi_2 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1{}^C D^\alpha_{t|T}\varphi_2 dxdt\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\left(-\triangle\varphi_1\right)\varphi_2 dxdt\\ &+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_{1t}^{\ C}D^\alpha_{t|T}(\varphi_2)\,dxdt.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Notez que

$$\left|\left(-\triangle\varphi_1\right)\varphi_2 + \varphi_1{}^C D^\alpha_{t|T}(\varphi_2)\right| \leq CT^{-\alpha}\varphi_1^{\frac{1}{p}}\varphi_2^{\frac{1}{p}}, \tag{2.20}$$

pour une constante positive C indépendante de T. Alors, par (2.19)-(2.20)et l'inégalité de Holder , on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi_1\varphi_2 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi_1{}^C D^\alpha_{t|T}\varphi_2 dxdt\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\left|\left(-\triangle\varphi_1\right)\varphi_2 + \varphi_1{}^C D^\alpha_{t|T}(\varphi_2)\right| dxdt\\ &\leq CT^{-\alpha}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^{\frac{1}{p}}\varphi_2^{\frac{1}{p}} dxdt\\ &\leq CT^{-\alpha+(1+\frac{\alpha N}{2})\frac{(p-1)}{p}}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi_1\varphi_2 dxdt.\end{aligned}$$

D'où

$$T^{1-\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi_1 dx \leq CT^{1+\frac{\alpha N}{2}-\frac{p\alpha}{(p-1)}}.$$

Il découle de $p < 1 + \frac{2}{N}$ que $1 + \frac{\alpha N}{2} - \frac{p\alpha}{(p-1)} < 0$. Par conséquent, si la solution de (2.1)-(2.2) existe globalement, alors en prenant $T \to \infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi_1 dx = 0$$

et donc $u_0 \equiv 0$. Par conséquent, nous avons que u explose en un temps fini. ■

Chapitre 3

Explosion de solutions d'une classe d'équations d'évolution fractionnaire spatio-temporelle avec une non linéarité non locale en temps

3.1 Introduction

Dans ce chapitre [18], nous considérons l'équation fractionnaire suivante

$$ {}^{C}D_{0|t}^{\alpha}u + (-\Delta)^{\beta/2}u = I_{0|t}^{\gamma}\,|u|^{p-1}\,u, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{3.1}$$

avec les données initiales

$$ u(x,0) = u_0(x) \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{3.2}$$

où $C_0(\mathbb{R}^N)$ désigne l'espace de toutes les fonctions continues et décroissantes vers zéro à l'infini, $N \geq 1$, $0 < \alpha < 1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$ et ${}^{C}D_{0|t}^{\alpha}$ est la dérivée de caputo d'ordre α définie, pour une fonction différentiable u, par

$$ {}^{C}D_{0|t}^{\alpha}u(t) = I_{0|t}^{1-\alpha}\frac{du(t)}{dt}, $$

${}_0I_t^{1-\alpha}$ désigne l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ définie, pour une fonction intégrable u, par

$$ I_{0|t}^{1-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds, $$

où Γ est la fonction Gamma. L'opérateur non-locale $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2}v(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta}\,\mathcal{F}(v)(\xi))(x),$$

pour chaque $v \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$, où $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre β, défini par

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{v \in S' : (-\Delta)^{\beta/2}v \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}, \qquad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$
$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{v \in L^2(\mathbb{R}^N) : (-\Delta)^{\beta/2}v \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}, \quad \text{si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace des distributions de Schwartz, $\mathcal{F}$ représente la transformée de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ est son inverse.
Lorsque $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 0$, le problème $(2.1) - (2.2)$ se réduit a l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante

$$u_t - \Delta u = |u|^{p-1}\,u, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{3.3}$$

Cette équation a été traité par Fujita dans [13]. Il a montré que si

$$u_0 \geq 0, u_0(x) \not\equiv 0 \text{ et } p < 1 + 2/N,$$

alors toute solution explose en temps fini.
Lorsque $\alpha = 1$, $\beta = 2$, Cazenave et *al. [5]* ont prouvé que toutes les solutions de l'équation

$$u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma}\,|u(s)|^{p-1}\,u(s)ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{3.4}$$

explosent en temps fini si

$$u_0 \geq 0,\ u_0 \not\equiv 0 \text{ et } p \leq \max\left\{1 + 2(2-\gamma)/(N-2+2\gamma)_+,\ 1/\gamma\right\}.$$

Lorsque $\gamma = 0$, alors toutes les solutions non triviales explosent comme l'a démontré Souplet [20]. Dans [12], Fino et Kirane ont considéré l'équation suivante

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2}u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\,|u(s)|^{p-1}\,u(s)ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{3.5}$$

Ils ont prouvé que si

$$u_0 \geq 0,\ u_0 \not\equiv 0 \text{ et } p \leq \max\left\{1 + \beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+,\ 1/\gamma\right\},$$

alors toute solution explose en temps fini.
Quand $\beta = 2$ et $\gamma = 0$, Zhang et Sun [22] ont traité le problème suivant

$$^{C}D^{\alpha}_{0|t}u - \Delta u = |u|^{p-1}\,u, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{3.6}$$

Ils ont prouvés que si

$$u_0 \geq 0, u_0(x) \not\equiv 0 \text{ et } 1 < p < 1 + 2/N,$$

alors toute solution explose en temps fini.
Si $\gamma = 0$, Kirane et *al.* [15] ont discuté de l'équation d'évolution suivante

$$^C D^{\alpha}_{0|t} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = h(x,t)\, |u|^{p-1} u, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{3.7}$$

où $h(x,t) \geq C\, |x|^{\sigma}\, t^{\rho}$ pour $C > 0$, $\sigma,\ \rho$ et satisfaire à certaines conditions. Ils ont prouvé que si

$$0 < p \leq 1 + (\alpha(\sigma + \beta) + \beta\rho)/(\alpha N + \beta(1 - \alpha)),$$

le problème ne possède aucune solution positive globale.
Dans ce chapitre, nous étudierons l'existence locale et l'explosion de solutions pour le problème (3.1)-(3.2).

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques préliminaires qui seront utilisés dans la suite de cette étude. Pour $T > 0$ et $n > 0$, si on pose

$$\varphi(t) = (1 - \frac{t}{T})^n_+,$$

alors

$$^C D^{\alpha}_{t|T} \varphi(t) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} T^{-\alpha} (1 - \frac{t}{T})^{n-\alpha}, t \leq T.$$

Soit $T(t) = e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}}$. Comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, (voir par exemple [10], [11]) , et pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} T(t)u_0 &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x-y,t) u_0(y) dy, \\ G_\beta(x,t) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{N/2}} \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{\left(ix\xi - t|\xi|^\beta\right)} d\xi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Il est bien connu que $G_\beta(x,t)$ satisfait

$$G_\beta(x,1) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N),\ G_\beta(x,t) \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t) dx = 1.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Young pour la convolution et la forme

$$G_\beta(x,t) = t^{-\frac{N}{\beta}} G_\beta(xt^{-\frac{1}{\beta}}, 1),$$

nous avons

$$\|G_\beta(t)*v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.9}$$

pour tout $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq r \leq q \leq \infty$.
On définit les opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ par

$$P_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0, \tag{3.10}$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \alpha\int_0^\infty \theta\phi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0. \tag{3.11}$$

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire temps-espace linéaire suivante

$${}^CD^\alpha_{0|t}u(x,t) + (-\Delta)^{\beta/2}u(x,t) = f(x,s),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \tag{3.12}$$

avec

$$u(x,0) = u_0(x),$$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^1((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$. Si u est une solution de (3.12), alors elle satisfait (voir [21], [2]).

$$u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)f(x,s)ds,$$

où $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ sont respectivement données par (3.10) et (3.11).
On pose, pour $0 < \alpha < 1$,

$$K(x,t) = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)G_\beta(x,t^\alpha\theta)d\theta\ ,\ x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, t > 0.$$

Notons que, pour donné $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, $G_\beta(x,t^\alpha\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$, alors K est bien défini.
Puisque $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta = 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t)dx = 1$, on a

$$\|K(t,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1, \qquad t > 0.$$

On annonce maintenant les lemmes suivants qui donnent quelques propriétés utiles des opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ (voir [22]).

Lemme 3.1 *L'opérateur $P_{\alpha,\beta}(t)$, $t > 0$ a les propriétés suivantes :*
(a) si $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et $\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$,
(b) si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\beta}{N}$, alors

$$\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}}\frac{\Gamma(1-N/\beta r)}{\Gamma(1-\alpha N/\beta r)}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.13}$$

Lemme 3.2 *Pour l'opérateur $S_{\alpha,\beta}(t),\ t>0$, nous avons les résultats suivants :*
(a) Si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $S_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et

$$\left\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)};$$

(b) Pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, soit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, si $\frac{1}{r} < \frac{2\beta}{N}$, alors

$$\left\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha(4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}}\frac{\Gamma(2-N/\beta r)}{\Gamma(1+\alpha-\alpha N/\beta r)}\left\|u_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.14}$$

Lemme 3.3 *Soit $A = (-\Delta)^{\beta/2}$. Pour $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, nous avons $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 \in D(A)$, pour $t>0$, et*

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha_{0|t} P_{\alpha,\beta}(t)u_0 &= AP_{\alpha,\beta}(t)u_0,\ t>0, \\ \left\|AP_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{C}{t^\alpha}\left\|u_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\ t>0, \end{aligned}$$

pour certaine constante $C>0$.

Lemme 3.4 *Supposons que $f \in L^q((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$, $q>1$, et soit*

$$z(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)f(s)ds,$$

alors

$$I^{1-\alpha}_{0|t} z(t) = \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)f(s)ds.$$

De plus, si $\alpha q > 1$, alors $z \in C((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$.

3.3 Existence locale

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe, nous prouvons l'existence locale pour le problème (3.1)-(3.2).
Premièrement, nous donnons la définition de la solution douce (lisse) de (3.1)-(3.2).

Définition 3.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T>0$. On dit que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce de $(3.1)-(3.2)$, si u satisfait :*

$$u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^\gamma_{0|s}(|u|^{p-1}u)(x,s)ds,\ t\in[0,T]. \tag{3.15}$$

Théorème 3.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps maximale $T_{\max} = T(u_0) > 0$ et une solution douce unique $u \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ du problème (3.1)-(3.2). De plus,*
- Soit $T_{\max} = +\infty$;

- *Soit* $T_{\max} < +\infty$, *et dans ce cas* $\|u\|_{L^{\infty}((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))} \to +\infty$ *quand* $t \to T_{\max}$.
- *Si, en outre,* $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, *alors* $u(t) \geq P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ *pour* $t \in [0, T_{\max})$. *De plus,*
- *Si* $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *pour certains* $r \in [1, \infty)$, *alors* $u \in C([0, T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. Pour $T > 0$ et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, on définit

$$E_T := \left\{ u \mid u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) : \|u\|_{L^{\infty}((0,T),L^{\infty}(\mathbb{R}^N))} \leq 2 \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \right\},$$

et

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)}, \; u, v \in E_T.$$

Puisque $C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, il en résultat que (E_T, d) est un espace métrique complet.
Maintenant, nous définissons l'opérateur

$$G(u)(t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1} u)ds, \; u \in E_T.$$

Ensuite, en utilisant (3.14), nous avons

$$\begin{aligned}
& \|G(u)(t)\|_{L^{\infty}((0,T),L^{\infty}(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1} u)ds \right\|_{L^{\infty}((0,T),L^{\infty}(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \|u(\sigma)\|^p_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} d\sigma ds \right\|_{L^{\infty}(0,T)} \\
\leq & \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} + \frac{T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|^p_{L^{\infty}((0,T),L^{\infty}(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^p_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \\
\leq & \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^{p-1}_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} .
\end{aligned}$$

Si nous choisissons T assez petit telle que

$$\frac{2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|^{p-1}_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq 1,$$

nous obtenons

$$\|G(u)(t)\|_{L^{\infty}((0,T),L^{\infty}(\mathbb{R}^N))} \leq 2 \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} .$$

En outre, pour $u, v \in E_T$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \|G(u)(t)-G(v)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^\gamma_{0|s}(|u|^{p-1}u)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^\gamma_{0|s}(|v|^{p-1}v)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-t)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
\leq & \frac{T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{C(p)2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{2} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))},
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante

$$\left| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right| \leq C(p)\,|u-v|\,(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}),$$

où T est choisi tel que

$$\frac{C(p)2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, G est contractif sur E_T. Donc, G a un point fixe unique $u \in E_T$ par l'argument du point fixe de Banach. Ensuite, en utilisant l'unicité des solutions, nous concluons l'unicité de la solution sur un intervalle maximal $[0, T_{\max})$, où

$$T_{\max} = \sup\left\{T>0 : \text{il existe une solution lisse } u \in L^\infty([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) \text{ pour } (3.1)-(3.2)\right\}.$$

Supposons que $T_{\max} < \infty$ et qu'il existe une constante positive M telle que :

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M, \qquad t \in [0, T_{\max}).$$

Puisque $P_{\alpha,\beta}(t)u_0$ est uniformément continue sur $[0, T_{\max}]$, donc la limite $\lim_{t\to T_{\max}} u(x,t)$ existe. On note $u_{T_{\max}} = \lim_{t\to T_{\max}} u(x,t)$. Donc, $u \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ et par le Lemme 3.4 nous avons

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^\gamma_{0|s}(|u|^{p-1}u)ds \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N)).$$

Pour $h>0$, $\delta>0$, soit

$$E_{h,\delta} = \left\{u \in C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N)) : u(T_{\max}) = u_{T_{\max}}, d(u, u_{T_{\max}}) \leq \delta\right\},$$

où

$$d(u,v)=\max_{t\in[T_{\max},T_{\max}+h]}\|u-v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \qquad u,v\in E_{h,\delta}.$$

Comme $C([T_{\max},T_{\max}+h],C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, alors $(E_{h,\delta},d)$ est un espace métrique complet.
Nous définissons l'opérateur G sur $E_{h,\delta}$ par

$$G(v)(t)=P_{\alpha,\beta}(t)u_0+\int_0^{T_{\max}}(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)I^\gamma_{0|s}(|u|^{p-1}u)ds$$

$$+\int_{T_{\max}}^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)I^\gamma_{0|s}(|v|^{p-1}v)ds,$$

pour $v\in E_{h,\delta}$. Clairement, on a $G(v)\in C([T_{\max},T_{\max}+h],C_0(\mathbb{R}^N))$, et $G(v)(T_{\max})=u(T_{\max})$.
En répétant l'argument ci-dessus, nous pouvons prouver que G admet un point fixe $v\in E_{h,\delta}$.
Puisque

$$v(T_{\max})=G(v)(T_{\max})=u(T_{\max}),$$

si on pose

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & t\in[0,T_{\max}[,\\ v(x,t), & t\in[T_{\max},T_{\max}+h],\end{cases}$$

alors $\tilde{u}\in C([0,T_{\max}+h],C_0(\mathbb{R}^N))$ et

$$\tilde{u}(x,t)=P_{\alpha,\beta}(t)u_0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I^\gamma_s(|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u})ds.$$

Ensuite, $\tilde{u}$ est une solution de (3.1)-(3.2), ce qui est en contradiction avec la définition de $T_{\max}$.
Supposons que $u_0\in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour $1\le r<\infty$, alors nous répétons le même argument que ci-dessus dans l'espace suivant :

$$\begin{aligned} E_{T,r} &= \{u\in C([0,T],C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)),\ \text{tel que}\\ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))} &\le 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^r(\mathbb{R}^N))}\le 2\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\}.\end{aligned}$$

En estimant de $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ dans le théorème de mappage de contraction, en utilisant (3.14), nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$. Puis nous concluons que

$$u\in C([0,T_{\max}),C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)).$$

Si $u_0\ge 0$ et $u_0\not\equiv 0$, alors nous pouvons construire une solution non négative de (3.1)-(3.2) sur $[0,T]$ en appliquant l'argument ci-dessus dans l'ensemble $E_T^+=\{u\in E_T : u\ge 0\}$. En particlier, il résulte de (3.15) que $u(t)>0$ sur $(0,T_{\max})$. ■

3.4 Explosions de solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible de (3.1)-(3.2) et après nous prouvons l'explosion de solutions.

Définition 3.2 *Soit* $u_0 \in L^{\infty}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, $0 < \beta \leq 2$, $0 < \alpha < 1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$ *et* $T > 0$. *On dit que* $u \in L^p((0,T), L^{\infty}_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right))$ *est* u *solution faible de (3.1)-(3.2) si*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0{}^C D^{\alpha}_{t|T}\varphi(x,t)dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2}\varphi(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^C D^{\alpha}_{t|T}\varphi(x,t)dxdt, \end{aligned} \tag{3.16}$$

pour toute fonction test $\varphi \in C^1([0,T], H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\operatorname{supp}_x \varphi \subset\subset \mathbb{R}^N$ *et* $\varphi(.,T) = 0$.

Nous donnons maintenant le lemme suivant qui prouve que toute solution lisse du problème (3.1)-(3.2) est une solution faible.

Lemme 3.5 *Soit* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *et* $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *une solution lisse de(3.1)-(3.2). Alors* u *est une solution faible de (3.1)-(3.2), pour tous* $0 < \beta \leq 2$, $0 < \alpha < 1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$ *et* $T > 0$.

Preuve. *Supposons que* $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *est une solution lisse de (3.1)-(3.2), alors nous avons*

$$I^{1-\alpha}_{0|t}(u-u_0) = I^{1-\alpha}_{0|t}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0) + I^{1-\alpha}_{0|t}(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)ds)).$$

En utilisant le Lemme 2.4, nous obtenons

$$I^{1-\alpha}_{0|t}(u-u_0) = I^{1-\alpha}_{0|t}(P_{\alpha,\beta}u_0 - u_0) + \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)ds.$$

Alors, pour tout $\varphi \in C^1([0,T], H_{\beta}(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\operatorname{supp}_x \varphi \subset \mathbb{R}^N$ *et* $\varphi(x,T) = 0$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(u-u_0)\varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi dsdx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\varphi dx \\ &= H_1(t) + H_2(t). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Par le $Lemme 3.3$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dH_2}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}^C D^{\alpha}_{0|t}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\varphi dx \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\varphi_t dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} A(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\varphi dx \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\varphi_t dx.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Soit $h > 0, t \in [0,T)$ et $t + h \to T$, alors on a

$$\begin{aligned}\frac{H_1(t+h) - H_1(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t+h-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t+h)dxds \\ &\quad - \frac{1}{h}\int_0^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t)dxds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t+h)d\theta dxds \\ &\quad - \frac{1}{h}\int_0^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi(x,t)d\theta dxds \\ &= H_3 + H_4 + H_5,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}H_3 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\ &\quad \times\varphi(x,t+h)dx, \\ H_4 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta) - T((t-s)^\alpha\theta)\right) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\ &\quad \times\varphi(x,t)dx, \\ H_5 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\ &\quad \times(\varphi(x,t+h) - \varphi(x,t))dx.\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, quand $h \to 0$, nous concluons que

$$\begin{aligned}
H_3 &\to \int_{\mathbb{R}^N} I^{\gamma}_{0|t}(|u|^{p-1}u)\varphi dx, \\
H_4 &\to \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u) ds \varphi_t dx, \\
H_5 &\to \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u) ds A\varphi dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée droite de H_1 sur $[0,T)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^N} I^{\gamma}_{0|t}(|u|^{p-1}u)\varphi dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u)\varphi_t dx ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u) A\varphi dx ds.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^N} I^{\gamma}_{0|t}(|u|^{p-1}u)\varphi dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u) ds\right)\varphi_t dx \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u) A\varphi dx ds,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

pour $t \in [0,T)$. Par (3.17)-(3.19), nous avons

$$\int_0^T \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt} dt = \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} I^{1-\alpha}_{0|t}(u-u_0)\varphi dx dt = 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t) u_0 (-\Delta)^{\beta/2}\varphi dx dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (u-u_0)\, {}^C D^{\alpha}_{0|T}\varphi dx dt \\
&\textstyle + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} I^{\gamma}_{0|t}(|u|^{p-1}u)\varphi dx dt \\
&\textstyle + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) I^{\gamma}_{0|s}(|u|^{p-1}u) ds (-\Delta)^{\beta/2}\varphi dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons écrire

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} I_{0|t}^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\varphi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0{}^C D_{t|T}^{\alpha}\varphi dxdt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2}\varphi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^C D_{t|T}^{\alpha}\varphi dxdt,$$

ce qui complète la preuve du Lemme.

Maintenant, nous donnons un résultat d'explosion pour les solutions du problème (3.1)-(3.2). ■

Théorème 3.2 *Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_0 \geq 0,\ u_0 \not\equiv 0$. Si*

$$1 < p < 1 + \frac{\beta\left(\alpha+\gamma\right)}{\alpha N},$$

alors toute solution du problème (3.1)-(3.2) explose en temps fini.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u est une solution globale lisse pour le problème(3.1)-(3.2). En utilisant le Lemme 3.5 et la Définition 3.2, nous obtenons

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} I_{0|t}^{\gamma}\left(|u|^{p-1}u\right)\varphi\left(x,t\right)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0{}^C D_{t|T}^{\alpha}\varphi\left(x,t\right)dxdt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\left(x,t\right)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^C D_{t|T}^{\alpha}\varphi\left(x,t\right)dxdt,$$

pour tout $\varphi \in C^1([0,T], H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\operatorname{supp}_x \varphi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\varphi(.,T) = 0$, où $0 < \alpha < 1-\gamma$ et $0 < \gamma < 1$.Soit $\Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(s) = 1$ pour $|s| \leq 1$, $\Phi(s) = 0$ pour $|s| > 2$ et $0 \leq \Phi(s) \leq 1$. Maintenant, nous prenons

$$\varphi\left(x,t\right) =^C D_{t|T}^{\gamma}\psi\left(x,t\right) =^C D_{t|T}^{\gamma}\left(\psi_1^l\left(x\right)\psi_2\left(t\right)\right),\ l \geq \frac{p}{p-1},$$

pour tout $\psi \in C^1([0,T], H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\operatorname{supp}_x \psi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\psi(x,T) = 0$, avec

$$\psi_1\left(x\right) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right),\ \psi_2\left(t\right) = \left(1-\frac{t}{T}\right)^m,\ m \geq \max\left\{2, \frac{p\left(\alpha+\gamma\right)}{p-1}\right\},$$

pour $t \in [0,T]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\psi_1^l\left(x\right)^C D_{t|T}^{\alpha+\gamma}\left(\psi_2\left(t\right)\right)dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\psi_1^l\left(x\right)^C D_{t|T}^{\gamma}\left(\psi_2\left(t\right)\right)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\psi_1^l\left(x\right)^C D_{t|T}^{\alpha+\gamma}\left(\psi_2\left(t\right)\right)dxdt.
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Ju (voir [1])

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\left(\psi_1^l\right) \leq l\psi_1^{l-1}(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\psi_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\psi_1^l(x)^C\, D_T^{\alpha+\gamma}(\psi_2(t))\,dxdt \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\psi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\psi_1\,{}^C D_{t|T}^{\gamma}(\psi_2(t))\right| dxdt \\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\psi_1^l(x)\ \left|{}^C D_{t|T}^{\alpha+\gamma}(\psi_2(t))\right| dxdt,
\end{aligned}$$

pour une constante positive C indépendante de T. Ensuite, par l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + CT^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\psi_1^l(x)\,dx \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\psi^{\frac{1}{p}}\psi^{-\frac{1}{p}}\psi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle^{\frac{\beta}{2}}\right)\psi_1{}^C D_{t|T}^{\gamma}(\psi_2(t))\right| dxdt \\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\psi^{\frac{1}{p}}\psi^{-\frac{1}{p}}\psi_1^l(x)\ \left|{}^C D_{t|T}^{\alpha+\gamma}(\psi_2(t))\right| dxdt \\
&\leq \frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \psi_1^{l-q}\psi_2^{-\frac{1}{p-1}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\psi_1\right|^q\left|{}^C D_{t|T}^{\gamma}(\psi_2(t))\right|^q dxdt \\
&+\frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} \psi_1^l\psi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|{}^C D_{t|T}^{\alpha+\gamma}(\psi_2(t))\right|^q dxdt.
\end{aligned}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{T},\ \xi = \frac{x}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

nous obtenons

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + T^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\psi_1^l(x)\,dx \leq CT^{1+\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}. \tag{3.21}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\psi_1^l(x)\,dx \leq CT^{\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{(\alpha+\gamma)}{p-1}}.$$

Donc, si une solution de (3.1)-(3.2) existe globalement, alors en prenant $T \to +\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\psi_1^l dx = 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0, \tag{3.22}$$

ce qui est une contradiction. Donc la solution de (3.1)-(3.2) explose en temps fini. ∎

3.5 Durée de vie des solutions d'explosion

Dans cette section , nous donnons une estimation de la limite supérieure de la durée de vie des solutions d'explosion pour l'equations (3.1) complétée par des donnée initiales

$$u_\varepsilon(x,0) = \varepsilon u_0(x), \quad \varepsilon > 0.$$

En supposant que $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ satisfait

$$u_0(x) \geq |x|^{-x} \quad ,|x| > 1 \quad , \quad \frac{\beta(1-\gamma)}{\alpha} + N - \beta < x < \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha(p-1)}. \tag{H}$$

Théorème 3.3 *supposons que (H) soit valable et que $1 < p < 1 + \beta(\alpha+\gamma)/\alpha N$.soit u_ε la solution du probléme avec les données initiales $u_\varepsilon(x,0) = \varepsilon u_0(x), \varepsilon > 0$ et $[0, T_\varepsilon)$ la durée de vie de u_ε. il existe alors $C > 0$ tel que*

$$T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{\frac{1}{v}}, v = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha+\gamma}{p-1} < 0.$$

Preuve. *soit u_ε la solution doce de l'équation avec les données initiales $u_\varepsilon(x,0) = \varepsilon u_0(x)$. alors, en utilisant le Lemme3.5,Définition 3.2 et en considérant $\varphi(x,t)$ comme dans le théoréme3.2 nous obtenons :*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \psi dxdt + V_T = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2} \psi_1^{lC} D_{t|T}^{\gamma} \psi_2 dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \psi_1^{lC} D_{t|T}^{\alpha+\gamma} \psi_2 dxdt,$$

où

$$V_T = \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \psi_1^{lC} D_{t|T}^{\alpha+\gamma} \psi_2 dxdt.$$

En choisissant $T \in [0, T_\varepsilon)$ tel que $T \geq T_0 > 0$ en passant à la variale scalée suivante $\xi = x/T^{\alpha/\beta}$ et en utilisant l'hypothése (H), nous obtenons

$$\begin{aligned} V_T &= \varepsilon T^{\frac{\alpha N}{\beta}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0(T^{\alpha/\beta}\xi) \psi_1^{lC} D_{t|T}^{\alpha+\gamma} \psi_2 d\xi dt \\ &= \varepsilon T^{\frac{\alpha N}{\beta}+1-\alpha-\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(T^{\alpha/\beta}\xi) \psi_1^l d\xi \\ &\geq \varepsilon T^{\frac{\alpha N}{\beta}+1-\alpha-\gamma} \int_{|\xi| \geq \frac{1}{T}} u_0(T^{\alpha/\beta}\xi) \psi_1^l d\xi \\ &\geq \varepsilon T^{\frac{\alpha(N-x)}{\beta}+1-\alpha-\gamma} \int_{|\xi| \geq \frac{1}{T}} |\xi|^{-x} \psi_1^l d\xi \\ &\geq \varepsilon T^{\frac{\alpha(N-x)}{\beta}+1-\alpha-\gamma} \int_{|\xi| \geq \frac{1}{T_0}} |\xi|^{-x} \psi_1^l d\xi, \end{aligned} \tag{3.23}$$

où T_0 est une constante indépendante de T et de ε.

*D'autre part , par(**??**) , on déduit*

$$V_T \leq CT^{\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{P(\alpha+\gamma)}{P-1}}. \tag{3.24}$$

De (3.23) *et* (3.24)*, il résulte que*

$$\varepsilon \leq CT^{\frac{\alpha x}{\beta}-\frac{\alpha+\gamma}{P-1}}.$$

Comme $x \leq \beta(\alpha+\gamma)/\alpha(p-1)$, *on obtient*

$$\vartheta = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha+\gamma}{p-1} < 0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$T \leq C\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}},$$

pour tout $T \in [0, T_\varepsilon)$*, avec quelque* $C > 0$*. Enfin, on a* $T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}}$ *. Ceci complète la preuve.* ■

Conclusion

Après avoir introduit les concepts initiaux et de base de la différenciation et de l'intégration fractionnaire, nous avons également utilisé l'approche de Caputo pour la différenciation par rapport au temps, au laplacien et au laplacien fractionnaire en tant qu'opérateur de différenciation affectant l'espace.

Nous avons présenté des résultats d'existence locale et d'explosion de solution pour une équation fractionnaire par rapport au temps ainsi que pour une équation fractionnaire par rapport au temps et à l'espace.

Au terme de cette thèse, nous pensons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires et ouvriront de nouveaux horizons à la recherche scientifique dans ce domaine.

Bibliographie

[1] A. Alsaedi, B. Ahmad and M. Kirane, A survey of useful inequalities in fractional calculus, Calc. Appl. Anal. 20,. 2017.

[2] E.G. Bazhlekova, Subordination principle for fractional evolution equations, Fract. Calc. Appl. Anal. 3,. 2000.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, Masson Pris New york Barcelone Milan Mexico Sao Paulo,. 1987.

[4] C.M. Carracedo and M.S. Alix, The Theory of Fractional Powers of Operators, North-Holland Mathematics Studies 187, Elsevier, 2001.

[5] T. Cazenave, F. Dickstein and F.B. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Non linear Anal. 68,. 2008.

[6] T. Cazenave and A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1998.

[7] J. Charles, M. bekhta et H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod, Paris,. 2010.

[8] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Modern Phys. 15,. 1943.

[9] S. Dipierro and E. Valdinoci, A simple mathematical model inspired by the Purkinje cells : from delayed travelling waves to fractional diffusion, Bull. Math. Biol. 80., 2018.

[10] J. Droniou, T. Gallouët and J. Vovelle, Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of an hyperbolic equation, J. Evol. Equ. 3., 2003.

[11] J. Droniou and C. Imbert, Fractal first order partial differential equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 182,. 2006.

[12] A. Fino and M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quart. Appl.Math. 70,. 2012.

[13] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 13,. 1966.

[14] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and application of fractional differential equation,. 2006.

[15] M. Kirane, Y. Laskri and N.E. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl.312,. 2005.

[16] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod ,Gaulthier-villars,Pris,. 1969.

[17] F. Mainardi, On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, in : S. Rionero, T. Ruggeri (Eds.), Waves and Stability in continuous Media, World Scientific, Singapore,. 1994.

[18] A. Nabti. Life span of blowing-up solutions to the Cauchy problem for a time-space fractional diffusion equation. Comput. Math. 78,. 2019.

[19] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Di erential Equations, Springer{Verlag, New York, 1983.

[20] P. Souplet, Blow-up in nonlocal reaction–diffusion equations, SIAM J. Math. Anal. 29,.1998.

[21] R.N. Wang, D.H. Chen and T.J. Xiao, Abstract fractional Cauchy problems with almosectorial operators, J. Differential Equations 252,. 2012.

[22] G.Q. Zhang and H.R. Sun, The blow-up and global existence of solutions of Cauchy problems for a time fractional diffusion equation , Topol. Meth. Nonlinear.Anal. 46,. 2015.

[23] Y. Zhou, Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific, Singapore,. 2014.

[24] Y. Zhou and L. Peng, On the time-fractional Navier–Stokes equations, Comput. Math. Appl. 73,. 2017.

[25] Y. Zhou and L. Peng, Weak solutions of the time-fractional Navier–Stokes equations and optimal control, Comput. Math. Appl. 73, 2017.