République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Chahid Cheikh LarbiTébessi–Tébessa-
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

N° d'ordre : ……

Série : ……

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Option : : Equations aux dérivées partielles et applications

Spécialité: Mathématiques appliquée

Thème:

Etude de quelques équations d'évolution (Existence local et global, non-existence, explosion et décroissance de la solution)

Présenté par:

BENZAHI Mourad

Devant le jury:

BOUALI Tahar	**MCA**	**U. Tebessa**	Président
ZARAI Abderrahmane	**Professeur**	**U. Tebessa**	Rapporteur
SELLAMI Badreddine	**Professeur**	**U. Souk Ahras**	Examinateur
Belloufi Mohammed	**Professeur**	**U. Souk Ahras**	Examinateur

Table des matières

Dédicaces

À mes chers parents, à ma femme bien-aimée à mes précieux amis, à toute ma famille, à mes directeurs de thèse et à tous ceux qui ont contribué à ce travail, je dédie cette thèse. Votre soutien, vos conseils et votre amour ont été les piliers sur lesquels j'ai pu construire ce travail. Merci pour votre soutien indéfectible et votre inspiration constante tout le long de ce parcours académique.

À mes chers Boulaaras Salah et Chaouche Yassine, dont la camaraderie et le partage d'idées ont illuminé chaque étape de mon voyage de recherche doctorale. Vos perspectives uniques, vos encouragements constants et votre volonté inébranlable de relever les défis m'ont inspiré à viser toujours plus haut. Cette thèse est dédiée à notre amitié et à notre collaboration fructueuse, qui a transcendé les frontières académiques pour devenir une source d'inspiration et de croissance personnelle.

M. BENZAHI

Remerciements

Je suis profondément reconnaissant envers mon encadreur, Pr. Zarai Abderrahmane, dont la sagesse, l'expertise et le soutien ont été le phare qui a guidé mes efforts de recherche. Votre mentorat attentif et votre engagement indéfectible envers mon succès ont été essentiels pour surmonter les défis et atteindre mes objectifs académiques. Mes remerciements les plus sincères vont également à l'ensemble des membres du jury, Dr. BOUALI Tahar, à l'université Chahid Cheikh Larbi Tebessi de Tebessa, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse et les professeurs : Pr.SELLAMI Badreddine et Pr.Belloufi Mohammed à l'université de Souk Ahras pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à mon travail en acceptant d'être examinateurs.

Mes remerciements à toute l'équipe de recherche, pour leur collaboration et leurs contributions précieuses qui ont enrichi cette thèse. Leur travail acharné et leur dévouement ont été une source constante d'inspiration.

Enfin, je tiens à remercier l'université pour avoir fourni un environnement propice à la recherche et à l'apprentissage. Leurs ressources et leur soutien logistique ont été essentiels pour la réalisation de cette thèse. À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à cette recherche, je vous adresse mes plus sincères remerciements. Votre impact sur ce travail ne sera jamais oublié, et je suis reconnaissant d'avoir eu l'opportunité de partager cette expérience avec vous.

Résumé

L'objet de notre travail en premier lieu porte essentiellement sur l'étude de l'interaction entre terme source et terme dissipatif, il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre. Nous établissons un résultat de non-existence d'un système viscoélastique avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et une source non linéaire dans tout l'espace. Le résultat de non-existence est basé sur la méthode des fonctions test développé par Mitidieri et Pohozaev. Nous établissons des conditions nécessaires d'existence locale et globale. Exactement, nous trouvons un rang de valeurs pour p et q (puissances des termes source) pour laquelle nous avons la non-existence sous des hypothèses minimales sur les fonctions de relaxations g et h. les résultats obtenus dans cette thèse prolongent les résultats précédents de Zarai et Tatar. en suite L'objectif principal et crucial de cette recherche est d'examiner une équation de membrane élastique non linéaire intégrant une détention et de sources de conditions dans un cadre délimité (bien fermé).Dans lequel nous obtenons des conditions suffisantes sur les données initiales et les fonctionnels impliqués pour que l'énergie initiale non positive des solutions ainsi que l'énergie initiale positive s'explosent en un temps fini. En outre, ce travail fournit aussi des estimations de la durée de vie de ces solutions.

Abstract

The object of our work relates primarily to the study of the interaction between source term and dissipative term, it is important to know which term wins over the other. We establish a result of non-existence of a viscoelastic system with Balakrishnan-Taylor dissipation and a nonlinear source in all space. The non-existence result is based on the test functions method developed by Mitidieri and Pohozaev.We establish the necessary conditions for local and global existence. Exactly, we find a rank of values for p and q (powers of the source terms) for which we have non-existence under minimal assumptions on the relaxation functions g and h. the results obtained in this thesis extend the previous results of Zarai and Tatar.

The primary objective of this research is to examine a nonlinear elastic membrane equation incorporating delay and source terms within a bounded domain. We obtain sufficient conditions on the initial data and the involved functionals for which the energy of solutions with non positive initial energy as well as positive initial energy blow up in a finite-time. In addition, this research work provides estimates for the lifespan of these solutions.

ملخص

الهدف من هذا الموضوع في البداية هو دراسة التفاعل بين الحد المصدر والحد المبدد، ومن المهم معرفة أي حد يسود على الآخر. لقد قمنا بانشاء نتيجة الا التواجد لنظام لزج مرن مع تبديد بالاكريشنان-تايلور ومصدر غير خطي في جميع أنحاء الفضاء. تعتمد نتيجة عدم الوجود على طريقة وظيفة الاختبار التي طورها ميتيديري وبوهوزايف. نحن نقوم بتهيئة الشروط اللازمة للوجود المحلي و الكلي. بالضبط، نجد رتبة من القيم لـ p و q (قوى المصطلحات المصدرية)التي لا وجود لها في ظل الحد الأدنى من الافتراضات على وظائف الاسترخاء g و h .النتائج التي تم الحصول عليها في هذه الرسالة هي امتداد للنتائج السابقة لزارعي و طاطار. والهدف التالي الرئيسي لهذا البحث هو دراسة معادلة الغشاء المرن غير الخطية التي تدمج ظروف الحيازة والمصدر في إطار محدد (مغلق جيدًا)، حيث نحصل على شروط كافية على البيانات الأولية والوظائف المعنية بحيث يمكن الطاقة الأولية غير موجبة للحلول وكذلك الطاقة الأولية الإيجابية تنفجر في وقت محدد. وبالإضافة إلى ذلك، يوفر هذا العمل أيضًا تقديرات زمن الحياة لهذه الحلول.

Introduction

Dans les quarante-cinq dernières années, l'explosion en temps fini et la non existence de la solution pour les équations aux dérivées partielles et les systèmes ont reçu une attention croissante.
On peut trouver une bibliographie assez vaste sur les travaux concernant les équations paraboliques et hyperboliques et des systèmes sur un domaine borné dans l'espace $\mathbb{R}^N$ entier, le bon travail réalisé pour l'équation de la chaleur avec une non linéarité de puissance est du à Fujita $[6]$ (1966) pour l'équation des ondes on peut citer Glassey $[19, 20]$ et Kirane, Tatar $[13]$ Leurs travaux ont été étendus et généralisés à des équations dégénérés et singulières et sur différentes non bornés (comme domaines extérieurs et les cônes) la question de la non solvabilité des équations d'évolution a été traitée et discutée sous différents angles en utilisant différentes méthodes et techniques. L'idée de base dans la plupart de ces travaux est de comparer les solutions avec des sous solutions qui explosent généralement en un temps fini.
On étudie dans ce travail la non existence des solutions dans l'espace entier d'une équation hyperbolique soumise à une force extérieure (source de type polynomiale $|u|^p$)
il s'est avéré que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème, c'est à dire que la solution (ou plus précisément l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand t s'approche d'une valeur finie T appelée temps d'explosion.
Pour cette raison on appelle le terme source terme d'explosion.
Les termes de dissipations sont par contre des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème il est facile de voir qu'en absence de termes sources, si la solution existe localement alors on peut toujours la prolonger en solution globale. Cette interaction entre terme source et terme dissipatif a été une question fondamental dans de nombreux travaux et elle l'est toujours.
Il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre. Notre préoccupation en premier lieux est un problème des ondes à une source d'une force extérieure sur l'espace $\mathbb{R}^N$ entier $N \geq 1$ notamment, on va démontrer la non existence par la méthode des fonctions tests du problème aux valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \xi \bigtriangleup u + \delta u_t = |u|^p \quad dans\ R^N \times [0, +\infty) \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^1_{loc}(R^N) \\ u_t(0, x) = u_1(x) \in L^1_{loc}(R^N) \end{cases} \tag{3.1}$$

ou $p > 1$ et $u_0(x), u_1(x)$ sont les données initiales. Tous les paramètres ζ et δ sont supposés être des constantes positives. Le modèle entre les mains dans un domaine borné Ω de R^N, Il est lié à l'équation de vibrations.

Et en deuxieme lieux Notre préoccupation dans cette partie est un système fortement couplé avec un amortissement de Balakrishnan-Taylor et une source de type puissance agissant comme une force externe sur tout l'espace $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$. Bien que nous étudions le cas particulier où les noyaux g et h décroissent polynomialement, les résultats de l'étude restent valides pour une gamme d'autres types de noyaux tels que les fonctions à décroissance exponentielle. Nous considérons le système décrit par cette formule

$$\begin{cases} u_{tt} - M(t)\Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u ds = |v|^p \;\; dans \;\; [0,+\infty) \times \mathbf{R}^N \\ v_{tt} - M(t)\Delta v + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta v ds = |u|^q \;\; dans \;\; [0,+\infty) \times \mathbf{R}^N \\ u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \; u_t\left(0,x\right) = u_1\left(x\right) \;\; dans \; \mathbf{R}^N \\ v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \; v_t\left(0,x\right) = v_1\left(x\right) \;\; dans \; \mathbf{R}^N \end{cases} \tag{4.1}$$

Ou $p, q > 1$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont les données initiales et

$$M(t) = \xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 + \xi_2 \left\|\nabla v\left(t\right)\right\|_2^2 + \xi_3\left(\nabla u\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right) + \xi_4\left(\nabla v\left(t\right), \nabla v_t\left(t\right)\right)$$

Où tous les paramètres ξ_i, $i = 0,1,2,3,4$ sont supposés être des constantes positives. Les fonctions g et h sont des fonctions de relaxation qui dépendent des propriétés des deux matériaux visco-élastiques différents. Le modèle en main dans un domaine délimité Ω de $\mathbf{R}^N$ pour le cas d'une seule équation, avec amortissement de Balakrishnan-Taylor ($\xi_3 > 0$) et $g = 0$, a été proposé à l'origine par Balakrishnan et Taylor en 1989 $[26]$ et Bass et Zes $[27]$. Elle est liée à l'équation du flottement des panneaux et au problème de débordement. Jusqu'à présent, les deux problèmes (3.1) et (4.1) ont étés étudié par Y. You $[25]$, H. R. Clark $[7]$ et N.e. Tatar et A. Zaraï $[14-16]$ et plusieurs résultats sur la décroissance exponentielle et l'explosion en temps fini ont été obtenus.
L'objectif principal de ce travail est de trouver un rang de valeurs pour p et q dans lesquelles nous n'avons pas d'existence sous des hypothèses minimales sur g et h.Les résultats obtenus dans ce travail prolongent les résultats précédents de Zaraï et Tatar $[16]$.
L'analyse de la solution d'un système mathématique peut fournir des informations précieuses sur le comportement d'un problème du monde réel, guider les processus de prise de décision et contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine concerné. Le but de ce travail est d'examiner le problème mentionné ci-dessous :

$$\begin{cases} w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr + \mu_0 w_t(y,t) + \mu_1 w_t(y,t-\tau) = |w|^{q-2}\, w, & y \in \Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t, \\ w\left(y,0\right) = w_0(y), \;\; w_t\left(y,0\right) = w_1(y), & y \in \Omega, 0 < t, \\ w_t\left(y,t-\tau\right) = f_0(y,t), & y \in \Omega, \; t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω appartient à $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega(n \geq 2)$, les variables w, y et t désignent respectivement le déplacement transversal de la plaque, la coordonnée spatiale dans la direction de l'écoulement du fluide et le temps. Les paramètres σ, d et b désignent respectivement les termes d'amortissement structurel viscoélastique, la rigidité (la raideur) non linéaire et la charge de traction dans le plan. Ces quantités subissent une non-dimensionnement, où b, d, σ et μ_0 sont des constantes maintenues fixes et positives. Le paramètre μ_1 est un nombre réel et $h(t)$ est une fonction positive incorporant le noyau de la mémoire, conformément aux conditions définies dans (**H1**). Le retard temporel est désigné par $\tau > 0$, et les fonctions w_0, w_1, f_0 sont des entités prédéterminées appartenant à des espaces fonctionnels appropriés. En l'absence du terme de retard, l'équation (5.1) est liée à l'équation du panneau de flottement comportant un terme mémoire. Cette équation émerge dans des expériences en soufflerie menées à des vitesses supersoniques pour étudier le comportement d'un panneau. Pour une dérivation détaillée de ce modèle, on peut consulter les travaux de la littérature $[16]$. Pour des informations supplémentaires sur l'équation de Balakrishnan-Taylor, les lecteurs intéressés peuvent se référer à $[16], [27], [31-35]$. Zarai" et Tatar ont exploré les équations d'onde incorporant des termes de mémoire de Balakrishnan-Taylor et des termes sources :

$$\begin{cases} w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr = |w|^{q-2}\, w, & y \in \Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t. \end{cases} \tag{5.2}$$

ils ont montré un résultat de décroissance exponentielle pour l'énergie sous la condition que le noyau présente une décroissance exponentielle. De plus, ils ont abordé le scénario consistant à incorporer le terme $\Delta^2 w + \Delta^2 w_t$ dans le problème décrit par l'équation (5.2),

$$\begin{cases} w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr + \Delta^2 w + \Delta^2 w_t = |w|^{q-2}\, w, & y \in \Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t. \end{cases} \tag{5.3}$$

noté comme l'apparition d'une explosion de solution pour l'équation (5.3) a été démontrée dans les conditions de $q > 2$ et d'énergie initiale négative $E(0)$.Par la suite, les résultats ont été affinés en établissant une caractéristique de décroissance polynomiale pour la fonction de relaxation, illustrant une décroissance polynomiale dans la littérature. Ils ont étendu les considérations de stabilité de (5.2) et les résultats d'explosion aux cas où $E(0) \geq 0$ dans le cadre plus général du modèle (5.3).

L'objectif de ce manuscrit est d'étudier le phénomène d'explosion dans le contexte du problème (5.1), qui intègre les termes de retard et de source. L'introduction du terme de retard $\mu 1 wt(y,t-\tau)$ distingue ce problème de ceux précédemment abordés dans la littérature. Les retards se manifestent fréquemment dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la biologie, la thermodynamique et l'économie. Par conséquent, les équations décrivant la dynamique des solutions pour les équations aux dérivées partielles (EDP) effectuées par retard temporel sont devenues un domaine de recherche dynamique actuellement, comme en témoignent des travaux tels que $[16], [27], [33-36]$ et les références qui y sont contenues. La présence d'un retard peut constituer une source potentielle d'instabilité, comme l'ont démontré des travaux antérieurs. Ces travaux ont établi qu'un retard même minime pourrait déstabiliser un système asymptotiquement stable en l'absence de retard, à moins que des conditions de contrôle supplémentaires ne soient mises en œuvre. Nicaise et Pignotti ont démontré une stabilité exponentielle de l'énergie sous l'hypothèse $\mu_1 < \mu_0$. Cependant, dans le cas où $\mu_1 \geq \mu_0$, ils ont pu construire une séquence de retards conduisant à une instabilité de la solution correspondante. Abordant la stabilité asymptotique, Mi Jin Lee et al. a étudié l'équation viscoélastique de Kirchhoff suivante avec des termes de retard et d'amortissement tels que

$$\begin{aligned} & w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) \\ & + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr + \mu_0 w_t(y,t) + \mu_1 w_t(y,t-\tau) = |w|^{q-2}\, w, \end{aligned}$$

pour $y \in \Omega, 0 < t$ avec des conditions initiales et aux limites appropriées. Ils ont montré la nature asymptotique par des fonctionnelles de Lyapunov appropriées. S'appuyant sur des recherches antérieures, cette étude se penche sur le phénomène d'explosion de la solution dans le cadre de l'équation de la membrane élastique non linéaire comportant des termes de retard et de source. Notamment, le comportement d'explosion des solutions pour une équation de Kirchhoff viscoélastique avec amortissement de Balakrishnan-Taylor et un terme de retard reste non abordé dans la littérature existante, ce qui donne l'impulsion à la présente enquête.

Le reste du travail est organisé comme suit : La section 2 présente les hypothèses et les lemmes essentiels faisant partie intégrante de notre analyse, aboutissant à un lemme essentiel et au résultat principal. Dans la section 3, nous expliquons l'énoncé et fournissons la preuve de notre principal résultat d'explosion.

Ce travail comporte cinque chapitres :

Le premier chapitre expose les notions préliminaires et les symboles en vues de les utiliser dans les chapitres suivants. On insistera en particulier sur quelques théorèmes généraux d'analyse fonctionnelle sur les espaces de sobolev et quelques inégalités utiles.

Le deuxième chapitre nous parlerons des fonctions tests ainsi que des propriétés très importantes sur les distributions la partie complément de ce chapitre contient la théorie d'intégration dans $\mathbb{R}^N$.

Le troisième chapitre est consacré sur un résultat de la non existence d'une équation hyperbolique avec une source non linéaire dans tout l'espace, ce résultat est basé sur la méthode des fonctions tests développées par Mitidieri et Pohozaev [2] nous établissons aussi des conditions nécessaires d'existence locale et globale.

Nous nous intéressons dans le quaterieme chapitre aux conditions de la non-solvabilité de (4.1). La méthode que nous utilisons est aussi la méthode de la fonction test Notre démonstration repose sur un argument par contradiction, qui implique des estimations a priori des solutions faibles de (4.1) et un choix judicieux des fonctions test spéciales et d'un argument d'échelle.et enfin le dernier chapitre qui parle sur l'explosion et durée de vie des solutions pour l'équation de membrane élastique avec retard L'analyse de la solution d'un système mathématique peut fournir des informations précieuses sur le comportement d'un problème du monde réel, guider les processus de prise de décision et contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine concerné. Le but de ce travail est d'examiner le problème (5.1)

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons rappeler les notions essentielles de même que les résultats fondamentaux qui concernent les espaces L^p ; les espaces de sobolev, et certains théorèmes d'existence pour des problèmes d'évolution aussi il a pour but de présenter (ou de rappeler) un certain nombre d'outils d'analyse mathématiques (l'espace des fonctions tests et la théorie de distribution, ainsi que l'intégration dans $\mathbb{R}^N$) qui seront utilisées par la suite, nous profiterons également pour introduire les principales notations

Notons par

$$x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$

Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$

On désigne par

$$D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

La dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i

Définissons aussi le gradient et le laplacien de u respectivement comme suit

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^T \ et \ |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \tag{1.1}$$

$$\triangle u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2})(x) \tag{1.2}$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$(C(\Omega))^m$ est l'espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}^m$,

$C_b(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\overline{\Omega}$, munit de la norme $\|.\|_\infty$

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \tag{1.3}$$

pour $k \geq 1$ entier , $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω

$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et continu dans Ω

Nous définissons aussi $C^k(\overline{\Omega})$, comme l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k\left(\mathbb{R}^N\right)$ ou bien comme étant l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$, telle que pour tous $0 \leq j \leq k$, et tout $x_0 \in \partial\Omega$ la limite suivante

$$\lim_{x \to x_0} D^j u(x)$$

existe et dépend uniquement de x_0

$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathfrak{D}\,(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables a supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.1 Espaces L^P

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ munu de la mesure de Lebesgue dx .
On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int\limits_{\Omega} |u(x)|\, dx \tag{1.4}$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$,
On définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ mesurable\ et \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx < +\infty \right\} \tag{1.5}$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6}$$

1.1.1 Espace $L^p_{loc}(\Omega)$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f 1_K \in L^P(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$ autrement dit (ou bien) soit f une fonction (définie presque par tout). On dit que f est localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact de Ω et on écrit

$$f \in L^p_{loc}(\Omega)$$

Remarque 1.1 *l'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} f g dx, \quad f, g \in L^2 \tag{1.7}$$

est un espace de Hilbert

Définition 1.1 *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
on appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on le note $L^p(0, T, X)$ l'espace des fonctions $f :]0, T[\to X$ mésurables qui vérifient*

$$1)\ si\ \ 1 \leq p \leq \infty, \quad \left(\int_0^T \|f\|_X^p \ dt \right)^{\frac{1}{p}} := \|f\|_{L^p(0,T,X)} < \infty \tag{1.8}$$

$$2)\ si \qquad p = \infty, \quad \sup_{t \in]0,T[} ess\, \|f\|_X := \|f\|_{L^\infty(0,T,X)} < \infty \tag{1.9}$$

Proposition 1.1 *$L^p(0,T,X)$ muni de la norme $\|f\|_{L^p(0,T,X)}$ ou $1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach.*

1.2 Espace de Sobolev

Notation 1.1 *Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$. On appelle multi-indice (ou n-multi-indice) une suite d'enties positifs*

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$b = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

Et on pose

$$|a| = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n)$$

$$\partial^n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{a_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{a_2} ..... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{a_n}$$

Si on a $f(x)$ une fonction de la variable $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^N$, donc

$$x^a = (x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, ..., x_n^{a_n})$$

$$f^{(a)} = \partial^a f$$

qui est aussi noté

$$\frac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a} = D^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} ....\partial x_n^{a_n}}$$

1.2.1 Dérivée faible

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $1 \leq i \leq n,\ \ u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx \tag{1.10}$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions,
On écrira alors

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

1.2.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R},\ \ 1 \leq p \leq +\infty$,
l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ tel\ que\ \partial_i u \in L^p(\Omega),\ \ 1 \leq i \leq n\} \tag{1.11}$$

ou ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$
On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \tag{1.12}$$

1.2.3 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$,
On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ tel\ que\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \ \forall\alpha\ \ |\alpha| \leq m\} \tag{1.13}$$

ou

$$\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

et

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}.....\partial_n^{\alpha_n} \tag{1.14}$$

est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la définition 01
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \tag{1.15}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \tag{1.16}$$

Remarque 1.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^p} \tag{1.17}$$

1.2.4 Formule d'intégration par parties et formule de Green

Définition 1.3 *Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq n$*

On a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} vu\eta_i ds \tag{1.18}$$

ou $\eta_i(x) = \cos(\eta, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x et l'axe des x_i

Définition 1.4 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$. alors*

on a

$$\int_\Omega v \triangle u dx - \int_\Omega u \triangle v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u\right) ds \tag{1.19}$$

Notation 1.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on note par q l'exposant conjugué de p i.e*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1.20}$$

1.3 les inégalité

Lemme 1.1 *(L'inégalité de Holder) :*

Soit p un nombre telque $1 \leq p \leq \infty$ et soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Alors

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ et \\ \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \end{cases} \tag{1.21}$$

Si $p = q = 2$ on aura l'inégalité de cauchy Schwarz

Lemme 1.2 *(L'inégalité de $\varepsilon-$Young) :*
En mathématique on utilise beaucoup plus des inégalités pour démontrer certains théorèmes , dans nôtre cas on a besoin d'inégalité de Young avec ε (ou $\varepsilon-$Young)
La forme standard de l'inégalité de Young affirme que pour tous a et b réels positifs et tous p et q réels strictement positifs telque

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(on dit parfois qu'ils sont conjugués) on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad (inégalité\ de\ Young) \tag{1.22}$$

Et l'autre forme

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \qquad (inégalité\ de\ \varepsilon - Young\ pour\ \varepsilon > 0) \tag{1.23}$$

Un cas simple pour $p = q = 2$

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad inégalité\ de\ cauchy \tag{1.24}$$

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}, \quad inégalité\ de\ cauchy\ avec\ \varepsilon\ pour\ \varepsilon > 0 \tag{1.25}$$

L'inégalité de Young est un cas particulier de l'inégalité arithmétique-géométrique.son nom vient de William henry Young

Preuve. On a la fonction exponentielle

$$f(x) = \exp(x)$$

Est une fonction strictement convexe (puisque sa dérivée seconde est strictement positive).
Donc d'après la définition de la convexité :
pour tout t de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et tous nombre réels x et y avec $x \neq y$
On a

$$F\left[tx + (1-t)\,y\right] \leq tf\,(x) + (1-t)\,f(y)$$

En appliquant l'inégalité stricte pour

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{p}, \quad , (1-t) = \frac{1}{q} \\ & et \\ x &= \ln a^p \ , \quad y = \ln b^q \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln ab) = \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \\ &\leq \frac{\exp(\ln a^p)}{p} + \frac{\exp(\ln b^q)}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

(i-e)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

(inégalité de Young)

Posons maintenant

$$\begin{aligned} a &= (\varepsilon p)^{\left(\frac{1}{p}\right)} \bar{a}, \\ & et \\ b &= (\varepsilon p)^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \bar{b} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} (\varepsilon p)^{\left(\frac{1}{p}\right)} \bar{a} \, (\varepsilon p)^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \bar{b} &\leq \frac{\left((\varepsilon p)^{\left(\frac{1}{p}\right)} \bar{a}\right)^p}{p} + \frac{\left((\varepsilon p)^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \bar{b}\right)^q}{q} \\ \bar{a}\bar{b} &\leq \varepsilon (\bar{a})^p + \frac{(\varepsilon p)^{\left(-\frac{q}{p}\right)}}{q} \left(\bar{b}\right)^q \end{aligned}$$

Posons

$$C_\varepsilon = \frac{(\varepsilon p)^{\left(-\frac{q}{p}\right)}}{q}$$

On trouve

$$\bar{a}\bar{b} \leq \varepsilon (\bar{a})^p + C_\varepsilon \left(\bar{b}\right)^q$$

(L'inégalité de $\varepsilon-$Young) ■

Chapitre 2

Fonction test et l'intégration dans $\mathbb{R}^N$

Sommaire

2.1 L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$

2.1.1 Existence des fonctions de classe C^∞

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert nous rappelons que

$$C^{+\infty}(\Omega) = \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\Omega) \tag{2.1}$$

Définition 2.1 *Si $u \in C(\Omega)$ alors le support de u, noté $supp(u)$ est défini comme l'adhérence dans Ω de l'ensemble*

$$\{x \in \Omega \ \backslash \ u(x) \neq 0\} \tag{2.2}$$

Autrement dit $supp(u)$ est le plus petit sous ensemble fermé de Ω telque

$$u = 0 \quad dans \ \Omega \setminus supp(u).$$

Remarque 2.1 *Si $x \in supp(u)$ alors il existe une suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que*

$$u(x_n) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Et

$$\lim_{n\to\infty} x_n \to \infty$$

L'objectif de cette section est de construire des fonctions de classe C^∞ à support compact ou ayant d'autre propriétés leur permettant, en particulier, de séparer deux fermés disjoints.
Ces fonctions seront utilisées dans les techniques de convolution et de régularisation de fonctions et de distributions.

Définition 2.2 *Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ l'espace $C_0^k(\Omega)$ est formée par toutes les fonctions $u \in C^k(\Omega)$ ayant comme support un sous ensemble compact de Ω. les éléments de $C_0^k(\Omega)$, noté dans la suite par $\mathfrak{D}(\Omega)$, sont dits **fonctions test** (ou **fonctions d'essai**).*
Toute fonction $u \in C_0^k(\Omega)$ peut être étendue à une fonction $C_0^k(\mathbb{R}^N)$. on peut donc voir $C_0^k(\Omega)$ comme un sous espace de $C_0^k(\mathbb{R}^n)$.
Si $M \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert alors on peut définir $C_0^k(M)$ comme l'ensemble des élément de $C_0^k(\mathbb{R}^N)$ ayant le support contenu dans M.

Lemme 2.1 *Il existe une fonction $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $\phi(0) > 0$ et $\phi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$*

Preuve. Il est facile de voir que la fonction

$$f(t)=\begin{cases}0 & si\ t\leq 0\\ \exp\left(\frac{1}{t}\right) & si\ t>1\end{cases} \tag{2.3}$$

Est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction

$$\phi(x)=f\left(1-\|x\|^2\right)$$

à les propriétés demandées.
Par translation et changement d'echelle on obtient que pour tout $\delta>0$, la fonction

$$x\rightarrow\phi\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)$$

Est positive sur $\mathbb{R}$, strictement positive en x_0 et à support dans la boule de rayon δ centrée en x_0 .
L'existence d'une telle fonction permet, en particulier, de prouver un résultat classique, qui est utilisé dans le calcul des variations ■

Théorème 2.1 *Si*

$$\begin{cases} f,g\in C(\Omega)\\ et\\ \int\limits_\Omega f\phi dx=\int\limits_\Omega g\phi dx,\ \forall\phi\in\mathfrak{D}(\Omega)\end{cases}$$

Alors

$$f=g$$

Preuve. Si on pose

$$h=f-g$$

Alors

$$\int\limits_\Omega h\phi dx=0,\qquad\forall\phi\in\mathfrak{D}(\Omega)$$

En prenant les parties réelles et imaginaires on peut supposer que h est à valeurs réels et que $\int\limits_\Omega h\phi dx$ a lieu pour tout $\phi\in\mathfrak{D}(\Omega)$, avec ϕ à valeurs réels.
Si $h(x_0)\neq 0$ alors on peut choisir $\phi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ avec $\phi(x_0)>0$, à support dans un voisinage de x_0
Et que $h\phi$ ait un signe constant, cela contradit $\int\limits_\Omega h\phi dx=0$, donc

$$h\equiv 0\ \ dans\ \Omega.$$

■

Lemme 2.2 *Il existe une fonction croissante $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Preuve. On a vu dans le lemme (2.1) précédent que la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ \exp\left(\frac{1}{t}\right) & si\ t > 1 \end{cases}$$

Est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. de plus nous avons

$$supp(f) = [0, \infty[\tag{2.4}$$

Et

$$0 \leq f(x) \leq 1 \ \ pour\ tout\ x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Définissons alors

$$\begin{aligned} & g(x) = f(x) f(1-x) \\ & et \\ & G(x) = \int_0^x g(t)\, dt \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & 0 \leq g(x) \leq 1,\ pour\ tout\ x \in \mathbb{R} \\ & et \\ & supp(g) \subset [0,1]. \\ & de\ plus\ g \neq 0\ car\ g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left[f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

La fonction

$$\theta(x) = \frac{G(x)}{G(1)} \tag{2.7}$$

est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est croissante et elle vérifie les conditions

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

■

Proposition 2.1 *Soient $a < c < d < b$ des réels, alors il existe $\rho \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que*

$$\begin{aligned} &1).\ \rho(x) = 1 \ pour\ tout\ x \in]c, d[\\ &2).supp(\rho) \subset]a, b[\\ &3).0 \le \rho(x) \le 1,\ pour\ tout\ x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Preuve. Posons

$$\rho(x) = \theta\left(\frac{x-a}{c-a}\right)\theta\left(\frac{x-b}{b-d}\right)$$

Ou θ est la fonction construite dans le lemme (1.2) on vérifie aisément que ρ convient ■

Corollaire 2.1 *Soient $0 < r < R$ et $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\widetilde{\rho}(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ \|x\| < r \\ 0 & si\ \ \|x\| > R \end{cases} \tag{2.9}$$

Preuve. On peut prendre

$$\widetilde{\rho}(x) = \rho\left(\|x\|^2\right) \tag{2.10}$$

Ou ρ a été construite à la proposition(2.1) avec

$$\begin{aligned} &-a = b = R^2 \\ &et \\ &-c = d = r^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\rho > 0$ on note $B(x, \rho)$ la boule de centre x et de rayon ρ

Si K est un compact de $\mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$,

On note

$$K_\varepsilon = K + B(0, \varepsilon) = \underset{x \in K}{\cup} B(x, \varepsilon) \tag{2.12}$$

■

Proposition 2.2 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi \in \mathfrak{D}(K_{2\varepsilon})$ telle que l'on ait*

$$\begin{cases} \phi \equiv 1\ \ dans\ K_\varepsilon \\ et \\ 0 < \phi(x) < 1 \quad pour\ tout\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.13}$$

Preuve. Comme K est un compact de $\mathbb{R}^N$ alors il existe $x_1, x_2, ..., x_p \in K$ tels que

$$\overline{K_\varepsilon} \subset \overset{p}{\underset{j=1}{\cup}} B(x_j, \frac{4\varepsilon}{3}) \tag{2.14}$$

D'après le corollaire (2.1) pour chaque $j \in \{1, ..., p\}$ il existe une fonction

$$\begin{array}{l} \phi_j \in \mathfrak{D}\left(B(x_j, \frac{5\varepsilon}{3})\right) \\ telleque \;\; \phi_j(x) \geq 0 \;\; pour\ tout \;\; x \in \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \varepsilon). \end{array} \tag{2.15}$$

Par ailleurs, compte tenu du fait que

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \frac{5\varepsilon}{3})} \subset K_{2\varepsilon} \tag{2.16}$$

On a alors

$$\phi \in \mathfrak{D}(K_{2\varepsilon}).$$

Soit $\theta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ la fonction construite dans le lemme (2.2)

$$\phi(x) = \theta\left(\widetilde{\phi}(x)\right) \tag{2.17}$$

Convient ■

Corollaire 2.2 *Soient K_1 et K_2 deux compacts disjoints de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. alors il existe une fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in K_1 \\ -1 & si \;\; x \in K_2 \end{cases}$$

Et

$$|\varphi(x)| \leq 1 \;\; pour\ tout \;\; x \in \Omega$$

Preuve. Soient U_1 et U_2 deux ouvets de Ω tels que

$$K_1 \subset U_1, \quad K_2 \subset U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing$$

D'après la proposition (2.2) il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telles que

$$\varphi_i \equiv 1 \;\; dans \;\; K_i, \quad \varphi_i \in \mathfrak{D}(U_i), \quad i \in \{1, 2\}$$

Et

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1, \qquad i \in \{1, 2\}$$

La fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \;\; \forall x \in \Omega$$

A clairement les propriétés requises ■

2.1.2 Fonction test

Définition 2.3 *Soit φ une fonction définie sur Ω, on appelle support de φ et note $supp(\varphi)$ le plus petit ensemble fermé de Ω en dehors duquel est nulle i.e l'adhérence de l'ensemble des points $x \in \Omega$ pour lesquels $\varphi(x) \neq 0$*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega \,/\, \varphi(x) \neq 0\}} \tag{2.18}$$

Une fonction φ définie sur Ω est dite fonction test si φ est indéfiniment dérivable $\varphi \in C^\infty$ à support compact. (les compacts dans notre cas $\mathbb{R}^N$ sont les fermés bornés)
L'ensemble de toutes les fonction tests est noté $\mathfrak{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ et aussi $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &i)\ \ \varphi \in C^\infty(\Omega) \\ &ii)\ \ il\ existe\ un\ compacte\ fermé\ K \subset \Omega\ en\ dehors\ duquel\ \varphi \equiv 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Naturellement K n'est pas le meme pour toutes les fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$

2.1.3 Exemples fondamentaux

Les exemples de fonctions appartenant à $\mathfrak{D}(\Omega)$ ne reviennent pas immédiatement à l'esprit, les fonctions analytiques ne peuvent pas convenir.

Exemple 2.1 *Si $N = 1$, la fonction définie comme suit*

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\exp(x^2)-1} & pour \quad |x| < 1 \\ 0 & pour \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Appartient à $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ car

$$supp(\theta) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \,/\, \theta(x) \neq 0\}} = \overline{(]-1,1[)} = [-1,1]$$

Son support $[-1,1]$ est un compact, et elle est de C^∞ pour $|x| > 1$ (puisque elle est alors identiquement nulle) et pour $|x| < 1$ comme l'exponentielle d'une fonction C^∞ , mais on peut montrer facilement qu'elle est C^∞ par tout, toutes ses dérivées successive pour $x = \pm 1$ sont nulles.
Soit aussi la fonction θ_a définie par

$$\theta_a(x) = \begin{cases} 0 & pour \quad |x| \geq \frac{1}{a} \\ \exp\left(-\frac{1}{1-a^2x^2}\right) & pour \quad |x| < \frac{1}{a} \end{cases}$$

avec $a > 0$, elle est indéfiniment dérivable, son support est $\left[\frac{-1}{a}, \frac{1}{a}\right]$,
Plus généralement toutes fonctions θ_{ab} définie par

$$\theta_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & pour \quad x \notin]a,b[\\ \exp\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right]\right) & pour \quad x \in]a,b[\end{cases}$$

Est une fonction de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ de support $[a,b]$

Exemple 2.2 *Si $N \geq 2$ on définie la fonction θ_ε comme suit*

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{|x|-\varepsilon^2}\right) & pour \quad |x| < \varepsilon \\ 0 & pour \quad |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Avec $\varepsilon > 0$, et

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad la\ norme\ euclidienne\ dans\ \mathbb{R}^n$$

Il est claire que $\theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (qui s'annule, ainsi que toutes ses dérivées pour $|x| = \varepsilon$), et a pour support la boule fermé $\overline{B}(0, \varepsilon)$

$$supp(\theta_\varepsilon) = \overline{B}(0, \varepsilon) = (|x| \leq \varepsilon)$$

Exemple 2.3 ***(La fonction translatée)** :*
On a la fonction $\theta_\varepsilon(x - y)$ définie par

$$\theta_\varepsilon(x-y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x-y|^2}\right) & pour \quad |x-y| < \varepsilon \\ 0 & pour \quad |x-y| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Et

$$supp(\theta_\varepsilon(x-y)) = \overline{B}(y, \varepsilon) = |x-y| \leq \varepsilon$$

2.1.4 Propriétés de $\mathfrak{D}(\Omega)$

L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel i.e

$$i) \ si\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}(\Omega) \ alors \ \ \varphi_1 + \varphi_2 \in \mathfrak{D}(\Omega)$$
$$ii) \ si\ \lambda \in \mathbb{R}\ et\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \ alors \ \ \lambda\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel de dimebsion infinie, et aussi $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un anneau pour la multiplication ordinaire

2.1.5 La topologie de $\mathfrak{D}(\Omega)$ (notion de la limite)

Elle sera défini par un critère de convergence pour la suite.
La notion du problème bien posé, demande qu'on définisse une topologie (notion de la limite) sur un ensemble de fonctions dans lequel on travaille avec les fonctions de classe C^K , Il est raisonnable de travailler avec la topologie de convergence C^K définie par la famille de semi-norme $N_{k,K}$, $(k \in \mathbb{N}$, *et* K est un compact)

$$N_{k,K} = \sup_{x\in K,\ |x|\leq k} |\partial^n \varphi| \tag{2.20}$$

Mais pour les problèmes à plusieurs variables ($N \geq 2$) on ait obligé de traité des équations aux dérivés partielles parmi elle les plus usuelles sont les semi-normes du type sobolev

$$N^{p,k} = \left(\sum_{|a|\leq k} |\partial^a \varphi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.21}$$

Définition 2.4 *On dit qu'une suite φ_m d'élément de $\mathfrak{D}(\Omega)$,($\varphi_m \in \mathfrak{D}(\Omega)$) converge vers une fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$*
Si
1) les $supp\varphi_m$ $(m \geq 1)$ sont contenues dans le même compact K i.e

$$\exists k = compact \subset \Omega \diagup \forall m \geq 1,\ \ \sup(\varphi_m) \subset k \qquad (k \ \ indépendant\ de\ m) \tag{2.22}$$

2) pour tout $a \in \mathbb{N}^n$, la suite $D^a\varphi_m$ converge uniformément sur k vers $D^a\varphi$

$$\forall a, \quad D^a\varphi_m \rightarrow D^a\varphi \quad (\ uniformément\ sur\ k\ ) \tag{2.23}$$

D'après la définition de la topologie dans $C^k(\Omega)$ la condition 2 devient

$$\sup_{x\in K} |\partial^a \varphi_m(x) - \partial^a \varphi(x)| \rightarrow 0$$

Si on a une suite φ_m converge vers φ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, on peut montrer que la limite de φ appartient alors à $\mathfrak{D}(\Omega)$.

2.2 L'espace $\mathfrak{D}'(\Omega)$

2.2.1 Les distributions

Définition 2.5 *On appelle distribution toutes fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectorielle $\mathfrak{D}(\Omega)$, on associe T à toutes fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ un complexe $\langle T, \varphi\rangle$,ou parfois $T(\Omega)$*
la définition d'une distribution implique les deux points suivantes
$i)$ la linéarité

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = \langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle$$

$ii)$ la continuité

$$\langle T, \lambda\varphi\rangle = \lambda \langle T, \varphi\rangle$$

Si $(\varphi_k)_{k>0}$ *converge dans* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *vers* φ *alors la suite* $(\langle T, \varphi_k\rangle)_{k>0}$ *converge au sens usuel vers* $\langle T, \varphi\rangle$

i.e

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ telque\ \forall k > N,\ \ on\ a\ |\langle T, \varphi_k\rangle - \langle T, \varphi\rangle| \leq \varepsilon \tag{2.24}$$

Les distributions forment un espace noté $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Exemple 2.4 *Soit* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*. elle définit une distribution* T_f *par :*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{2.25}$$

Preuve. Cette inégalité a bien un sens

En effet

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| &\leq \int_\Omega |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx = \int_{K=supp(\varphi)} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \int_K |f(x)| \max_{x\in K}|\varphi(x)|\,dx = \max_{x\in K}|\varphi(x)| \int_K |f(x)|\,dx < +\infty\end{aligned} \tag{2.26}$$

Linéarité :évidente (propriété de l'intégrale)

Continuité : supposons que

$$\varphi_m(x) \overset{\mathfrak{D}(\Omega)}{\rightarrow} \varphi \quad quand\ \ m \rightarrow +\infty \tag{2.27}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\langle T_f, \varphi_m\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega f(x)\left[\varphi_m(x) - \varphi(x)\right]dx\right| \\ &\leq \int_K |f(x)|\,|\varphi_m(x) - \varphi(x)|\,dx\end{aligned} \tag{2.28}$$

(K est un compact contenant les supports de tout les φ_m. ainsi que celui de φ)

$$|\langle T_f, \varphi_m\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| \leq \max_{x\in K}|\varphi_m(x) - \varphi(x)| \int_K |f(x)|\,dx \tag{2.29}$$

Et comme

$$\begin{aligned}&\varphi_m \rightarrow \varphi \quad alors\ \ \varphi_m(x) \rightarrow \varphi(x) \\ &et \\ &\int_K |f(x)|\,dx < +\infty\end{aligned} \tag{2.30}$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
&|\langle T_f, \varphi_m\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| \underset{m\to+\infty}{\to} 0 \\
&\textit{donc} \\
&\langle T_f, \varphi_m\rangle \underset{m\to+\infty}{\to} \langle T_f, \varphi\rangle
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

■

Remarque 2.2 *Pour toute fonction f localement intégrable, on peut associer la distribution T_f définie par*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$$

Une telle distribution est dite régulière, les autres (celles qui ne s'écrivent pas T_f pour f) sont dites singulières.L'application de $L_{loc}(\Omega) \to \mathfrak{D}'(\Omega)$ définie par $f \to T_f$ est injective.
fonctions localement intégrables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque par tout.

2.2.2 Propriétés de $\mathfrak{D}'(\Omega)$

L'espace $\mathfrak{D}'(\Omega)$ est un espace vectoriel c'est à dire

$$
\begin{aligned}
&i)\quad \langle T_1 + T_2, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \\
&et \\
&ii)\quad \langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda \langle T, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)
\end{aligned}
$$

L'espace $\mathfrak{D}'(\Omega)$ est une partie de l'espace $\mathfrak{D}^*(\Omega)$
c'est à dire

$$\mathfrak{D}'(\Omega) \subset \mathfrak{D}^*(\Omega) \quad ou \quad \mathfrak{D}^*(\Omega) \;\; est\ le\ dual\ de\ \mathfrak{D}(\Omega) \tag{2.32}$$

Soit V un ouvert de Ω $\quad (V \subset \Omega)$ alors $\mathfrak{D}(V)$ est une partie de $\mathfrak{D}(\Omega)$, $(\mathfrak{D}(V) \subset \mathfrak{D}(\Omega))$,
Par suite toute distribution sur Ω définie une distribution sur V, par restruction :

$$
\begin{aligned}
&T : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \\
&\widetilde{T} : \mathfrak{D}(V) \to \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Pour $\psi \in \mathfrak{D}(V)$ on aura

$$\widetilde{T}(\psi) = T(\psi) \tag{2.34}$$

Donc on peut alors introduire les définitions suivantes
i) Une distribution T sur Ω est dite nulle dans un ouvert $V \subset \Omega$ si

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(V)$$

ii) Deux distributions T_1 et T_2 sont dites égales $T_1 = T_2$ dans V si

$$T_1 - T_2 \;\; est\ nulle\ dans \;\; V$$

i.e

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(V) \tag{2.35}$$

D'après la définition du topologie dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, on peut donner une autre définition pour les distributions

Définition 2.6 *Une application T de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est appelée distribution si pour tout compact $K \subset \Omega$,*
Il existe un entier $m_K \in \mathbb{N}$ et une constante C_K, telle que pour tout élément

$$\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|a| \leq m_K} \sup_{x \in K} |\partial^n \varphi(x)| \tag{2.36}$$

Dans le cas ou l'entier m_K de la dernière propriété peut être choisi indépendamment de K , On dit que T est d'ordre fini . l'ordre de T est alors le plus petit entier verifiant cette propriété.
$f \in C^{\infty}(\Omega)$ et $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ alors la forme linéaire sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ définie par

$$\varphi \to \langle T, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \tag{2.37}$$

Est une distribution sur Ω, c'est à dire

$$\begin{aligned} \langle fT, \varphi \rangle &= \langle T, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \\ & et \\ fT &\in \mathfrak{D}'(\Omega) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Limite de distributions
Soit $(T_m)_{m>0}$ une suite de $\mathfrak{D}'(\Omega)$, on dit que (T_m) converge vers $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ si

$$\lim_{m \to \infty} \langle T_m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \tag{2.39}$$

2.2.3 Dérivation de distributions

Soit une fonction localement intégrable que nous supposorons aussi dérivable, dans ce cas $f\,'$ est localement intégrable et sa distribution régulière associée vérifie

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\,'\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx = \langle T_f, \varphi'\rangle \tag{2.40}$$

Notons que ceci s'obtient par l'intégration par partie en utilisant le faite que φ est à support borné, c'est la raison principale du choix restrictif des fonctions tests de l'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Définition 2.7 *Si ($N = 1$) la dérivée $T\,'$ d'une distribution T de $\mathfrak{D}'(\Omega)$ est la distribution définie par*

$$\langle T\,', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \tag{2.41}$$

En générale pour $N \geq 2$ de même on pourra définir les dérivées suivantes
Si

$$\begin{aligned} & T \in \mathfrak{D}'(\Omega) \quad alors \quad \partial x_i T \in \mathfrak{D}'(\Omega) \\ & et\ en\ plus \\ & \langle \partial x_i T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial x_i \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \end{aligned} \tag{2.42}$$

Preuve. En effet

$$\int_\Omega \partial x_i T\varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi T v_i d\eta - \int_\Omega T\partial x_i \varphi dx$$

$v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ et comme $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient

$$\int_\Omega \partial x_i T\varphi dx = -\int_\Omega T\partial x_i \varphi dx$$

■

Remarque 2.3 *On a aussi*

$$\left\langle \frac{\partial x_i^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \tag{2.43}$$

(et d'après le lemme de schwarz, le nombre de droite est invariant par permutation de i et j)

Remarque 2.4 *En général si*

$$\begin{aligned} & T \in \mathfrak{D}'(\Omega) \quad alors \quad D^a T \in \mathfrak{D}'(\Omega) \\ & est\ donc \\ & \langle D^a T, \varphi\rangle = (-1)^{|a|} \langle T, D^a \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Exemple 2.5 *Soit la distribution $H(x)$ (Heaviside) définie comme suit*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \geq 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Et

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Donc on va montrer que $H' = \delta$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.
En effet

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} \\ &= \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \end{aligned}$$

Donc

$$H' = \delta$$

Remarque 2.5 *Soit $(T_m)_{m>0}$ une suite telque $(T_m) \to T$, dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.*
Alors pour tout multi-indice $a \in \mathbb{R}^N$ fixe , on a

$$\partial^a T_m \to \partial^a T \quad dans \ \ \mathfrak{D}'(\Omega)$$

Soit $T \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a

$$\partial_{x_i} F = 0, \quad \forall i = \overline{1, n} \quad alors\ T = c\ (constante)$$

Formule des sauts

soit f une fonction appartient $C^1(\mathbb{R})$ par morceaux, ce que veut dire qu'il existe un nombre finie réels $\alpha_1 < \alpha_2 < ...... < \alpha_n$ telque f soit $C^1([a_i, a_{i+1}])$ pour tout $i = \overline{1, n-1}$ et admet une limite finie à droite et à gauche en chaqu'un de ces points, alors la dérivée de f au sens des distributions. (i.e la dérivée de T_f) est donnée par la formule

$$T_f = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(\alpha_i^+\right) - f\left(\alpha_i^-\right) \right] \delta_{a_i} + T_{f'} \tag{2.45}$$

2.2.4 Distributions vectorielles

Soit $m \geq 2$ étant un entier naturel, une distribution vectorielle peut se définir comme un élèment de $(\mathfrak{D}'(\Omega))^m$ ou de facon équivalent, un élèment de $(\mathfrak{D}'(\Omega)^m)'$,

Les topologie produit correspondantes étant utilisées, la deuxième forme de cette définition permet d'expremer simplement les opérations de dérivation convamment utilisés dans le domaine des équations aux dérivées partielles.
Soit l'espace $\mathfrak{D}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ telque :$\varphi\in\mathfrak{D}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ alors

$$\varphi=\left(\varphi_1,\varphi_2,....,\varphi_n\right)\ telque\ \varphi_i\in\mathfrak{D}\left(\Omega\right),\ pour\ i=\overline{1,n}$$

Soit $\mathfrak{D}'\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ telque $T\in\mathfrak{D}'\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$ alors

$$T=\left(T_1,T_2,....,T_n\right)\ telque\ T_i\in\mathfrak{D}'\left(\Omega\right)\ pour\ \ i=\overline{1,n}$$

Donc

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle T_i,\varphi_i\rangle \tag{2.46}$$

Définition 2.8 *On définie le vecteur*

$$\nabla T=\operatorname{grad}\left(T\right)=\left(\partial x_1T,\partial x_2T,....,\partial x_nT\right)$$

Dite le gradiant de T,
On remarque que $\nabla T\in\mathfrak{D}'\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$.
On définie aussi

$$\operatorname{div}\left(T\right)=\sum_{i=1}^{n}\partial x_iT_i$$

Dite divergence de T,
On remarque que $\operatorname{div}\left(T\right)\in\mathfrak{D}'\left(\Omega\right)$
On définie également

$$\triangle T=\sum_{i=1}^{n}\partial x_ix_iT_i$$

Dite le laplacien de T (ou $\triangle T\in\mathfrak{D}'\left(\Omega\right)$)
On a les relations suivantes

$$i)\quad \langle\nabla T,\varphi\rangle=-\langle T,\operatorname{div}\left(\varphi\right)\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$$

$$ii)\quad \langle\operatorname{div}\left(T\right),\varphi\rangle=-\langle T,\nabla T\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$$

$$iii)\quad \langle\triangle T,\varphi\rangle=\langle T,\operatorname{div}\left(\nabla\varphi\right)\rangle=-\langle\nabla T,\nabla\varphi\rangle=\langle\operatorname{div}\left(\nabla T\right),\varphi\rangle,\quad \forall\varphi\in\mathfrak{D}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)$$

On remarque que $\triangle=\operatorname{div}\left(\nabla\right)$ *dans* $\mathfrak{D}'\left(\Omega\right)$.

2.3 L'intégration dans $\mathbb{R}^N$

2.3.1 Théorie général du changement de variable

Définition 2.9 *Soient U, V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^N$.*
On dit que $\varphi : U \to V$ est un diffeomorphisme de classe ζ^1 si

$$\begin{array}{l} i)\ \varphi \text{ est bijective} \\ et \\ ii)\ \varphi \text{ et } \varphi^{-1} \text{ ont des dérivées partielles continues} \\ (c'\text{est à dire qu'elles sont continuement différentiables }) \end{array}$$

Si l'on décrit, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ le jacobien de φ en $x \in U$ est le déterminant de la matrice jacobienne

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \partial_2\varphi_1(x) \,................\partial_n\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \partial_2\varphi_2(x) \,................\partial_n\varphi_2(x) \\ \partial_1\varphi_3(x) & \partial_2\varphi_3(x) \,................\partial_n\varphi_3(x) \\ \multicolumn{2}{c}{..} \\ \multicolumn{2}{c}{..} \\ \partial_1\varphi_n(x) & \partial_2\varphi_n(x) \,................\partial_n\varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

Théorème 2.2 ***(Changement de variable) :***
Soient U, V deux ouverts (non vides) de $\mathbb{R}^n$, et
$\varphi : U \to V$ un diffeomorphisme de classe ζ^1 alors pour toute fonction $f(x)$
telque $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, $dt = (dt_1, dt_2, ..., dt_n)$ on a

$$\int_{(D \subset \mathbb{R}^N)} f(t)dt = \int_{(D_1 \subset \mathbb{R})} ... \int_{(D_n \subset \mathbb{R})} f(t_1, t_2, ..., t_n)\, dt_1 dt_2....dt_n = \int_{D \subset \mathbb{R}^N} f(\varphi(x))\, |J_\varphi(x)|\, dx$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)) \\ x &= (x_1, x_2, ..., x_n) \\ dx &= dx_1 dx_2......dx_n \end{aligned}$$

2.3.2 Exemples fondamentaux

Exemple 2.6 ***(Si $N = 2$ intégrale double en coordonnées polaires)***

On définie

$$\varphi(r,\theta) = (\varphi_1, \varphi_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

On transforme

$$(x,y) \to (\varphi_1, \varphi_2)$$

Donc

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) \ldots & +r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{D_1} f(x,y)dxdy &= \int_{D_2} f(\varphi_1, \varphi_2)\left|J_\varphi(r,\theta)\right| drd\theta \\ & c'est \ à \ dire \end{aligned}$$

$$\int_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_{D_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, rdrd\theta$$

ou $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ *et* $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ *(les nouveaux domaines après les changement)*

Par exemple si

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ telque \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\} \ alors \\ D_2 &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ telque \ r \geq 0, \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \end{aligned}$$

Exemple 2.7 ***(Si $N = 3$ intégrale triple en coordonnées cylindriques)***

On définie

$$\varphi(r,\theta,z) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$$

La transformation est

$$(x,y,z) \to (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

D'ou

$$J_\varphi(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & +r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{D_2} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\left|J_\varphi(r,\theta,z)\right| drd\theta dz \\ & c'est \ à \ dire \end{aligned}$$

$$\int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz = \int_{D_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, rdrd\theta dz$$

ou $D_1 \subset \mathbb{R}^3$ *et* $D_2 \subset \mathbb{R}^3$

Exemple 2.8 ***(Si $N = 3$ intégrale triple en coordonnées sphériques)***

On définie

$$\varphi(r,\theta,\omega) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = (r\cos(\theta)\cos(\omega), r\sin(\theta)\sin(\omega), r\sin(\omega))$$

La transformation est

$$(x,y,z) \rightarrow (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$$

On obtient alors

$$J_\varphi(r,\theta,\omega) = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\omega) & -r\sin(\theta)\cos(\omega) & -r\cos(\theta)\sin(\omega) \\ \sin(\theta)\sin(\omega) & +r\cos(\theta)\sin(\omega) & +r\sin(\theta)\cos(\omega) \\ \sin(\omega) & 0 & r\cos(\omega) \end{vmatrix} = r^2\cos(\omega)$$

Avec

$$\begin{array}{l} r \geq 0, \\ \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right), \\ \left(-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{D_1} f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_{D_2} f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\left|J_\varphi(r,\theta,\omega)\right| dr d\theta d\omega \qquad c'est\ \grave{a}\ dire \\ \int\limits_{D_1} f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_{D_2} f(r\cos(\theta)\cos(\omega), r\sin(\theta)\sin(\omega), r\sin(\omega))\, r^2\cos(\omega)\, dr d\theta d\omega \\ ou \quad D_1 &\subset \mathbb{R}^3 \quad et \quad D_2 \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Exemple 2.9 ***(Passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$)***

Il est définie par la transformation de

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$$

En

$$(r,\theta_1,\theta_2,....,\theta_{n-1}) \in]0,\infty[\times]0,\pi[\times ..... \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$$

Par les formules

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta_1) \\ x_2 = r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} = r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)....\sin(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}) \\ x_n = r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2).....\cos(\theta_{n-2}) \end{cases}$$

On a alors

$$dx = r^{(n-1)}\left[\sin(\theta_1)\right]^{(n-2)}\left[\sin(\theta_2)\right]^{(n-3)}.......\sin(\theta_{n-2})\,drd\theta_1.....d\theta_{n-1}$$

On écrit en abrégé

$$x = r\omega$$
$$ou$$
$$\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$$

et on constate que $|\omega| = 1$ *c'est à dire que* ω *est un point de la sphére unité* $S^{(n-1)}$, *alors*

$$dx = r^{(n-1)}drd\omega$$

ou $d\omega$ *est la mésure sur* $S^{(n-1)}$, *pour* $f \in \hat{L}(\mathbb{R}^n)$ *on peut édrire*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S^{(n-1)}} f(r,\omega)r^{(n-1)}drd\omega$$

Exemple 2.10 ***(La composition dans*** $\mathfrak{D}'(\Omega)$ ***)***

soit $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *et* $\psi : \Omega' \to \Omega$ *bijective telque* ψ *et* $\psi^{(-1)}$ *de classe* C^{∞}
i.e (diffeomorphisme de classe C^1 *) alors* $T \circ \psi \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *et*

$$\langle T \circ \psi, \varphi \rangle = \left\langle T, \varphi \circ \psi^{(-1)} \left| j_{\psi^{(-1)}} \right| \right\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Preuve. En effet

$$\langle T \circ \psi, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} T(\psi(x))\varphi(x)\,dx, \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

On utilise le changement de variable suivant $y = \psi(x)$ on obtient
(comme $\psi : \Omega' \to \Omega$ alors $y = \psi(x)$ dans Ω et $x = \psi^{-1}(y)$)

$$\langle T \circ \psi, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} T(y)\,\varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)\left|j_{\psi^{(-1)}}(y)\right| dy = \left\langle T, \varphi \circ \psi^{-1} \left| j_{\psi^{(-1)}} \right| \right\rangle$$

Comme un exemple dans $\mathfrak{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a

$$\delta\left(ax\right) = \frac{1}{\left|a\right|^n}\delta\left(x\right)$$

■

Chapitre 3

Non-solvabilité d'une équation hyperbolique dans $\mathbb{R}^N$

Sommaire

3.1 Introduction

dans ce chapitre nous nous intéréssons à l'obtention des conditions de non-solvabilité du problème (3.1) aux valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \zeta \triangle u + \delta u_t = |u|^p \quad dans\ \mathbf{R}^N \times [0, +\infty) \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbf{R}^N\right) \\ u_t(0, x) = u_1(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbf{R}^N\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

ou $p > 1$ et $u_0(x), u_1(x)$ sont des données initiales. et les paramètres ζ, δ sont supposées etre des constantes positives. le modèle entre les mains dans un domaine borné Ω de $\mathbf{R}^N$, il est lié à l'équation de vibrations. jusu'à présent, il a été étudié par Y.You $[25]$,R.H Clark $[7]$ et Tatar, Zarai $[14 - 16]$, plusieurs résultats sur la décroissance (exponentielle polynomial) et l'explosion en temps fini ont été obtenus.

La méthode que nous utilisons est la méthode des fonctions test développé par Mitidieri et Pohozaev$[2]$. Notre preuve est basée sur un argument d'absurde, ce qui implique des éstimations a priori pour les solutions faible de (3.1) et un choix judicieux d'une fonction test et un argument d'échelle.

L'objetif principal dans ce chapitre est de trouver des valeurs de p pour lesquelles nous avons la non-existence des solutions.

3.2 Préliminaires

Nous désignerons par Q_T l'ensemble

$$Q_T := (0, T) \times \mathbf{R}^N$$

et

$$Q := Q_\infty$$

Nous allons ensuite préciser ce qu'on entend par une solution faible du problème (3.1) .

Proposition 3.1 *Une solution faible du problème (3.1) est une fonction continue $u : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ telle que*

$$\int\limits_{Q_T} |u|^p \varphi dx dt + \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_1(x) \varphi(0, x)\, dx + \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_0(x) \varphi(0, x)\, dx \tag{3.2}$$
$$= \int\limits_{Q_T} u \varphi_{tt} dx dt - \zeta \int\limits_{Q_T} u \triangle \varphi dx dt - \delta \int\limits_{Q_T} u \varphi_t dx dt$$

pour tout $\varphi \in C_0^2(Q_T)$, $\varphi \geq 0$ *satisfaisant*

$$\varphi(T,x) = \varphi_t(T,x) = \varphi_t(0,x) = 0$$

$\varphi \in C_0^2(Q_T)$ *veut dire que* $\varphi \in C_{t,x}^{2,2}$ *est à support compact.*

Preuve. soit le problème suivant

$$u_{tt} - \zeta \triangle u + \delta u_t = |u|^p$$

multiplions par $\varphi \in C_0^2(Q_T)$ les deux mombres de cette égalité puit intégrant sur Q_T nous obtenons alors

$$\int_{Q_T} (u_{tt} - \zeta \triangle u + \delta u_t)\, \varphi(t,x)\, dxdt = \int_{Q_T} |u|^p\, \varphi(t,x)\, dxdt$$

c'est à dire que

$$\int_{Q_T} u_{tt}\varphi dxdt - \zeta \int_{Q_T} \triangle u \varphi dxdt + \delta \int_{Q_T} u_t \varphi dxdt = \int_{Q_T} |u|^p\, \varphi(t,x)\, dxdt$$

cet intégrale se devise en trois parties
1)-

$$\int_{Q_T} u_{tt}\varphi dxdt = \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^T u_{tt}\varphi(t,x)\, dxdt$$

on utisons l'intégration par partie deux fois en t, et pour φ satisfaisant

$$\varphi(T,x) = \varphi_t(T,x) = \varphi_t(0,x) = 0$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^N} \int_0^T u_{tt}\varphi(t,x)\, dxdt &= \int_{\mathbf{R}^N} \left[u_t \varphi(t,x)\, |_0^T \right] dx - \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^T u_t \varphi_t(t,x)\, dtdx \\
&= -\int_{\mathbf{R}^N} u_t(0,x)\, \varphi(0,x)\, dx - \int_{\mathbf{R}^N} \left[u\varphi_t(t,x)\, |_0^T \right] dx + \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^T u\varphi_{tt}(t,x) dtdx \\
&\quad - \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x) \varphi(0,x)\, dx + \int_{Q_T} u\varphi_{tt} dxdt
\end{aligned}$$

2)-

$$-\zeta \int\limits_{Q_T} \triangle u \varphi dx dt = -\zeta \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{R}^N} \triangle u \varphi (t,x)\, dx dt$$

a l'aide de l'intégration par partie et la formule de Green, et pour tout fonction φ (fonction test) satisfaisant $\varphi \equiv 0$ quand $x \to \mathbb{R}$ (car φ est une fonction test qui admet un support compact) on obtient

$$-\zeta \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} \triangle u \varphi (t,x)\, dx dt = -\zeta \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} u \triangle \varphi (t,x)\, dx dt = -\zeta \int\limits_{Q_T} u \triangle \varphi dx dt$$

3)-

$$\delta \int\limits_{Q_T} u_t \varphi dx dt = \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_0^T u_t \varphi dt dx$$

par l'intégration par partie en t et pour φ satisfaisant aussi $\varphi (T,x) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_0^T u_t \varphi dt dx &= \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} \left[u\varphi (t,x) \big|_0^T \right] dx - \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_0^T u \varphi_t dt dx \\ &= -\delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} u(0,x) \varphi (0,x)\, dx - \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_0^T u \varphi_t dt dx \\ &= -\delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_0(x) \varphi (0,x)\, dx - \delta \int\limits_{Q_T} u \varphi_t dx dt \end{aligned}$$

après les calcules on touve

$$-\int\limits_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi (0,x)\, dx + \int\limits_{Q_T} u\varphi_{tt} dx dt - \zeta \int\limits_{Q_T} u \triangle \varphi dx dt - \delta \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_0(x) \varphi (0,x)\, dx - \delta \int\limits_{Q_T} u \varphi_t dx dt = \int\limits_{Q_T} |u|^p \varphi dx dt$$

donc une solution faible du problème (3.1) est une fonction continue $u : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ qui vérifie (3.1) pour tout $\varphi \in C_0^2 (Q_T)$, $\varphi \geq 0$ satisfaisant

$$\varphi (T,x) = \varphi_t (T,x) = \varphi_t (0,x) = 0.$$

■

3.3 Un résultat de la non-existence

Dans cette section nous prouvons notre résultat. on donne toutes les valeurs de p pour lesquels aucune solution faible ne peut exister globalement en temps.

Théorème 3.1 *Supposons que*

$$\int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)dx + \delta \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)dx > 0,$$

ainsi que θ, N *et* $\widetilde{p}$ *sont tels que l'indique le tableau suivant*

$$\begin{array}{ll} N=1 & \theta=2, \quad \widetilde{p}=2 \\ N=2 & \theta=2, \quad \widetilde{p}=1 \\ N=3 & \theta=1, \quad \widetilde{p}=\frac{1}{3} \end{array}.$$

Alors il n'existe pas de solution globale faible du problème (3.1) *pour* $1 < p < 1+\widetilde{p}$

Preuve. La preuve est faite par l'absurde (contradiction).
supposons qu'une solution faible du (3.1) existe globalement en temps.
on introduit la fonction test

$$\varphi(t,x) := \phi\left(\frac{|x|}{R}\right)\mu\left(\frac{t}{R^\theta}\right) \tag{3.3}$$

Avec

$$\phi \in C_0^\infty\left(\mathbf{R}^N\right), \quad \phi \geq 0, \quad \mu \in C^2\left(\mathbf{R}^+\right), \quad \mu \geq 0$$

Telle que

$$\phi(\omega), \mu(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$$

Et μ satisfait

$$-C \leq \mu' \leq 0, \quad \mu'\left(2R^\theta\right) = 0 \;\; pour \;\; R \gg 1.$$

Nous supposons que

$$\int_{supp\triangle\varphi} |\triangle\varphi|^q (\varphi)^{1-q} dxdt + \int_{supp\varphi_{tt}} |\varphi_{tt}|^q (\varphi)^{1-q} dxdt + \int_{supp\varphi_t} |\varphi_t|^q (\varphi)^{1-q} dxdt < \infty \tag{3.4}$$

Ou q est l'exposant conjugé de p.
Si la condition (3.4) n'est pas satisfaite par la fonction $\varphi(t,x)$, alors nous choisissons $\varphi^\lambda(t,x)$ ou $\lambda > 0$ suffisament drande on choisit cette fonction test dans la définition de la solution faible et on commence à estimer les différents termes de cette définition.

En multipliant et en divisant par $\varphi^{\frac{1}{p}}$, puis en appliquant l'inégalité ε-Young, nous aurons

$$\int_Q u\varphi_{tt}dtdx \leq \int_{supp\varphi_{tt}} u\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_{tt}dtdx \leq \varepsilon \int_{supp\varphi_{tt}} |u|^p \varphi dtdx + C_\varepsilon \int_{supp\varphi_{tt}} \varphi^{-\frac{q}{p}} |\varphi_{tt}|^q dtdx \tag{3.5}$$

De la meme manière ,nous obtenons

$$-\zeta\int_Q u\triangle\varphi dxdt \leq \varepsilon \int_{supp\triangle\varphi} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \int_{supp\triangle\varphi} \zeta^q (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\triangle\varphi|^q dxdt \tag{3.6}$$

Et

$$-\delta\int_Q u\varphi_t dxdt \leq \varepsilon \int_{supp\varphi_t} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \int_{supp\varphi_t} \delta^q (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_t|^q dxdt \tag{3.7}$$

Tenant compte des trois dernières estimations (3.5) , (3.6) et (3.7) dans (3.2)

Nous remarquons que pour ε petit (par exemple $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$)

On aura

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\int_Q |u|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx + \delta\int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx \\ \leq\ & C_{\frac{1}{4}} \int_{supp\varphi} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} \left[|\varphi_{tt}|^q + \zeta^q |\triangle\varphi|^q + \delta^q |\varphi_t|^q\right] dxdt \end{aligned} \tag{3.8}$$

Considérons maintenant l'échelle suivante :

$$\begin{aligned} t &= R^\theta \tau \\ & et \\ x &= Ry \end{aligned}$$

Alors on a

$$dt = R^\theta d\tau$$

Comme

$$x = (x_1, ..., x_n) \quad et \quad y = (y_1, ..., y_n)$$

Alors

$$x = (Ry_1, ..., Ry_n)$$

De plus

$$dx = \begin{vmatrix} R.\ 0.\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \quad .R\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R.\ 0 \\ 0.0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad R \end{vmatrix} dy = R^N dy$$

D'ou

$$dxdt = R^N dy R^\theta d\tau = R^{N+\theta} dy d\tau$$

Maintenant il est clair que

$$\int\limits_{supp\varphi_{tt}} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_{tt}|^q \, dtdx \leq CR^{N+\theta-2\theta q} \int\limits_{\Omega} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_{\tau\tau}|^q \, d\tau dy \tag{3.9}$$

De meme on trouve que

$$\zeta^q \int\limits_{supp\triangle\varphi} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\triangle\varphi|^q \, dtdx \leq C\zeta^q R^{N+\theta-2q} \int\limits_{\Omega} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\triangle\varphi|^q \, d\tau dy \tag{3.10}$$

Et

$$\int\limits_{supp\varphi_t} \delta^q (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_t|^q \, dxdt \leq C\delta^q R^{N+\theta-\theta q} \int\limits_{\Omega} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_\tau|^q \, d\tau dy \tag{3.11}$$

Ici et dans le reste de la preuve C est une constante positive

Les relations (3.8) et (3.4) avec les éstimations $(3.9)\,,(3.10)\,,(3.11)$ nous donnent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\int\limits_{Q} |u|^p \varphi dxdt + \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx + \delta\int\limits_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx \\ \leq \ & C\left\{ R^{N+\theta-2\theta q}\int\limits_{\Omega} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_{\tau\tau}|^q \, d\tau dy + \zeta^q R^{N+\theta-2q}\int\limits_{\Omega} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\triangle\varphi|^q \, d\tau dy \right. \\ & \left. +\delta^q R^{N+\theta-\theta q}\int\limits_{\Omega} (\varphi)^{-\frac{q}{p}} |\varphi_\tau|^q \, d\tau dy \right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Maintenant si $1 < p < 1+\widetilde{p}$ ou $\widetilde{p}$ est indicé dans le tableau, alors à partir de (3.12) on déduit

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{4}\int\limits_{Q} |u|^p \varphi dxdt + \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx + \delta\int\limits_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx\right] \leq 0$$

En effet, le paramètre θ a été choisi, après quelques calculs simples, aussi large que possible et pour que les quatre exposants de (3.12) sont non positifs.
Autrement dit

$$\begin{cases} N+\theta-2\theta q<0 \\ N+\theta-2q<0 \\ N+\theta-\theta q<0 \end{cases}$$

D'autre part, le premier mombre de (3.12) qui égal à

$$\frac{1}{4}\int\limits_{Q}|u|^p\,dxdt+\int\limits_{\mathbf{R}^N}u_1(x)dx+\delta\int\limits_{\mathbf{R}^N}u_0(x)dx.$$

C'est une contradiction, puisque nous avons supposé que

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N}u_1(x)dx+\delta\int\limits_{\mathbf{R}^N}u_0(x)dx>0.$$

Le théorème est ainsi démontré, pour démontrer les valeurs qui se trouvent dans le tableau du théorème (3.1)
On va procédé comme suit.
On a $\theta q>0$ donc

$$\begin{cases} N+\theta-2\theta q<0 \\ N+\theta-2q<0 \\ N+\theta-\theta q<0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} N+\theta-\theta q<0......(1) \\ N+\theta-2q<0......(2) \end{cases}$$

(1) devient

$$\begin{aligned} N+\theta-\theta q &< 0\Rightarrow\theta q>N+\theta \\ &\Rightarrow q>\frac{N+\theta}{\theta} \\ &\Rightarrow \frac{1}{q}<\frac{\theta}{N+\theta} \end{aligned}$$

Et comme

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{p} &< \frac{\theta}{N+\theta}\Rightarrow-\frac{1}{p}<\frac{\theta}{N+\theta}-1=\frac{-N}{N+\theta} \\ \frac{1}{p} &> \frac{N}{N+\theta}\Rightarrow p<\frac{N+\theta}{\theta}=1+\frac{\theta}{N} \end{aligned}$$

On a donc

$$(1) \Longleftrightarrow p < 1 + \frac{\theta}{N}$$

(2) devient

$$2q > N + \theta \Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{2}{N+\theta}$$

Et comme

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{p} &< \frac{2}{N+\theta} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{(N+\theta)-2}{N+\theta} \\ &\Rightarrow \; p < \frac{N+\theta}{(N+\theta)-2} = 1 + \frac{2}{(N+\theta)-2} \end{aligned}$$

On a donc

$$(2) \Longleftrightarrow p < 1 + \frac{2}{(N+\theta)-2}$$

D'après (1) et (2) et comme $p > 1$ on peut prendre

$$1 < p < 1 + \widetilde{p}$$

Ou

$$\widetilde{p} = \min\left\{\frac{\theta}{N}, \frac{2}{(N+\theta)-2}\right\}$$

Cas simples

$$\begin{aligned} N &= 1, \;\; \theta = 2, \;\; \widetilde{p} = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{(1+2)-2}\right\} = \min\{2,2\} = 2 \\ N &= 2, \;\; \theta = 2, \;\; \widetilde{p} = \min\left\{\frac{2}{2}, \frac{2}{(2+2)-2}\right\} = \min\{1,1\} = 1 \\ N &= 3, \;\; \theta = 1, \;\; \widetilde{p} = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{(3+1)-2}\right\} = \min\left\{\frac{1}{3}, 1\right\} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

3.4 Conditions nécessaires pour l'existence locale et globale des solutions

Théorème 3.2 *Soit u une solution locale de (3.1), ou $T < +\infty$ et $p > 1$, alors il existe des constantes α et β telles que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf \left[u_1(x) + \delta u_0(x)\right] \leq C_{\frac{1}{4}} T^{1-q} \left(\frac{\alpha}{T^q} + \beta\right)$$

Preuve. Par définition de la solution faible

$$\textit{pour toute } \varphi \in C_0^{+\infty}(Q_T), \quad \varphi \geq 0$$

On a

$$\int\limits_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + \int\limits_{\mathbf{R}^N} [u_1(x) + \delta u_0(x)] \varphi(0,x) dx \leq \int\limits_{Q_T} |u| |\varphi_{tt}| dxdt + \zeta \int\limits_{Q_T} |u| |\triangle \varphi| dxdt + \delta \int\limits_{Q_T} |u| |\varphi_t| dxdt \tag{3.13}$$

En utilisant l'inégalité ε-Young, on peut estimer tous les termes dans le second membre de (3.13), en effet, si

$$|u| |\varphi_{tt}| = |u| \varphi^{\frac{1}{p}} \varphi^{\frac{-1}{p}} |\varphi_{tt}|,$$

Nous trouvons pour $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{Q_T} |u| |\varphi_{tt}| dxdt \leq \varepsilon \int\limits_{Q_T} |u|^p \varphi dtdx + C_\varepsilon \int\limits_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\varphi_{tt}|^q dtdx \tag{3.14}$$

D'une manière similaire, on trouve

$$\zeta \int\limits_{Q_T} |u| |\triangle \varphi| dtdx \leq \int\limits_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \zeta^q \int\limits_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle \varphi|^q dxdt \tag{3.15}$$

Et

$$\delta \int\limits_{Q_T} |u| |\varphi_t| dxdt \leq \varepsilon \int\limits_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \delta^q \int\limits_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\varphi_t|^q dxdt \tag{3.16}$$

Prenant $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$, on obtient de (3.14), (3.15), et (3.16) le resultat suivant

$$J := \int\limits_{\mathbf{R}^N} [u_1(x) + \delta u_0(x)] \varphi(0,x) dx \leq C_{\frac{1}{4}} \int\limits_{Q_T} [|\varphi_{tt}|^q + |\triangle \varphi|^q + |\varphi_t|^q] (\varphi)^{\frac{-q}{p}} dtdx \tag{3.17}$$

On choisi la fonction test

$$\varphi(t,x) := \phi\left(\frac{|x|}{R}\right) \mu\left(\frac{t}{T}\right)$$

Ou

$$\begin{aligned}
&\varphi \in C_0^{+\infty}\left(\mathbf{R}^N\right), \quad \phi \geq 0, \\
&supp\phi \subset \left\{x \in \mathbf{R}^N : 1 < |x| < 2\right\}, \\
&|\triangle \phi| \leq k\phi,
\end{aligned}$$

Et nous prenons

$$\mu\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 1 - \frac{\left(t-\frac{T}{2}\right)^3}{\left(\frac{T}{2}\right)^3} & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

Ensuite, nous estimons les trois termes dans le coté droit de (3.13).
On effectuant le changement de variable

$$t = \tau T$$

Et en utilisant l'hypothèse sur φ, on trouve

$$\int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} \left|\varphi_{tt}\right|^q dtdx \leq \alpha T^{1-2q} \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \tag{3.18}$$

$$\zeta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} \left|\triangle\varphi\right|^q dxdt \leq M k^q R^{-2q} T \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \tag{3.19}$$

Et

$$\delta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} \left|\varphi_t\right|^q dxdt \leq \beta T^{1-q} \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \tag{3.20}$$

Pour obtenir (3.18) en effet

$$\int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} \left|\varphi_{tt}\right|^q dtdx = \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^T (\phi\mu)^{\frac{-q}{p}} \left|\phi\mu_{tt}\right|^q dxdt = \left(\int_{\mathbf{R}^N} (\phi)^{\frac{-q}{p}} \left|\phi\right|^q dx\right) \left(\int_0^T (\mu)^{\frac{-q}{p}} \left|\mu_{tt}\right|^q dt\right)$$

Et comme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \ alors \ \ \ pq = p + q$$

$$\frac{-q}{p} + q = \frac{-q + pq}{p} = \frac{-q + p + q}{p} = 1$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\varphi_{tt}|^q \, dtdx &= \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \left(\int_0^T (\mu)^{\frac{-q}{p}} |\mu_{tt}|^q \, dt \right) \\
&= \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left[1 - \frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)^3}{\left(\frac{T}{2}\right)^3} \right]^{\frac{-q}{p}} \left[\frac{6\left(t - \frac{T}{2}\right)}{\left(\frac{T}{2}\right)^3} \right]^q dt \\
&= \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left[1 - 8\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right)^3 \right]^{\frac{-q}{p}} \left[48\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \right]^q T^{-2q} dt
\end{aligned}$$

Avec le changement $t = \tau T$ on a $dt = T d\tau$ et si $t = \frac{T}{2}$ alors $\tau = \frac{1}{2}$ et si $t = T$ alors $\tau = 1$

On obtient alors

$$\int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\varphi_{tt}|^q \, dxdt = T^{1-2q} \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[1 - 8\left(\tau - \frac{1}{2} \right)^3 \right]^{\frac{-q}{p}} \left[48\left(\tau - \frac{1}{2} \right) \right]^q d\tau \leq \alpha T^{1-2q} \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx$$

Pour (3.19) en effet

$$\begin{aligned}
\zeta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle\varphi|^q \, dxdt &= \zeta^q \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_0^T (\phi\mu)^{\frac{-q}{p}} |\mu\triangle\phi|^q \, dxdt \right) \\
&= \zeta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} (\phi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle\phi|^q \, dx \right) \left(\int_0^T (\mu)^{\frac{-q}{p}} |\mu|^q \, dt \right) \\
&= \zeta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} (\phi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle\phi|^q \, dx \right) \left(\int_0^T \mu dt \right)
\end{aligned}$$

Et comme

$$|\triangle\phi| = \left| \triangle\phi\left(\frac{|x|}{R} \right) \right| = R^{-2} |\triangle\phi| \leq R^{-2} k\phi$$

Alors

$$\begin{aligned}
\zeta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle\varphi|^q \, dxdt &= \zeta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} (\phi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle\phi|^q \, dx \right) \left(\int_0^T \mu dt \right) \\
&\leq \zeta^q R^{-2q} k^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} (\phi)^{\frac{-q}{p}} |\phi|^q \, dx \right) \left(\int_0^T \mu dt \right)
\end{aligned}$$

Avec le changement $t = \tau T$ on a $dt = T d\tau$ et si $t = 0$ alors $\tau = 0$ et si $t = T$ alors $\tau = 1$
On obtient alors

$$\begin{aligned}
\zeta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\triangle \varphi|^q \, dxdt &\leq \zeta^q R^{-2q} k^q T \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \left(\int_0^1 \mu d\tau \right) \\
&\leq MR^{-2q} k^q T \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx
\end{aligned}$$

Pour obtenir (3.20) en effet

$$\begin{aligned}
\delta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{\frac{-q}{p}} |\varphi_t|^q \, dxdt &= \delta^q \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^T (\phi\mu)^{\frac{-q}{p}} |\phi\mu_t|^q \, dxdt \\
&= \delta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} (\phi)^{\frac{-q}{p}} |\phi|^q \, dx \right) \left(\int_0^T (\mu)^{\frac{-q}{p}} |\mu_t|^q \, dt \right) \\
&= \delta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \left(\int_0^T (\mu)^{\frac{-q}{p}} |\mu_t|^q \, dt \right) \\
&= \delta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \int_0^T \left[1 - \frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)^3}{\left(\frac{T}{2}\right)^3} \right]^{\frac{-q}{p}} \left[\frac{3\left(t - \frac{T}{2}\right)^2}{\left(\frac{T}{2}\right)^3} \right]^q dt \\
&= \delta^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \int_{\frac{T}{2}}^T \left[1 - 8\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)^3 \right]^{\frac{-q}{p}} \left[24\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^q dt \\
&= \delta^q T^{1-q} \left(\int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \right) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[1 - 8\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^3 \right]^{\frac{-q}{p}} \left[24\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2 \right]^q d\tau \\
&\leq \beta T^{1-q} \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx
\end{aligned}$$

Finalement on a obtenus les trois estimations.
de $(3.18), (3.19)$, et (3.20) et comme $\varphi(0, x) = \phi(x) \mu(0) = \phi(x)$ on déduit que

$$\inf_{|x|>R} [u_1(x) + \delta u_0(x)] \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \leq C_{\frac{1}{4}} \left[\alpha T^{1-2q} + Mk^q R^{-2q} T + \beta T^{1-q} \right] \int_{\mathbf{R}^N} \phi dx \tag{3.21}$$

Prenant le sup par rapport à t des deux membres de (3.21) et faire tendre R vers ∞, on obtient

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf \left[u_1(x) + \delta u_0(x)\right] \leq C_{\frac{1}{4}} \left[\alpha T^{1-2q} + \beta T^{1-q}\right] \tag{3.22}$$

D'ou le résultat voulu.

Nous déduisons immédiatement le résultat suivant ■

Corollaire 3.1 *Supposons que* $p > 1$ *et* $[u_1(x) + \delta u_0(x)] \geq 0$ *si* (3.1) *admet une solution globale faible alors*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf \left[u_1(x) + \delta u_0(x)\right] = 0$$

Preuve. Supposons que (3.1) a une solution globale faible et que

$$S := \lim_{|x|\to\infty} \inf \left[u_1(x) + \delta u_0(x)\right] > 0$$

Alors de (3.22) on obtient

$$T \leq \max \left\{ \left(\frac{\alpha+\beta}{S} C_{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \left(\frac{\alpha+\beta}{S} C_{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2q-1}} \right\}$$

C'est une contradiction ■

Chapitre 4

Non solvabilité de Balakrishnan-Taylor système avec terme de mémoire en $\mathbb{R}^N$

Sommaire

4.1 Introduction

La question de la non-solvabilité des équations d'évolution a été traitée et discutée sous différents angles à l'aide de différentes méthodes et techniques. L'idée de base dans la plupart de ces travaux est de comparer des solutions avec des sous-solutions qui explosent en un temps fini.
Notre préoccupation dans cette partie est un système fortement couplé avec un amortissement de Balakrishnan-Taylor et une source de type puissance agissant comme une force externe sur tout l'espace $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$. Bien que nous étudions le cas particulier où les noyaux g et h décroissent polynomialement, les résultats de l'étude restent valides pour une gamme d'autres types de noyaux tels que les fonctions à décroissance exponentielle. Nous considérons le système décrit par cette formule

$$\begin{cases} u_{tt} - M(t)\Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u ds = |v|^p \ \ dans \ \ [0,+\infty) \times \mathbf{R}^N \\ v_{tt} - M(t)\Delta v + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta v ds = |u|^q \ \ dans \ \ [0,+\infty) \times \mathbf{R}^N \\ u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \ u_t\left(0,x\right) = u_1\left(x\right) \ \ dans \ \mathbf{R}^N \\ v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \ v_t\left(0,x\right) = v_1\left(x\right) \ \ dans \ \mathbf{R}^N \end{cases} \tag{4.1}$$

Ou $p, q > 1$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont les données initiales et

$$M(t) = \xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 + \xi_2 \left\|\nabla v\left(t\right)\right\|_2^2 + \xi_3 \left(\nabla u\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right) + \xi_4 \left(\nabla v\left(t\right), \nabla v_t\left(t\right)\right)$$

Où tous les paramètres ξ_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ sont supposées être des constantes positives. Les fonctions g et h sont les fonctions de relaxation qui dépendent des propriétés des deux matériaux viscoélastiques différents

4.2 Preliminaries

Nous désignerons par Q_T l'ensemble

$$Q_T := (0,T) \times \mathbf{R}^N$$

Et par Q l'esemble

$$Q_\infty := (0,\infty) \times \mathbf{R}^N$$

Nous expliquons ensuite ce que nous entendons par solution faible du problème (4.1).

Définition 4.1 *Le couple de fonctions (u,v) est une solution locale faible de (4.1) sur $(0,T)$ Si*

$$u \in L^q_{loc}(Q_T), \ \ v \in L^q_{loc}(Q_T)$$

Et satisfaisant

$$\begin{array}{l} \int_{Q_T} |v|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x) \varphi(0,x)\, dx = \int_{Q_T} u\varphi_{tt} dxdt \\ -\int_{Q_T} M(t) u \Delta\varphi dxdt + \int_{Q_T} u(s,x) \left(\int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t) dt \right) dsdx \end{array} \tag{4.2}$$

$$\begin{array}{l} \int_{Q_T} |u|^q \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} v_1(x) \varphi(0,x)\, dx = \int_{Q_T} v\varphi_{tt} dxdt \\ -\int_{Q_T} M(t) v \Delta\varphi dxdt + \int_{Q_T} v(s,x) \left(\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t) dt \right) dsdx \end{array} \tag{4.3}$$

Est valable pour

$$\varphi \in C_0^2(Q_T), \varphi \geq 0$$

Et satisfaire

$$\varphi(T,x) = \varphi_t(T,x) = \varphi_t(0,x) = 0.$$

$\varphi \in C_0^2(Q_T)$ veut dire que une fonction φ dans $C_{t,x}^{2,2}$ est à support compact.
Maintenant, nous énonçons l'hypothèse (H)
$g, h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ sont des fonctions -C^1 bornées. satisfaisantes

$$g(t), h(t) \leq \frac{K}{(1+t)^\rho},\ t \geq 0,$$

Pour une constante. $K > 0$.et.$\rho \in (2, \infty)$.

4.3 Résultat de la non existence

Dans cette partie, nous prouvons notre premier résultat. Il fournit un intervalle de valeurs pour. p et.q pour laquelle aucune solution faible ne peut exister globalement dans le temps.

Théorème 4.1 *Supposons que*

$$\begin{array}{l} \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\, dx > 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\, dx > 0 \\ et\ (H)\ valable\ pour\ N \geq 1 \\ et\ 1 < p \quad ,q < 1 + \min\left\{ \frac{1}{N+\theta-1}, \frac{2\theta}{N-\theta} \right\} \end{array}$$

Alors le problème (4.1) n'admet pas de solutions globales non triviales dans le temps.

Preuve. La preuve est faite par contradiction. Supposons qu'une solution faible de (4.1) existe globalement dans le temps.
Nous introduisons les fonctions tests

$$\varphi_i(t,x) := \phi\left(\frac{|x|}{R}\right) \mu\left(\frac{t}{R^{\theta_i}}\right),\ i = 1,2 \tag{4.4}$$

Avec

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \phi \geq 0, \quad \mu \in C^2(\mathbf{R}^+), \quad \mu \geq 0$$

Tel que

$$\phi(w), \mu(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq 1 \\ 0, & |w| > 2 \end{cases}$$

Et μ Satisfait

$$-C \leq \mu'(t) \leq 0, \qquad \mu'(2R^{\theta_i}) = 0 \quad pour \quad R >> 1.$$

La fonction $\varphi(t,x)$ est supposé avoir des dérivées partielles du second ordre bornées.
De plus, nous supposons sans perte de généralité que

$$\int_{U_1} |\varphi_{1tt}|^{q'} (\varphi_2)^{1-q'} dxdt + \int_{U_2} M(t) |\Delta\varphi_1|^{q'} (\varphi_2)^{1-q'} dxdt < \infty \tag{4.5}$$

Et

$$\int_{V_1} |\varphi_{2tt}|^{p'} (\varphi_1)^{1-p'} dxdt + \int_{V_2} M(t) |\Delta\varphi_2|^{p'} (\varphi_1)^{1-p'} dxdt < \infty \tag{4.6}$$

Où

$$\begin{aligned} U_1 &:= supp\varphi_{1tt} \cap supp\varphi_2, \\ U_2 &:= supp\Delta\varphi_1 \cap supp\varphi_2, \\ V_1 &:= supp\varphi_{2tt} \cap supp\varphi_1, \ et \\ V_2 &:= supp\Delta\varphi_2 \cap supp\varphi_1 \end{aligned}$$

Et on note par p' et q' respectivement l'exposant conjugué de p et q Si ces conditions ne sont pas remplies pour nos fonctions $\varphi_i(t,x)$, $i = 1,2$ puis on choisit $\varphi_i^\lambda(t,x)$, $i = 1,2$ avec un certains $\lambda > 0$ assez grand .
Ensuite, nous estimons les différents termes à droite de (4.2) et (4.3) en termes d'expressions à gauche de (4.2) et (4.3). En multipliant et en divisant par $\varphi_2^{1/p}$, puis en appliquant l'inégalité de Hölder, on voit que

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{U_1} u\varphi_{1tt} dtdx \leq \int_{U_1} u\varphi_2^{1/q}\varphi_2^{-1/q}\varphi_{1tt} dtdx \\ &\leq \left(\textstyle\int_{U_1} |u|^q \varphi_2 dtdx\right)^{1/q} \left(\textstyle\int_{U_1} \varphi_2^{-q'/q} |\varphi_{1tt}|^{q'} dtdx\right)^{1/q'}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De la même manière, on trouve

$$-\int_{U_2} M(t)u\Delta\varphi_1 dxdt$$

$$\leq \left(\int_{U_2} |u|^q \varphi_2 dxdt\right)^{1/q} \left(\int_{U_2} |M(t)|^{q'} \varphi_2^{-q'/q} |\Delta\varphi_1|^{q'} dxdt\right)^{1/q'}, \tag{4.8}$$

Et

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{U_2} u\left(\int_s^{+\infty} g(t-s)\Delta\varphi_1(t)dt\right) dsdx \\ &\leq \left(\textstyle\int_{U_2} |u|^q \varphi_2 dxdt\right)^{1/q} \left(\textstyle\int_{U_2} \varphi_2^{-q'/q} \left|\int_s^{+\infty} g(t-s)\Delta\varphi_1(t)dt\right|^{q'} dsdx\right)^{1/q'}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En prenant compte des trois dernières estimations (4.7) - (4.9) dans (4.2),
Nous déduisons à partir de (4.2) que

$$\int_W |v|^p \varphi_1 dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi_1(0,x)\,dx \leq A\left(\int_{U_1\cup U_2} |u|^q \varphi_2 dxdt\right)^{1/q} \tag{4.10}$$

Où

$$\begin{aligned} A = \Bigg\{ &\left(\textstyle\int_{U_1} \varphi_2^{-q'/q} |\varphi_{1tt}|^{q'} dtdx\right)^{1/q'} + \left(\textstyle\int_{U_2} |M(t)|^{q'} \varphi_2^{-q'/q} |\Delta\varphi_1|^{q'} dxdt\right)^{1/q'} \\ &+ \left(\textstyle\int_{U_2} \varphi_2^{-q'/q} \left|\int_s^{+\infty} g(t-s)\Delta\varphi_1(t)dt\right|^{q'} dsdx\right)^{1/q'} \Bigg\} \end{aligned}$$

Et

$$W := supp\varphi_1 \cap supp\varphi_2.$$

De même, il est facile de voir que

$$\int_W |u|^q \varphi_2 dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\varphi_2(0,x)\,dx \leq B\left(\int_{V_1\cup V_2} |v|^p \varphi_1 dxdt\right)^{1/p} \tag{4.11}$$

Où

$$\begin{aligned} B = \Bigg\{ &\left(\textstyle\int_{V_1} \varphi_1^{-p'/p} |\varphi_{2tt}|^{p'} dtdx\right)^{1/p'} + \left(\textstyle\int_{V_2} |M(t)|^{p'} \varphi_1^{-p'/p} |\Delta\varphi_2|^{p'} dxdt\right)^{1/p'} \\ &+ \left(\textstyle\int_{V_2} \varphi_1^{-p'/p} \left|\int_s^{+\infty} h(t-s)\Delta\varphi_2(t)dt\right|^{p'} dsdx\right)^{1/p'} \Bigg\} \end{aligned}$$

Une combinaison de (4.10) et (4.11) donne

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{V_1\cup V_2} |v|^p \varphi_1 dxdt \leq -\int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi_1(0,x)\,dx \\ &A\left[B\left(\textstyle\int_{V_1\cup V_2} |v|^p \varphi_1 dxdt\right)^{1/p} - \int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\varphi_2(0,x)\,dx\right]^{1/q} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Et

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{U_1\cup U_2} |u|^q \varphi_2 dxdt \leq -\int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\varphi_2(0,x)\,dx \\ &B\left[A\left(\textstyle\int_{U_1\cup U_2} |u|^q \varphi_2 dxdt\right)^{1/q} - \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi_1(0,x)\,dx\right]^{1/p} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nous déduisons de nos hypothèses sur les données initiales que

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi_1(0,x)\,dx \geq 0 \\ &et \\ &\textstyle\int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\varphi_2(0,x)\,dx \geq 0. \end{aligned}$$

Ces relations (4.12) et (4.13) impliquent que

$$\left(\int_{V_1\cup V_2} |v|^p \varphi_1 dxdt\right)^{1-1/pq} \leq AB^{1/q} \tag{4.14}$$

et

$$\left(\int_{U_1\cup U_2} |u|^q \varphi_2 dxdt\right)^{1-1/pq} \leq BA^{1/p} \tag{4.15}$$

Ensuite, nous adoptons la mise à l'échelle suivante

$$\begin{aligned} t &= R^\theta \tau \\ & \quad et \\ x &= Ry \end{aligned}$$

Où

$$\theta = \theta_1 = \theta_2.$$

On obtient

$$\left(\int_{U_1} \varphi_2^{-q'/q} |\varphi_{1tt}|^{q'} dtdx\right)^{1/q'} = R^{\frac{N+\theta}{q'}-2\theta} \left(\int_{U_1} \varphi_2^{-q'/q} |\varphi_{1\tau\tau}|^{q'} d\tau dy\right)^{1/q'}, \tag{4.16}$$

$$\left(\int_{U_2} |M(t)|^{q'} \varphi_2^{-q'/q} |\Delta\varphi_1|^{q'} dxdt\right)^{1/q'} \leq R^{\frac{N+\theta}{q'}-1} \left(\int_{U_2} \left|\tilde{M}(\tau)\right|^{q'} \varphi_2^{-q'/q} |\Delta\varphi_1|^{q'} d\tau dy\right)^{1/q'} \tag{4.17}$$

Où

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\tau) &= \xi_0 + \xi_1 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dy + \xi_2 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v|^2 dy \\ &\quad + \frac{d}{2d\tau}(\xi_3 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dy + \xi_4 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla v|^2 dy). \end{aligned}$$

Pour le terme contenant la mémoire, réécrivons-le comme

$$\int_{U_2} \varphi_2^{-q'/q} \left|\int_t^{+\infty} g(\nu - t)\Delta\varphi_1(\nu)d\nu\right|^{q'} dtdx$$

Et utiliser la mise à l'échelle pour obtenir

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{U_2} (\varphi_2)^{-q'/q} \left|\int_t^{+\infty} g(\nu - t)\Delta\varphi(\nu)d\nu\right|^{q'} dtdx \\ &= \textstyle\int_{D_R} |\Delta\phi|^{q'} \phi^{-q'/q} \int_0^{2R} (\mu)^{-q'/q} \left|\int_t^{+\infty} g(\nu - t)\mu(\nu)d\nu\right|^{q'} dtdx \\ &\leq CR^{N+\theta-2q'} \textstyle\int_\Omega |\Delta\phi|^{q'} \varphi^{-\frac{q'}{q}} \left|\int_{R^\theta\tau}^{+\infty} g(\nu - R^\theta\tau)\mu(\nu)d\nu\right|^{q'} d\tau dy. \end{aligned}$$

0ù

$$
\begin{aligned}
\Omega &: = \{(\tau, y) : 1 \leq \tau, |y| \leq 2\} \\
& \quad et \\
D_R &: = \{x \in \mathbb{R}^N : R < |x| < 2R\}.
\end{aligned}
$$

Et en vertu de l'hypothèse (H) et du changement de variable

$$
1 + \nu - R^\theta \tau = \eta
$$

Et le fait que μ est non croissant nous voyons que

$$
\int_{R^\theta \tau}^{+\infty} g(\nu - R^\theta \tau)\mu(\nu) d\nu \leq K \int_1^{+\infty} \frac{\mu(\eta + R^\theta \tau - 1)}{\eta^\rho} d\eta
$$

Comme $R^\theta \tau \geq 1$ et comme $\mu(\eta) = 0$ pour $\eta \geq 2$
et $\mu(\eta) \leq 1$

on a

$$
\int_{R^\theta \tau}^{+\infty} g(\nu - R^\theta \tau)\mu(\nu) d\nu \leq K \int_1^2 \frac{1}{\eta^\rho} d\eta \leq C
$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{U_2} \varphi_2^{-q'/q} \left| \int_s^{+\infty} g(t-s)\Delta\varphi_1(t) dt \right|^{q'} ds dx \right)^{1/q'} \\
&\leq C R^{\frac{N+\theta}{q'} - 2} \left(\int_{U_2} \varphi_2^{-q'/q} |\Delta \varphi_1|^{q'} d\tau dy \right)^{1/q'}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

En vertu de (4.16) - (4.18), (4.5) et (4.6), on trouve

$$
A \leq C \left(R^{\frac{N+\theta}{q'} - 2\theta} + R^{\frac{N+\theta}{q'} - 1} + R^{\frac{N+\theta}{q'} - 2} \right)
$$

Et

$$
B \leq C \left(R^{\frac{N+\theta}{p'} - 2\theta} + R^{\frac{N+\theta}{p'} - 1} + R^{\frac{N+\theta}{p'} - 2} \right)
$$

Les relations (4.11) et (4.16) impliquent que, pour un R suffisamment grand, nous avons

$$
\int_W |u|^q \varphi_2 dx dt \leq B \left(\int_{V_1 \cup V_2} |v|^p \varphi_1 dx dt \right)^{1/p} \leq C (AB^p)^{\frac{q}{pq-1}}. \tag{4.19}
$$

Maintenant nous imposons les conditions

$$
1 < p, q < 1 + \min \left\{ \frac{1}{N + \theta - 1}, \frac{2\theta}{N - \theta} \right\}
$$

Ensuite, nous passons à la limite quand $R \to \infty$ en (4.19) on obtient

$$\lim \int_W |u|^q \varphi_2 dxdt \leq 0.$$

Cela contredit notre hypothèse selon laquelle u est une solution non triviale. Également, en utilisant les autres estimations, nous atteindrons $v = 0$ c'est à dire.qui est encore une contradiction. Ceci complète la preuve. ■

4.4 Conditions nécessaires pour des solutions locales et globales

Théorème 4.2 *Soit le couple de fonctions (u, v) une solution locale à (4.1) ou $T < +\infty$ et $p, q > 1$ ensuite,*
il existe des constantes α et β telles que

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf \left(u_1(x) + v_1(x)\right) \leq C_{1/4} T^{1-2p'} \left(\alpha T^{2(p'-q')} + \beta\right)$$

Preuve. Par la définition d'une solution faible

$$pour\ tout\ \varphi \in C_0^\infty(Q_T),\ \varphi \geq 0$$

On a

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |v|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx \\ &\leq \int_{Q_T} |u|\,|\varphi_{tt}|\,dxdt + \int_{Q_T} |M(t)|\,|u|\,|\Delta\varphi|\,dxdt \\ &+ \int_{Q_T} |u(s,x)| \left| \int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right| dsdx. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Et

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^q \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\varphi(0,x)\,dx \\ &\leq \int_{Q_T} |u|\,|\varphi_{tt}|\,dxdt + \int_{Q_T} |M(t)|\,|u|\,|\Delta\varphi|\,dxdt \\ &+ \int_{Q_T} |u(s,x)| \left| \int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right| dsdx. \end{aligned} \tag{4.21}$$

En utilisant l'inégalité de ε -Young, nous pouvons estimer tous les termes du côté droit de (4.20). En effet, comme

$$|u|\,|\varphi_{tt}| = |u|\,\varphi^{1/q}\varphi^{-1/q}\,|\varphi_{tt}|\,,$$

Nous trouvons pour $\varepsilon > 0$

$$\int_{Q_T} |u|\,|\varphi_{tt}|\,dtdx \leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^q \varphi dtdx + C_\varepsilon \int_{Q_T} \varphi^{-q'/q} |\varphi_{tt}|^{q'}\,dtdx. \tag{4.22}$$

De manière similaire, on trouve

$$\int_{Q_T} |M(t)|\,|u|\,|\Delta\varphi|\,dtdx \leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^q \varphi dxdt + C_\varepsilon \int_{Q_T} |M(t)|^{q'} \varphi^{-q'/q} |\Delta\varphi|^{q'} dxdt, \tag{4.23}$$

Et

$$\int_{Q_T} |u(s,x)| \left| \int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right| dsdx \leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^q \varphi dsdx + C_\varepsilon \int_{Q_T} \varphi^{-q'/q} \left| \int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{q'} dsdx. \tag{4.24}$$

On en déduit (4.22) - (4.23) et (4.20) que

$$\int_{Q_T} |v|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx \leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^q \varphi dtdx + C_\varepsilon \int_{Q_T} \left(|\varphi_{tt}|^{q'} + |M(t)|^{q'} |\Delta\varphi|^{q'} + \left| \int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{q'} \right) \varphi^{-q'/q} \tag{4.25}$$

De même, on trouve

$$\int_{Q_T} |u|^q \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} v_1(x)\varphi(0,x)\,dx \leq \varepsilon \int_{Q_T} |v|^p \varphi dtdx + C_\varepsilon \int_{Q_T} \left(|\varphi_{tt}|^{p'} + |M(t)|^{p'} |\Delta\varphi|^{p'} + \left| \int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{p'} \right) \varphi^{-p'/p} \tag{4.26}$$

En prenant $\varepsilon \leq 1/4$, on déduit de (4.25) et (4.26) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} (u_1(x)+v_1(x))\,\varphi(0,x)\,dx &\leq C_\varepsilon \int_{Q_T} \left(|\varphi_{tt}|^{q'} + |M(t)|^{q'} |\Delta\varphi|^{q'} + \left| \int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{q'} \right) \varphi^{-q'/q} \\ &+ C_\varepsilon \int_{Q_T} \left(|\varphi_{tt}|^{p'} + |M(t)|^{p'} |\Delta\varphi|^{p'} + \left| \int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{p'} \right) \varphi^{-p'/p}\end{aligned} \tag{4.27}$$

Nous choisissons la fonction test

$$\varphi(t,x) := \phi\left(\frac{|x|}{R}\right)\mu\left(\frac{t}{T}\right)$$

Où

$$\begin{aligned} \phi &\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \phi \geq 0, \\ supp\phi &\subset \left\{x \in \mathbf{R}^N : 1 < |x| < 2\right\}, \\ |\Delta\phi| &\leq k\phi, \end{aligned}$$

Et nous prenons

$$\mu\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1, \; 0 \leqslant t \leqslant T/2 \\ 1 - \frac{(t-T/2)^3}{(T/2)^3}, \; T/2 \leqslant t \leqslant T \\ 0, \; t \geqslant T. \end{cases}.$$

Ensuite, nous estimons les six termes dans la partie droite de (4.27). En faisant le changement de variables

$$t = \tau T$$

Et en utilisant l'hypothèse sur φ, on trouve

$$\int_{Q_T} \varphi^{-q'/q} |\varphi_{tt}|^{q'} \leq \alpha T^{1-2q'} \int_{\mathbf{R}^N} \phi, \tag{4.28}$$

$$\int_{Q_T} |M(t)|^{q'} \varphi^{-q'/q} |\Delta\varphi|^{q'} \leq T\tilde{M}(T)^{q'} k^{q'} R^{-2q'} \int_{\mathbf{R}^N} \phi, \tag{4.29}$$

$$\int_{Q_T} \varphi^{-q'/q} \left| \int_s^T g(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{q'} \leq C k^{q'} R^{-2q'} T^2 \left(\int_0^\infty g(t)dt \right)^{q'} \int_{\mathbf{R}^N} \phi, \tag{4.30}$$

$$\int_{Q_T} \varphi^{-p'/p} |\varphi_{tt}|^{p'} \leq \beta T^{1-2p'} \int_{\mathbf{R}^N} \phi, \tag{4.31}$$

$$\int_{Q_T} |M(t)|^{p'} \varphi^{-p'/p} |\Delta\varphi|^{p'} \leq T\tilde{M}(T)^{p'} k^{p'} R^{-2p'} \int_{\mathbf{R}^N} \phi, \tag{4.32}$$

Et

$$\int_{Q_T} \varphi^{-p'/p} \left| \int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt \right|^{p'} \leq C k^{p'} R^{-2p'} T^2 \left(\int_0^\infty h(t)dt \right)^{p'} \int_{\mathbf{R}^N} \phi. \tag{4.33}$$

Réunissant les relations (4.28) - (4.33), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} &\inf_{|x|>R} (u_1(x) + v_1(x)) \int_{\mathbf{R}^N} \phi \\ &\leq C_{1/4} \left[\alpha T^{1-2q'} + T\tilde{M}(T)^{q'} k^{q'} R^{-2q'} + C k^{q'} R^{-2q'} T^2 \right] \textstyle\int_{\mathbf{R}^N} \phi. \\ &+ C_{1/4} \left[\beta T^{1-2p'} + T\tilde{M}(T)^{p'} k^{p'} R^{-2p'} + C k^{p'} R^{-2p'} T^2 \right] \textstyle\int_{\mathbf{R}^N} \phi. \end{aligned} \tag{4.34}$$

En posant $R \to \infty$, on obtient

$$\liminf_{|x|\to\infty} (u_1(x) + v_1(x)) \leq C_{1/4} \left[\alpha T^{1-2q'} + \beta T^{1-2p'} \right]. \tag{4.35}$$

Donc le théorème est prouvé

On peut déduire immédiatement le résultat suivant. ■

Corollaire 4.1 *Supposons que*

$$\begin{aligned} &p, q > 1 \\ &et \\ &u_1(x) + v_1(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Si (4.1) admet une solution globale faible, alors

$$\liminf_{|x|\to\infty} (u_1(x) + v_1(x)) = 0.$$

Preuve. Supposons que (4.1) a une solution globale faible et que

$$S := \liminf_{|x|\to\infty} (u_1(x) + v_1(x)) > 0.$$

Puis à partir de (4.35), il apparaît que

$$T \leq \max\left\{ \left(\frac{\alpha+\beta}{S} C_{1/4}\right)^{1/(p'-1)}, \left(\frac{\alpha+\beta}{S} C_{1/4}\right)^{1/(q'-1)} \right\}.$$

C'est une contradiction. ■

Chapitre 5

Explosion et durée de vie des solutions pour l'équation de membrane élastique avec retard

Sommaire

5.1 introduction

L'analyse de la solution d'un système mathématique peut fournir des informations précieuses sur le comportement d'un problème du monde réel, guider les processus de prise de décision et contribuer à l'avancement des connaissances dans le domaine concerné. Le but de ce travail est d'examiner le problème mentionné ci-dessous :

$$\begin{cases} w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr + \mu_0 w_t(y,t) + \mu_1 w_t(y,t-\tau) = \left|w\right|^{q-2} w, & y \in \Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t, \\ w\left(y,0\right) = w_0(y), \quad w_t\left(y,0\right) = w_1(y), & y \in \Omega, 0 < t, \\ w_t\left(y,t-\tau\right) = f_0(y,t), & y \in \Omega, \ t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω appartient à $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega(n \geq 2)$, les variables w, y et t désignent respectivement le déplacement transversal de la plaque, la coordonnée spatiale dans la direction de l'écoulement du fluide et le temps. Les paramètres σ, d et b désignent respectivement les termes d'amortissement structurel viscoélastique, la rigidité (la raideur) non linéaire et la charge de traction dans le plan. Ces quantités subissent une non-dimensionnement, où b, d, σ et μ_0 sont des constantes maintenues fixes et positives. Le paramètre μ_1 est un nombre réel et $h(t)$ est une fonction positive incorporant le noyau de la mémoire, conformément aux conditions définies dans (**H1**). Le retard temporel est désigné par $\tau > 0$, et les fonctions w_0, w_1, f_0 sont des entités prédéterminées appartenant à des espaces fonctionnels appropriés. En l'absence du terme de retard, l'équation (5.1) est liée à l'équation du panneau de flottement comportant un terme mémoire. Cette équation émerge dans des expériences en soufflerie menées à des vitesses supersoniques pour étudier le comportement d'un panneau. Pour une dérivation détaillée de ce modèle, on peut consulter les travaux de la littérature $[16]$. Pour des informations supplémentaires sur l'équation de Balakrishnan-Taylor, les lecteurs intéressés peuvent se référer à $[16], [27], [31-35]$. Zarai" et Tatar ont exploré les équations d'onde incorporant des termes de mémoire de Balakrishnan-Taylor et des termes sources :

$$\begin{array}{ll} w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr = \left|w\right|^{q-2} w, & y \in \Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t. \end{array} \tag{5.2}$$

ils ont montré un résultat de décroissance exponentielle pour l'énergie sous la condition que le noyau présente une décroissance exponentielle. De plus, ils ont abordé le scénario consistant à incorporer le terme $\Delta^2 w + \Delta^2 w_t$ dans le problème décrit par l'équation (5.2),

$$\begin{cases} w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr + \Delta^2 w + \Delta^2 w_t = |w|^{q-2}w, & y \in \Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t, \\ w(y,t) = 0, & y \in \partial\Omega, 0 < t. \end{cases} \tag{5.3}$$

noté comme l'apparition d'une explosion de solution pour l'équation (5.3) a été démontrée dans les conditions de $q > 2$ et d'énergie initiale négative $E(0)$.Par la suite, les résultats ont été affinés en établissant une caractéristique de décroissance polynomiale pour la fonction de relaxation, illustrant une décroissance polynomiale dans la littérature. Ils ont étendu les considérations de stabilité de (5.2) et les résultats d'explosion aux cas où $E(0) \geq 0$ dans le cadre plus général du modèle (5.3).

L'objectif de ce manuscrit est d'étudier le phénomène d'explosion dans le contexte du problème (5.1), qui intègre les termes de retard et de source. L'introduction du terme de retard $\mu 1 wt(y, t-\tau)$ distingue ce problème de ceux précédemment abordés dans la littérature. Les retards se manifestent fréquemment dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la biologie, la thermodynamique et l'économie. Par conséquent, les équations décrivant la dynamique des solutions pour les équations aux dérivées partielles (EDP) effectuées par retard temporel sont devenues un domaine de recherche dynamique actuellement, comme en témoignent des travaux tels que $[16]$, $[27]$, $[33-36]$ et les références qui y sont contenues. La présence d'un retard peut constituer une source potentielle d'instabilité, comme l'ont démontré des travaux antérieurs. Ces travaux ont établi qu'un retard même minime pourrait déstabiliser un système asymptotiquement stable en l'absence de retard, à moins que des conditions de contrôle supplémentaires ne soient mises en œuvre. Nicaise et Pignotti ont démontré une stabilité exponentielle de l'énergie sous l'hypothèse $\mu_1 < \mu_0$. Cependant, dans le cas où $\mu_1 \geq \mu_0$, ils ont pu construire une séquence de retards conduisant à une instabilité de la solution correspondante. Abordant la stabilité asymptotique, Mi Jin Lee et al. a étudié l'équation viscoélastique de Kirchhoff suivante avec des termes de retard et d'amortissement tels que

$$\begin{aligned} & w_{tt} - \left(b + d\left\|\nabla w\right\|^2 + \sigma\left(\nabla w(y,t), \nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) \\ & + \int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr + \mu_0 w_t(y,t) + \mu_1 w_t(y,t-\tau) = |w|^{q-2}w, \end{aligned}$$

pour $y \in \Omega, 0 < t$ avec des conditions initiales et aux limites appropriées. Ils ont montré la nature asymptotique par des fonctionnelles de Lyapunov appropriées. S'appuyant sur des recherches antérieures, cette étude se penche sur le phénomène d'explosion de la solution dans le cadre de

l'équation de la membrane élastique non linéaire comportant des termes de retard et de source. Notamment, le comportement d'explosion des solutions pour une équation de Kirchhoff viscoélastique avec amortissement de Balakrishnan-Taylor et un terme de retard reste non abordé dans la littérature existante, ce qui donne l'impulsion à la présente enquête.
Le reste du travail est organisé comme suit : La section 2 présente les hypothèses et les lemmes essentiels faisant partie intégrante de notre analyse, aboutissant à un lemme essentiel et au résultat principal. Dans la section 3, nous expliquons l'énoncé et fournissons la preuve de notre principal résultat d'explosion.

5.2 Hypothèses et lemmes

Dans cette section, nous introduisons un ensemble d'hypothèses et de lemmes. L'espace de Lebesgue standard $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$, accompagnés de leurs normes conventionnelles $\|.\|_2, \|.\|_{\mathcal{H}_0^1}$, sont utilisés.
Ici, les hypothèses concernant la fonction de relaxation g sont décrites :
(H1) Supposons une fonction C^1 non croissante $h : [0,\infty) \to (0,\infty)$ de manière à ce que

$$b - \int_0^\infty h(r)dr := l > 0, \text{ et } \int_0^\infty h(r)dr < \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(q(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\right)(q-2)}}. \tag{5.4}$$

(H2) Choisir une constante positive δ de manière à ce que

$$\begin{array}{c} \tau\mu_1 < \delta < \tau(2\mu_0 - \mu_1) \quad \text{si } \mu_1 < \mu_0 \\ \delta = \mu_0 \quad \text{si } \mu_1 = \mu_0. \end{array} \tag{5.5}$$

Pour simplifier, on prend

$$(h \circ \psi)(t) := \int_0^t h(t-r) \int_\Omega |\psi(t) - \psi(r)|^2 \, dydr,$$

ou ψ peut être une fonction de valeurs vectorielles ou scalaires. Prenez $g \in C^1(R)$ et $\psi \in \mathcal{H}_0^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$,
alors ce qui suit peut être facilement prouvé.

Lemme 5.1 *Pour $w \in \mathcal{L}^2(o,T;\mathcal{H}_0^1(\Omega))$ alors*

$$\int_\Omega \left(\int_0^t h(t-r)\left(w(t) - w(r)\right) dr \right)^2 dy \le (b-l)\, C_*^2 \,(h \circ w)(t), \tag{5.6}$$

où l comme dans (5.4) et C_* est la constante de Poincaré.

Ici, présentez

$$z\,(y,\rho,t)=w_t\,(y,t-\tau\rho)\,,\quad y\in\Omega,\quad \rho\in(0,1)\;\; t>0, \tag{5.7}$$

alors

$$\tau z_t\,(y,\rho,t)+z\rho\,(y,\rho,t)=0,\quad \text{dans }\;\Omega\times(0,1)\times(0,\infty)\,. \tag{5.8}$$

Par conséquent, (5.1) équivaut à

$$\begin{cases} w_{tt}-\left(b+d\left\|\nabla w\right\|^2+\sigma\left(\nabla w(y,t),\nabla w_t(y,t)\right)\right)\Delta w(y,t) & \\ +\int_0^t h(t-r)\Delta w(y,r)dr+\mu_0 w_t(y,t)+\mu_1 z(y,1,t)=\left|w\right|^{q-2}w, & y\in\Omega,t>0, \\ \tau z_t\,(y,\rho,t)+z_\rho\,(y,\rho,t)=0 & y\in\Omega,t>0,\rho\in(0,1). \\ w(y,t)=0, & y\in\partial\Omega,t\geq0, \\ w\,(y,0)=w_0(y),\quad w_t\,(y,0)=w_1(y), & y\in\Omega,t>0, \\ z\,(y,\rho,0)=f_0(y,t\rho), & y\in\Omega,t>0,\rho\in(0,1). \end{cases} \tag{5.9}$$

Prendre une constante positive δ de telle sorte que

$$\tau\mu_1<\delta<\tau\left(2\mu_0-\mu_1\right).$$

Théorème 5.1 *Supposons que $\mu_0\leq\mu_1$. Alors pour $w_0\in\mathcal{H}_0^1(\Omega)\,,\,w_1\in\mathcal{L}^2(\Omega)\,,\,f_0\in\mathcal{L}^2(\Omega\times(0,1))$ et $T>0$, on peut trouver une unique solution faible (w,z) de (5.9) sur $(0,T)$ de manière à ce que*

$$w\in C\left([0,T]\,;\mathcal{H}_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T]\,;\mathcal{L}^2(\Omega)\right).$$
$$w_t\in\mathcal{L}^2\left(0,T;\mathcal{H}_0^1(\Omega)\right)\cap\mathcal{L}^2\left((0,T)\times\Omega\right).$$

Lemme 5.2 *Soit $q\geq2$, l'inégalité*

$$\left\|w\right\|_q\leq c_r\left\|\nabla w\right\|_2,\;\; \text{pour } w\in\mathcal{H}_0^1(\Omega)\,,$$

est valable avec une constante positive c_r

Lemme 5.3 *Soit $q\geq2$, alors on peut trouver une constante $C>0$ de manière à ce que*

$$\left\|w\right\|_q^r\leq c_r\left(\left\|\nabla w\right\|_2^2+\left\|w\right\|_q^q\right), \tag{5.10}$$

avec $2\leq r\leq q$ et pour tout $w\in\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

5.3 Explosion

Dans cette section, notre objectif consiste à explorer les résultats d'explosion pour des solutions spécifiques caractérisées par une énergie initiale à la fois positive et non positive. Pour commencer, nous établissons la fonction énergétique du problème donné (5.9) comme suit :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|w_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{b}{2}\|\nabla w\|_2^2 + \left(b - \int_0^t h(r)dr\right)\right]\|\nabla w\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^1 z^2(y,\rho,t)\,d\rho dy \\ &+ \frac{1}{2}(h \circ w)(t) - \frac{1}{q}\|w\|_q^q. \end{aligned} \tag{5.11}$$

où la constante δ est positive remplissant (5.5) à $\tau = 1$.
Pour l'énoncé de notre résultat, prenons h tele que

$$\int_0^\infty h(t)dt < \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(q(1-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta)\right)(q-2)}}, \tag{5.12}$$

où $0 < \beta < 1$ est un nombre fixe.

Lemme 5.4 *$E(t)$ est une fonction non croissante et α est une constante positive, alors*

$$E'(t) \leq -\alpha\left(\|w_t\|_2^2 + \int_\Omega z^2(y,1,t)\,dy\right), \text{ pour } t \geq 0. \tag{5.13}$$

Preuve. Pour démontrer, nous multiplions w_t avec la première équation de (5.9) et intégrons sur Ω. Après cela, multipliez $\frac{\delta}{\tau}z$ avec la deuxième équation de (5.9) et intégrez sur $(0,1)\times\Omega$, puis combinez les résultats :

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\frac{g(t)}{2}\|\nabla w\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(h' \circ \nabla w\right) - \mu_0\|w_t\|_2^2 + \frac{\delta}{2\tau}\|w_t\|_2^2 - \frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega z^2(y,1,t)\,dy \\ &\quad -\frac{\delta}{2\tau}\int_\Omega |w_t|^2\,dy - \mu_1\int_\Omega z(y,1,t)\,w_t dy \\ &\leq -\alpha\left(\|w_t\|_2^2 + \int_\Omega z^2(y,1,t)\,dy\right), \text{ pour } t \geq 0, \end{aligned}$$

dans lequel $\alpha = \min\left\{\mu_0 - \frac{\delta}{2\tau} - \frac{\mu_1}{2}, \frac{\delta}{2\tau} - \frac{\mu_1}{2}\right\} > 0$ ∎
Ensuite, à partir du lemme 2, on trouve

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}l\|\nabla w\|_2^2 + \frac{1}{2}(h \circ \nabla w) - \frac{1}{q}\|w\|_q^q \\ &\geq \frac{1}{2}l\|\nabla w\|_2^2 + \frac{1}{2}(h \circ \nabla w) - \frac{B_1^q}{q}\left(l^{\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_2\right)^q \\ &\geq F\left(\sqrt{l\|\nabla w\|_2^2 + (h \circ \nabla w)}\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

ou $B_1 = \frac{C_r^q}{l^{\frac{q}{2}}}$ et

$$F(y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{B_1^q}{q}y^q, \ y > 0.$$

Remarque 5.1 *On peut démontrer que la fonctionnelle F présente un comportement croissant dans l'intervalle $(0,1)$, une tendance décroissante dans $(\lambda 1, \infty)$ et atteint son maximum à $\lambda 1 = B1^{-\frac{q}{q-2}}$. La valeur maximale correspondante est notée*

$$E1 = F(\lambda 1) = \frac{q-2}{2q}B1^{-\frac{q}{q-2}} = \frac{q-2}{2q}\lambda_1^2.$$

Lemme 5.5 *Supposons $q \geq 2$, et **(H1)**, **(H2)** satisfait et supposons que $l\,\|\nabla w\|_2^2 > \lambda_1^2$ et $E(0) < E_1$ alors on peut trouver $\lambda_2 > \lambda_1$ de telle manière que pour tout $t \in [0,T)$*

$$l\,\|\nabla w\|_2^2 + (h \circ \nabla w)(t) \geq \lambda_2^2. \tag{5.15}$$

et

$$\|w\|_q^q \geq \frac{B_1^q}{q}\lambda_2^q.$$

Preuve. Supposons une fonction non croissante $E(t)$, alors

$$E(t) \leq E(0) < E_1, \ \ pour\ tous \ \ t > 0.$$

Les propriétés de F implique qu'il existe $\lambda_2^{\backprime} < \lambda_1^{\backprime} < \lambda_2$ tel que $F(\lambda_2^{\backprime}) = F(\lambda_2) = E(0)$. Alors, comme $F(0), l\,\|\nabla w\|_2^2 > \lambda_1^2$ et la continuité dans le temps de $F(\sqrt{l\,\|\nabla w\|_2^2 + (h \circ \nabla w)(t)})$ implique

$$l\,\|\nabla w\|_2^2 + (h \circ \nabla w)(t) \geq \lambda_2^2, \ \ \forall t \in [0,T).$$

De plus, la définition de $E(t)$ par (5.11), en appliquant $(5.4), (5.15)$ et la définition de F par (5.14), on obtient ce qui suit

$$\|w\|_q^q \geq \frac{1}{2}\left(l\,\|\nabla w\|_2^2 + (h \circ \nabla w)(t)\right) - E(0) \geq \frac{1}{2}\lambda_2^2 - F(\lambda_2) = \frac{B_1^q}{q}\lambda_2^q.$$

La preuve est donc terminée ■

Théorème 5.2 *soit **(H1)** et **(H2)** on Prenant compte du $w_0, w_1 \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ avec $l\,\|\nabla w\|_2^2 > \lambda_1^2$, $E(0) < \beta E_1$.*
Alors la solution u de (5.9) explose en temps fini

$$T^* \leq \frac{(1-\alpha)}{\alpha\Gamma\,[L(0)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}},$$

où Γ une constante positive.

Preuve. Dans le cas contraire, supposons que la solution du problème (5.9) soit globale. Par conséquent, il existe une constante positive K_1 de telle sorte que

$$\|w_t\| + \|\nabla w\|_2^4 + \|\nabla w\|_2^2 + \|w\|_q^q \leq K_1. \ \forall t \geq 0. \tag{5.16}$$

l'ensemble

$$H(t) = E_2 - E(t),$$

dans laquelle $E_2 \in (E(0), \beta E_1)$ .D'après le lemme 4, (5.15) et $E_1 = \frac{q-1}{2q}\lambda_1^2$,on obtient

$$H(t) \geq H(0) = E_2 - E(0) > 0, \tag{5.17}$$

et

$$H(t) \leq \frac{1}{q}\|w\|_q^q. \tag{5.18}$$

Définir

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega w_t w dy + \frac{\varepsilon}{2}\mu_0 \int_\Omega w^2 dy + \sigma\varepsilon \|\nabla w\|_2^4, \tag{5.19}$$

où $0 < \varepsilon < 1$ sera choisi plus tard

$$0 < \alpha < \frac{q-2}{2q}. \tag{5.20}$$

Maintenant, à partir de (5.19) et (5.9), on obtient ce qui suit

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \|w_t\|_2^2 - \varepsilon b \|\nabla w\|_2^2 - \varepsilon d \|\nabla w\|_2^4 + \|w\|_q^q \\ &\quad + \int_\Omega \nabla w \int_0^t h(t-r)\nabla w(r) dr dy - \mu_1 \varepsilon \int_\Omega z(y,1,t) w dy. \end{aligned}$$

Ici, on utilise les inégalités de Hölder et Young, on a

$$\mu_1 \varepsilon \int_\Omega z(y,1,t) w dy \leq \delta_1 \mu_1 \varepsilon \|w\|_2^2 + \frac{\mu_1}{4\delta_1}\int_\Omega z^2(y,1,t) dy,$$

pour $\delta, \eta > 0$, et

$$\int_\Omega \nabla w \int_0^t h(t-r)\nabla w(r) dr dy \geq -\eta\varepsilon (h \circ \nabla w)(t) + \left(1 - \frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t h(t-r) dr \|\nabla w(r)\|_2^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) H^{-\alpha}(t) - \varepsilon \frac{\mu_1}{4\delta_1 \alpha_1}\right] H'(t) + \varepsilon \left[-b - \left(\frac{1}{4\eta} - 1\right)\int_0^t h(r) dr\right] \|\nabla w\|_2^2 \\ &\quad - d\varepsilon \|\nabla w\|_2^4 - \varepsilon\eta (h \circ \nabla w) - \delta_1 \mu_1 \varepsilon \|w\|_2^2 + \varepsilon \|w\|_q^q, \end{aligned} \tag{5.21}$$

en utilisant le fait que$-\int_\Omega z^2(y,1,t)wdy \geq -\frac{1}{\alpha_1}H^{'}(t)$ dans (5.21), et en choisissant $\delta_1 = \frac{\mu_1}{4\alpha_1 k}H^\alpha(t)$, k grand à préciser, en ajoutant également le terme $p(H(t)-E_2+E(t))$ et en utilisant la définition de $E(t)$ (5.11), on obtient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &\geq [(1-\alpha)-\varepsilon k]\, H^{-\alpha}(t)H^{'}(t)+\varepsilon\left(\frac{q+2}{2}\right)\|w_t\|_2^2+\varepsilon d\left(\frac{q}{4}-1\right)\|\nabla w\|_2^4+\varepsilon qH(t) \qquad (5.22)\\ &+\varepsilon\left[\frac{(q-2)}{2}b-\left(\frac{(q-2)}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t h(r)dr\right]\|\nabla w\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{q}{2}-\eta\right)(h\circ\nabla w)\\ &-\frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1}\varepsilon H^\alpha(t)\|w\|_2^2+\varepsilon\frac{\delta_1 q}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(y,\rho,t)d\rho dy-\varepsilon qE_2. \end{aligned}$$

Maintenant, nous prenons η pour satisfaire

$$\frac{b-l}{2(1-\beta)\,l\,(q-2)}<\eta<\frac{q(1-\beta)}{2}+\beta. \tag{5.23}$$

ce qui est vrai grâce à (5.4). Après cela, en utilisant le fait que $l\|\nabla w\|_2^2+(h\circ\nabla w)(t)\geq\lambda_2^2$ par (5.15)
pour obtenir

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(q-2)}{2}b-\left(\frac{(q-2)}{2}+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t h(r)dr\right]\|\nabla w\|_2^2+\varepsilon\left(\frac{q}{2}-\eta\right)(h\circ\nabla w)-qE_2 \qquad (5.24)\\ \geq\ &\beta\frac{(q-2)}{2}\left(l\|\nabla w\|_2^2+(h\circ\nabla w)\right)-qE_2\\ =\ &\beta\frac{(q-2)}{2}\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\left(l\|\nabla w\|_2^2+(h\circ\nabla w)\right)+\beta\frac{(q-2)}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\left(l\|\nabla w\|_2^2+(h\circ\nabla w)\right)-qE_2\\ \geq\ &C_1\left(l\|\nabla w\|_2^2+(h\circ\nabla w)\right)+C_2, \end{aligned}$$

où $C_1=\beta\frac{(q-2)}{2}\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, $C_2=\beta\frac{(q-2)}{2}\lambda_1^2-qE_2$.
De plus, à partir de $E_2<\beta E_1$ et $E_1=\frac{(q-2)}{2}\lambda_1^2$.On observe que $\beta\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2}>0$, et $C_2=\beta\frac{(q-2)}{2}\lambda_1^2-qE_2>\beta\left(\frac{(q-2)}{2}\lambda_1^2-qE_1\right)=0$.Donc (5.22) devient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) &\leq [(1-\alpha)-\varepsilon k]\, H^{'}(t)H^{-\alpha}(t)+\varepsilon C_3\left(l\|\nabla w\|_2^2+(h\circ\nabla w)\right)-\frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1}\varepsilon H^\alpha(t)\|w\|_2^2\\ &+\varepsilon\left(\frac{q+2}{2}\right)\|q_t\|_2^2+\varepsilon d\left(\frac{q}{4}-1\right)\|\nabla w\|_2^4+\varepsilon qH(t)+\varepsilon\frac{\delta_1 q}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(y,\rho,t)d\rho dy. \end{aligned}$$

En utilisant (5.18), on trouve

$$H^\alpha(t)\leq\left(\frac{1}{q}\right)^\alpha\|w\|_q^{\alpha q},$$

c'est à dire

$$H^{\alpha}(t)\left\|w\right\|_2^2 \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha}|\Omega|^{\frac{q-2}{q}}\left\|w\right\|_q^{2+\alpha q}, \tag{5.25}$$

et décomposant $qH(t)$ par

$$qH(t) = \left(2b_1 + (q-2b_1)\right)H(t),$$

où

$$b_1 < \frac{q}{2},$$

on obtient donc ce qui suit

$$\begin{aligned} L^{'}(t) \leq\ & \left[(1-\alpha) - \varepsilon k\right]H^{'}(t)H^{-\alpha}(t) + \varepsilon\left(\frac{q+2}{2} - b_1\right)\left\|w_t\right\|_2^2 \\ & + \varepsilon\left(C_1 l - c_r\left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha}|\Omega|^{\frac{q-2}{2}}\frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1} - b_1 l\right)\left\|\nabla w\right\|_2^2 + \varepsilon\left(c_1 - b_1\right)(h \circ \nabla w) \\ & + \varepsilon d\left(\frac{q}{4} - 1 - \frac{b_1}{2}\right)\left\|\nabla w\right\|_2^4 + \varepsilon\left(q - 2b_1\right)H(t) + \varepsilon\delta\left(\frac{q}{2} - b_1\right)\int_{\Omega}\int_0^1 z^2(y,\rho,t)d\rho dy \\ & + \varepsilon\left(\frac{2b_1}{q} - c_r\frac{\mu_1^2}{4\alpha_1 k}\left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha}|\Omega|^{\frac{q-2}{2}}\right)\left\|w\right\|_q^q. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ici, la constante k est sélectionnée de manière à ce que

$$C_1 l - c_r\left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha}|\Omega|^{\frac{q-2}{2}}\frac{\mu_1^2}{4k\alpha_1} - b_1 l > 0, \tag{5.27}$$

et

$$\frac{2b_1}{q} - c_r\frac{\mu_1^2}{4\alpha_1 k}\left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha}|\Omega|^{\frac{q-2}{2}} > 0, \tag{5.28}$$

d'après (5.26) et (5.27), on obtient

$$k > \min\left(\frac{c_r\mu_1^2\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha}|\Omega|^{\frac{r-2}{2}}}{4\alpha_1 l\left(C_1 - b_1\right)}, \frac{q^{1-\alpha}|\Omega|^{\frac{q-2}{2}}}{8\alpha_1 l b_1}\right),$$

et ε si petit tele que

$$\varepsilon < \frac{(1-\alpha)}{k},$$

et

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon\int_{\Omega} w_1 w_0 dy + \frac{\varepsilon}{2}\mu_0\int_{\Omega} w_0^2 dy + \sigma\varepsilon\left\|\nabla w_0\right\|_2^4 > 0. \tag{5.29}$$

Il existe donc $\xi > 0$ tel que

$$L^{'}(t) \leq \xi\left[H(t) + \left\|\nabla w\right\|_2^2 + (h \circ \nabla w) + \left\|\nabla w\right\|_2^4 + \int_{\Omega}\int_0^1 z^2(y,\rho,t)d\rho dy + \left\|w\right\|_q^q + \left\|w_t\right\|_2^2\right] \tag{5.30}$$

cela nous donne

$$L(t) \geq L(0) > 0 \text{ pour } t \geq 0.$$

La prochaine estimation est

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w_t w dy \right| &\leq \|w\|_2 \|w_t\|_2 \\ &\leq C \|w\|_q \|w_t\|_2 , \end{aligned} \tag{5.31}$$

ce qui implique

$$\left| \int_{\Omega} w_t w dy \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|w\|_q^{\frac{1}{1-\alpha}} \|w_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} . \tag{5.32}$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\left| \int_{\Omega} w_t w dy \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left[\|w\|_q^{\frac{\mu}{1-\alpha}} + \|w_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right], \tag{5.33}$$

pour$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ en choisissant $\theta = 2(1-\alpha)$,
on obtient $\mu = \frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha} \leq p$,donc

$$\left| \int_{\Omega} w_t w dy \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left[\|w\|_q^r + \|w_t\|_2^2 \right], \tag{5.34}$$

pour $r = \frac{2}{1-\alpha} \leq q$,en utilisant le lemme 3
on obtient

$$\left| \int_{\Omega} w_t w dy \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left[\|w\|_q^q + \|q_t\|_2^2 + H(t) \right]. \tag{5.35}$$

Par conséquent, en utilisant (5.35),
nous avons

$$\begin{aligned} L(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \left(H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} w_t w dy + \frac{\varepsilon}{2}\mu_0 \int_{\Omega} w^2 dy + \sigma\varepsilon \|\nabla w\|_2^4 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq C_6 \left(H(t) + \|w\|_q^q + \|w_t\|_2^2 + \|w\|_2^{\frac{2}{1-\alpha}} + \|\nabla w\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \right), \end{aligned} \tag{5.36}$$

pour $t \geq 0$ et $c_6 > 0$ De (5.16) et (5.17), on a

$$\|\nabla w\|_2^{\frac{4}{1-\alpha}} \leq K^{\frac{4}{1-\alpha}} \leq K^{\frac{4}{1-\alpha}} \frac{H(t)}{H(0)}, \text{ et } \|w\|_2^{\frac{2}{1-\alpha}} \leq K^{\frac{4}{1-\alpha}} \frac{H(t)}{H(0)}. \tag{5.37}$$

D'après (5.37), on obtient

$$L(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_7 \left(H(t) + \|w\|_q^q + \|w_t\|_2^2 \right), \quad t \geq 0. \tag{5.38}$$

avec $C_7 > 0$.En combinant (5.30) avec (5.38),
on obtient

$$L^{'}(t) \leq C_8 L(t)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ t \geq 0. \text{ ou } C_8 > 0. \tag{5.39}$$

Une simple intégration de (5.39) sur $(0, t)$ donne alors

$$L(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \Gamma\frac{t\alpha}{1-\alpha}}.$$

Puisque $L(0) > 0, (5.39)$implique que L devient infini en un temps fini. La preuve est donc terminée ∎

Conclution

Dans cette thèse, nous avons établit un résultat de non-existence d'un système viscoélastique avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et une source non linéaire dans tout l'espace. Le résultat de la non-existence est basé sur la méthode des fonctions test développé par Mitidieri et Pohozaev. Nous avons aussi établit des conditions nécessaires d'existence locale et globale. Exactement, nous avons trouvé un rang de valeurs pour p et q (puissances des termes source) pour laquelle nous avons la non-existence sous des hypothèses minimales sur les fonctions de relaxations g et h. les résultats obtenus dans cette thèse prolongent les résultats précédents de Zarai et Tatar. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans une revue scientifique internationale respectée dans le milieu (Classe B).

L'objectif principal et crucial de cette recherche est d'examiner une équation de membrane élastique non linéaire intégrant une détention et de sources de conditions dans un cadre délimité. Dans lequel nous obtenons des conditions suffisantes sur les données initiales et les fonctionnels impliqués pour que l'énergie initiale non positive des solutions ainsi que l'énergie initiale positive s'explosent en un temps fini. En outre, ce travail fournit aussi des estimations de la durée de vie de ces solutions.

Notre objectif ultime après ce travail de thèse est de traiter d'autres problèmes non locaux plus compliqués avec des dissipations fractionnelles.

Bibliographie

[1] A.Haraux and E.Zuazua,Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problrms,Arch.Rational Mech.Anal.,100 (1988),191-206.

[2] E.Mitidieri and S.Pohozaev,A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities,Proc.Steklov Inst.Math.,V.234 (2001),1-383.

[3] E.H.Brito,Decay estimates for generalized damped extensible string and beam equations,Nonlinear Analysis,TMA 8,(1984),pp.1489-1496.

[4] E.H.Brito,Nonlinear initial-boundary value problems,Nonlinear Analysis,TMA 11,(1987),pp.125-137.

[5] F.John,Blow up of solutions of nonlinear wave equations in three spece dimensions,Manuscripta Mat.,28(1979),235-268,

[6] H.Fujita,On the blowing up of solitions of the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$,J.Fac.Sci .Univ.Tokyo Sec.1A Math.16 (1966),105-113.

[7] H.R.Clark, Elastic membrane equation in bounded and unbounded domains, Elect.J. Qualit.Th.Diff.Eds,2002 No.11,p.1-21.

[8] H.R.Clark, Asymptotic and smoothness properties of a nonlinear equation with damping, connunication and Applied Analysis, 4 (2000), No 3,pp.321-337.

[9] H.R.Clark, Global classical solutions to the Cauchy problem for a nonlinear wave equation, Internat.J.Math.&Math.Sci.,Vol.21,(1998),pp.533-548.

[10] J.M.Ball, Initial boundary value problems for an extensible beam, J.Math. Analysis and Applications, 42, (1973),pp.66-90.

[11] J.M.Ball, Stability theory for an extensible beam, J.Di .Equations, 14,(1973), pp.369-418.

[12] J.Y.Park and J.Ja.Baeon The existence of solutions of strongly damped nonlinear wave equations.Internat .J.Math.& Math.Sci.,Vol.23 No.6 (2000), 369-382.

[13] M.Kirane and N.-e.Tatar, Nonexistence of solutions to a hyperbolic equation with a time fractional damping. Zeitschrift fur Analysis undihre Anwendungen (J, Anal,Appl) No.25 (2006), 131-42.

[14] N.-e.Tatar and A. Zarai, On a Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term, To appear in DCDIS.

[15] A. Zaraï and N.-e. Tatar , Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Arch. Math. (Brno) 46 (2010), no. 3, 157–176.

[16] N.-e. Tatar and A. Zaraï, Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Demonstratio A Mathématica. 1,44,pp 67-90 (2011)

[17] P.Biler.,Remark on the decay for damped string and beam equations, Nonlinear Analysis, TMA 10, (1986),pp. 839-842.

[18] P.Holmes, J.E.Marsden, Bifurcation to divergence and utterflow induced oscillations ; an in finite dimensional analysis, Automatica, Vol. 14 (1978).

[19] R.T.Glassey, Finite time blow up for solutions of nonlinear wave equations, Math. Z.,177 (1933), 323-340.

[20] R.T.Glassey,Existence in the large for $\Box u = F(u)$ in two space dimensions, Mat.Z., 178 (1981), 233-261.

[21] R.T.Glassey,Blow-up theorems for nonlinear wave equations, Math.Z., 132 (1973), 183-203.

[22] R.W.Dickey, The initial value problem for nonlinear semi-infinie string, Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, 82 A (1978), pp.19-26.

[23] S.Jiang and J.E. Munoz Rivera, A global existence theorem for the Dirichlet problem in nonlinear n-dimensionnal viscoelastic, Differential and Integral Equations, 9 (1996), 791-810.

[24] V.K. Kalantarrov and O.A. ladyzhenskaya, The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type, J.Soviet Math., 10 (1978), 53-70.

[25] Y.You, Inertial manifolds and stabilization of nonlinear beam equations with Balakrishnan-Taylor damping, Abstract and Applied Analysis, Vol. 1 Issue 1, (1996), pp 83-102.

[26] A. V. Balakrishnan and L. W. Taylor, Distributed parameter nonlinear damping models for flight structures, in Proceedings “Damping 89”, Flight Dynamics Lab and Air Force Wright Aeronautical Labs, WPAFB, 1989.

[27] R. W. Bass and D. Zes, Spillover, Nonlinearity, and flexible structures, in The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, NASA Conference Publication 10065 (ed. L.W. Taylor), 1991, 1-14.

[28] N.-e. Tatar and A. Zaraï, On a Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 18 (2011), no. 5, 615–627..

[29] Zaraï, Abderrahmane ; Tatar, Nasser-eddine. Non-solvability of Balakrishnan-Taylor equation with memory term in R^N. Advances in applied mathematics and approximation theory, 411–419, Springer Proc. Math. Stat., 41, Springer, New York, 2013.

[30] A.Zarai, N.-E. Tatar, S. Abdelmalek. Existence memberane equation with memory term and nonlinear boundary damping : Global existence, decay and blow up of the solution, Acta Math. Sci. 33B (1) (2013) 84-106

[31] E. Fridman, Y.Orlov, On stability of linear parpbolic disstributed parameter systems with time-varying delays,in : 46th IEEE conference on Decision and Control, New Orleans, December 2007.

[32] M. Kafini, S. Messaoudi, Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay, Applicable Analysis 0003-6811, (2018).

[33] S.A. Messaoudi, General decay of the solution energy ina viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Anal. 69 (8) (2008) 2589-2598.

[34] S. Tang. WU. Blow-up of the solution for viscolelastic wave equation with deley. Acta Mathematica Scienti 39B(1) (2019), 329-338.

[35] S.-T. Wu, General decay and blow-up of solutions for a viscoelastic equation with nonlinear boundary damping-source interactions, Z. Angew. Math.Phys. 63 (2012) 65-106.

[36] Y.H.King. Asymptotic stability of a problem with Balakrishnan-Taylor damping and a time delay, Compuers and Mathematics with Applications 70 (2015), 478-487.