



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique

Echahid Cheikh Larbi Tébessi University-Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature
et de la Vie

Département: Mathématiques



Mémoire de fin d'études Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

**Etude analytique et numérique de l'équation
intégrale non standard de Volterra**

Présenté Par:
LOUAFI Lamia

Devant le jury:

BOUZENADA Smail	PROF	Université Larbi Tébessi	Président
NABTI Abderrazak	M.C.A	Université Larbi Tébessi	Examineur
LEMITA Samir	M.C.A	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 08/06/2024

Etude analytique et numérique de l'équation
intégrale non standard de Volterra

LOUAFI Lamia

Echahid Cheikh Larbi Tebessi University
Tebessa, Algeria.

08-06-2024

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	10
1.1 Espaces de Banach	10
1.1.1 Espace normé	10
1.1.2 Espace de Banach	11
1.2 Théorèmes de point fixe	12
1.2.1 Point fixe de Banach	12
1.2.2 Point fixe de Schauder	12
1.2.3 Point fixe de Krasnoselskii	12
1.3 Quelques propriétés utilisées	13
1.4 Intégration numérique	14
1.4.1 Méthode de Trapèze	15
1.4.2 Méthode de Simpson	15
2 Etude analytique de l'équation proposée	19
2.1 Existence de la solution	19
2.2 Unicité de la solution	23

3 Etude numérique de l'équation proposée	27
3.1 Approximation de l'équation proposée	27
3.2 Etude du système algébrique	28
3.3 Analyse des erreurs	29
3.4 Tests numériques	31

Dédicace

A ceux qui n'ont pas d'égal dans l'univers, je te dédie cet effort et cette recherche, tu as toujours été mon inspiration, sur tes traces je marche "mon père" et "ma mère".

A mon frère "Yahia" et mon soutien quand je suis faible, je te dédie cet humble travail.

A ma deuxième maman, tante, à la fille de ma tante "Mofida".

A mes amis : "Mezhoud Houda", "Bentiba Djouhaina", "Hamdi Pacha Abir".

Pour tous ceux qui m'ont appris une lettre.

Remerciements

*Nous remercions **Allah** Tout-Puissant de m'avoir béni pour terminer cet humble travail et conformément à ses paroles (bénédictions et paix d'Allah soient sur lui) : "Celui qui ne remerciait pas les gens ne remerciait pas Dieu". Raconté par Ahmed et al-Tirmidhi.*

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements et ma gratitude à ceux qui ont aidé à élever mon chemin, à tous ceux qui m'ont appris des connaissances utiles, de mon professeur primaire à mes professeurs à l'université.

*Une salutation parfumée et des remerciements particuliers à mon superviseur Dr : **LEMITA Samir** qui m'a donné ses conseils et ses directions tout au long de la rédaction du mémoire.*

*Une salutation parfumée au professeur **BOUZENADA Smail**, professeur **NABTI Abderrazak**, à vous de ma part toutes les significations de respect, d'appréciation et de gratitude. Merci d'avoir accepté la discussion de ce mémoire.
Papa et Maman Je vous remercie de tout coeur pour vos efforts et sacrifices pour faire de mon parcours scolaire et de mon diplôme un succès.*

*Frère **YAHIA** merci pour ton soutien et tes encouragements envers moi pendant mon voyage d'étude merci d'être un pilier fort dans ma vie.*

ملخص

تلعب معادلات فريدهولم وفولتيرا التكاملية دوراً أساسياً في شتى فروع الرياضيات لما لها من تطبيقات في مختلف المجالات العلمية.

لهذا السبب قمنا في هذه المذكرة بدراسة شكل خاص من معادلة فولتيرا التكاملية تحوي على دالة مصدر غير معروفة وغير خطية.

باستخدام نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسيلسكي، نثبت وجود ووحداية حل المعادلة المقترحة وهذا تحت شروط معينة تم تحديدها مسبقاً.

باستخدام طريقة التكامل العددي لنيشتروم، نجد حلاً تقريبياً لمعادلتنا التكاملية، ومن ثم نعطي بعض الأمثلة التوضيحية.

كلمات مفتاحية

معادلة فولتيرا التكاملية. نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسيلسكي. التقريب العددي. طريقة نيشتروم.

Résumé

Les équations intégrales de Fredholm et de Volterra jouent un rôle essentiel dans les branches mathématiques à cause de leurs applications dans les divers domaines scientifiques.

Pour cette raison, dans ce mémoire on étudie une forme spécifique de l'équation intégrale de Volterra avec un terme source inconnu et non linéaire.

En utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii, on montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation proposée sous des conditions bien définies.

En utilisant la méthode d'intégration numérique de Nyström, on trouve une solution approchée de notre équation intégrale, puis on donne des exemples illustratifs.

Mots clés

Equation intégrale de Volterra ; Théorème du point fixe de Krasnoselskii ; Approximation numérique ; La méthode de Nyström.

Abstract

The integral equations of Fredholm and Volterra play an essential role in the branches of mathematics because of their applications in various scientific fields.

For this reason, in this thesis we study a specific form of the Volterra integral equation with a nonlinear unknown source term.

By using Krasnoselskii's fixed point theorem, we study the existence and uniqueness of solution of the proposed equation under some well-defined conditions.

By using the numerical integration method of Nyström, we find an approximate solution of our integral equation, then we give some illustrative examples.

Keywords

Volterra integral equation; Krasnoselskii fixed point theorem; Numerical approximation; The Nyström method.

Introduction

Au début du 20e siècle, le mathématicien italien Vito Volterra a construit un nouveau type d'équations mathématiques qu'il appelle l'équation intégrale de Volterra [1], où il a posé aussi les bases théoriques de ces équations. Ces équations intégrales jouent un rôle très important dans de nombreux domaines scientifiques [2, 3, 4, 5] : Physiques, biologiques, électronique, mécanique, et autres. D'ailleurs, beaucoup de chercheurs ont développé des méthodes différentes [6, 7, 8] pour traiter ces équations intégrales.

Pour cela, ce mémoire est dédié à étudier l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s))ds + g(t, u(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

C'est une équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce qui contient aussi un terme source $g(t, u(t))$ inconnu et non linéaire, à cause de ce terme on a appelé cette équation par le nom : non standard.

On va traiter l'équation proposée du côté analytique et numérique, et de telle façon que notre étude va être facile à comprendre on a réparti le mémoire en trois chapitres :

Chapitre 1 (Notions et préliminaires) : On rappelle quelques concepts dans l'analyse fonctionnelle et l'analyse numérique pour les utiliser dans les deux chapitres suivants.

Chapitre 2 (Etude analytique) : On ajoute à notre équation intégrale les hypothèses nécessaires qui nous permettent à juger quelle admet une solution unique.

Chapitre 3 (Etude numérique) : On applique la méthode d'intégration numériques de Nyström afin de discrétiser l'équation proposée et de trouver sa solution approchée.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette partie, on rappelle quelques concepts fondamentaux afin d'utiliser dans les prochains chapitres.

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1.1

On dit que l'application $\|\cdot\|_V$ définie sur V l'espace vectoriel à valeurs dans \mathbb{R}^+ est une norme, si les trois propriétés suivantes soient satisfaites :

1. $\forall v \in V, \|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V, \|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V$.
3. $\forall v, w \in V, \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$. (Inégalité triangulaire).

Alors, $(V, \|\cdot\|_V)$ devient un espace vectoriel normé (e.v.n).

Exemple 1.1.1

Soit $C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

On pose pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)| dx, \\ \|f\|_\infty &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.\end{aligned}$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont considérées comme des normes sur l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 1.1.2 (Suite de Cauchy)

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V$ est dite suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_V$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n > N, \forall p \geq 0, \|U_{n+p} - U_n\|_V \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.1

1. Toute suite de Cauchy est une suite bornée.
2. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Attention! Toute suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.3 (Espace de Banach ou Espace vectoriel normé complet)

On dit que l'espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|_V)$ est complet (ou espace de Banach) si toute suite de Cauchy de V est convergente pour la norme $\|\cdot\|_V$.

Exemple 1.1.2

On considère $C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, on munit cet espace de la norme suivante :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}).$$

Alors, $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.2 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe jouent un rôle essentiel pour étudier les équations non linéaires, pour cela on rappelle quelques types de ces théorèmes.

Définition 1.2.1

Prenons X un espace de Banach et T un opérateur défini de X dans lui-même ($T : X \rightarrow X$). On dit que x est un point fixe de T si et seulement si :

$$x = T(x).$$

1.2.1 Point fixe de Banach

Théorème 1.2.1 [9]

Prenons X un espace de Banach et l'opérateur $T : X \rightarrow X$. On dit que l'opérateur T possède un point fixe unique, si il est contractant de X dans X .

1.2.2 Point fixe de Schauder

Théorème 1.2.2 [9]

Soit S un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de l'espace de Banach X . Si l'opérateur $T : S \rightarrow S$ vérifie :

1. T est continue,
2. $T(S)$ est relativement compact,

alors, T admet au moins un point fixe dans S .

1.2.3 Point fixe de Krasnoselskii

Théorème 1.2.3 [9]

Soit M un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de l'espace de Banach X . Si les deux opérateurs A et B vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in M, Ax + By \in M,$
2. A est continue et compact,
3. B est contraction.

Alors, il existe au moins un point fixe de l'opérateur $A + B$, c'est-à-dire :

$$\exists x \in M, \quad \text{où} \quad Ax + Bx = x.$$

Théorème 1.2.4 (Arzéla-Ascoli)

Soit S un sous-ensemble de l'espace de Banach $C([a, b], \mathbb{R})$. L'ensemble S est relativement compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. l'ensemble S est borné (pour la norme de $C([a, b], \mathbb{R})$),
2. l'ensemble S est équicontinu.

Définition 1.2.2 (Uniformément équicontinu)

Soit S un sous-ensemble de l'espace de Banach $C([a, b], \mathbb{R})$. On dit que l'ensemble S est uniformément équicontinu si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon, \forall f_n \in S.$$

1.3 Quelques propriétés utilisées

Définition 1.3.1 (Fonction Lipschitzienne)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que f est lipschitzienne de rapport $L \in \mathbb{R}^+$ si :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Remarque 1.3.1

1. La fonction f de la définition précédente est dite contractante si on peut choisir $0 < L < 1$.
2. Dans un espace de Banach X , la définition d'une fonction contractante reste la même, mais on utilise la distance associée à la norme de cet espace $\|x - y\|_X$.

Théorème 1.3.1 (*Accroissements finis*)

Pour toute fonction continue et dérivable définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , ($f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$), on peut trouver une constante c dans $]a, b[$ telle que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Remarque 1.3.2

La définition d'une fonction lipschitzienne est fortement liée au fonction dérivable. D'ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ est lipschitzienne sur $[a, b]$ si et seulement sa dérivée est bornée sur $[a, b]$, on écrit :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{où } L = \sup_{c \in [a, b]} |f'(c)|.$$

Lemme 1.3.1 [\[10\]](#)

Soit $\gamma(t)$ une fonction continue positive sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\exists L > 0, \quad \gamma(t) \leq L \int_a^t \gamma(s) ds,$$

alors,

$$\gamma(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

1.4 Intégration numérique

En général, il a beaucoup de fonctions nous pouvons pas de calculer ses primitives. Pour cette raison, on emploie les différentes méthodes d'intégration numérique [\[11\]](#)

[12] qui permettent à évaluer une approximation de l'intégrale de ces fonctions. Dans cette partie, on aborde la méthode de Trapèze et de Simpson.

1.4.1 Méthode de Trapèze

Tout d'abord, on divise l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n segments égaux, ce qui nous donne les $(n + 1)$ points (noeuds) suivants :

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1 \dots n, \quad \text{avec} \quad h = \frac{b - a}{n}.$$

A partir des valeurs de la fonction $f(x)$ aux limites de chaque sous-intervalle, on approche la surface de chaque tronche par le Trapèze construit. Alors, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}, \\ &= h \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}. \end{aligned}$$

On répète la même chose pour les n sous-intervalles. En additionnant les surfaces de tous les trapèzes, on obtient la formule :

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx, \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n)), \end{aligned}$$

on peut la simplifier par :

$$\int_b^a f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

1.4.2 Méthode de Simpson

Afin de construire la méthode de Simpson, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux avec le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{n}$, et on choisit n un nombre pair

($n = 2m$), alors on obtient $(2m + 1)$ points :

$$x_i = a + ih, i = 0, 1 \dots 2m, \quad \text{avec } h = \frac{b - a}{2m}.$$

On approche la fonction $f(x)$ sur des tranches spécifique prises de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx.$$

Il est clair que l'intervalle $[x_0, x_2]$ passe par le point x_1 , donc chaque sous-intervalle contient trois points consécutifs, ce qui nous permet à remplacer la fonction $f(x)$ par un polynôme de degré 2 :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx,$$

où le polynôme $P_2(x)$ est donné par la formule de Lagrange :

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x),$$

et

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

On pose $x - x_1 = th$, donc :

$$\begin{aligned} x - x_2 &= (x - x_1) - (x_2 - x_1) = th - h = h(t - 1), \\ x - x_0 &= (x - x_1) + (x_1 - x_0) = th + h = h(t + 1). \end{aligned}$$

En conséquence :

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(t^2 - t), \quad L_1(x) = 1 - t^2, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(t^2 + t).$$

Alors on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &= \frac{f(x_0)}{2}h \int_{-1}^1 (t^2 - t)dt + f(x_1)h \int_{-1}^1 (1 - t^2)dt + \frac{f(x_2)}{2}h \int_{-1}^1 (t^2 - t)dt, \\ &= \frac{f(x_0)}{3}h + \frac{4f(x_1)}{3}h + \frac{f(x_2)}{3}h, \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right). \end{aligned}$$

La répétition de cette technique pour tous les sous-intervalles, donne la formule de Simpson :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{m-2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \right).$$

Exemple 1.4.1

Soit I l'intégrale de la fonction suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

On va approcher la valeur de I , en utilisant la formule de Trapèze et de Simpson pour $n = 10$, puis on calcule l'erreur de chaque méthode.

• **Méthode de Trapèze :** On a $n = 10$, donc le pas de discrétisation $h = \frac{\pi-0}{10} = \frac{\pi}{10}$. La formule de Trapèze est écrite :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx = \frac{h}{2} \left[f(0) + f(\pi) + 2 \sum_{i=1}^9 f(x_i) \right],$$

d'ailleurs les point x_i et les images $f(x_i)$ sont donnés suivant le tableau (1.1).

Alors

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi} \sqrt{(x)} \, dx &= \frac{\pi}{20} \left[0 + 0 + 2(0.3090 + 0.5878 + 0.8090 + 0.9511 \right. \\ &\quad \left. + 1.0000 + 0.9511 + 0.8090 + 0.5878 + 0.3090) \right], \\ &= 1.9835. \end{aligned}$$

x_i	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{10}$	$\frac{6\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{8\pi}{10}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
$f(x_i)$	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0

TABLE 1.1 – Les valeurs de x_i et $f(x_i)$ pour $n = 10$.

D'autre part, la valeur exacte de l'intégrale est :

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \cos(x) \Big|_0^{\pi} = 2.$$

L'erreur commise est :

$$E = \left| 2 - 1.9835 \right| = 0.0165.$$

• **Méthode de Simpson** : Pour $n = 10$, la méthode de Simpson donne :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(0) + f(\pi) + 4 \sum_{i=1}^5 f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^4 f(x_{2i}) \right], \\ &= \frac{\pi}{30} \left[0 + 0 + 2(0.5878 + 0.9511 + 0.9511 + 0.5878) \right. \\ &\quad \left. + 4(0.3090 + 0.8090 + 1.0000 + 0.8090 + 0.3090) \right], \\ &= 2.0001. \end{aligned}$$

L'erreur commise est :

$$E = \left| 2 - 2.0001 \right| = 0.0001.$$

Enfin, on conclut que la méthode de Simpson est la meilleure en comparant avec la méthode de Trapèze.

Chapitre 2

Etude analytique de l'équation proposée

Dans ce chapitre, en utilisant les techniques du point fixe, on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale proposée.

2.1 Existence de la solution

On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra donnée par la formule suivante :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s))ds + g(t, u(t)), \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.1)$$

où $k \in C([a, b]^2, \mathbb{R})$, $g \in C([a, b], \mathbb{R})$ et $u(t)$ c'est la solution que nous voulons trouver dans l'espace $C([a, b])$.

On peut voir que l'inconnu $u(t)$ de l'équation se trouve implicitement de manière non linéaire aussi dans la fonction g qui s'appelle le terme source de l'équation.

Avant de commencer à étudier l'équation (2.1), il faut ajouter l'hypothèse sui-

vante :

$$(\mathcal{H})_1 : \begin{cases} 1) \forall t, s \in [a, b], \forall x \in \mathbb{R}, |k(t, s, x)| \leq M_1, \\ 2) \forall t \in [a, b], \forall x \in \mathbb{R}, |g(t, x)| \leq M_2, \\ 3) \forall t \in [a, b], \forall x, y \in \mathbb{R}, \exists 0 < B < 1, |g(t, x) - g(t, y)| \leq B|x - y|. \end{cases}$$

Théorème 2.1.1

Si l'hypothèse $(\mathcal{H})_1$ est satisfaite, alors l'équation (2.1) admet au moins une solution dans l'espace $C([a, b])$.

Démonstration 2.1.1

Soit l'espace de Banach $X = C([a, b])$ muni de la norme :

$$\forall u \in X, \|u\| = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|.$$

On définit l'opérateur ψ de X dans lui-même par :

$$\psi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u),$$

où $\psi_1(u)$ et $\psi_2(u)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \psi_1(u)(t) &= \int_a^t k(t, s, u(s)) ds, \\ \psi_2(u)(t) &= g(t, u(t)). \end{aligned}$$

Alors, si l'opérateur ψ admet au moins un point fixe, cela signifie que l'équation (2.1) admet au moins une solution dans X . Pour cette raison, nous allons démontrer que l'opérateur ψ vérifie les conditions du théorème de point fixe de Krasnoselskii [13], à partir les étapes suivantes :

Étape 1 : Il faut vérifier que $\forall u, v \in F, \psi_1(u) + \psi_2(v) \in F$, où l'ensemble F est donné par :

$$F := \{u \in X, \|u\| \leq M_1(b - a) + M_2\}.$$

Au début, on peut voir facilement que l'ensemble F est non vide, fermé et convexe.

Il est clair que :

$$\begin{aligned} |\psi_1(u)(t) + \psi_2(v)(t)| &= \left| \int_a^t k(t, s, u(s)) ds + g(t, v(t)) \right|, \\ &\leq \left| \int_a^t k(t, s, u(s)) ds \right| + |g(t, v(t))|, \\ &\leq M_1 \int_a^b ds + M_2, \\ &\leq M_1(b - a) + M_2, \end{aligned}$$

alors $\|\psi_1(u) + \psi_2(v)\| \leq M_1(b - a) + M_2$, donc $\psi_1(u) + \psi_2(v) \in F$.

Etape 2 : Il faut vérifier que l'opérateur ψ_1 est compact et continue.

Comme le noyau $k \in C([a, b]^2, \mathbb{R})$ on déduit directement que ψ_1 est continue.

Maintenant, pour étudier la compacité de l'opérateur ψ_1 , il reste à prouver que l'ensemble $\psi_1(F)$ est uniformément borné et équicontinue.

✓ Pour tout $u \in F$ et tout $t \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} |\psi_1(u)(t)| &= \left| \int_a^t k(t, s, u(s)) ds \right|, \\ &\leq M_1 \int_a^b ds, \\ &= M_1(b - a), \\ &< M_1(b - a) + M_2, \end{aligned}$$

donc $\|\psi_1(u)\| \leq M_1(b - a) + M_2$, c'est à dire $\psi_1(F) \subset F$, alors $\psi_1(F)$ est uniformément borné.

✓ Soient $t_1, t_2 \in [a, b]$ avec $t_1 > t_2$, $\forall u \in F$, on a :

$$\begin{aligned} |\psi_1(u)(t_1) - \psi_1(u)(t_2)| &= \left| \int_a^{t_1} k(t_1, s, u(s)) ds - \int_a^{t_2} k(t_2, s, u(s)) ds \right|, \\ &= \left| \int_a^{t_2} k(t_1, s, u(s)) ds + \int_{t_2}^{t_1} k(t_1, s, u(s)) ds - \int_a^{t_2} k(t_2, s, u(s)) ds \right|, \\ &\leq \int_a^{t_2} |k(t_1, s, u(s)) - k(t_2, s, u(s))| ds + \int_{t_2}^{t_1} |k(t_1, s, u(s))| ds. \end{aligned}$$

La fonction $k(t, s, \cdot)$ est continue par rapport à t et s sur le compact $[a, b]$, alors elle est uniformément continue, ce qui nous permet à écrire :

$$|k(t_1, s, u(s)) - k(t_2, s, u(s))| \leq \delta(|t_1 - t_2|) \rightarrow 0, \quad \text{si } |t_1 - t_2| \rightarrow 0.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} |\psi_1(u)(t_1) - \psi_1(u)(t_2)| &\leq \int_a^{t_2} |k(t_1, s, u(s)) - k(t_2, s, u(s))| ds + \int_{t_2}^{t_1} |k(t_1, s, u(s))| ds, \\ &\leq \int_a^{t_2} \delta(|t_1 - t_2|) ds + \int_{t_2}^{t_1} M_1, \\ &\leq (t_2 - a)\delta(|t_1 - t_2|) + M_1|t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

donc

$$|\psi_1(u)(t_1) - \psi_1(u)(t_2)| \rightarrow 0, \quad \text{si } |t_1 - t_2| \rightarrow 0.$$

On déduit que $\psi_1(F)$ est équicontinue.

Étape 3 : Il faut vérifier que l'opérateur ψ_2 est contractant.

On a : $\forall u, v \in F$:

$$\begin{aligned} |\psi_2(u)(t) - \psi_2(v)(t)| &= |g(t, u(s)) - g(t, v(s))|, \\ &\leq B|u(s) - v(s)|, \\ &\leq B\|u - v\|, \end{aligned}$$

implique,

$$\|\psi_2(u) - \psi_2(v)\| \leq B\|u - v\|,$$

à partir de de l'hypothèse $(\mathcal{H})_1$, le constant $0 < B < 1$ confirme que l'opérateur ψ_2 est contractant.

Enfin, l'opérateur ψ a un point fixe $u \in F$ d'après le théorème de Krasnoselskii, ce qui équivaut à dire l'équation (2.1) admet au moins une solution dans $u \in F$.

2.2 Unicité de la solution

Dans la partie précédente, on a démontré que l'équation (2.1) admet au moins une solution. On va prouver maintenant que cette solution est unique, mais il faut ajouter tout d'abord la nouvelle hypothèse :

$$(\mathcal{H})_2 : \left\{ \forall t, s \in [a, b], \forall x, y \in \mathbb{R}, \exists A > 0, |k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq A|x - y|. \right.$$

Théorème 2.2.1

Si les hypothèses $(\mathcal{H})_1$ et $(\mathcal{H})_2$ sont satisfaites, alors la solution de l'équation (2.1) est unique.

Démonstration 2.2.1

Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions de l'équation (2.1). On définit la fonction $\gamma(t)$ par :

$$\gamma(t) = |u(t) - v(t)|, \quad \forall t \in [a, b],$$

ensuite, on montre que $\gamma(t) = 0$, cela signifie que $u(t) = v(t)$.

Au début, l'équation (2.1) nous donne :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_a^t k(t, s, u(s))ds + g(t, u(t)), \quad \forall t \in [a, b], \\ v(t) &= \int_a^t k(t, s, v(s))ds + g(t, v(t)), \quad \forall t \in [a, b], \end{aligned}$$

par soustraction on trouve :

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| \int_a^t k(t, s, u(s))ds - \int_a^t k(t, s, v(s))ds + g(t, u(t)) - g(t, v(t)) \right|, \\ &\leq \left| \int_a^t k(t, s, u(s))ds - \int_a^t k(t, s, v(s))ds \right| + |g(t, u(t)) - g(t, v(t))|, \end{aligned}$$

à partir de $(\mathcal{H})_1$ et $(\mathcal{H})_2$:

$$|u(t) - v(t)| \leq \int_a^t A|u(s) - v(s)|ds + B|u(t) - v(t)|,$$

d'où,

$$\gamma(t) \leq A \int_a^t \gamma(s)ds + B\gamma(t).$$

D'autre part, comme $B < 1$ donc $1 - B > 0$, alors on obtient :

$$(1 - B)\gamma(t) \leq A \int_a^t \gamma(s)ds \Rightarrow \gamma(t) \leq L \int_a^t \gamma(s)ds \quad \text{avec} \quad L = \frac{A}{1 - B}.$$

En conséquence du lemme [1.3.1](#), on trouve que $\gamma(t) = 0 \Rightarrow u(t) = v(t)$.

De cette manière on a vu comment démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation [\(2.1\)](#) en employant le théorème du point fixe de Krasnoselskii et le lemme [1.3.1](#). D'autre part, on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité de cette solution mais sous autre hypothèse donnée par :

$$(\mathcal{H})_3 : \begin{cases} 1) \forall t, s \in [a, b], \forall x \in \mathbb{R}, |k(t, s, x)| \leq M_1, \quad |g(t, x)| \leq M_2, \\ 2) \forall t, s \in [a, b], \forall x, y \in \mathbb{R}, \exists A, B \in \mathbb{R}_+^*, \\ \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq B|x - y|, \quad |k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq A|x - y|, \\ 3) \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \alpha = A(b - a) + B < 1. \end{cases}$$

Théorème 2.2.2

Si l'hypothèse $(\mathcal{H})_3$ est satisfaite, alors l'équation (2.1) admet une solution unique dans l'espace $C([a, b])$.

Démonstration 2.2.2

Dans ce cas, on définit l'opérateur ψ de X dans X par :

$$\psi(u) = \int_a^t k(t, s, u(s))ds + g(t, u(t)),$$

puis on va voir que l'opérateur ψ vérifie les deux conditions du théorème de point fixe Banach.

Condition 1 : Il faut vérifier que : $\psi(F) \subset F$, où l'ensemble F est donné par la formule précédente.

Pour tout $u \in F$:

$$\begin{aligned} |\psi(u)(t)| &= \left| \int_a^t k(t, s, u(s))ds + g(t, u(t)) \right|, \\ &\leq \left| \int_a^t k(t, s, u(s))ds \right| + |g(t, u(t))|, \\ &\leq M_1 \int_a^t ds + M_2, \\ &\leq M_1(b - a) + M_2, \end{aligned}$$

d'où $\|\psi(u)\| \leq M_1(b - a) + M_2$, alors, $\psi(F) \subset F$.

Condition 2 : Il faut vérifier que l'opérateur ψ est contraction dans F .

On a $\forall u, v \in F$:

$$\begin{aligned} |\psi(u)(t) - \psi(v)(t)| &= \left| \int_a^t k(t, s, u(s))ds - \int_a^t k(t, s, v(s))ds + g(t, u(t)) - g(t, v(t)) \right|, \\ &\leq \left| \int_a^t k(t, s, u(s))ds - \int_a^t k(t, s, v(s))ds \right| + |g(t, u(t)) - g(t, v(t))|, \end{aligned}$$

à l'aide de l'hypothèse $(\mathcal{H})_3$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\psi(u)(t) - \psi(v)(t)| &\leq A \int_a^t |u(s) - v(s)| ds + B|u(t) - v(t)|, \\ &\leq A\|u - v\| \int_a^t ds + B\|u - v\|, \\ &\leq (A(b - a) + B)\|u - v\|, \end{aligned}$$

donc :

$$\|\psi(u) - \psi(v)\| \leq \alpha\|u - v\|.$$

Comme $0 < \alpha < 1$, l'opérateur ψ est contraction dans F . En conséquence l'équation (2.1) admet une solution unique dans $F \subset C([a, b])$.

Remarque 2.2.1

Si on veut comparer entre les hypothèses $(\mathcal{H})_1$, $(\mathcal{H})_2$ et $(\mathcal{H})_3$, on conclut que le théorème du point fixe de Banach demande des conditions fortes par rapport le théorème de Krasnoselskii.

Chapitre 3

Etude numérique de l'équation proposée

En général, il n'y a pas des méthodes analytiques pour résoudre les équations intégrales. Pour cette raison, il faut employer les techniques d'approximations numériques pour approcher ces équations. Dans ce chapitre, on va utiliser la méthode Nyström [14] pour déterminer la solution approchée de notre équation intégrale.

3.1 Approximation de l'équation proposée

Tout d'abord, on commence par une description globale de la technique de Nyström. La méthode de Nyström est basée sur l'application de la forme de l'intégration numérique de la manière suivante :

On choisit le pas de discrétisation $h = \frac{(b-a)}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, qui nous donne les noeuds :

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

alors, le signe intégrale va approcher par :

$$\text{pour tout } f \in C([a, b]), \quad \int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{i=0}^N \omega_i f(t_i), \quad (3.1)$$

où ω_i sont des réels vérifiant tels qu'il existe $\omega > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\max_{0 \leq i \leq N} |\omega_i| \leq \omega$.

Maintenant, on remplace la variable t par t_n , $n = 0, 1, \dots, N$, dans notre équation (2.1), puis on applique la formule de quadrature précédente (3.1), alors on obtient le système algébrique suivant :

$$U_0 = g(a, U_0), \quad (3.2)$$

$$U_n = h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, U_i) + g(t_n, U_n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3.3)$$

où U_n dénote la valeur approchée de $u(t_n)$ au point t_n pour $0 \leq n \leq N$.

3.2 Etude du système algébrique

Dans cette partie, on va trouver aussi que les deux hypothèses $(\mathcal{H})_1$ et $(\mathcal{H})_2$ sont suffisantes pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système algébrique obtenu (3.2)-(3.3).

Théorème 3.2.1

Si les hypothèses $(\mathcal{H})_1$, $(\mathcal{H})_2$ sont satisfaites et si h est suffisamment petit, alors la solution du système (3.2)-(3.3) existe et unique.

Démonstration 3.2.1

Au début, il est clair que l'équation du système (3.2) a une solution unique U_0 à partir de la condition $0 < B < 1$.

Soit l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}$ muni de la norme standard :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E = |x|.$$

Pour tout $n = 1, 2, \dots, N$, les équations du système (3.3) peuvent être reformuler en utilisant l'application $\psi_n : E \rightarrow E$, de la façon suivante :

$$\psi_n(x) = h\omega_n k(t_n, s_n, x) + g(t_n, x) + h \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i k(t_n, s_i, U_i).$$

Si l'application ψ_n a un point fixe unique $x = \psi_n(x)$, alors le système (3.3) a une solution unique U_n , ce qui nous allons voir.

Pour tout $x, y \in E$, pour tout $n = 1, 2, \dots, N$, on a :

$$\begin{aligned}
|\psi_n(x) - \psi_n(y)| &= |g(t_n, x) + h\omega_n k(t_n, s_n, x) + h \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i k(t_n, s_i, U_i) \\
&\quad - g(t_n, y) - h\omega_n k(t_n, s_n, y) - h \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i k(t_n, s_i, U_i)|, \\
&= |g(t_n, x) - g(t_n, y) + h\omega_n k(t_n, s_n, x) - h\omega_n k(t_n, s_n, y)|, \\
&\leq |g(t_n, x) - g(t_n, y)| + |h\omega_n k(t_n, s_n, x) - h\omega_n k(t_n, s_n, y)|, \\
&\leq B|x - y| + h\omega A|x - y|,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|\psi_n(x) - \psi_n(y)\|_E \leq L\|x - y\|_E, \quad \text{avec } L = B + h\omega A.$$

L'hypothèse $(\mathcal{H})_1$ donne $0 < B < 1$, et comme h est suffisamment petit on trouve que $0 < L < 1$, alors l'application ψ_n admet un point fixe unique pour chaque n , ce qui confirme que le système (3.3) admet une solution unique U_n pour $n = 1, 2, \dots, N$.

3.3 Analyse des erreurs

Dans cette section, on va vérifier que la solution approchée U_n obtenue par résoudre le système (3.2)-(3.3) convergente vers la solution exacte $u(t_n)$ de l'équation (2.1). Par conséquent, on définit :

$$\varepsilon_n = |u(t_n) - U_n|, \quad n \geq 0,$$

puis on montre que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} \{\varepsilon_n\} = 0, \quad \text{i.e. } U_n \rightarrow u(t_n) \quad \text{si } N \rightarrow \infty.$$

D'abord, on mentionne la consistance de la méthode de l'intégration numérique à partir le lemme :

Lemme 3.3.1 [\[11\]](#)

Pour toute fonction $k(t, s, x) \in C([a, b]^2, \mathbb{R})$ on définit la formule de l'erreur de la consistance par :

$$\delta(h, t_n) = \left| \int_a^{t_n} k(t_n, s, u(s)) ds - h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, u(s_i)) \right|,$$

où,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \{\delta(h, t_n)\} = \delta_h, \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h = 0.$$

Théorème 3.3.1

Soient $(\mathcal{H})_1, (\mathcal{H})_2$ satisfaites et si h suffisamment petit, alors :

$$U_n \rightarrow u(t_n) \quad \text{si} \quad N \rightarrow \infty.$$

Démonstration 3.3.1

Pour $0 \leq n \leq N$, on a :

$$\begin{aligned} |u(t_n) - U_n| &= \left| \int_a^{t_n} k(t_n, s, u(s)) ds + g(t_n, u(t_n)) - h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, U_i) - g(t_n, U_n) \right|, \\ &= \left| \int_a^{t_n} k(t_n, s, u(s)) ds + g(t_n, u(t_n)) - h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, U_i) - g(t_n, U_n) \right. \\ &\quad \left. + h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, u(t_i)) - h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, u(s_i)) \right|, \\ &\leq \left| \int_a^{t_n} k(t_n, s, u(s)) ds - h \sum_{i=0}^n \omega_i k(t_n, s_i, u(s_i)) \right| + |g(t_n, u(t_n)) - g(t_n, U_n)| \\ &\quad + h \omega \sum_{i=0}^n |k(t_n, s_i, u(t_i)) - k(t_n, s_i, U_i)|. \end{aligned}$$

Le lemme (3.3.1) et les hypothèses $(\mathcal{H})_1$, $(\mathcal{H})_2$ nous permettent à écrire :

$$\begin{aligned} |u(t_n) - U_n| &\leq \delta_h + B|u(t_n) - U_n| + h\omega A \sum_{i=0}^n |u(t_i) - U_i|, \\ &= \delta_h + B|u(t_n) - U_n| + h\omega A|u(t_n) - U_n| + h\omega A \sum_{i=0}^{n-1} |u(t_i) - U_i|, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq \delta_h + B\varepsilon_n + h\omega A\varepsilon_n + h\omega A \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \\ \Rightarrow (1 - B - h\omega A)\varepsilon_n &\leq \delta_h + h\omega A \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Si h est petit on déduit que : $\rho = 1 - B - h\omega A > 0$, donc on trouve :

$$\varepsilon_n \leq \frac{\delta_h}{\rho} + \frac{h\omega A}{\rho} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i.$$

En appliquant le théorème 7.1 de [15], on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{h\omega A}{\rho}\right)^{n-1} (\delta_h + h\omega A\varepsilon_0), \\ &\leq \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{(b-a)\omega A}{N\rho}\right)^N (\delta_h + h\omega A\varepsilon_0), \\ &\leq \frac{1}{\rho} (\theta < \infty) (0 + 0 \times \omega A\varepsilon_0), \quad \text{si } N \rightarrow +\infty, \\ &\leq 0, \quad \text{si } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} \{\varepsilon_n\} = 0, \quad \text{i.e. } U_n \rightarrow u(t_n) \quad \text{si } N \rightarrow \infty.$$

3.4 Tests numériques

Dans cette partie, on va proposer deux exemples numériques afin de tester l'efficacité de la méthode Nyström pour approcher ce type d'équation intégrale.

Exemple 1 :

On considère l'équation intégrale :

$$u(t) = 2 \int_0^t \frac{e^{t+s}}{(1+u(s))^2} ds + g(t, u(t)), \quad \forall t \in [0, 1],$$

où,

$$g(t, u(t)) = \frac{2e^t}{1+u(t)}.$$

La solution exacte de cette équation est : $u(t) = e^t$, $\forall t \in [0, 1]$.

On choisit la formule du trapèze comme la quadrature de la technique de Nyström.

Après avoir créé le système algébrique (3.2)-(3.3), on applique la méthode itérative de Picard sous Matlab [16] pour approcher ses solutions avec une tolérance d'ordre 10^{-9} . On définit les fonctions d'erreurs suivantes :

$$E_i = |u(t_i) - U_i|, \quad E = \max_{0 \leq i \leq N} |u(t_i) - U_i|,$$

afin de comparer la solution exacte et la solution approchée.

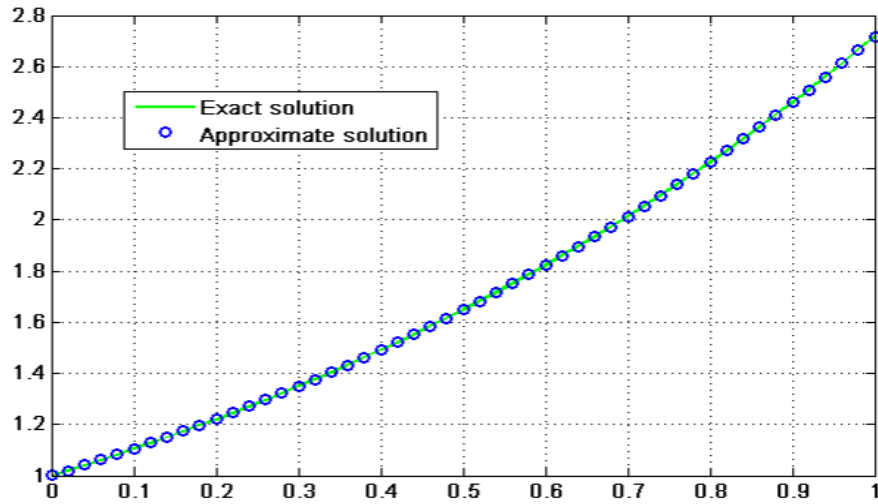
t_i	$u(t_i)$	U_i	E_i	k
0	1.0000	1.0000	0.0000E-3	25
0.2	1.2214	1.2213	0.1298E-3	29
0.4	1.4918	1.4915	0.2958E-3	29
0.6	1.8221	1.8216	0.4930E-3	27
0.8	2.2255	2.2248	0.7124E-3	25
1	2.7183	2.7173	0.9407E-3	23

TABLE 3.1 – Les résultats numériques de l'exemple 1, pour $N = 5$.

Interpretation :

Les tableaux (3.1) et (3.2) montrent lorsque h approche de zéro, la fonction d'erreur

N	E	Temps
10	2.34E-4	0.093
50	9.45E-6	0.102
100	2.40E-6	0.116
250	4.30E-7	0.179
500	1.65E-7	0.316

TABLE 3.2 – Les résultats numériques de l'exemple 1, en variant la valeur de N .FIGURE 3.1 – La solution exacte et la solution approchée pour $N = 50$.

E approche aussi de zéro. Ce qui est équivalent à dire que la solution approchée converge vers la solution exacte. D'ailleurs, on peut voir dans la figure (3.1) que la solution approchée et exacte sont presque identiques, juste pour $N = 50$.

Exemple 2 :

On considère la deuxième équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{s} \sin(u(s) - \sqrt{s} + s) ds + g(t, u(t)), \quad \forall t \in [0, 1],$$

où,

$$g(t, u(t)) = \sqrt{t} \cos(\sqrt{t}u(t)).$$

La solution exacte est : $u(t) = \sqrt{t}$, $\forall t \in [0, 1]$. On traite cette équation de la même manière suivie pour étudier l'exemple 1.

t_i	$u(t_i)$	U_i	E_i	k
0	0.0000	0.0000	0.0000E-3	0
0.2	0.4472	0.4472	0.2985E-4	4
0.4	0.6325	0.6323	0.1551E-3	7
0.6	0.7746	0.7742	0.3750E-3	12
0.8	0.8944	0.8938	0.6557E-3	24
1	1.0000	0.9990	0.9630E-3	67

TABLE 3.3 – Les résultats numériques de l'exemple 2, pour $N = 5$.

N	E	Temps
10	2.40E-4	0.093
50	9.66E-6	0.121
100	2.44E-6	0.140
250	4.30E-7	0.264
500	1.48E-7	0.624

TABLE 3.4 – Les résultats numériques de l'exemple 2, en variant la valeur de N .

Interpretation :

La figure (3.2), les tableaux (3.3) et (3.4) confirment aussi la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

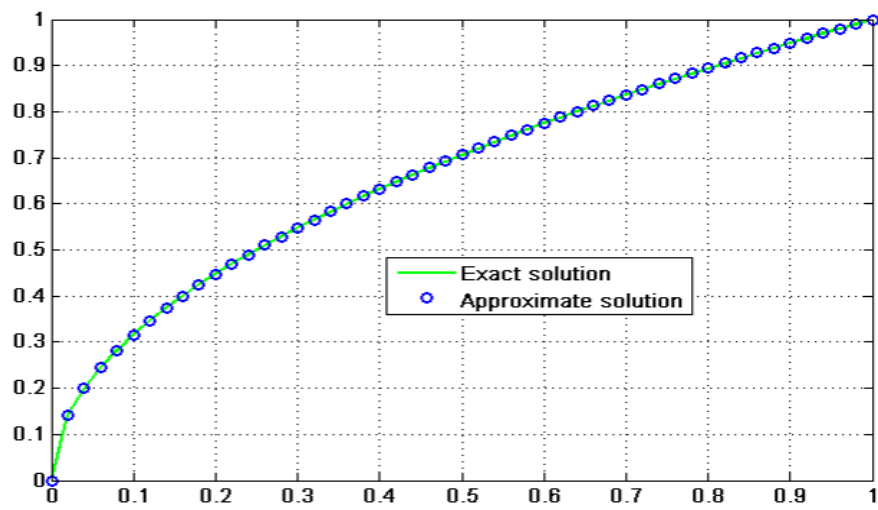


FIGURE 3.2 – La solution exacte et la solution approchée pour $N = 50$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié une équation intégrale de Volterra avec un terme source non linéaire.

On a commencé notre étude par démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation intégrale à partir du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

D'autre part, on a appliqué la méthode de Nyström afin d'obtenir une solution approchée de notre équation intégrale.

Bibliographie

- [1] A.M. Wazwaz : Linear And Nonlinear Integral Equations Methods and Applications. Springer Heidelberg, Dordrecht Londen, 2011.
- [2] R.P. Kanwal : Integral Equations Theory And Technique. Pennsylvania State University, 1971.
- [3] P.J. Collins : Differential and Integral Equations : Part II. University of Oxford Mathematical Institute, 1988.
- [4] A. Jerri : Introduction to integral equations with applications. John Wiley, Sons, 1999.
- [5] M. Rahman : Integral Equations and Their Applications, Dalhousie University. Canada, 2007.
- [6] J.A. Nohel : Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Society for Industrial And Applied Mathematics, 1985.
- [7] H. Brunner : Collocation Methods for Volterra Integral And Related Functional Differential Equations. Cambridge University Press, 2004.
- [8] F. Abdel Aziz, M. Salameh : Analytical And Numerical Solutions of Volterra Integral Equations of the Second Kind. An-Najah National University Faculty of Graduate Studies. Mémoire, 2014.

- [9] E.R. Shamash : Fixed point theory : Banach, Brouwer and Schauder theorems. Doctoral dissertation, California State University, Northridge, 2000.
- [10] H. Guebbai, M.Z. Aissaoui, I. Debbar, B. Khalla : Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation. Applied Mathematics and Computation, 229, p. 367-373, 2014.
- [11] Méthode d'intégration numérique. <https://elearn.univ-tlemcen.dz/pluginfile.php/126336/mod-resource/content/1/Chapitre204.pdf>.
- [12] F. Jędrzejewski : Introduction aux méthodes numériques. Springer Science, Business Media, 2005.
- [13] S.S. Redhwan, S.L. Shaikh, M.S. Abdo : Theory of Nonlinear Caputo-Katugampola Fractional Differential Equations. (2019). arXiv preprint arXiv :1911.08884.
- [14] K.E. Atkinson : The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge University Press, 1997.
- [15] P. Linz : Analytical and numerical methods for Volterra equations. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
- [16] A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio : Calcul scientifique : cours, exercices corrigés et illustration en MATLAB et Octave. Springer verlag Italia, 2010.