République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

THÈSE
Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT LMD
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques appliquées

Thème

Etude de quelques types d'équations différentielles fractionnaires

Présenté Par :
BEKKAI Achouak

Devant le jury :

ZARAI Abderrahmane	Professeur	Univérsité Larbi Tébessi	Président
REBIAI Belgacem	Professeur	Univérsité Larbi Tébessi	Rapporteur
HAOUAM Kamel	Professeur	Univérsité Larbi Tébessi	Co- Rapporteur
MESLOUB Fatiha	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
BOUMAZA Nouri	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
ZITOUNI Salah	MCA	Université de Souk Ahras	Examinateur
SAOUDI Khaled	MCA	Université de Khenchela	Examinateur

Date de soutenance : ..../....../....

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم
بسم الله الرحمن الرحيم
بسم الله الرحمن الرحيم
بسم الله الرحمن الرحيم

Résumé

Notre objectif dans cette thèse est l'étude des équations différentielles fractionnaires. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l'étude d'une équation différentielle fractionnaire en temps et en espace avec une nonlinéarité non locale en temps de croissance exponentielle, puis à l'étude d'un système non linéaire d'équations différentielle fractionnaires.
Plus précisément, nous présentons des résultats sur l'existence locale et l'unicité des solutions à l'aide du théorème du point fixe de Banach, l'explosion des solutions en temps fini par la méthode du fonction test et dans ce dernier cas, nous donnons une estimation du temps d'explosion.

Mots clés
Calcul fractionnaire, dérivée fractionnaire, Laplacien fractionnaire, équation différentielle fractionnaire, existence locale, explosion des solutions.

Abstract

Our objective in this thesis is the study of fractional differential equations. First, we are interested in the study of a time-space fractional differential equation with a time nonlocal nonlinearity of exponential growth. Our second interest is devoted to the analysis of a nonlinear system of differential equations.
More precisely, we present results on the local existence and the uniqueness of the solutions using the Banach fixed point theorem, the explosion of solutions in finite time by the method of the test function and in this latter case, we give an estimate of the blow-up time.

Keywords
Fractional calculus, fractional derivative, fractional Laplacien, fractional differential equation, local existence, blow-up of solutions.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الكسرية. إهتممنا أولا بدراسة معادلة تفاضلية ذات مشتقات كسرية بالنسبة للزمن والمكان مع لاخطية غير محلية بالنسبة للزمن وذات تزايد أسي، ثم قمنا بدراسة جملة غير خطية لنفس النوع من المعادلات التفاضلية الكسرية السابقة.

على وجه التحديد، قدمنا نتائج على الوجود المحلي للحلول ووحدانيتها باستخدام نظرية النقطة الثابتة لباناخ وانفجار الحلول في زمن منته بواسطة طريقة دالة الاختبار وأعطينا في هذه الحالة الأخيرة تقديرا لزمن الانفجار.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، المشتق الكسري، اللابلاسيان الكسري، معادلة تفاضلية كسرية، الوجود المحلي، انفجار الحلول.

Remerciements

Avant tout, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la patience, la puissance et la force pour finir ce travail.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent au Professeur *Belgacem REBIAI*, qui m'a fait confiance en acceptant de diriger ma thèse malgré ses nombreuses charges. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa rigueur scientifique et pour son soutien permanent durant ce travail.

Je remercie le Professeur *Kamel HAOUAM* pour sa participation à l'évaluation scientifique de ce travail en tant que co-rapporteur.
Je tiens tout particulièrement à remercier le Professeur *Abderrahmane ZARAI* qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Madame *Fatiha MESLOUB*, Monsieur *Nouri BOUMAZA*, Monsieur *Salah ZITOUNI* et Monsieur *Khaled SAOUDI* me font un très grand plaisir en faisant partie du jury. Je les en remercie très chaleureusement.

Je tiens à remercier vivement Professeur *Mokhtar KIRANE* pour son accueil et sa grande disponibilité pendant mes séjours à l'université de La Rochelle et pour son aide et ses conseils.

Je voudrais également remercier le Docteur *Abdelhak HAFDALLAH* d'être la première personne qui m'a encouragé à choisir le chemin de la recherche scientifique.

Enfin, j'adresse mes plus tendres remerciements à mon père, ma mère ainsi que mes frères et soeurs et tout le reste de ma famille pour leur amour et soutien tout au long de ces années d'études.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de primitive et de dérivée d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Comme il est bien connu, cette théorie a été initiée par Liouville. Depuis quelques décennies, le calcul fractionnaire est appliqué dans des domaines scientifiques nombreux et variés tels que la physique, la chimie, la mécanique, l'électricité, la biologie, l'économie, la théorie du contrôle, le traitement d'image, la biophysique, la mécanique des fluides, l'aérodynamique, etc.

Au cours de la dernière décennie, ce sujet a été reconnu comme l'un des meilleurs outils pour décrire les processus à mémoire longue. De tels modèles sont intéressants pour les ingénieurs et les physiciens mais aussi pour les mathématiciens purs, on peut consulter notament l'ouvrage [54] pour de nombreuses applications en sciences pour l'ingénieur et le livre [30] pour une collection d'applications en physique.

Cependant, les équations différentielles fractionnaires en temps et en espace avec une non-linéarité exponentielle sont peu étudiées. Le principal atout de nos contributions est de considérer ce type d'équations.

D'un point de vue applicatif, le terme exponentiel dans les équations différentielles non linéaires vient du terme d'Arrhenius associé aux phénomènes de combustion [10]. L'explosion des solutions à de telles équations peut également s'exprimer par le phénomène *d'emballement thermique* ou ce qu'on appelle *l'explosion thermique* en génie chimique.

Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre contient un bref historique concernant l'apparition de la théorie du calcul fractionnaire et une description de quelques exemples de processus décrits par des équations différentielles fractionnaires. Ensuite, on présente des fonctions spécifiques et des concepts préliminaires comme la transformation de Laplace et les fonctions de Mittag-Leffler comme étant des outils de résolution des équations différentielles fractionnaires. On expose aussi deux différentes approches de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo.

Dans le deuxième chapitre, on considère une équation différentielle fractionnaire en temps et en espace avec une nonlinéarité non locale en temps de croissance exponentielle. Notre objectif est de montrer l'existence et l'unicité de la solution locale par le théorème du point fixe de Banach et d'établir un résultat d'explosion de la solution en temps fini. En deuxième lieu, sous certaines conditions sur les données initiales on établit une borne supérieure du temps d'explosion.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude d'un système d'équations d'évolution avec un terme non-linéaire et non-local en temps de croissance exponentielle comportant des

dérivées fractionnaires en temps et une puissance fractionnaire du Laplacien ; on commence par montrer que la solution intégrale de ce système est unique. Puis on assure l'explosion de la solution en temps fini par la méthode de la capacité nonlinéaire de Pokhozhaev et on fournit une estimation de la durée de vie des solutions explosives.
Enfin, ce travail se termine par une conclusion résumant les principaux résultats étudiés.

Chapitre 1

Théorie du calcul fractionnaire

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un petit rappel historique sur l'apparition de la théorie du calcul fractionnaire. Pour mettre en relief son importance, on cite quelques applications du calcul fractionnaire dans diverses branches scientifiques. Puis on introduit quelques outils de base de ce concept comme la fonction Gamma, la fonction de Mittag-Leffler, la fonction de Wright et la transformation de Laplace. Les deux approches de dérivation fractionnaire de Riemman-Liouville et de Caputo sont rappelées. Ensuite, la définition du Laplacien fractionnaire est présentée.

1.1 Aperçu historique

Le calcul fractionnaire est le domaine mathématique traitant de la généralisation des notions classiques d'intégration et de dérivation à tout ordre réel. Cette notion a été introduite le 30 septembre 1695. Ce jour-là, Leibniz a écrit une lettre à L'Hôpital évoquant la possibilité de généraliser la signification des dérivées d'ordre entier à des dérivées d'ordre non entier. L'Hôpital a voulu connaître le résultat pour la dérivée d'ordre $n = 1/2$. Leibniz a répondu que "un jour, des conséquences utiles seront tirées" et en fait, sa vision est devenue une réalité. Cependant, l'étude des dérivées d'ordre non entier n'apparaît dans la littérature qu'en 1819, lorsque Lacroix a présenté une définition de la dérivée fractionnaire basée sur l'expression habituelle de la dérivée n^{ème} de la fonction puissance [35]. En quelques années, le calcul fractionnaire est devenu un sujet très attractif pour les mathématiciens dont Liouville (1832-1837) suivi par Riemann en 1847, Grünwald et Letnikov en 1867-1868, Riesz (1936-1949) ainsi que Caputo en 1967. Pour une étude historique plus détaillée, on peut consulter [34, 46, 52].

1.2 Champs d'applications

Pendant longtemps, le calcul fractionnaire n'a été considéré que comme une branche mathématique pure. En 1974, une première conférence internationale a été organisée par B. Ross à l'université de New Haven. De puis lors, le calcul fractionnaire et ses applications connaissent un essor dans plusieurs domaines scientifiques. Les utilisations sont tellement variées qu'il semble difficile de donner un aperçu complet sur les recherches impliquant des opérateurs fractionnaires. Nous renvoyons à [7, 52, 56, 59] pour un grand panorama d'applications du calcul fractionnaire.

D'abord, on montionne le travail d'abel [1] en 1823 résolvant la version généralisée du problème de tautochrone (appelé aussi problème mécanique d'Abel). Il a considéré une particule se déplaçant sans frottement sur une courbe en gravité uniforme. Abel a prouvé que le temps final (où la particule arrive au point le plus bas de la courbe), est égal à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $1/2$ de l'abscisse curvilligne.

Le calcul fractionnaire est largement appliqué dans le contexe physique de diffusion anormale. Par exemple, K. Oldham et J. Spanier ont prouvé en 1970 que le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $1/2$ du paramètre physique (comme la température), voir [51]. Les dérivées fractionnaires se substituent aux dérivées classiques dans les équations de diffusion afin de modéliser le mouvement des particules dans certains phénomènes de diffusion anormale. Précisément dans le cas où le front de diffusion croît linéairement par rapport au temps (c.à.d. $t \to ct$), le mouvement Brownien des particules peut être décrit par l'équation de diffusion habituelle. Cependant, dans des systèmes plus complexes, le front de diffusion croît de manière non linéaire par rapport au temps mais grandit en termes de $t \to ct^{\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Le mouvement des particules n'est plus Brownian mais cela peut être décrit par un processus stochastique appelé Continuous Time Random Walk (CTRW) introduit par E. Montroll et G. Weiss dans [50]. Ensuite, l'équation de diffusion habituelle n'est plus adaptée mais de nombreuses généralisations ont été considérée. En particulier, les dérivées classiques sont souvent remplacées par des dérivées fractionnaires en temps et /ou en espace. W. Wyss est le premier qui a étudié l'équation de diffusion fractionnaire dans [60]. Nous nous référons à la revue complète [45] de R. Metzler et J. Klafter pour plus de détails plus sur les équations de diffusion anormale, CTRW et les équations de diffusion fractionnaires. Les phénomènes de diffusion anormale apparaissent dans beaucoup de domaines variés. Par exemple, nous nous référons à [69, 70] pour les applications des opérateurs fractionnaires en mécanique des fluides dans des milieux poreux hétérogènes. En outre, de nombreux systèmes chaotiques présentent des phénomènes de diffusion anormale. G. Zasalavsky les a étudié en détail et il a contribué à l'élaboration d'équations de diffusion fractionnaires modélisant ces phénomènes, voir [64, 65].

Les opérateurs fractionnaires, du fait de leur caractéristique non locale, sont également utilisés pour prendre en compte les effets de mémoire. Par exemple, certains matériaux, comme les polymères (gomme, caoutchouc) présentent un comportement intermédiaire entre viscosité et élasticité. Notons que la viscoélasticité est modélisée par une équation différentielle fractionnaire d'ordre $1/2$ dans [8, 9]. On peut citer, par exemple [20, 53] pour plus de détails concernant la viscoélasticité et les dérivées fractionnaires.

Par conséquent, les domaines d'applications du calcul fractionnaire deviennent de plus en plus nombreux, par exemple en économie [17], en biologie [25, 38], en acoustique [29], en thermodynamique [31], en probabilité [36], etc. De manière plus générale, les équations différentielles fractionnaires sont même considérées comme un modèle alternatif aux équations différentielle non linéaire, voir [13].

Malgré leur omniprésence dans de nombreux domaines scientifiques, il n'y a pas tant d'exemples où l'utilisation des dérivées fractionnaires peut être pleinement justifiée. Cela vient de plusieurs difficultés liées à la signification du calcul fractionnaire lui-même et en particulier du fait que la signification dynamique des dérivées fractionnaires (indépendamment de la définition qui est utilisée) n'est pas claire. Cependant, A. Stanislavsky [58] a prouvé que l'introduction d'un temps interne stochastique (un temps "lent") transforme la dérivée classique (d'ordre entier) en dérivée au sens de Caputo. Par conséquent, la transition classique/fractionnaire peut être l'effet d'un changement de temps. Cependant, le principal inconvénient reste de connecter ce temps avec le problème sous-jacent.

1.3 Outils Mathématiques et fonctions spécifiques

Dans cette section, on présente des définitions de quelques fonctions spécifiques qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma $\Gamma(z)$. Cette fonction généralise la fonction factorielle $n!$ et elle permet à n de prendre des valeurs non entières [54].

Définition 1.1. *La fonction Gamma est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,\ Re(z) > 0; \tag{1.1}$$

et elle vérifie

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

La relation (1.2) est obtenue à partir de (1.1) par une intégration par parties.
De plus, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{1.3}$$

La fonction Gamma vérifie également la formule de réflexion suivante

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{1.4}$$

Proposition 1.2. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, alors on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} t^{-z} e^{t} dt, \tag{1.5}$$

avec Ha est le contour de Hankel, voir [54].

La fonction Bêta *Dans de nombreux cas, il est plus commode d'utiliser ce qu'on appelle la fonction Bêta.*

Définition 1.3. *La fonction Bêta notée $B(z_1, z_2)$ est définie par*

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 \tau^{z_1-1} (1-\tau)^{z_2-1} d\tau,\ Re(z_1) > 0,\ Re(z_2) > 0. \tag{1.6}$$

Cette fonction est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B\left(z_1, z_2\right) = \frac{\Gamma\left(z_1\right)\Gamma\left(z_2\right)}{\Gamma\left(z_1+z_2\right)}. \tag{1.7}$$

La fonction de Mittag-Leffler La fonction exponentielle e^z joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, la généralisation de cette fonction est la fonction de Mittag-Leffler notée $E_\alpha\left(z\right)$, $\alpha > 0$, introduite par Magnus Gustaf Mittag-Leffler [47, 48, 49] ; elle s'écrit

$$E_\alpha\left(z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\alpha k+1\right)}, \ \alpha > 0, \ z \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

On note que pour $\alpha = 1$, la fonction E_1 est l'exponentielle usuelle

$$E_1\left(z\right) = \exp\left(z\right), \ z \in \mathbb{C}.$$

Par la suite Agarwal [2] a généralisé cette fonction en une fonction à deux paramètres, a appelée fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

Définition 1.4. *Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a*

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}, \ z \in \mathbb{C}, \tag{1.9}$$

pour $\beta = 1$, on retrouve bien la relation (1.8) *avec $E_{\alpha,1}\left(z\right) = E_\alpha\left(z\right)$.*

En vertu de la définition (1.4), on a les relations suivantes :

Théorème 1.5. [28] *On a*

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}\left(z\right), \tag{1.10}$$

$$E_{\alpha,\beta}\left(z\right) = \beta E_{\alpha,\beta+1}\left(z\right) + \alpha z\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}\left(z\right), \tag{1.11}$$

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(z^\alpha\right)\right] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}\left(z^\alpha\right), \ m \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

D'autres informations concernant les fonctions de Mittag-Leffler peuvent être trouvées, par exemple, dans les livres [26, 43] et [44].

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue un rôle analogue à celui de la fonction exponentielle dans le cas des dérivées d'ordre entier. Ceci se voit facilement à l'aide de la transformation de Laplace.

Transformation de Laplace La transformation de Laplace est un outil extrêmement utile pour l'analyse des problèmes aux valeurs initiales linéaires (fractionnaires ou classiques). En particulier, elle permet de remplacer une équation différentielle par une équation algébrique. L'avantage de la transformation de Laplace est que la plupart des opérations courantes sur la fonction $f(t)$, telle que la dérivation, ou une translation sur la variable t, ont une traduction plus simple par la transformée $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Définition 1.6. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, une fonction localement intégrable. On appelle transformée de Laplace de $f(t)$ la fonction définie par*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1.13}$$

La fonction $f(t)$ est appelée la transformation inverse de $F(s)$ et notée par $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Remarque 1.7. *Parmi les conditions suffisantes pour l'existence de l'intégrale (1.13) dans le demi-plan $Re(s) > \sigma$ $(\sigma > 0)$ est que la fonction f soit à croissance exponentielle c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $t_0, M > 0$ telles que*

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \text{ pour tout } t \geq t_0.$$

En d'autres termes, la fonction $f(t)$ ne doit pas croite plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand t tend vers l'infini.

Le théorème suivant donne quelques propriétés de la transformation de Laplace.

Théorème 1.8. [19] *Soient f et g deux fonctions définies sur $[0, +\infty[$ localement intégrables et telles que $\mathcal{L}\{f\}$ (resp. $\mathcal{L}\{g\}$) existent pour $Re(s) > \sigma_1$ (resp. $Re(s) > \sigma_2$), alors*
1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $h = af + bg$ on a

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\},\ Re(s) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}.$$

2. *Si* $h(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$, *alors*

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}, \ \ Re(s) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}.$$

3. *Si* $h(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, *alors pour* $Re(s) > \max\{0, \sigma_1\}$ *on a*

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

4. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $h = D^n f$, *alors on a*

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0).$$

5. *Soit* $a > 0$ *et* $h(t) = f(at)$. *Alors*

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{a} F(s/a).$$

6. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $h(t) = e^{-at} f(t)$. *Alors*

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = F(s+a), \ Re(s+a) > \sigma_1.$$

7. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $h(t) = t^n f(t)$, *alors on a*

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Pour $\alpha, \beta > 0$ les fonctions de Mittag-Leffler sont liées à l'intégrale de Laplace par la relation suivante (voir[41])

$$\frac{1}{1-z} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\tau} E_\alpha(z\tau^\alpha)\, d\tau, & |z| < 1, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z\tau^\alpha)\, d\tau, & |z| < 1. \end{cases}$$

À l'aide du changement de variable $\tau = st$ et $z\tau^{\alpha} = -\lambda t^{\alpha}$ avec $t \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on déduit les résultats suivants :

$$\mathcal{L}\left\{E_{\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)\right\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda},\ |s| > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}},\ Re\left(s\right) > 0, \tag{1.14}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)\right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda},\ |s| > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}},\ Re\left(s\right) > 0. \tag{1.15}$$

La fonction de Wright La fonction de Wright notée par $W_{\alpha,\beta}\left(z\right)$ est nommée d'après le mathématicien E. Maitland Wright [61, 62] qui l'a introduite entre 1933 et 1941 et elle est définie par

$$W_{\alpha,\beta}\left(z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)},\ \alpha > -1,\ \beta \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ on a

$$W_{0,1}\left(z\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp\left(z\right).$$

Cette fonction est liée à la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres $E_{\alpha,\beta}\left(z\right)$. À savoir, la transformée de Laplace de la fonction de Wright est exprimée à l'aide de la fonction de Mittag-Leffler :

$$\mathcal{L}\left\{W_{\alpha,\beta}\left(t\right)\right\} = s^{-1}E_{\alpha,\beta}\left(s^{-1}\right),\ \alpha > -1,\ \beta \in \mathbb{C},\ Re\left(s\right) > 0. \tag{1.17}$$

Le cas $\beta = 1-\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ fournit la fonction de Mainardi $M_{\alpha}\left(z\right)$ qui nous intéresse particulièrement [40, 42, 55].
Plus précisément on a

$$M_{\alpha}\left(z\right) = W_{-\alpha,1-\alpha}\left(-z\right),\ z \in \mathbb{C}. \tag{1.18}$$

Ce cas particulier de la fonction de Wright a été introduit par Mainardi [39] comme suit :

$$\begin{aligned} M_{\alpha}\left(z\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-z\right)^k}{k!\Gamma\left(-\alpha k+1-\alpha\right)} \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(-z\right)^{k-1}}{\left(k-1\right)!}\Gamma\left(\alpha k\right)\sin\left(\pi\alpha k\right),\ 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

On présente quelques propriétés de cette fonction dans la proposition suivante.

Proposition 1.9. [68] *Pour* $\alpha \in (0,1)\,,-1<r<\infty$ *et* $z \in \mathbb{C}$. *La fonction de Mainardi* M_α *vérifie les relations suivantes :*

(a) $M_\alpha(t) \geq 0, t > 0;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty M_\alpha(t)\,dt = 1;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty t^r M_\alpha(t)\,dt = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha r)};$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty M_\alpha(t)\,e^{-zt}dt = E_\alpha(-z)\,;$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \alpha t M_\alpha(t)\,e^{-zt}dt = E_{\alpha,\alpha}(-z)\,.$

Pour la démonstration de cette proposition voir [41].

Transformation de Fourier

Définition 1.10. *Pour tout* $f \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, *on définit* $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ *la transformée de Fourier de* f *par*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi.x} f(x)\,dx,\ \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.19}$$

Si la transformée de Fourier de f *est elle-même une fonction intégrable, alors la formule d'inversion de Fourier est donnée par*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\xi)\right\} := \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi.x}\hat{f}(\xi)\,d\xi,\ \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.20}$$

Théorème 1.11. *(Théorème de Plancherel). On suppose que* $f \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Alors* $\mathcal{F}\{f\}\,, \mathcal{F}^{-1}\{f\} \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et*

$$\|\mathcal{F}\{f\}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\{f\}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{1.21}$$

La démonstration de ce théorème se trouve, par exemple, dans [21], p. 183.

Maintenant, on présente quelques propriétés de la transformation de Fourier.

Proposition 1.12. *Soient f, g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^N$. Alors*

1. Pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}\left\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\right\} = c_1 \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} + c_2 \mathcal{F}\left\{g(x)\right\}.$$

2. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $D^\alpha f \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a

$$\mathcal{F}\left\{D^\alpha f(x)\right\} = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}\left\{f(x)\right\}.$$

3. Pour $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)\, g(t)\, dt$, on a

$$\mathcal{F}\left\{(f * g)(x)\right\} = \mathcal{F}\left\{f(x)\right\}.\mathcal{F}\left\{g(x)\right\}.$$

1.4 Intégrales et dérivées fractionnaires

Dans cette section, on présente une généralisation des opérateurs d'intégration et de dérivation au cas fractionnaire. Elle comporte les définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires et de certaines de ses propriétés.

1.4.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Selon l'approche de Riemann-Liouville en calcul fractionnaire la notion de l'intégrale fractionnaire est une conséquence naturelle de la formule bien connue de Cauchy qui réduit le calcul de la n^{ème} primitive d'une fonction $f(t)$ à une seule intégrale.

$$\begin{aligned} J_{a|t}^{n} f(t) &:= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Grâce à la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, la formule de Cauchy peut s'étendre naturellement au réel α comme suit :

Définition 1.13. *Pour $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$. L'intégrale*

$$J^{\alpha}_{a|t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \ t > a, \tag{1.23}$$

est appelée intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α, et l'intégrale

$$J^{\alpha}_{t|b} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \ t < b, \tag{1.24}$$

est appelée intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.

Une propriété importante de l'opérateur d'intégration fractionnaire est la propriété de *semi-groupe* qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.14. *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $f \in L_1([a,b])$, alors*

$$J^{\alpha}_{a|t} J^{\beta}_{a|t} f = J^{\alpha+\beta}_{a|t} f \ \textit{presque partout sur } [a,b]. \tag{1.25}$$

En effet, d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{a|t} J^{\beta}_{a|t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \int_a^{\tau} (\tau-s)^{\beta-1} f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} d\tau ds. \end{aligned}$$

La substitution $\tau = s + y(t-s)$, nous donne

$$J^{\alpha}_{a|t} J^{\beta}_{a|t} f = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\, d\tau = J^{\alpha+\beta}_{a|t} f(t).$$

Où $B(\alpha,\beta)$ est la fonction Bêta.

Pour $a = 0$ et $\alpha > 0$, l'intégrale fractionaire $J^{\alpha}_{0|t} f$ peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$. Cela nous permet d'obtenir sa transformation de Laplace comme suit :

$$\mathcal{L}\left\{ J^{\alpha}_{0|t} f(t) \right\} = s^{-\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{1.26}$$

Nombreuses sont les définitions de l'opérateur de dérivation fractionnaire, malheureusement toutes les définitions proposées ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie celles qui sont les plus utilisées.

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Après avoir introduit la notion de l'intégrale fractionnaire, celle de la dérivée fractionnaire d'ordre α $(\alpha > 0)$ devient une nécessité naturelle. Pour motiver la définition à venir, rappelons que l'opérateur de dérivation D_t^n d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est l'inverse à gauche de l'intégrale $J_{a|t}^n$ et que cet opérateur D_t^n [19, Lemma 1.2] vérifie pour $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$ et f une fonction de $C^n([a,b])$ la relation

$$D^n f = D^m J_{a|t}^{m-n} f. \tag{1.27}$$

L'hypothèse que n n'est pas un entier dans (1.27) a permis à Riemann et Liouville de donner la généralisation suivante :

Définition 1.15. *Pour $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite $D_{a|t}^{\alpha} f$ et $D_{t|b}^{\alpha} f$ d'ordre α, sont définies par*

$$\begin{aligned} D_{a|t}^{\alpha} f(t) &= D^m J_{a|t}^{m-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \ m = [\alpha]+1, \end{aligned} \tag{1.28}$$

et

$$\begin{aligned} D_{t|b}^{\alpha} f(t) &= (-1)^m D^m J_{t|b}^{m-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \ m = [\alpha]+1, \end{aligned} \tag{1.29}$$

respectivement, où $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Dans le cas où $0 < \alpha < 1$ on a

$$D_{a|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau, \tag{1.30}$$

et

$$D_{t|b}^{\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau. \tag{1.31}$$

Exemple 1.16. *Pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $\beta > -1$ *on a*

$$D_{a|t}^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} .$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C *est donnée par*

$$D_{a|t}^{\alpha} C = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C.$$

On voit que la dérivée d'une constante est non nulle.

Corollaire 1.17. [34] *Pour* $\alpha > 0$ *et* $m = [\alpha] + 1$ *on a*

$$D_{a|t}^{\alpha} f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j (t-a)^{\alpha-j} , \ \forall c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}. \tag{1.32}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ *on a*

$$D_{a|t}^{\alpha} f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = c (t-a)^{\alpha-1} , \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.18. *Pour* $0 < \alpha < 1$*, la fonction* $c(t-a)^{\alpha-1}$ *joue le même rôle pour la dérivée fractionnaire* $D_{a|t}^{\alpha} f$ *qu'une constante dans la dérivation usuelle.*

En ce qui concerne les conditions suffisantes pour l'existence des dérivées fractionnaires, nous énonçons en particulier le cas où $\alpha \in (0,1)$ dans le lemme suivant :

Lemme 1.19. $[30, 57]$ *Soit* $f \in AC([a,b])$*, alors* $D_{a|t}^{\alpha} f$ *et* $D_{t|b}^{\alpha} f$ *existent presque partout sur* $[a,b]$ *pour* $0 < \alpha < 1$*. De plus* $D_{a|t}^{\alpha} f, D_{t|b}^{\alpha} f \in L_p(a,b), 1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$*, et*

$$D_{a|t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(t-a)^{\alpha}} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) \, d\tau \right], \tag{1.33}$$

$$D_{t|b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-t)^{\alpha}} - \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f'(\tau) \, d\tau \right]. \tag{1.34}$$

Propriétés

• Pour $\alpha > 0$ et $f \in L_1([a,b])$ on a

$$D_{a|t}^{\alpha} J_{a|t}^{\alpha} f(t) = f(t),$$

presque partout sur $[a,b]$.

• Pour $\alpha > \beta > 0$ et $f \in L_1([a,b])$ on a

$$D_{a|t}^{\beta} J_{a|t}^{\alpha} f(t) = J_{a|t}^{\alpha-\beta} f(t),$$

presque partout sur $[a,b]$.

En particulier, pour $\beta = m \in \mathbb{N}$ et $\alpha > m$ on a

$$D^{m} J_{a|t}^{\alpha} f(t) = J_{a|t}^{\alpha-m} f(t).$$

• Pour $\alpha > 0, m = [\alpha] + 1; f_{m-\alpha}(t) = J_{a|t}^{m-\alpha} f(t)$ et $f \in L_1([a,b])$ telle que $f_{m-\alpha}(t) \in AC^{m}[a,b]$, alors on a

$$J_{a|t}^{\alpha} D_{a|t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f_{m-\alpha}^{(m-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (t-a)^{\alpha-j},$$

presque partout sur $[a,b]$.

En particulier, pour $0 < \alpha < 1$ on a

$$J_{a|t}^{\alpha} D_{a|t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1},$$

où $f_{1-\alpha}(t) = J_{a|t}^{1-\alpha} f(t)$, tandis que pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$ on a

$$J_{a|t}^{m} D_{a|t}^{m} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k},$$

• Si $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}$ et les dérivées fractionnaires $D_{a|t}^{\alpha} f$ et $D_{a|t}^{\alpha+m} f$ existent, alors on a

$$D^{m} D_{a|t}^{\alpha} f(t) = D_{a|t}^{\alpha+m} f(t),$$

mais

$$D_{a|t}^{\alpha} D^{m} f(t) = D_{a|t}^{\alpha+m} f\ (t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(1+j-\alpha-m)}.$$

• Pour $\alpha > 0$ et $f(t), g(t) \in C([a,b])$ telle que $D_{a|t}^{\alpha} f\ (t)$, $D_{t|b}^{\alpha} g(t)$ existent et elles sont continues, alors la formule d'intégration par parties est donnée par [57]

$$\int_a^b g(t)\, D_{a|t}^{\alpha} f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, D_{t|b}^{\alpha} g(t)\, dt.$$

• La transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est donnée par [52]

$$\mathcal{L}\left\{D_{0|t}^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k}\ D_{0|t}^{\alpha-k-1} f(t)\Big|_{t=0},\ m-1 < \alpha \leq m.$$

1.4.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire mais lors de la modélisation des problèmes physiques elle mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville en $t = a$. Malgré que ces problèmes peuvent être résolus mathématiquement [54], en pratique leurs solutions sont inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Ce conflit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques a conduit à l'apparition d'une autre définition des dérivées fractionnaires qui permet la formulation des conditions initiales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire dans une forme n'impliquant que les valeurs des dérivées d'ordre entier en $t = a$, telles que $y(a)$, $y'(a)$, etc. Cette définition a été proposée par M. Caputo [14] et après par Caputo et Mainardi [15] qui l'ont adoptée en physique pour traiter des processus de la viscoélasticité.

Définition 1.20. *Pour $\alpha > 0$ et $m = [\alpha] + 1$. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo à gauche et à droite $\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f$ et $\mathbf{D}_{t|b}^{\alpha} f$ d'ordre α, sont définies par*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f(t) &= J_{a|t}^{m-\alpha} D^m f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{1.35}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{t|b}^{\alpha} f(t) &= (-1)^m J_{t|b}^{m-\alpha} D^m f(t) \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{1.36}$$

respectivement, où $D^m f \in L_1([a,b])$.

Exemple 1.21. *Pour $\alpha > 0, m = [\alpha] + 1$ et $\beta \geq 0$ on a*

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \begin{cases} 0 & si\ \beta \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}, \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} & si\ \beta \in \mathbb{N}\ et\ \beta \geq m \\ & ou\ \beta \notin \mathbb{N}\ et\ \beta > m-1. \end{cases}$$

En particulier, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} C = 0.$$

Maintenant, on va exprimer la relation entre les deux opérateurs de dérivation $\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}$ et $D_{a|t}^{\alpha}$ dans le lemme suivant :

Lemme 1.22. *Soient $\alpha > 0, m = [\alpha] + 1$. On suppose que f est définie telle que $\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f$ et $D_{a|t}^{\alpha} f$ existent, alors on a*

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f(t) = D_{a|t}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}. \tag{1.37}$$

et

$$\mathbf{D}_{t|b}^{\alpha} f(t) = D_{t|b}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b-t)^{k-\alpha}. \tag{1.38}$$

Remarque 1.23. *Sous les hypothèses du Lemme 1.22 on a*

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f(t) = D_{a|t}^{\alpha} f(t) \ \ Si\ \ f^{(k)}(a) = 0\ \ pour\ \ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1.39}$$

et

$$\mathbf{D}_{t|b}^{\alpha} f(t) = D_{t|b}^{\alpha} f(t) \ \ Si \ \ f^{(k)}(b) = 0 \ \textit{pour} \ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{1.40}$$

L'opérateur de la dérivation fractionnaire de Caputo $\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}$ est aussi l'inverse à gauche de $J_{a|t}^{\alpha}$ mais il n'est pas l'inverse à droite :

Proposition 1.24. *Pour une fonction continue f sur $[a, b]$ on a*

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} J_{a|t}^{\alpha} f = f. \tag{1.41}$$

Si $f \in AC^{m}([a, b])$ alors pour $\alpha > 0$ on a

$$J_{a|t}^{\alpha} \mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k}. \tag{1.42}$$

Dans le cas où $\alpha \in (0, 1)$ et $f \in AC([a, b])$ on trouve

$$J_{a|t}^{\alpha} \mathbf{D}_{a|t}^{\alpha} f(t) = f(t) - f(a). \tag{1.43}$$

Maintenant, on souligne le plus grand avantage de la dérivée fractionnaire de Caputo dans la modélisation des problèmes physiques ou autres où les conditions initiales sont données par des mesures (position, vitesse, accélération,...) c'est à dire des quantités réelles qu'on ne peut pas interpréter comme des dérivées fractionnaires. Ceci peut être facilement vu en utilisant la transformation de Laplace. En effet, pour la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α avec $m - 1 < \alpha \leq m$ on a

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

1.5 Laplacien fractionnaire

Dans cette partie, on introduit la définition du Laplacien fractionnaire et on s'intéresse aussi à l'inégalité de Ju qui va permettre d'établir des estimations de solutions pour certaines équations différentielles fractionnaires.

Le Laplacien fractionnaire est lié à la diffusion anormale, qui représente un grand intérêt dans la modélisation avec des équations fractionnaires. En particulier, le Laplacien fractionnaire a été utilisé à la place du Laplacien d'ordre entier dans de nombreuses applications et dans plusieurs modèles fractionnaire, voir par exemple [37, Table 1].

Le Laplacien fractionnaire est un opérateur non local défini pour $N \geq 1$ et $0 < \beta \leq 2$ par

$$(-\Delta)^{\beta/2} u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\beta} \mathcal{F}(u)(\xi)\right)(x), \tag{1.44}$$

pour tout $u \in D\left((-\Delta)^{\beta/2}\right) = H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)$ où $H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre β donné par

$$H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in \mathcal{S}';\ (-\Delta)^{\beta/2} u \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\},\ \text{pour } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{u \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right);\ (-\Delta)^{\beta/2} u \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\},\ \text{pour } \beta \in \mathbb{N},$$

où $\mathcal{S}'$ est l'espace de Schwartz, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont les transformées de Fourier directe et inverse, respectivement.
Pour plus d'information concernant cet opérateur voir [12, 33].

Lemme 1.25. *Soit* $0 < \beta \leq 2$. *Alors, pour tout* $u, v \in D\left((-\Delta)^{\beta/2}\right)$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^{\beta/2} v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(x)(-\Delta)^{\beta/2} u(x)\,dx. \tag{1.45}$$

Pour la démonstration de ce Lemme voir [24].

Dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$, on introduit la définition du Laplacien fractionnaire sur Ω avec condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$ noté par $(-\Delta_N)^{\beta/2}$.

Soit λ_k $(k = 1, \ldots, +\infty)$ les valeurs propres du Laplacien dans $L^2(\Omega)$ et φ_k les fonctions propres associées aux λ_k, c.à.d.

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k \ \text{ sur } \Omega, \\ \varphi_k = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit $D\left(\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}\right)=\left\{u\in L^2\left(\Omega\right)\ \text{tel que} \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{\beta/2}\left\langle u,\varphi_k\right\rangle\right|^2<\infty\right\}.$

Alors, pour $u\in D\left(\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}\right)$ on a

$$\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}u=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^{\beta/2}\left\langle u,\varphi_k\right\rangle\varphi_k.$$

L'opérateur $\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}$ est auto-adjoint, ceci est dû à la formule d'intégration par partie suivante :

Lemme 1.26. *Pour* $u,v\in D\left(\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}\right), 0<\beta\leq 2$ *on a*

$$\int_\Omega u\left(x\right)\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}v\left(x\right)dx=\int_\Omega v\left(x\right)\left(-\Delta_N\right)^{\beta/2}u\left(x\right)dx. \tag{1.46}$$

Maintenant, on présente l'inégalité de Ju pour l'opérateur du Laplacien fractionnaire. Cette inégalité a été établie d'abord par Córdoba et Córdoba dans [18], puis généralisée par Ju [32] comme suit :

Lemme 1.27. $[5, Theorem 3.2]$
Soient $0\leq\beta\leq 2, x\in\mathbb{R}^N$ *et* $u\in C_0^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Alors on a*

$$lu^{l-1}\left(-\Delta\right)^{\beta/2}u\left(x\right)\geq\left(-\Delta\right)^{\beta/2}u^l\left(x\right), \tag{1.47}$$

pour tout $l\geq 1$.

Pour la démonstration de ce lemme voir [32].

Chapitre 2

Sur l'existence locale et l'explosion de solutions d'une équation de diffusion fractionnaire spatio-temporelle avec une non-linéarité exponentielle

Dans ce chapitre (voir [11]), on s'intéresse à l'existence locale et l'explosion d'une solution unique pour une équation d'évolution comportant des dérivées fractionnaires en temps et en espace avec une nonlinéarité non locale en temps de croissance exponentielle. D'abord, on prouve l'existence et l'unicité de la solution locale par le principe de contraction de Banach. Ensuite, on établit un résultat sur l'explosion de la solution en temps fini par la méthode de la fonction test avec un choix judicieux de celle-à.

2.1 Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} u + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha}\left(e^{u}\right), \; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \qquad\qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $N \geq 1, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta \leq 2$, $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, $J_{0|t}^{1-\alpha}(e^u)$ est l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ pour e^u définie par

$$J_{0|t}^{1-\alpha}(e^u) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{u(s)} ds, \tag{2.2}$$

où Γ est la fonction Gamma, $(-\Delta)^{\beta/2}$ est le Laplacien fractionnaire défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2} u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\beta} \mathcal{F}(u)(\xi)\right)(x), \tag{2.3}$$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ avec $C_0(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ tendant vers 0 à l'infini.

Si $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}$est remplacé par le premier opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$, on a le problème suivant étudié par Ahmed et al [4] :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha}(e^u), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ils ont prouvé l'existence d'une solution locale unique et sous certaines conditions appropriées sur les données initiales, ils ont montré que la solution explose en temps fini et ils ont étudié leur profil d'explosion. Lorsque le problème (2.4) est considéré avec une non-linéarité de la forme $J_{0|t}^{1-\alpha}\left(|u|^{p-1} u\right)$, on a

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha}\left(|u|^{p-1} u\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce problème a été considéré par Fino et Kirane [23]. D'abord, ils ont validé l'équation par un résultat d'existence et d'unicité. Ensuite, ils ont prouvé qu'il existe des solutions qui explosent en temps fini et ils ont étudié leur profil d'explosion.

2.2 Préliminaire

Dans cette section, nous présentons quelques préliminaires qui seront utilisés ultérieurement.

On commence par donner le résultat suivant :
Pour $T > 0$ et $\gamma >> 1$, si on pose

$$\varphi_1(t) = (1 - t/T)_+^{\gamma},$$

alors on a

$$D_{t|T}^{\alpha}\varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} T^{-\alpha}\left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\gamma-\alpha}, \tag{2.6}$$

$$D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} T^{\alpha-1}\left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\gamma+\alpha-1}, \tag{2.7}$$

et

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(t) = -\gamma T^{-1}\left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\gamma-1}. \tag{2.8}$$

où $D_{t|T}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha \in (0,1)$.

Soit $T(t) = e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}}$. Alors, comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on peut déduire que $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ engendré par $-(-\Delta)^{\beta/2}$ (voir par exemple [63]).
De plus, $T(t)v = S_\beta(t) * v$, pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$, où $*$ représente la convolution de l'espace et

$$S_\beta(t)(x) = S_\beta(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix.\xi - t|\xi|^\beta} d\xi, \tag{2.9}$$

où S_β satisfait les propriétés suivantes

$$S_\beta(1) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N), \quad S_\beta(t,x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} S_\beta(t,x)\,dx = 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$. En utilisant l'inégalité du Young pour la convolution (Lemme A.1) et la forme auto-similaire $S_\beta(t,x) = t^{\frac{-N}{\beta}} S_\beta\left(1, xt^{\frac{-1}{\beta}}\right)$, on obtient

$$\|S_\beta(t) * v\|_q \leq Ct^{-(N/\beta)(1/r-1/q)}\|v\|_r, \tag{2.10}$$

pour tout $v \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$ et tout $1 \leq r \leq q \leq \infty, t > 0$;

$$\left\|S_\beta(t) * v\right\|_q \leq \|v\|_q, \tag{2.11}$$

pour tout $v \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ et tout $1 \leq q \leq \infty, t > 0$.

Les opérateurs de Mittag-Leffler basés sur le semi-groupe analytique $T(t)$ engendré par le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\beta/2}$ sont définis par

$$P_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^\infty M_\alpha(s)\, T(st^\alpha) ds = \int_0^\infty M_\alpha(s)\, e^{-st^\alpha(-\Delta)^{\beta/2}} ds, \tag{2.12}$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)\, T(st^\alpha) ds = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)\, e^{-st^\alpha(-\Delta)^{\beta/2}} ds. \tag{2.13}$$

Maintenant, on annonce les lemmes suivants qui donnent quelques propriétés utiles aux opérateurs $\{P_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ et $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$.

Lemme 2.1. *L'opérateur $\{P_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ a la propriété suivante :*
1. Si $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$, alors $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$.
2. Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $1/r = 1/p - 1/q < \beta/N$, alors

$$\left\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(1 - N/(\beta r)\right)}{\Gamma\left(1 - \alpha N/(\beta r)\right)} \left\|u_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.14}$$

Preuve. 1. Découle de $T(t)u_0 > 0$ et $M_\alpha \geq 0$.
2. En utilisant (2.10) et les propriétés de M_α, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^\infty M_\alpha(s)\, T(st^\alpha) u_0 ds\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C \int_0^\infty M_\alpha(s)\left(t^\alpha s\right)^{-N/(\beta r)} \left\|u_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ds \\
&= C t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s)\, s^{-N/(\beta r)} ds \left\|u_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= C t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \tfrac{\Gamma(1-N/(\beta r))}{\Gamma(1-\alpha N/(\beta r))} \left\|u_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2. *Pour l'opérateur $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$, on a le résultat suivant :*
1. Si $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$, alors $S_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$.
2. Pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, soit $1/r = 1/p - 1/q$, si $1/r < 2\beta/N$, alors on a

$$\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha C t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(2 - N/\left(\beta r\right)\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha - \alpha N/\left(\beta r\right)\right)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} . \tag{2.15}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du lemme 2.1 ; on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\infty \alpha s M_\alpha\left(s\right) T(st^\alpha) u_0 ds \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C \int_0^\infty \alpha s M_\alpha\left(s\right) \left(t^\alpha s\right)^{-N/(\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ds \\
&= \alpha C t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha\left(s\right) \left(s\right)^{1-N/(\beta r)} ds \, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \alpha C t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \tfrac{\Gamma(2-N/(\beta r))}{\Gamma(1+\alpha-\alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. *D'après les lemmes 2.1 et 2.2, il résulte*

$$\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \ \text{ et } \ \|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} .$$

2.3 Existence locale

Cette section est consacrée à la preuve de l'existence locale et l'unicitè de la solution douce du problème (2.1). On commence par :

Définition 2.4. *(Solution douce). Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $T > 0$. On dit que $u \in C\left([0,T]\,; C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ est une solution douce de (2.1) si pour tout $t \in [0,T]$ on a*

$$u\left(t\right) = P_{\alpha,\beta}\left(t\right) u_0 + \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}\left(t-s\right) J_{0|s}^{1-\alpha}\left(e^{u(\tau)}\right) ds, \tag{2.16}$$

Théorème 2.5. *(Existence Locale). On suppose que $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, alors il existe un temps maximal $T_{max} > 0$ et une solution douce $u \in C([0,T_{max}); C_0(\mathbb{R}^N))$ du problème (2.1) avec l'alternative :*

- soit $T_{max} = +\infty$;
- soit $T_{max} < +\infty$, *et dans ce cas* $\underset{t \to T_{max}}{lim} \parallel u(t) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty$.
Si de plus $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$, *alors* $u(t) > 0$ *pour tout* $0 < t < T_{max}$. *En outre, si* $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, *pour tout* $1 \leq r < \infty$, *alors on a* $u \in C([0, T_{max}); L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. Pour $T > 0$ arbitraire, on définit l'espace de Banach

$$E_T = \left\{u \in C\left([0,T]; C_0(\mathbb{R}^N)\right); ||u||_1 \leq 2\left\|u_0\right\|_\infty\right\}, \tag{2.17}$$

où $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))}$. Ensuite, pour tout $u \in E_T$, on définit l'opérateur

$$\Psi(u) := P_{\alpha,\beta}(t)\, u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha}\left(e^{u(\tau)}\right) ds, \tag{2.18}$$

alors $\Psi(u) \in C\left([0,T]; C_0(\mathbb{R}^N)\right)$ (voir $[66, Lemma 2.4]$). Soit $u \in E_T$, alors par (2.14) et (2.15), avec $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ on obtient

$$\begin{aligned} ||\Psi(u)||_1 &\leq \left\|u_0\right\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \left\|e^{u(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0,T])} \\ &\leq \left\|u_0\right\|_\infty + T e^{\|u\|_1} \\ &\leq \left\|u_0\right\|_\infty + T e^{2\|u_0\|_\infty}, \end{aligned}$$

où $C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$.
Maintenant, si on choisit T assez petit tel que

$$T e^{2\|u_0\|_\infty} \leq \left\|u_0\right\|_\infty, \tag{2.19}$$

Nous concluons que $||\Psi(u)||_1 \leq 2\left\|u_0\right\|_\infty$, donc $\Psi(u) \in E_T$.

Ensuite, nous montrons que $\Psi(u)$ est contractante. Soient $u, v \in E_T$ on a

$$\begin{aligned} ||\Psi(u) - \Psi(v)||_1 &\leq \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha}\left(e^{u(\tau)} - e^{v(\tau)}\right) ds \right\|_1 \\ &\leq C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \left\|e^{u(\tau)} - e^{v(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0,T])} \\ &\leq T e^{2\|u_0\|_\infty} \left\|u - v\right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} ||u - v||_1, \end{aligned}$$

grâce à l'égalité suivante

$$\left|e^{u(s)} - e^{v(s)}\right| = e^{\lambda u(s)+\mu v(s)} \left|u\left(s\right) - v\left(s\right)\right|, \ 0 < \lambda, \mu < 1, \ \lambda + \mu = 1, \tag{2.20}$$

où T est choisi assez petit tel que

$$2Te^{2\|u_0\|_\infty} \leq 1. \tag{2.21}$$

Alors, Ψ est une contraction sur E_T. Ainsi, par le théorème du point fixe de Banach, le problème (2.1) admet une solution douce $u \in E_T$.

Maintenant, nous prouvons l'unicité de la solution. Soient $u, v \in E_T$ deux solutions douces dans E_T pour $T > 0$.
En utilisant (2.15) et (2.20), pour $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} \left\|u\left(t\right) - v\left(t\right)\right\|_\infty &\leq C_1 \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} \int_0^s \left(s-\tau\right)^{-\alpha} \left\|e^{u(\tau)} - e^{v(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \\ &\leq e^{2\|u_0\|_\infty} \int_0^t \left\|u\left(s\right) - v\left(s\right)\right\|_\infty ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, par l'inégalite de Gronwall (voir Lemme A.2) on a $u = v$.
En outre, en utilisant le fait que la solution est unique, nous concluons à l'existence d'une solution unique sur un intervalle maximal $[0, T_{\max})$ avec l'alternative décrite dans le théorème (voir [23]).

• *Positivité de la solution*. Si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, d'après (2.16) on a

$$u\left(t\right) \geq P_{\alpha,\beta}\left(t\right) u_0 > 0, \ \ t \in \left(0, T_{\max}\right).$$

• *Régularité de la solution*. Soit $u_0 \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right) \cap C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, pour $1 \leq r < \infty$ alors en répétant l'argument du point fixe dans

$$E_{T,r} := \left\{u \in C\left(\left[0, T\right]; C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right); \ ||u||_1 \leq 2\left\|u_0\right\|_\infty, \ ||u||_{\infty,r} \leq 2\left\|u_0\right\|_{L^r}\right\},$$

au lieu de E_T, où

$$||u||_{\infty,r} = \|u\|_{L^\infty([0,T];L^r(\mathbb{R}^N))},$$

on obtient une solution douce unique u dans $E_{T,r}$. □

2.4 Explosion des solutions

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'explosion de la solution du problème (2.1).

Définition 2.6. *(Solution faible). Soit $u_0 \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $T > 0$. On dit que u est une solution faible du problème (2.1) si $u \in L^p\left((0,T)\,;\, L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ et vérifie l'équation suivante*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \mathbf{D}^\alpha_{t|T} \psi\left(x,t\right) dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J^{1-\alpha}_{0|t}\left(e^u\right) \psi\left(x,t\right) dxdt$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\left(-\Delta\right)^{\beta/2} \psi\left(x,t\right) dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right) \mathbf{D}^\alpha_{t|T} \psi\left(x,t\right) dxdt,$$

pour toute fonction test $\psi \in C^1\left([0,T]\,;H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telle que $\psi(x,T) = 0$.

Lemme 2.7. *On considère $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et soit $u \in C\left([0,T]\,;\, C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ une solution douce de (2.1), alors u est aussi une solution faible de (2.1).*

Pour la démonstration de ce lemme, voir [66].

Théorème 2.8. *Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$. Alors, la solution douce du problème (2.1) explose en temps fini.*

Preuve. La preuve est par contradiction. On suppose que u est une solution douce globale de (2.1). Alors, u est une solution douce de (2.1) où $u \in C\left([0,T]\,;\, C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ pour tout $T >> 1$, telle que $u\left(t\right) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Soit $\psi(x,t) = \mathbf{D}^{1-\alpha}_{t|T} \varphi(x,t)$ avec $\varphi \in C^1\left([0,T]\,;H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telle que

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(t) \varphi_2^l\left(x\right),\; l \gg 1,$$

où

$$\varphi_1(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\gamma_+,\; \gamma \gg 1,$$

$$\varphi_2(x) = \phi\left(\frac{|x|}{T^{\alpha/\beta}}\right),$$

et ϕ est une fonction régulière, telle que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ \searrow & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Alors, d'après la définition 2.6 et le lemme 2.7 on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^u \varphi(x,t)\,dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi(x,t)\,dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t)\,dxdt, \end{aligned}$$

et si nous posons $\Omega_T = [0,T]\times\Omega$, $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| \leq 2T^{\alpha/\beta}\right\}$, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_2^l(x)\varphi_1(0)dx + \int_{\Omega_T} e^u \varphi(x,t)\,dxdt \\ &= \int_{\Omega_T} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x) D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_2^l(x)\varphi_1'(t)\,dxdt. \end{aligned}$$

Comme $\varphi_1(0) = 1$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_2^l(x)\,dx + \int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\ &= \int_{\Omega_T} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x) D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_2^l(x)\varphi_1'(t). \end{aligned}$$

Maintenant, d'après (1.47) on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_2^l(x) + \int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\ &\leq l\int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_2^{l-1}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x) D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_2^l(x)\varphi_1'(t) \\ &\leq l\int_{\Omega_T} u(x,t)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) + \int_{\Omega_T} u(x,t)\left|\varphi_1'(t)\right| \\ &= l\mathcal{I} + \mathcal{J}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young [27] $(e = \exp(1))$

$$AB \leq \varepsilon e^A + B\ln\frac{B}{e\varepsilon},\ \text{ pour } A, B > 0,\ \varepsilon > 0,$$

avec $\varepsilon = \frac{1}{4l}\varphi(x,t)$, $A = u(x,t)$ et $B = \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)$ dans $\mathcal{I}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \leq & \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) \\ & .\ln\left(\frac{4l\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)}{e\varphi_2^l(x)\varphi_1(t)}\right) \\ & +\frac{1}{4l}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t).\end{aligned}$$

De même, pour $\mathcal{J}$ avec $\varepsilon = \frac{1}{4}\varphi(x,t)$, $A = u(x,t)$ et $B = |\varphi_1'(t)|$, on obtient

$$\mathcal{J} \leq \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{4|\varphi_1'(t)|}{e\varphi_2^l(x)\varphi_1(t)}\right) + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t).$$

En utilisant (2.7) et (2.8), on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \leq & \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) \\ & .\ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha-1}(1-t/T)_+^{\gamma+\alpha-1}}{\varphi_2^l(x)(1-t/T)_+^{\gamma}}\right) \\ & +\frac{1}{4l}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t),\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{J} \leq \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_4 T^{-1}(1-t/T)_+^{\gamma-1}}{\varphi_2^l(x)(1-t/T)_+^{\gamma}}\right) + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t),$$

où

$$C_3 = \frac{4l\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(\gamma+\alpha)}, \quad \text{et} \quad C_4 = \frac{4\gamma}{e}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \leq & \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) \\ & .\ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha-1}(1-t/T)_+^{\alpha-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\ & +\frac{1}{4l}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t),\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{J} \leq \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_4 T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t).$$

Finalement, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq l\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) \\
&.\ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha-1}(1-t/T)_+^{\alpha-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_4T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Grâce aux changements de variables $\tau = \frac{t}{T}$ et $y = \frac{x}{T^{\alpha/\beta}}$, $T >> 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
dxdt &= T^{\frac{\alpha N}{\beta}+1} dyd\tau, \\
(-\Delta_x)^{\beta/2}\varphi_2 &= T^{-\alpha}(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2, \\
D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) &= C_5T^{\alpha-1}(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha-1},
\end{aligned}$$

et

$$\left|\varphi_1'(t)\right| = \gamma T^{-1}(1-\tau)_+^{\gamma-1},$$

où

$$C_5 = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}.$$

Maintenant, si on pose $\Omega_2 = [0,1]\times\left\{y\in\mathbb{R}^N,\ |y|\leq 2\right\}$. Alors, on peut réécrire (2.22) comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq C_5 l T^{\frac{\alpha N}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha/\beta}y\right)\right| (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha-1} \\
&.\ln\left(\frac{C_3T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha/\beta}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\alpha-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha/\beta}y\right)}\right) \\
&+\gamma T^{\frac{\alpha N}{\beta}}\int_{\Omega_2}(1-\tau)_+^{\gamma-1}\ln\left(\frac{C_4T^{-1}(1-\tau)_+^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha/\beta}y\right)}\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ainsi, on a deux fonctions bornées φ_2 et $(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2$ dans Ω_2 et

$$\varphi_2 \to 1 \text{ pour } T\to+\infty.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que le côté droit de (2.23) diverge vers $-\infty$ lorsque $T \to +\infty$, tandis que le côté gauche de (2.23) est positif. Cela conduit à une contradiction. □

2.5 Durée de vie des solutions explosives

Dans cette section, nous donnons une estimation par au-dessus de la durée de vie des solutions explosives avec certaines données initiales. Pour celà, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} u_\epsilon + (-\Delta)^{\beta/2} u_\epsilon = J_{0|t}^{1-\alpha} \left(e^{u_\epsilon}\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u_\epsilon (x, 0) = \epsilon u_0 (x), \qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.24}$$

où $\epsilon > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 2$ et $u_0 \in C_0 \left(\mathbb{R}^N\right)$ satisfait à

$$u_0 (x) \geq C_0 |x|^{-\delta}, \ |x| \geq \epsilon_0, \ N < \delta < \frac{\beta}{\alpha}, \tag{2.25}$$

pour certaines constantes positives C_0 et ϵ_0.

Théorème 2.9. *On suppose que (2.25) est vérifiée. Soit $[0, T_\epsilon)$ le temps de vie de la solution u_ϵ du problème (2.24). Alors, il existe une constante positive C telle que*

$$T_\epsilon \leq C \epsilon^{\frac{1}{\theta}}, \ \theta = \frac{\alpha\delta}{\beta} - 1 < 0.$$

Preuve. Soit u_ϵ la solution douce de (2.24). Alors, en utilisant le lemme 2.7, la définition 2.6 et en prenant $\psi (x, t)$ comme dans le théorème 2.8, on obtient

$$\begin{aligned} & I + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^{u_\epsilon} \varphi (x, t)\, dxdt \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon (x, t) (-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha} \varphi (x, t)\, dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon (x, t)\, \varphi_t (x, t)\, dxdt, \end{aligned}$$

où

$$I = \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_0 (x)\, \varphi_2^l (x)\, dx.$$

En choisissant $T \in [0, T_\epsilon)$ tel que $T \geq T_0 > 0$. En prenant en compte le changement de variable $y = \frac{x}{T^{\alpha/\beta}}$ et en utilisant l'hypothèse (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} I &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon \int\limits_{|x| \geq \epsilon_0} u_0(x)\, \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon C_0 T^{\frac{\alpha(N-\delta)}{\beta}} \int\limits_{|y| \geq \frac{\epsilon_0}{T_0^{\alpha/\beta}}} |y|^{-\delta}\, \phi^l(|y|)\, dy. \end{aligned} \tag{2.26}$$

D'autre part, d'après (2.23), on en déduit qu'il existe une constante positive C_6 telle que

$$I \leq C_6 T^{\frac{\alpha N}{\beta} - 1}. \tag{2.27}$$

De (2.26) et (2.27), il s'ensuit que

$$\epsilon \leq C_7 T^{\theta},$$

pour une constante positive C_7, où

$$\theta = \frac{\alpha\delta}{\beta} - 1 < 0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$T \leq C \epsilon^{\frac{1}{\theta}},$$

pour certaines constantes positives C. Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$

On remarque alors que si $\epsilon << 1$, le temps d'explosion devient grand.

Chapitre 3

Sur un système d'évolution fractionnaire en temps et en espace avec une non-linéarité à croissance exponentielle

DANS ce chapitre (voir [6]), des solutions locales et une explosion des solutions en temps fini pour un système d'équations d'évolution fractionnaires en temps et en espace avec une nonlinéarité non locale en temps de croissance exponentielle sont considérés. L'existence et l'unicité de la solution douce locale sont assurées par le principe du point fixe de Banach. Ensuite, on établit un résultat d'explosion par la méthode de la capacité non-linéaire de Pokhozhaev. Finalement, dans certaines conditions appropriées, une estimation de la durée de vie des solutions explosives est établie.

3.1 Introduction

Dans cette partie, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha_1}\left(e^v\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\beta/2} v = J_{0|t}^{1-\alpha_2}\left(e^u\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \ \ v\left(x, 0\right) = v_0\left(x\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $N \geq 1, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, 0 < \beta \leq 2$, $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α_i et $J_{0|t}^{1-\alpha_i}$ est l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha_i$ définie par

$$J_{0|t}^{1-\alpha_i}\left(e^{w(t)}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha_i} e^{w(s)} ds,$$

où Γ est la fonction Gamma, $(-\Delta)^{\beta/2}$ est le Laplacien fractionnaire et $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, où $C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ désigne l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini.

Dans le cas de l'équation de la chaleur avec diffusion non locale, on a le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha_1}\left(e^v\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ v_t + (-\Delta)^{\beta/2} v = J_{0|t}^{1-\alpha_2}\left(e^u\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ v(x,0) = v_0(x), \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.2}$$

qui a été étudié par Ahmad et al [3] ; ils ont prouvé l'existence d'une solution locale unique et sous certaines conditions appropriées sur les données initiales, ils ont montré que la solution explose en temps fini ; de plus, ils ont étudié leur profil d'explosion. Le problème (3.2) peut être vu comme une extension du problème :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha_1}\left(|v|^{p-1} v\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ v_t + (-\Delta)^{\beta/2} v = J_{0|t}^{1-\alpha_2}\left(|u|^{q-1} u\right), \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ v(x,0) = v_0(x), \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

qui a été considéré par Fino et Kirane [22].

La littérature concernant l'explosion pour des systèmes avec des nonlinéarités locales est très vaste.

3.2 Existence locale

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe de Banach, on peut montrer l'existence locale du problème (3.1).

On commence par la définition de la solution douce de (3.1).

Définition 3.1. *(Solution douce). Soit $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $T > 0$. On dit que $(u,v) \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \times C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ est une solution douce de (3.1) si (u,v) satisfait, pour $t \in [0,T]$, les équations suivantes*

$$u(t) = P_{\alpha_1,\beta}(t)\, u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1 - 1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_1}\left(e^{v(\tau)}\right) ds, \tag{3.3}$$

$$v(t) = P_{\alpha_2,\beta}(t)\, v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_2}\left(e^{u(\tau)}\right) ds. \tag{3.4}$$

Théorème 3.2. *(Existence Locale). Soient $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Alors, il existe un temps maximal $T_{max} > 0$ telle que le problème (3.1) a une solution douce unique $(u,v) \in C([0,T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N)) \times C([0,T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N))$. De plus, on a l'alternative :*
- soit $T_{max} = +\infty$;
- soit $T_{max} < +\infty$ et $\lim\limits_{t \to T_{max}} (\| u(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \| v(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) = +\infty$. Si, en outre, $u_0, v_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0, v_0 \not\equiv 0$, alors $u(t), v(t) > 0$ pour tout $0 < t < T_{max}$. De plus, si $u_0, v_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq r < \infty$, alors $u, v \in C([0,T_{max}); L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. Pour $T > 0$, on définit l'espace de Banach

$$E_T = \left\{(u,v) \in C\left([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)\right) \times C\left([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)\right); |||(u,v)||| \leq 2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)\right\},$$

où $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ et $|||\cdot|||$ est la norme de E_T définie par

$$|||(u,v)||| = \|u\|_1 + \|v\|_1 = \|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))} + \|v\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))}.$$

Ensuite, pour tout $(u,v) \in E_T$, on introduit l'opérateur Ψ défini sur E_T par $\Psi(u,v) = (\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v))$, où

$$\Psi_1(u,v) = P_{\alpha_1,\beta}(t)\, u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1 - 1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_1}\left(e^{v(\tau)}\right) ds,$$

et

$$\Psi_2(u,v) = P_{\alpha_2,\beta}(t)\, v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2 - 1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_2}\left(e^{u(\tau)}\right) ds.$$

L'existence d'une solution locale sera prouvée comme un point fixe de Ψ en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

• $\Psi : E_T \to E_T$. Soit $(u,v) \in E_T$; en utilisant les lemmes 2.1 et 2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)||| &= \|\Psi_1(u,v)\|_1 + \|\Psi_2(u,v)\|_1 \\
&\leq \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_1} \left\| e^{v(\tau)} \right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&\quad + \|v_0\|_\infty + C_2 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_2} \left\| e^{u(\tau)} \right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&= \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha_1-1} (s-\tau)^{-\alpha_1} \left\| e^{v(\tau)} \right\|_\infty ds d\tau \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&\quad + \|v_0\|_\infty + C_2 \left\| \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha_2-1} (s-\tau)^{-\alpha_2} \left\| e^{u(\tau)} \right\|_\infty ds d\tau \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty + Te^{\|v\|_1} + Te^{\|u\|_1} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty + 2Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)},
\end{aligned}$$

où $C_i = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(1-\alpha_i)}, i = 1,2$.

Maintenant, pour T tel que $2Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)} \leq \|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty$, $\Psi(u,v) \in E_T$.

• Ψ est contractante. Soient $(u,v), (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in E_T$; On utilise le lemme 2.2, on trouve

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v) - \Psi(\widetilde{u},\widetilde{v})||| &= \|\Psi_1(u,v) - \Psi_1(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_1 + \|\Psi_2(u,v) - \Psi_2(\widetilde{u},\widetilde{v})\|_1 \\
&\leq C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_1} \left\| e^{v(\tau)} - e^{\widetilde{v}(\tau)} \right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&\quad + C_2 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_2} \left\| e^{u(\tau)} - e^{\widetilde{u}(\tau)} \right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&= C_1 \left\| \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha_1-1} (s-\tau)^{-\alpha_1} \left\| e^{v(\tau)} - e^{\widetilde{v}(\tau)} \right\|_\infty ds d\tau \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&\quad + C_2 \left\| \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{\alpha_2-1} (s-\tau)^{-\alpha_2} \left\| e^{u(\tau)} - e^{\widetilde{u}(\tau)} \right\|_\infty ds d\tau \right\|_{L^\infty([0,T])} \\
&\leq T \left\| e^{v(t)} - e^{\widetilde{v}(t)} \right\|_1 + T \left\| e^{u(t)} - e^{\widetilde{u}(t)} \right\|_1 \\
&\leq Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)} \|v - \widetilde{v}\|_1 + Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)} \|u - \widetilde{u}\|_1 \\
&= Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)} |||(u,v) - (\widetilde{u},\widetilde{v})||| \\
&\leq \frac{1}{2} |||(u,v) - (\widetilde{u},\widetilde{v})|||,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité suivante

$$\left|e^{w(\tau)}-e^{\widetilde{w}(\tau)}\right|=e^{\lambda w(\tau)+\mu\widetilde{w}(\tau)}\left|w(\tau)-\widetilde{w}(\tau)\right|,\ 0<\lambda,\mu<1,\ \lambda+\mu=1, \tag{3.5}$$

et on choisi T tel que

$$Te^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\leq\frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Alors, le théorème du point fixe de Banach assure l'existence d'une solution douce $(u,v)\in E_T$ du problème (3.1).

Maintenant, on prouve l'unicité. Soient $(u,v),(\widetilde{u},\widetilde{v})\in E_T$ deux solutions douces du problème (3.1). En utilisant le lemme 2.2 et (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_\infty+\|v(t)-\widetilde{v}(t)\|_\infty\\
&\leq C_1\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}\int_0^s(s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)}-e^{\widetilde{v}(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds\\
&+C_2\int_0^t(t-s)^{\alpha_2-1}\int_0^s(s-\tau)^{\alpha_2-1}\left\|e^{u(\tau)}-e^{\widetilde{u}(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds\\
&=C_1\int_0^t\int_\tau^t(t-s)^{\alpha_1-1}(s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)}-e^{\widetilde{v}(\tau)}\right\|_\infty dsd\tau\\
&+C_2\int_0^t\int_\tau^t(t-s)^{\alpha_2-1}(s-\tau)^{-\alpha_2}\left\|e^{u(\tau)}-e^{\widetilde{u}(\tau)}\right\|_\infty dsd\tau\\
&\leq e^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\left(\int_0^t\left(\|v(\tau)-\widetilde{v}(\tau)\|_\infty+\|u(\tau)-\widetilde{u}(\tau)\|_\infty\right)d\tau\right).
\end{aligned}$$

Alors, l'unicité découle de l'inégalité de Gronwall (voir Lemme A.2). De plus, ce résultat d'unicité implique l'existence d'un intervalle maximal d'existence $[0,T_{\max})$ avec l'alternative décrite dans le théorème (voir Fino et Kirane [23]).

• *Positivité de la solution*. Pour $u_0,v_0\geq 0$ et $u_0\not\equiv 0, v_0\not\equiv 0$, de (3.3), (3.4) et le lemme 2.1 on a les estimations suivantes :

$$u(t)\geq P_{\alpha_1,\beta}(t)\,u_0>0,\ t\in(0,T_{\max}),$$

$$v(t)\geq P_{\alpha_2,\beta}(t)\,v_0>0,\ t\in(0,T_{\max}).$$

• *Régularité de la solution*. Soient $u_0,v_0\in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$, pour $1\leq r<\infty$, alors en répétant l'argument du point fixe dans

$$E_{T,r}=\left\{(u,v)\in\Sigma\times\Sigma;|||(u,v)|||\leq 2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right),|||(u,v)|||_{\infty,r}\leq 2\left(\|u_0\|_{L^r}+\|v_0\|_{L^r}\right)\right\},$$

où

$$\Sigma = C\left([0,T];C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right),$$

$$|||(u,v)|||_{\infty,r} = \|u\|_{L^\infty([0,T];L^r(\mathbb{R}^N))} + \|v\|_{L^\infty([0,T];L^r(\mathbb{R}^N))},$$

on obtient une solution douce unique (u,v) dans $E_{T,r}$. Alors, $u,v \in C\left([0,T_{\max});L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

□

3.3 Explosion des solutions

Dans cette partie, nous voulons donner un résultat d'explosion en temps fini du système (3.1).

Définition 3.3. *(Solution faible). Soient $u_0, v_0 \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $T>0$. On dit que (u,v) est une solution faible du problème (3.1) si $(u,v) \in L^p\left((0,T);\ L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)\times L^p\left((0,T);\ L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ et vérifie*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t|T}\psi_1(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J^{1-\alpha_1}_{0|t}\left(e^v\right)\psi_1(x,t)\,dxdt \\
= &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\left(-\Delta\right)^{\beta/2}\psi_1(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t|T}\psi_1(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v_0\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t|T}\psi_2(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J^{1-\alpha_2}_{0|t}\left(e^u\right)\psi_2(x,t)\,dxdt \\
= &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\left(-\Delta\right)^{\beta/2}\psi_2(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\,\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t|T}\psi_2(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

pour toute les fonctions test $\psi_1,\psi_2 \in C^1\left([0,T];H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telles que
$\psi_1(x,T)=\psi_2(x,T)=0.$

Lemme 3.4. [23] *Pour $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right), T>0$ et $u,v \in C\left([0,T];C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ une solution douce de (3.1). Alors (u,v) est aussi une solution faible de (3.1).*

Théorème 3.5. *Soient $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ avec $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0, v_0 \geq 0$ et $v_0 \not\equiv 0$. Alors, la solution douce du problème (3.1) explose en temps fini.*

Preuve. La preuve est par contradiction. On suppose que (u,v) est une solution douce globale du problème (3.1). Alors $u,v \in C\left([0,T];C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ pour tout $T>>1$; de plus, $u(t), v(t) > 0$ pour tout $t\in[0,T]$.

Soit $\psi_i(x,t) = \mathbf{D}_{t|T}^{1-\alpha_i}\varphi(x,t)\,, i=1,2$, avec $\varphi \in C^1\left([0,T]\,; H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ telle que

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(t)\varphi_2^l(x)\,,\ l \gg 1,$$

où

$$\varphi_1(t) = \left(1-\frac{t}{T}\right)_+^\gamma,\ \gamma \gg 1,$$

$$\varphi_2(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\theta/\beta}}\right),\ \theta = \min\{\alpha_1,\alpha_2\}\,,$$

Φ est une fonction régulière, telle que

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ \searrow & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Alors, d'après la définition 3.3 et le lemme 3.4 on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} e^v\varphi(x,t)\,dxdt \\ = & \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi(x,t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\frac{d}{dt}\varphi(x,t)\,dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} e^u\varphi(x,t)\,dxdt \\ = & \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)(-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi(x,t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\frac{d}{dt}\varphi(x,t)\,dxdt. \end{aligned}$$

Si nous posons $\Omega_T = [0,T]\times\Omega, \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 2T^{\theta/\beta}\right\}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_0(x)\varphi_2^l(x)\varphi_1(0)dx + \int_{\Omega_T} e^v\varphi(x,t)\,dxdt \\ = & \int_{\Omega_T} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x) D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_2^l(x)\varphi_1'(t)\,dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1(0)dx+\int_{\Omega_T} e^u\varphi(x,t)\,dxdt\\
=\;&\int_{\Omega_T} v(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt-\int_{\Omega_T} v(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1'(t)\,dxdt.
\end{aligned}$$

En utilisant $\varphi_1(0)=1$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx+\int_{\Omega_T} e^v\varphi(x,t)\,dxdt\\
=\;&\int_{\Omega_T} u(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt-\int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1'(t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx+\int_{\Omega_T} e^u\varphi(x,t)\,dxdt\\
=\;&\int_{\Omega_T} v(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt-\int_{\Omega_T} v(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1'(t)\,dxdt.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (1.47), comme $u>0, v>0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx+\int_{\Omega_T} e^v\varphi(x,t)\,dxdt\\
\leq\;& l\int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_2^{l-1}\,(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt-\int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1'(t)\,dxdt\\
\leq\;& l\int_{\Omega_T} u(x,t)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt+\int_{\Omega_T} u(x,t)\left|\varphi_1'(t)\right|dxdt\\
=\;& l\mathcal{I}_1+\mathcal{J}_1,
\end{aligned}$$

avec un sens clair de $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{J}_1$, et

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx+\int_{\Omega_T} e^u\varphi(x,t)\,dxdt\\
\leq\;& l\int_{\Omega_T} v(x,t)\,\varphi_2^{l-1}\,(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt-\int_{\Omega_T} v(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1'(t)\,dxdt\\
\leq\;& l\int_{\Omega_T} v(x,t)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\,\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt+\int_{\Omega_T} v(x,t)\left|\varphi_1'(t)\right|dxdt\\
=\;& l\mathcal{I}_2+\mathcal{J}_2,
\end{aligned}$$

avec un sens clair de $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{J}_2$. En utilisant l'inégalité de Young [27]

$$AB \leq \varepsilon e^A + B \ln \frac{B}{e\varepsilon}, \text{ pour } A, B > 0,\ \varepsilon > 0,$$

avec

$$\varepsilon = \frac{1}{4l} \varphi(x,t), A = u(x,t), B = \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi_1(t) \text{ dans } \mathcal{I}_1,$$

et

$$\varepsilon = \frac{1}{4l} \varphi(x,t), A = v(x,t), B = \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_2} \varphi_1(t) \text{ dans } \mathcal{I}_2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 \leq & \int_{\Omega_T} \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi_1(t) \ln \left(\frac{4l \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi_1(t)}{e\varphi_2^l(x) \varphi_1(t)} \right) \\ + & \frac{1}{4l} \int_{\Omega_T} e^{u(x,t)} \varphi(x,t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 \leq & \int_{\Omega_T} \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_2} \varphi_1(t) \ln \left(\frac{4l \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_2} \varphi_1(t)}{e\varphi_2^l(x) \varphi_1(t)} \right) \\ + & \frac{1}{4l} \int_{\Omega_T} e^{v(x,t)} \varphi(x,t).\end{aligned}$$

De même, pour $\mathcal{J}_i$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{4} \varphi(x,t)$, $A = w(x,t)$ ($w = u$ pour $\mathcal{J}_1$ et $w = v$ pour $\mathcal{J}_2$) et $B = |\varphi_1'(t)|$, on obtient

$$\mathcal{J}_1 \leq \int_{\Omega_T} \left| \varphi_1'(t) \right| \ln \left(\frac{4 \left| \varphi_1'(t) \right|}{e\varphi_2^l(x) \varphi_1(t)} \right) + \frac{1}{4} \int_{\Omega_T} e^{u(x,t)} \varphi(x,t),$$

et

$$\mathcal{J}_2 \leq \int_{\Omega_T} \left| \varphi_1'(t) \right| \ln \left(\frac{4 \left| \varphi_1'(t) \right|}{e\varphi_2^l(x) \varphi_1(t)} \right) + \frac{1}{4} \int_{\Omega_T} e^{v(x,t)} \varphi(x,t).$$

En utilisant (2.7) et (2.8), on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &\leq \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}(1-t/T)_+^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right)\\ &\quad+\frac{1}{4l}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &\leq \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}(1-t/T)_+^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right)\\ &\quad+\frac{1}{4l}\int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t),\end{aligned}$$

où

$$C_3 = \frac{4l\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(\gamma+\alpha_1)} \text{ et } C_4 = \frac{4l\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(\gamma+\alpha_2)}.$$

De même, pour $\mathcal{J}_i$, $i = 1, 2$, on obtient

$$\mathcal{J}_1 \leq \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t),$$

et

$$\mathcal{J}_2 \leq \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t),$$

où

$$C_5 = \frac{4\gamma}{e}.$$

Finalement, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_2^l(x) + \int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\\ &\leq l\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\\ &\ .\ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}(1-t/T)_+^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right)\\ &\ +\int_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t),\end{aligned} \tag{3.7}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq l \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \\
&.\ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}(1-t/T)_+^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\int_{\Omega_T}\left|\varphi_1'(t)\right|\ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Maintenant, en combinant (3.7) et (3.8) et en utilisant $u_0, v_0 \geq 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq l \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t) \\
&\times\ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}(1-t/T)_+^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\int_{\Omega_T}\left|\varphi_1'(t)\right|\ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\frac{l}{2}\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \\
&\times\ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}(1-t/T)_+^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}\left|\varphi_1'(t)\right|\ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq l\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \\
&\times \ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}(1-t/T)_+^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\int_{\Omega_T}\left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\frac{l}{2}\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t) \\
&\times \ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}(1-t/T)_+^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}\left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables $\tau = \dfrac{t}{T}$ et $y = \dfrac{x}{T^{\alpha_i/\beta}}$, $T >> 1$; il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
dxdt &= T^{\frac{\alpha_i N}{\beta}+1}dyd\tau, \\
(-\Delta_x)^{\beta/2}\varphi_2 &= T^{-\alpha_i}(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2, \\
D_{t|T}^{1-\alpha_i}\varphi_1(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_i)}T^{\alpha_i-1}(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_i-1},
\end{aligned}$$

et

$$\left|\varphi_1'(t)\right| = \gamma T^{-1}(1-\tau)_+^{\gamma-1}.$$

On pose $\Omega_2 = [0,1]\times\left\{y\in\mathbb{R}^N,\ |y|\leq 2\right\}$. Alors, on peut réécrie (3.9) et (3.10) comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq C_6 T^{\frac{\alpha_1 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)\right| (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_1-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_3 T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)}\right) \\
&+\gamma T^{\frac{\alpha_1 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1-\tau)_+^{\gamma-1} \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)_+^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)}\right) \\
&+C_7 T^{\frac{\alpha_2 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)\right| (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_2-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_4 T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)}\right) \\
&+\frac{\gamma}{2} T^{\frac{\alpha_2 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1-\tau)_+^{\gamma-1} \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)_+^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)}\right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
&\leq C_8 T^{\frac{\alpha_2 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)\right| (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_2-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_4 T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)}\right) \\
&+\gamma T^{\frac{\alpha_2 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1-\tau)_+^{\gamma-1} \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)_+^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_2/\beta}y\right)}\right) \\
&+C_9 T^{\frac{\alpha_1 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)\right| (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_1-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_3 T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)}\right) \\
&+\frac{\gamma}{2} T^{\frac{\alpha_1 N}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1-\tau)_+^{\gamma-1} \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)_+^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha_1/\beta}y\right)}\right),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$C_6 = 2C_9 = \frac{l\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)} \text{ et } C_8 = 2C_7 = \frac{l\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_2)}.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que les membres droits de (3.11) et (3.12) divergent vers $-\infty$ lorsque $T \to +\infty$, tandis que les membres gauches sont positifs ; une contradiction. □

3.4 Durée de vie des solutions explosives

Dans cette section, nous donnons une estimation par au-dessus de la durée maximale des solutions explosives avec quelques données initiales spécifiques.

On considère le problème :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u_\epsilon + (-\Delta)^{\beta/2} u_\epsilon = J_{0|t}^{1-\alpha_1}\left(e^{v_\epsilon}\right),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v_\epsilon + (-\Delta)^{\beta/2} v_\epsilon = J_{0|t}^{1-\alpha_2}\left(e^{u_\epsilon}\right),\ x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u_\epsilon(x,0) = \epsilon u_0(x),\ \ v_\epsilon(x,0) = \epsilon v_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\epsilon > 0, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, 0 < \beta \leq 2$ avec $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ satisfaisant

$$u_0(x) \geq m_0 |x|^{-\frac{\delta}{\alpha_1}},\ v_0(x) \geq n_0 |x|^{-\frac{\delta}{\alpha_2}},\ \ |x| \geq \epsilon_0,\ \ \max\{\alpha_1, \alpha_2\} N < \delta < \beta, \tag{3.14}$$

pour certaines constantes positives m_0, n_0 et ϵ_0.

Théorème 3.6. *On suppose que (3.14) est vérifiée. Soit $[0, T_\epsilon)$ est le temps maximal d'existence de la solution (u_ϵ, v_ϵ) du problème (3.13). Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$T_\epsilon \leq C\epsilon^{\frac{1}{\eta}},\ \ \eta = \frac{\delta}{\beta} - 1 < 0.$$

Preuve. Soit (u_ϵ, v_ϵ) la solution douce de (3.13). Alors, en utilisant la définition 3.3 avec $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$ comme dans le théorème 3.5, on obtient

$$\begin{aligned} &I_1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^{v_\epsilon} \varphi(x,t)\, dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon(x,t) (-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi(x,t)\, dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon(x,t) \frac{d}{dt} \varphi(x,t)\, dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &I_2 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^{u_\epsilon} \varphi(x,t)\, dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon(x,t) (-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha_2} \varphi(x,t)\, dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} v_\epsilon(x,t) \frac{d}{dt} \varphi(x,t)\, dxdt, \end{aligned}$$

où

$$I_1 = \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx,$$

et

$$I_2 = \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx.$$

En choisissant $T \in [0, T_\epsilon)$, $T \geq T_0 > 0$ et en introduisant le changement de variables $y = \frac{x}{T^{\alpha_i/\beta}}$ dans $I_i, i = 1, 2$ et en utilisant l'hypothèse (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon \int_{|x| \geq \epsilon_0} u_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon m_0 T^{\frac{\alpha_1 N - \delta}{\beta}} \int\limits_{|y| \geq \epsilon_0 T_0^{-\alpha_1/\beta}} |y|^{-\frac{\delta}{\alpha_1}} \varphi_2^l\left(T^{\alpha_1/\beta} y\right) dy, \end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon \int_{|x| \geq \epsilon_0} v_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon n_0 T^{\frac{\alpha_2 N - \delta}{\beta}} \int\limits_{|y| \geq \epsilon_0 T_0^{-\alpha_2/\beta}} |y|^{-\frac{\delta}{\alpha_2}} \varphi_2^l\left(T^{\alpha_2/\beta} y\right) dy. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Alors

$$I_1 + I_2 \geq \epsilon C_{10} T^{\frac{-\delta}{\beta}} \left(T^{\frac{\alpha_1 N}{\beta}} + T^{\frac{\alpha_2 N}{\beta}}\right), \tag{3.17}$$

pour une constante $C_{10} > 0$.
D'autre part, d'après (3.11) et (3.12), on en déduit l'existence d'une constante $C_{11} > 0$ telle que

$$I_1 + I_2 \leq C_{11} T^{-1} \left(T^{\frac{\alpha_1 N}{\beta}} + T^{\frac{\alpha_2 N}{\beta}}\right). \tag{3.18}$$

De (3.17) et (3.18), on obtient

$$\epsilon \leq C_{12} T^{\eta},\ \ \eta = \frac{\delta}{\beta} - 1 < 0,$$

pour une constante $C_{12} > 0$. Par conséquent, on obtient

$$T \leq C \epsilon^{\frac{1}{\eta}},$$

pour une constante $C > 0$. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons abordé la théorie des équations différentielles fractionnaires avec des non-linéarités à croissance de type exponentiel.
Nous avons commencé par introduire les notions fondamentales du calcul fractionnaire. Nous avons utilisé l'approche de Caputo pour la dérivation par rapport à la variable temporelle et le Laplacien fractionnaire comme opérateur de dérivation agissant sur la variable spatiale. Nous avons répondu à des questions concernant l'existence locale et la non-existence globale de solutions positives pour certains types des problèmes d'évolutions fractionnaires.
Au terme de cette thèse, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Annexe A

Résultats utiles

Dans cette annexe, on introduit quelques lemmes et théorèmes qui sont utilisés dans cette thése.

Lemme A.1. *(Inégalité de Young pour la convolution)*
Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tels que* $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. *On suppose que* $f \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $g \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$, *alors on a*

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r .$$

Lemme A.2. *(Lemme de Gronwall, voir [16, Lemma 4.2.1])*
Soit $T > 0, \lambda \in L^1(0,T), \lambda \geq 0$ *et* $C_1, C_2 \geq 0$. *Pour* $\varphi \in L^1(0,T), \varphi \geq 0$ *tel que* $\lambda\varphi \in L^1(0,T)$ *et*

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)\,ds, \ \ t \in (0,T)$$

alors, on a

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\,ds\right), \ \ t \in (0,T).$$

Théorème A.3. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue [67])*
Soient E *un ensemble mesurable et* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *pour presque tout* $x \in E$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *presque partout dans* E, *où* g *est une fonction intégrable sur* E. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Théorème A.4. *(Théorème du point fixe de Banach [34])*
Soient (E, d) un espace métrique complet, $0 \leq \omega < 1$ et $T : E \to E$ une application telle que pour tout $u, v \in E$, on a

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v). \tag{A.1}$$

Alors l'opérateur T admet un unique point fixe $u^* \in E$. De plus, si T^k $(k \in \mathbb{N})$ est la suite d'opérateur définie par

$$T^1 = T \text{ et } T^k = TT^{k-1} \ (k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}),$$

alors, pour tout $u_0 \in E$ la suite $\left\{T^k u_0\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe u^*. On note que l'application $T : E \to E$ vérifiant (A.1) est dite application contractante.

Maintenant, on présente le théorème de Fubini qui nous permet d'échanger l'ordre d'intégration dans les intégrales répétées.

Théorème A.5. *([57], Theorem 1.1)*
Soient $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $-\infty \leq c < d \leq +\infty$ et $f(x, y)$ est une fonction mesurable définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Si au moins une des intégrales

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)\, dy, \quad \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} f(x, y)\, dx, \quad \int\limits_{\Omega_1 \times} \int\limits_{\Omega_2} f(x, y)\, dxdy,$$

est absolument convergente, alors elles coïncident.

Le cas particulier suivant du théorème de Fubini est valable, à savoir

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\, dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\, dx, \tag{A.2}$$

en supposant que l'une de ces intégrales est absolument convergente. Cette dernière relation s'appelle "La formule de Dirichlet".

Annexe B

Expression de solution douce

Cette annexe est consacrée à l'explication de la méthode d'obtention de l'expression de la solution douce dans la Définition 2.4.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha} u(x,t) = Au(x,t) + f(t, u(x,t)), \; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{B.1}$$

où $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, avec f est une fonction donnée.

Lemme B.1. *Si*

$$u(x,t) = u_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[Au(x,s) + f(s, u(x,s)) \right] ds, \tag{B.2}$$

est vérifié, alors on a

$$u(x,t) = P_{\alpha}(t) u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha}(t-s) f(s, u(x,s)) \, ds, \tag{B.3}$$

où

$$P_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} M_{\alpha}(\theta) T(\theta t^{\alpha}) \, d\theta, \;\; S_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \alpha \theta M_{\alpha}(\theta) T(\theta t^{\alpha}) \, d\theta.$$

Preuve. Soit $\lambda > 0$. En appliquant la transformation de Laplace

$$\nu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} u(x,s)\, ds \text{ et } \omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s, u(x,s))\, ds,$$

à l'équation (B.2), on obtient

$$\begin{aligned} \nu(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} u_0(x) + \frac{1}{\lambda^\alpha} A\nu(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\omega(\lambda) \\ &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} u_0(x) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1}\omega(\lambda) \\ &= \lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s) u_0(x)\, ds + \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s)\omega(\lambda)\, ds, \end{aligned} \tag{B.4}$$

à condition que les intégrales de (B.4) existent. On pose

$$\psi_\alpha(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^{\alpha+1}} M_\alpha(1/\theta^\alpha),$$

dont sa transformation de Laplace est donnée par

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\theta}\psi_\alpha(\theta)\, d\theta = e^{-\lambda^\alpha},\ \ 0 < \alpha < 1. \tag{B.5}$$

En utilisant (B.5), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} T(s) u_0(x)\, ds &= \int_0^\infty \alpha(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda t)^\alpha} T(t^\alpha) u_0(x)\, dt \\ &= \int_0^\infty -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\left[e^{-(\lambda t)^\alpha}\right] T(t^\alpha) u_0(x)\, dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda t\theta)}\theta\psi_\alpha(\theta) T(t^\alpha) u_0(x)\, d\theta dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta) T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right) u_0(x)\, d\theta\right] dt, \end{aligned} \tag{B.6}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}T(s)\,\omega(\lambda)\,ds &= \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}T(t^\alpha)\,\omega(\lambda)\,dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}T(t^\alpha)\,e^{-\lambda s}f(s,u(x,s))\,dsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)\,e^{-(\lambda t\theta)}T(t^\alpha)\,e^{-\lambda s}t^{\alpha-1}f(s,u(x,s))\,d\theta dsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)\,e^{-\lambda t}T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right)e^{-\lambda s}\frac{t^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}f(s,u(x,s))\,d\theta dsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)\,e^{-\lambda(t+s)}T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right)\frac{t^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}f(s,u(x,s))\,d\theta dsdt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\,T\left(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha}\right)\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}f(s,u(x,s))\,d\theta ds\right]dt.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

D'après (B.6) et (B.7), on a

$$\begin{aligned}
\nu(\lambda) \;=\; & \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\,T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right)u_0(x)\,d\theta\right. \\
& \left.+\alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\,T\left(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha}\right)\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}f(s,u(x,s))\,d\theta ds\right]dt.
\end{aligned}$$

Maintenant, on conclut à l'aide de la transformation de Laplace

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\,T\left(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha}\right)u_0(x)\,d\theta \\
&\quad +\alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\,T\left(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha}\right)\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}f(s,u(x,s))\,d\theta ds \\
&= \int_0^\infty M_\alpha(\theta)\,T(t^\alpha\theta)\,u_0(x)\,d\theta \\
&\quad +\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta\,(t-s)^{\alpha-1}M_\alpha(\theta)\,T\left((t-s)^\alpha\theta\right)f(s,u(x,s))\,d\theta ds \\
&= P_\alpha(t)\,u_0(x)+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_\alpha(t-s)\,f(s,u(x,s))\,ds.
\end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] N. H. Abel, Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Magazin fur Naturvidenskaberne, Aargang I, Band 2, Christiania, 1823.

[2] R. P. Agarwal, A propos d'une note de M. Pierre Humbert, C. R. Acad. Sci. 236 (1953), 2031–2032.

[3] B. Ahmad, A. Alsaedi, D. Hnaien, M. Kirane, On a semi-linear system of nonlocal time and space reaction diffusion equations with exponential nonlinearities. J. Equations Appl. 30 (1) (2018), 17–40.

[4] A. Alsaedi, B. Ahmad, M. Kirane, On a reaction diffusion equation with nonlinear time-nonlocal source term, Math. Meth. Appl. Sci. 39 (2) (2016), 236–244.

[5] A. Alsaedi, B. Ahmad, M. Kirane, A survey of useful inequalities in fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal. 20, 3 (2017), 574–594.

[6] A. Alsaedi, B. Ahmad, M. Kirane, B. Rebiai, Local and blowing-up solutions for a space-time fractional evolution system with nonlinearities of exponential growth, Math. Meth. Appl. Sci. 42 (2019), 4378–4393.

[7] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, D. Zorica, Fractional Calculus with Applications in Mechanics : Wave Propagation, Impact and Variational Principles, ISTE Ltd, London, 2014.

[8] R. L. Bagley, P. J. Torvik, A theoretical basis for the applications of fractional calculus in viscoelasticity. Journal of Rheology, 27 (1983), 201–210.

[9] R. L. Bagley, P. J. Torvik, On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior. Journal of Rheology, 30 (1986), 133–155.

[10] J. Bebernes, D. Eberly, Mathematical Problems from Combustion Theory, Applied Mathematical Science, vol. 83, Springer, New York, 1989.

[11] A. Bekkai, B. Rebiai, M. Kirane, On local existence and blowup of solutions for a time-space fractional diffusion equation with exponential nonlinearity, Math. Meth. Appl. Sci. (2019), 1–12.

[12] P. Biler, G. Karch, W. A. Woyczynski, Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for Lévy conservation laws, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 18 (2001), 613–637.

[13] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodríguez-Germá, J. J. Trujillo, Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations, Appl. Math. Comput., 187 (1) (2007), 79–88.

[14] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), 529–539.

[15] M. Caputo, F. Mainardi, Linear models of dissipation in an elastic solids, Riv. Nuovo Cimento (Ser. II), 1 (1971), 161–198.

[16] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, Paris, 1990.

[17] F. Comte, Opérateurs fractionnaires en économétrie et en finance, Prépublication MAP5, 2001.

[18] A. Córdoba, D. Córdoba, A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations, Comm. Math. Phys. 249 (2004), 511–528.

[19] K. Diethelm, The analysis of Fractional Differential Equations. An application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[20] F. Dubois, A-C. Galucio, N. Point, Introduction à la dérivation fractionnaire. Théorie et applications, Série des Techniques de l'ingénieur, 2009.

[21] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[22] A. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a nonlocal evolution system, Math. Meth. Appl. Sci. 34 (9) (2011), 1125–1143.

[23] A. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quart. Appl. Math. 70 (1) (2012), 133–157.

[24] N. Garofalo, Fractional Thoughts, preprint arXiv, 2017.

[25] W. G. Glöckle, T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics, Biophysical Journal, 68 (1995), 46–53.

[26] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin, Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications, Springer : Berlin/Heidelberg, Germany, 2014.

[27] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge : Cambridge University Press, 1952.

[28] H. J. Haubold, A. M. Mathai, R. K. Saxena, Mittag-Lefller functions and their applications, E-Print arXiv : 0909.0230v2, 2009.

[29] T. Hélie, D. Matignon, Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses, Math. Models Appl. Sci., 16 (4) (2006), 503–536.

[30] R. Hilfer, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[31] R. Hilfer, Fractional calculus and regular variation in thermodynamics. In Applications of fractional calculus in physics, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (2000), 429–463.

[32] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2-D quasi-geostrophic equations, Comm. Pure Appl. Anal. (2005), 161–181.

[33] G. Karch, Nonlinear evolution equations with anomalous diffusion. Qualitative properties of solutions to partial differential equations, Jindr̃ich Nec̃as Cent. Math. Model. Lect. Notes 5, Matfyzpress, Prague, 2009, 25–68.

[34] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, 2006.

[35] S. F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul integral, Courcier, Paris, 1819.

[36] P. Lévy, L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence, Bull. Soc. Math., France, 67 (1939), 1–41.

[37] A. Lischke, G. Pang, M. Gulian, F. Song, C. Glusa, X. Zheng, Z. Mao, W. Cai, M. Meerschaert, M. Ainsworth, G. Karaniadakis, What is the Fractional Laplacian?, preprint, 2018.

[38] R. L. Magin, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. Comput. Math. Appl., 59 (5) (2010), 1586–1593.

[39] F. Mainardi, On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, in : S. Rionero and T. Ruggeri (eds.), Waves and Stability in Continuous Media, World Scientific, Singapore, 1994, 246–251.

[40] F. Mainardi, Concerning an equation in the theory of combustion. In : A. Carpinteri, F. Mainardi, eds. Fractals and Fractional Calculs in Continuum Mechanics, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer-Verlag, New york : Springer, 1997.

[41] F. Mainardi, Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity, Imperial College Press, London, 2010.

[42] F. Mainardi, P. Paradisi, R. Gorenflo, Probability distributions generated by fractional diffusion equations, in : J. Kertesz, I. Kondor (Eds.), Econophysics : An Emerging Science, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[43] A. M. Mathai, H. J. Haubold, Special Functions for Applied Scientists, Springer, New York, 2008.

[44] A. M. Mathai, H. J. Haubold, An introduction to fractional calculus, Nova Science Publishers, New York, 2017.

[45] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach, Phys. Rep., 339 (2000), 1–77.

[46] K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and differential equations, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1993.

[47] G. M. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_{\alpha}(x)$, C. R. Acad. Sci. 137 (1903), 554–558.

[48] G. M. Mittag-Leffler, Sopra la funzione $E_{\alpha}(x)$, Rendiconti R. Accademia Lincei, 13 (1904), 3–5.

[49] G. M. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène, Acta Mathematica, 29 (1905), 101–181.

[50] E. W. Montroll, G. H. Weiss, Random walks on lattices, II. J. Mathematical Phys., 6 (1965), 167–181.

[51] K. B. Oldham, J. Spanier, The replacement of Fick's laws by a formulation involving semidifferentiation, J. Electroanal. Chem., 26 (1970), 331–341.

[52] K. B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[53] T. Pfitzenreiter, A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations. Z. Angew. Math. Mech., 84 (4) (2004), 284–287.

[54] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[55] S. I. Pokhozhaev, Concerning an equation in the theory of combustion, Mathematical Notes, 88 (1-2) (2010), 48–56.

[56] J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado, Editors, Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer, Dordrecht, 2007.

[57] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[58] A. A. Stanislavsky, Probability interpretation of the integral of fractional order. Theoritical and Mathematical Physics, 138 (3), 2004.

[59] V. V. Uchaikin, Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Background and Theory, vol. I. Springer, Berlin, Higher Education Press, Beijing, 2013.

[60] W. Wyss, The fractional diffusion equation, J. Math. Phys., 27 (1986), 2782–2785.

[61] E. M. Wright, On the coefficients of power series having exponential singularities, J. London Math. Soc. 8 (1933), 71–79.

[62] E. M. Wright, The asymptotic expansion of the generalized Bessel function, Proc. London Math. Soc. (Ser. II), 38 (1935), 257–270.

[63] K. Yosida, Functional Analysis, Springer Classics in Mathematics, Berlin : Springer-Verlag, 1995.

[64] G. M. Zaslavsky, Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport, Phys. Rep., 371 (6) (2002), 461–580.

[65] G. M. Zaslavsky, Hamiltonian chaos and fractional dynamics, Oxford University Press, Oxford, 2008. Reprint of the 2005 original.

[66] Q. G. Zhang, H. R. Sun, The blow-up and global existence of solutions of Cauchy problems for a time fractional diffusion equation, Topol Methods Nonlinear Anal. 46 (1) (2015), 69–92.

[67] Y. Zhou, Basic theory of fractional differential equations, World Scientific, Singapore, 2014.

[68] Y. Zhou, J. Wang, L. Zhang, Basic theory of fractional differential equations, World Scientific, Singapore, 2017.

[69] A. Zoia, M. -C. Néel, M. Joelson, Mass transport subject to time-dependent flow with nonuniform sorption in porous media, Phys. Rev. E, 80 (2009).

[70] A. Zoia, M. -C. Néel, A. Cortis, Continuous-time random-walk model of transport in variably saturated heterogeneous porous media, Phys. Rev. E, 81 (2010).