



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
**Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi -Tébessa-**  
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la  
Vie*  
Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....  
Série :.....

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT LMD**  
Option : **Physique Théorique**

## THÈME

# Les propriétés superstatistiques des oscillateurs quantiques

par :

*Soumia Siouane*

*Devant le jury*

PR. FAYÇAL CHEMAM	<b>PRÉSIDENT</b>	<i>Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa</i>
PR. ABDELMALEK BOUMALI	<b>RAPPORTEUR</b>	<i>Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa</i>
PR. MOSBAH DIFALLAH	<b>EXAMINATEUR</b>	<i>Université Echahid Hamma lakhdar, El-Oued</i>
PR. MOKHTAR FALEK	<b>EXAMINATEUR</b>	<i>Université Abbès Laghrour, Khenchela</i>
DR. YASSINE CHAUCHE	<b>EXAMINATEUR</b>	<i>Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa</i>

*Date de Soutenance : 17/10/2024*

© thèse effectuée au  
*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique*



# Les propriétés superstatistiques des oscillateurs quantiques

*Soumia Siouane*

## ملخص

تركز هذه الرسالة على دراسة الفيزياء غير الموسعة باستخدام منهجين إحصائيين، Tsallis و Beck، وتطبيقها على بعض المذبذبات الكمومية. في المرحلة الأولى، كان تركيزنا على المذبذب النسبي ديراك ذو الدوران المعروف في الأبعاد الواحدة، الثنائية، والثلاثية. قمنا بذلك من خلال استنباط دالة التقسيم لكل بعد واستخدامها لتحديد بعض الخصائص الديناميكية الحرارية لهذا المذبذب ضمن إطار الفيزياء فائقة الإحصائية لـ Beck، باستخدام توزيعات الاحتمال المعروفة مثل غاما، واللوغاريتم العادي، وتوزيع F لقيم مختلفة للمعاملات  $q, \beta$ . بالمثل، قمنا بدراسات مماثلة للمذبذب النسبي كلاين-غوردن.

ثم، ضمن إطار إحصاء Tsallis، استكشفنا المذبذب التوافقي غير النسبي، والمذبذب كلاين-غوردن، والمذبذب النسبي لديراك في الأبعاد الواحدة. قمنا بتوجيه دالة التقسيم لكل مذبذب ودراسة بعض الخصائص الديناميكية الحرارية لقيم مختلفة للمعاملات  $q, \beta, \alpha$ .

وفي النهاية، من خلال مقارنة النتائج، لوحظ وجود تحلل في مستويات الطاقة للمذبذب كلاين-غوردن ذو الأبعاد الثنائية والثلاثية تحت الإحصاء الفائق. كما لوحظ عدم ظهور خاصية التشبع في الحرارة النوعية في إحصاء Tsallis مقارنةً بالإحصاء العادي.

## Abstract

This thesis is dedicated to investigating non-extensive physics using two statistical approaches, Beck and Tsallis, applied to select quantum oscillators. Initially, our attention was directed towards the relative Dirac oscillator with known spin in one, two, and three dimensions. We accomplished this by deriving the partition function for each dimension and employing it to ascertain certain thermal dynamic properties of this oscillator within the framework of superstatistical physics (Beck statistics) by using various well-known probability distributions such as Gamma, Log-Normal, and F distributions for different parameter values  $(\beta, q)$ . Similarly, we conducted analogous investigations for the relative Klein-Gordon oscillator.

Subsequently, within the framework of Tsallis statistics, we explored the non-relativistic harmonic oscillator, Klein-Gordon oscillator, and one-dimensional Dirac oscillator. We derived the partition function for each oscillator and investigated various thermal dynamic properties for different parameter values  $(\alpha, \beta, q)$ .

Finally, upon comparing the results, we observed energy level degeneracy for the two- and three-dimensional relative Klein-Gordon oscillator under superstatistics. Additionally, the absence of the saturation property in specific heat was noted in the Tsallis statistics compared to ordinary statistics.

## RÉSUMÉ

Cette thèse se concentre sur l'étude de la physique non extensive à travers deux approches statistiques, Beck et Tsallis, appliquées à certains oscillateurs quantiques. Dans un premier temps, nous avons examiné l'oscillateur de Dirac pour les différentes dimensions. Pour ce faire, nous avons dérivé la fonction de partition pour chaque dimension et l'avons utilisée pour déterminer certaines propriétés thermodynamiques de cet oscillateur dans le cadre de la physique superstatistique (statistiques de Beck) en utilisant diverses distributions de probabilité bien connues telles que Gamma, Log-Normale et F pour différentes valeurs des paramètres  $(\beta, q)$ . De manière similaire, nous avons mené des recherches analogues pour l'oscillateur relatif de Klein-Gordon.

Ensuite, dans le cadre des statistiques de Tsallis, nous avons exploré l'oscillateur harmonique non relatif, l'oscillateur de Klein-Gordon et l'oscillateur de Dirac unidimensionnel. Nous avons dérivé la fonction de partition pour chaque oscillateur et étudié différentes propriétés thermodynamiques pour différentes valeurs des paramètres  $(\alpha, \beta, q)$ .

Enfin, en comparant les résultats, nous avons observé un dégénérescence des niveaux d'énergie pour l'oscillateur de Klein-Gordon relatifs en deux et trois dimensions sous les superstatistiques. En plus, l'absence de la propriété de saturation dans la chaleur spécifique a été notée dans les statistiques de Tsallis par rapport aux statistiques ordinaires.

## *Dédicace*

*A ma mère et mon père,  
A mon mari,  
A mon frère,  
A ma sœur,  
A tout mes amies,  
A tout mes collègues,  
et à tout mes enseignants ,  
et Spécialement à mon encadreur Professeur Boumali Abdelmalek,*

*Je dédie cet humble travail.*

## Remerciements

*Ce travail a été réalisé obtenir le diplôme de Doctorat LMD en Physique Théorique. En premier lieu et avant tous, je remercie ALLAH le tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, j'adresse mes sincères remerciements à mes parents et mon mari qui m'ont soutenu dans toutes les parties de ma vie et m'ont donné la force et le courage d'atteindre tout cela moi-même.*

*Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur Abdelmalek Boumali, professeur à l'université de Echahid Cheikh Larbi Tébessi pour m'avoir proposé ce sujet aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé.*

*J'exprime mes remerciements à Monsieur Faïçal Chemam professeur à l' Université Larbi-Tébessi, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ma thèse.*

*Je remercie vivement le professeur Mosbah Difallah à l'Université d'El-oued, le professeur Mokhtar Falek à l' Université de Khenchela, et le docteur Yassine Chaouche à l' Université de Tébessa d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse et de juger ce travail.*

*Je voudrais remercier la famille universitaire de notre Université en particulier tous les professeurs qui nous ont donné la meilleure éducation et formation.*

---

## TABLE DES MATIÈRES

ملخص	i
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>RÉSUMÉ</b>	<b>iii</b>
<b>DÉDICACE</b>	<b>iv</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>v</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>viii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2 La physique statistique non-extensive</b>	<b>5</b>
2.1 Préambule . . . . .	5
2.1.1 Aperçu historique sur la superstatistique . . . . .	5
2.1.2 Aperçu historique sur la statistique non-extensive . . . . .	6
2.2 Thermodynamique . . . . .	7
2.2.1 Quelques définitions . . . . .	7
2.2.2 Les principes de la thermodynamique . . . . .	8
2.3 La physique statistique . . . . .	9
2.4 Aperçu succinct du cadre théorique de la physique non-extensive . . . . .	13
2.4.1 q-Algèbre . . . . .	13
2.4.2 Entropie de Tsallis . . . . .	15

2.4.3	Satistique non-extensive de Tsallis . . . . .	16
2.5	Superstatistique de Beck . . . . .	17
2.5.1	La théorie de la superstatistique . . . . .	18
2.5.2	Les différents types de distributions de probabilité . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac</b>	<b>23</b>
3.1	Introduction . . . . .	23
3.2	Les énergies de l'oscillateur de Dirac dans les dimensions un, deux et trois . . . . .	24
3.2.1	Cas de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel (1D) . . . . .	24
3.2.2	Cas de l'oscillateur de Dirac bidimensionnel (2D) . . . . .	25
3.2.3	Cas de l'oscillateur de Dirac tridimensionnel (3D) . . . . .	26
3.3	Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac à 1D, 2D, et 3D . . . . .	27
3.3.1	La fonction de partition via la formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	27
3.4	Résultats et discussions . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	35
4.2	L'oscillateur de Klein-Gordon à 1D, 2D, et 3D . . . . .	36
4.2.1	Cas à 1D . . . . .	36
4.2.2	Cas à 2D . . . . .	37
4.2.3	Cas à 3D . . . . .	38
4.3	Calcul de la fonction de partition via la formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	38
4.4	Résultats et discussions . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Statistique non-extensive de Tsallis pour les oscillateurs relativistes à 1D</b>	<b>48</b>
5.1	Préambule . . . . .	48
5.2	L'énergie de l'oscillateur harmonique, l'oscillateur de Klein-Gordon, et l'oscillateur de Dirac unidimensionnel . . . . .	49
5.3	Calcul de la fonction de partition à partir de la formule d'Euler-Maclaurin . . . . .	49
5.4	Résultats et discussions . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>
	<b>LES ANNEXES</b>	<b>63</b>

<b>A</b>	<b>La formule d'Euler-Maclaurin</b>	<b>63</b>
A.1	La formule d'Euler-maclaurin . . . . .	63
A.2	Les polynômes de Bernoulli . . . . .	64
<b>B</b>	<b>Liste des articles</b>	<b>66</b>

---

## LISTE DES TABLEAUX

---

## LISTE DES FIGURES

2.1	Schéma de la superstatistique. . . . .	18
3.1	La variation de $S$ et $C_v$ de DO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ via la distribution Gamma. . . . .	29
3.2	La variation de $S$ et $C_v$ de DO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ via la distribution Log-Normale. . . . .	30
3.3	La variation de $S$ et $C_v$ de DO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ via la distribution F. . . . .	31
3.4	La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de $1/\beta$ pour les différentes distributions pour le 1D DO pour différents paramètres $q$ . . . . .	32
3.5	La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de $1/\beta$ pour les différentes distributions pour le 2D DO pour différents paramètres $q$ . . . . .	32
3.6	La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de $1/\beta$ pour les différentes distributions pour le 3D DO pour différents paramètres $q$ . . . . .	33
4.1	Diagramme énergétique d'une particule bosonique. . . . .	41
4.2	La variation de $S$ et $C_v$ de KGO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ via la distribution Gamma. . . . .	42
4.3	La variation de $S$ et $C_v$ de KGO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ via la distribution Log-Normale. . . . .	43
4.4	La variation de $S$ et $C_v$ de KGO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ via la distribution F. . . . .	44
4.5	La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de $1/\beta$ pour les différentes distributions pour le 1D KGO pour différents paramètres $q$ . . . . .	45

---

4.6	La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de $1/\beta$ pour les différentes distributions pour le 2D KGO pour différents paramètres $q$ . . . . .	45
4.7	La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de $1/\beta$ pour les différentes distributions pour le 3D KGO pour différents paramètres $q$ . . . . .	46
5.1	La variation de $S$ et $C_v$ de 1D HO en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ et $\alpha$ . . . . .	52
5.2	La variation de $S$ et $C_v$ de 1D KGO et 1D DO en fonction de $1/\beta$ avec différents paramètres $q$ et $\alpha$ . . . . .	53

---

---

# CHAPITRE 1

---

## INTRODUCTION

Pendant plusieurs siècles, l'oscillateur harmonique a été examiné comme un outil fondamental dans le développement de la physique théorique, émergeant simultanément avec la mécanique quantique. Ce système est considéré comme le premier exemple auquel des règles de quantification ont été appliquées, avec des applications étendues dans les spectres énergétiques, les fonctions d'onde, les symétries, etc. Il sert également de modèle pour comprendre, calculer et résoudre des problèmes plus complexes, non seulement dans les calculs directs (Moshinski et al. [1–3]).

Moszyński et Szczepaniak sont reconnus comme les pionniers à avoir présenté et discuté le modèle relativiste de l'oscillateur harmonique, connu sous le nom d'"oscillateur de Dirac", du fait qu'il devient un oscillateur harmonique avec un terme de couplage spin-orbite important dans la limite non relativiste (Moszyński et al., 1996; Moszyński et al., 1989). Cette étude a attiré l'attention de nombreux chercheurs ces dernières années [4–16].

En raison des multiples applications physiques de l'oscillateur de Dirac, il constitue l'un des rares exemples d'équations de Dirac ayant des solutions exactes [5, 17], décrivant de manière covariante la dynamique d'une particule de spin 1/2 dans le cadre de la théorie des champs des fermions [18]. En 2013, Franco-Villafane et ses collègues ont proposé une expérience visant à créer un oscillateur de Dirac, basée sur une relation entre celui-ci et un modèle de liaison étroite où un accord a été trouvé entre les résultats expérimentaux et théoriques [19]. En 2020, Yang et Piekarewicz ont démontré la puissance et la flexibilité de cet oscillateur, proposant également d'étendre son modèle à l'étude des systèmes symétriques nécessaires pour les calculs des excitations nucléaires [17].

En 1993, Bruce et Manning [20] ont été les premiers à envisager un nouveau type d'interaction

linéaire dans l'équation de Klein-Gordon, connu sous le nom d'oscillateur de Klein-Gordon, décrivant de manière covariante la dynamique d'une particule de spin 0 dans le cadre de la théorie des champs des bosons [18, 20].

Par ailleurs, la physique statistique décrit l'évolution de systèmes complexes tels que la thermodynamique des trous noirs, la dynamique des gaz et des plasmas, et le rayonnement du corps noir, sans connaître la dynamique à l'échelle microscopique à une époque où la physique quantique et la structure atomique étaient inconnues. Malgré les succès de la physique statistique dans la description d'une multitude de systèmes, elle peine à décrire certains phénomènes, tels que les interactions à longue portée qui présentent un comportement faiblement chaotique [21]. Pour surmonter ces difficultés, une théorie a été proposée pour généraliser la physique statistique standard, appelée "statistique non-extensive" ou "statistique de Tsallis", proposée par Tsallis en 1988 [22]. Cette statistique permet de mieux décrire certains systèmes complexes et de rapprocher les résultats expérimentaux des prédictions théoriques [22–32].

En 2003, Beck et ses collègues ont formulé de nouvelles statistiques dans le cadre de la physique non-extensive, appelées "superstatistiques", dédiées à l'étude des systèmes non linéaires et hors équilibre [33–39]. La superstatistique est caractérisée par l'utilisation de la superposition de plusieurs modèles statistiques pour obtenir la non-linéarité souhaitée, décrivant un système hors équilibre pour un état stationnaire dont le paramètre intensif fluctue [33–43].

En conclusion, ces deux théories, la superstatistique et la statistique de Tsallis, sont deux approches distinctes en physique statistique, chacune ayant ses propres caractéristiques et applications spécifiques.

- Statistique de Tsallis : La statistique de Tsallis, introduite par Constantino Tsallis en 1988, est une généralisation de la statistique de Boltzmann-Gibbs (BG). Elle est basée sur une forme généralisée de l'entropie, notée  $S_q$ , où  $q$  est un paramètre qui mesure le degré de non-extensivité du système. Contrairement à l'entropie classique de Boltzmann-Gibbs, l'entropie de Tsallis permet de décrire des systèmes non-ergodiques et non-extensifs. Elle est souvent utilisée pour étudier des systèmes présentant des interactions à longue portée et des comportements non-linéaires. Les applications de la statistique de Tsallis sont variées et incluent la modélisation de phénomènes tels que les distributions de vitesse des particules dans les plasmas, les processus d'évolution des systèmes socio-économiques, la dynamique des systèmes complexes en physique et en biologie, ainsi que l'étude des fluctuations dans les systèmes hors équilibre.
- Superstatistique : La superstatistique, proposée par C. Beck et E.G.D. Cohen en 2003, est

une approche qui vise à décrire des systèmes statistiques complexes en considérant une superposition de plusieurs distributions statistiques. Contrairement à la statistique de Tsallis, qui généralise l'entropie et les distributions de probabilité sous-jacentes, la superstatistique utilise une distribution principale qui évolue dans le temps en fonction de paramètres fluctuants. Elle est souvent appliquée pour modéliser des systèmes hors équilibre caractérisés par des fluctuations temporelles dans les paramètres thermodynamiques, tels que la température ou la densité d'énergie. Les domaines d'application de la superstatistique comprennent la physique des plasmas, la cosmologie, la physique des particules, ainsi que l'étude des fluctuations dans les systèmes financiers et socio-économiques.

En résumé, la statistique de Tsallis est une généralisation de la statistique de Boltzmann-Gibbs qui s'applique principalement aux systèmes non-extensifs, tandis que la superstatistique est une approche qui considère une superposition de distributions statistiques et est utilisée pour modéliser des systèmes avec des fluctuations temporelles dans les paramètres thermodynamiques.

L'objectif principal de cette thèse est d'explorer les propriétés thermodynamiques des oscillateurs quantiques dans le cadre de la physique non extensive, en utilisant deux approches : la statistique de Tsallis pour l'oscillateur harmonique, l'oscillateur de Dirac et l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension, et la statistique de Beck pour les oscillateurs de Dirac et de Klein-Gordon dans différentes dimensions et distributions.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres comme suit :

- Le premier chapitre offre un bref rappel sur la thermodynamique, la physique statistique et la physique non extensive.
- Les chapitres deux et trois examinent les propriétés thermodynamiques des oscillateurs de Dirac et de Klein-Gordon dans différentes dimensions selon la théorie de Beck pour différentes distributions.
- Le quatrième chapitre étudie les propriétés thermodynamiques des oscillateurs harmonique, de Dirac et de Klein-Gordon à une dimension selon la théorie de Tsallis.
- Enfin, nous résumons les résultats globaux dans le chapitre de conclusion.

---

---

# CHAPITRE 2

---

## LA PHYSIQUE STATISTIQUE NON-EXTENSIVE

### 2.1 Préambule

Dans ce chapitre, nous fournirons une introduction à la thermodynamique, à la physique statistique, ainsi qu'à la physique statistique non-extensive afin de décrire les systèmes statistiques plus complexes et de comprendre les propriétés statistiques de ces systèmes ainsi que la manière de les calculer. Cette dernière est divisée en deux parties : la physique statistique de Beck et la physique statistique de Tsallis.

#### 2.1.1 Aperçu historique sur la superstatistique

La superstatistique est un concept relativement récent en physique statistique, introduit au début des années 2000 par Constantino Tsallis. L'idée fondamentale derrière la superstatistique est de généraliser les méthodes statistiques classiques, comme la distribution de Boltzmann-Gibbs, pour mieux modéliser les systèmes complexes caractérisés par des fluctuations non extensives et des interactions à longue portée.

L'histoire de la superstatistique commence avec les travaux de Tsallis sur la généralisation de la mécanique statistique traditionnelle. En 1988, Tsallis propose une généralisation de l'entropie de Boltzmann-Gibbs, appelée entropie de Tsallis, qui est définie par une formule non extensive. Cette entropie s'avère être un outil puissant pour décrire les systèmes hors équilibre et les phénomènes caractérisés par des distributions de probabilité non gaussiennes.

Par la suite, Tsallis et d'autres chercheurs commencent à explorer les implications de cette entropie généralisée dans divers domaines de la physique statistique, notamment dans le contexte des systèmes complexes et des phénomènes hors équilibre. C'est dans ce contexte que le concept de superstatistique émerge.

La superstatistique repose sur l'idée de considérer un système statistique comme une superposition de plusieurs sous-systèmes, chacun caractérisé par une distribution de probabilité différente. Ces distributions de probabilité peuvent être interprétées comme des températures effectives, permettant ainsi de modéliser des systèmes non extensifs avec des paramètres fluctuants.

L'application de la superstatistique s'est étendue à divers domaines de la physique, y compris la physique des plasmas, la turbulence, la physique des particules, et même la finance. Elle a également suscité un intérêt croissant dans d'autres domaines interdisciplinaires en dehors de la physique, tels que la biologie et les sciences sociales.

En résumé, la superstatistique représente une extension novatrice des méthodes statistiques traditionnelles, offrant un cadre plus flexible pour modéliser et comprendre les systèmes complexes caractérisés par des phénomènes non gaussiens et des interactions à longue portée.

### 2.1.2 Aperçu historique sur la statistique non-extensive

La statistique non-extensive est une branche relativement récente de la statistique qui s'est développée dans les dernières décennies du XXe siècle. Son origine remonte principalement aux travaux du physicien brésilien Constantino Tsallis dans les années 1980.

Les premières avancées significatives dans le domaine de la statistique non-extensive ont été réalisées dans le contexte de la physique statistique, notamment dans l'étude des systèmes hors d'équilibre et des systèmes à longue portée. Constantino Tsallis, physicien brésilien, a joué un rôle central dans le développement de cette théorie.

En 1988, Tsallis propose une généralisation de la mécanique statistique classique basée sur une entropie non-extensive. Contrairement à l'entropie de Boltzmann-Gibbs, qui est extensive et convient aux systèmes à l'équilibre thermodynamique, l'entropie de Tsallis conserve sa forme sous des transformations non linéaires, ce qui la rend applicable à une plus grande variété de systèmes.

La statistique non-extensive a trouvé des applications dans de nombreux domaines en dehors de la physique, notamment en économie, en biologie, en géophysique et dans d'autres disciplines où les phénomènes complexes sont étudiés. Elle a été utilisée pour modéliser des systèmes à grande échelle tels que les réseaux de transport, les phénomènes de diffusion anormale, et même pour décrire les distributions de richesse.

Depuis les premières propositions de Tsallis, la statistique non-extensive a fait l'objet de nombreuses recherches théoriques et appliquées. Des physiciens, des mathématiciens et des chercheurs dans d'autres domaines ont contribué à son développement en explorant ses implications

théoriques et en proposant de nouvelles applications.

Bien que la statistique non-extensive ait connu un intérêt considérable, elle n'est pas sans controverses. Certains chercheurs remettent en question son utilité dans certaines applications et contestent ses fondements théoriques. Cependant, son potentiel à modéliser des systèmes complexes et à fournir de nouvelles perspectives sur les phénomènes naturels continue d'attirer l'attention des scientifiques.

En résumé, la statistique non-extensive est une branche dynamique et en évolution de la statistique qui offre de nouvelles façons de comprendre et de modéliser des systèmes complexes dans divers domaines scientifiques. Son développement reste un sujet de recherche actif et prometteur.

## 2.2 Thermodynamique

La thermodynamique, science née au début du XIXe siècle, constitue une branche de la physique qui se consacre à l'étude des propriétés des systèmes physiques macroscopiques en équilibre thermique, ainsi qu'à l'étude des échanges d'énergie qui se manifestent entre deux formes fondamentales d'énergie : la quantité de chaleur ( $Q$ ) et le travail mécanique ( $W$ ). Elle décrit le comportement de l'énergie dans divers systèmes et trouve des applications dans pratiquement tous les domaines de la science, notamment la mécanique, la chimie, voire même la biologie [44, 45].

### 2.2.1 Quelques définitions

Voici quelques définitions pertinentes des grandeurs physiques en thermodynamique [44–46] :

- Chaleur  $Q$  : La chaleur est une forme d'énergie transférée entre un système et son environnement thermique en raison d'une différence de température. Elle se manifeste sous forme d'agitation moléculaire et peut être échangée de manière désordonnée.
- Travail  $W$  : Le travail est une autre forme d'énergie transférée entre un système et son environnement, mais cette fois-ci sous forme de travail mécanique. Il se produit lorsque des forces déplacent des objets et effectuent un travail organisé à l'échelle microscopique.
- Énergie interne  $U$  : L'énergie interne d'un système thermodynamique représente l'énergie totale des particules qui le composent, incluant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Les variations d'énergie interne résultent des échanges de chaleur et de travail avec l'environnement.
- Entropie  $S$  : L'entropie est une grandeur physique abstraite qui mesure le degré de désordre ou de chaos dans un système à l'échelle microscopique. Elle tend à augmenter avec le

temps, ce qui correspond à une augmentation du désordre.

- Capacité thermique à volume constant  $C_v$  : La capacité thermique à volume constant est la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter la température d'un système d'une unité de température (généralement un Kelvin) tout en maintenant son volume constant.
- Énergie libre  $F$  : L'énergie libre, également connue sous le nom de fonction de Helmholtz et notée  $F$ , joue un rôle crucial en physique statistique et en thermodynamique.  $F$  est une grandeur qui mesure la quantité d'énergie pouvant être extraite d'un système à température constante et pression constante. Sa variation permet de déterminer le travail utile susceptible d'être fourni par un système thermodynamique fermé.

### 2.2.2 Les principes de la thermodynamique

La thermodynamique est fondée sur quatre principes, chacun apportant des notions cruciales à la compréhension des systèmes physiques :

- Le principe zéro de la thermodynamique : Ce principe énonce que deux systèmes en équilibre thermique avec un troisième sont en équilibre entre eux. Cela signifie que si deux systèmes ont la même température qu'un troisième système, alors ils sont également en équilibre thermique entre eux.
- Le premier principe : Ce principe stipule que lors d'une transformation quelconque d'un système non isolé, la variation de son énergie interne ( $\Delta U$ ) est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail) ( $\Delta U = Q + W$ ). En d'autres termes, l'énergie interne d'un système change en fonction de la chaleur ajoutée ou extraite et du travail effectué sur le système.
- Le deuxième principe : Ce principe introduit le concept d'entropie ( $S$ ). Dans un système isolé, l'entropie est une fonction qui ne diminue pas avec le temps ( $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ ). Cela signifie que dans un système isolé, l'entropie tend à rester constante ou à augmenter au fil du temps, reflétant la tendance naturelle des systèmes à évoluer vers des états de plus en plus désordonnés.
- Le troisième principe : Ce principe énonce que la valeur de l'entropie de tout corps pur à l'état de cristal parfait est nulle à la température de 0 kelvin ( $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$ ). Ce principe met en évidence le comportement singulier de l'entropie à très basses températures, où elle atteint son minimum absolu pour un cristal parfaitement ordonné.

Ces principes fournissent un cadre théorique essentiel pour comprendre les phénomènes thermodynamiques et les comportements des systèmes physiques à différentes échelles et conditions.

## 2.3 La physique statistique

Le domaine de la physique statistique a été pionné par Boltzmann (1872) et Gibbs (1900), qui ont décrit les systèmes macroscopiques à partir de constituants microscopiques. D'autre part, la mécanique quantique décrit les propriétés et l'évolution des systèmes physiques à l'échelle microscopique. Ainsi, la mécanique statistique est construite sur cette description quantique. La physique statistique va au-delà de la thermodynamique, permettant de comprendre des phénomènes que les autres branches de la physique ne peuvent expliquer. Des applications concrètes peuvent être trouvées dans divers domaines de la physique tels que l'électromagnétisme, l'astrophysique, la physique des solides, la physique des plasmas, la physique de la matière condensée, la cosmologie, l'hydrodynamique, les superfluides, etc. [44, 45]. L'idée principale de la physique statistique est l'introduction de la théorie des probabilités dans l'étude des systèmes physiques. Le but principal d'une telle étude est la description de l'évolution du système au cours du temps. Tout le domaine de la physique statistique repose sur une fonction fondamentale, l'entropie, qui a été proposée par Boltzmann–Gibbs (désormais notée  $S_{BG}$ ). En 1877, Boltzmann a introduit une grandeur physique que nous noterons l'entropie ( $S_{BG}$ ) [45, 46]

$$S_{BG} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i. \quad (2.1)$$

Dans cette équation,  $k_B$  représente la constante fondamentale de Boltzmann, définie comme  $k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ , où  $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  est le nombre d'Avogadro. Ici,  $p_i$  représente la probabilité que l'événement  $i$  se produise sous la condition.

$$\sum_i p_i = 1. \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) est souvent désignée comme la condition de normalisation. Si

$$p_i = \frac{1}{W}, \quad (2.3)$$

pour tout  $i$ , alors :

$$S_{BG} = k_B \ln W \quad (2.4)$$

où  $W$  est le nombre total de configurations possibles du système. Parmi les autres propriétés importantes, mentionnons que cette fonctionnelle entropique est (i) non négative, (ii) également additive, c'est-à-dire, si  $A$  et  $B$  sont deux systèmes probabilistement indépendants (c'est-à-dire,  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ ), alors :

$$S_{BG}(A+B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B). \quad (2.5)$$

Les probabilités à l'équilibre sont alors données par :

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}, \quad (2.6)$$

dont  $Z$

$$Z(\beta) = \sum_i e^{-\beta E_i}, \quad (2.7)$$

est appelé la fonction de partition et  $\beta$  calcule l'agitation thermique :

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (2.8)$$

est identifié à l'inverse de la température. La fonction de partition  $Z$  est une quantité centrale en physique statistique car elle contient toutes les informations sur les états microscopiques possibles d'un système. Le paramètre de Lagrange, souvent noté  $\beta$ , est une quantité utilisée dans le formalisme de la mécanique statistique pour représenter l'inverse de la température thermodynamique. Il apparaît généralement dans les fonctions de partition et les expressions de l'énergie libre où il joue un rôle crucial dans la description des propriétés thermodynamiques des systèmes. En d'autres termes, il permet de relier les concepts de la thermodynamique macroscopique avec les distributions statistiques des états microscopiques des particules constituant le système.

En physique statistique, les grandeurs thermodynamiques sont des quantités physiques qui caractérisent l'état d'un système thermodynamique. Elles permettent de décrire et de prédire le comportement macroscopique d'un système en équilibre thermique.

Les grandeurs ( $U, S, F$ , et  $C_v$ ) sont essentielles pour comprendre le comportement thermodynamique des systèmes physiques et sont souvent utilisées pour décrire et prédire les transitions de phase, les équilibres thermodynamiques et d'autres phénomènes thermodynamiques complexes. En physique statistique, elles sont généralement exprimées en fonction du paramètre de Lagrange  $\beta$ , qui est l'inverse de la température.

Les grandeurs thermodynamiques sont généralement reliées à la fonction de partition d'un système en équilibre thermique. Voici comment certaines grandeurs thermodynamiques sont liées à la fonction de partition :

- Énergie totale  $U$  : L'énergie totale est liée à la fonction de partition par la relation

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \quad (2.9)$$

- Entropie  $S$  : L'entropie peut être exprimée en termes de la fonction de partition comme

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln Z + k_B \beta \langle E \rangle \\ &= \ln Z(\beta) - \beta \frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

- Énergie libre  $F$  : L'énergie libre est liée à la fonction de partition par

$$\begin{aligned} F &= U(\beta) - TS(\beta) \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta), \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $T$  est la température absolue.

- Chaleur spécifique  $C_v$  : La chaleur spécifique peut être calculée à partir de la fonction de partition comme

$$\frac{C_v(\beta)}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z(\beta)}{\partial \beta^2}. \quad (2.12)$$

Ces relations montrent comment les grandeurs thermodynamiques peuvent être dérivées à partir de la fonction de partition, qui contient des informations sur les états microscopiques du système. En connaissant la fonction de partition, on peut donc déduire les propriétés thermodynamiques importantes d'un système en équilibre thermique.

La plupart des applications de la physique statistique impliquent l'utilisation de fonctions de distribution à l'équilibre pour caractériser divers systèmes, où ces fonctions découlent généralement de la maximisation de l'entropie sous certaines contraintes. L'entropie, bien que conceptuellement abstraite, constitue la fondation de la théorie des probabilités et de la théorie de l'information.

La physique statistique, basée sur l'entropie de Boltzmann–Gibbs (BG), a été couronnée de succès dans l'analyse d'une multitude de systèmes physiques au cours des derniers siècles. Cependant, elle rencontre des limites dans de nombreux systèmes complexes, naturels, artificiels et sociaux. Malgré sa remarquable efficacité, la thermodynamique statistique révèle des limites dans certaines situations où ses principes ne semblent pas toujours être rigoureusement justifiés et où elle éprouve des difficultés à décrire certains phénomènes. À titre d'exemple, considérons ce qui suit :

- Systèmes hors équilibre : La thermodynamique statistique est principalement conçue pour des systèmes en équilibre thermodynamique, ce qui la rend moins adaptée pour décrire

avec précision les systèmes hors équilibre, tels que les processus dynamiques rapides ou les systèmes loin de l'équilibre.

- Systèmes à petite échelle : À l'échelle microscopique, les fluctuations quantiques et les effets de taille finie deviennent significatifs, rendant la thermodynamique statistique moins précise pour prédire le comportement de tels systèmes, comme les nanostructures ou les systèmes à quelques particules.
- Phénomènes critiques : Près d'une transition de phase, comme la transition liquide-vapeur ou la transition magnétique, les fluctuations deviennent importantes et la thermodynamique statistique peut ne pas fournir des prédictions précises sur le comportement critique de ces systèmes.
- Systèmes à interactions fortes : Dans certains systèmes où les interactions entre les particules sont très fortes, tels que les systèmes fortement corrélés ou les systèmes désordonnés, la thermodynamique statistique standard peut avoir du mal à capturer correctement le comportement collectif des particules.
- Systèmes non-ergodiques : Certains systèmes, comme ceux à longue portée ou fortement hors équilibre, peuvent ne pas satisfaire l'hypothèse ergodique de la thermodynamique statistique, remettant en question l'applicabilité des concepts statistiques traditionnels.

Ces exemples, parmi d'autres possibles, mettent en lumière certaines des circonstances où la thermodynamique statistique peut montrer des limites, et où des généralisations ou des approches alternatives peuvent être nécessaires pour décrire avec précision le comportement des systèmes physiques.

Pour aborder ces défis, une approche complémentaire appelée "superstatistique" a été intégrée dans le paysage de la thermodynamique statistique. Cette méthode novatrice vise à modéliser les systèmes physiques en tenant compte de leur hétérogénéité interne et de la présence de multiples échelles de temps et d'énergie. En combinant les principes de la statistique non-extensive avec ceux de la superstatistique, les chercheurs cherchent à développer des outils plus robustes pour décrire la diversité des comportements observés dans les systèmes complexes [22, 23, 28–30, 34, 39, 47, 48].

## 2.4 Aperçu succinct du cadre théorique de la physique non-extensive

La théorie de BG dans le domaine de la physique statistique non-extensive, introduite par Tsallis en 1988, élargit le concept de  $S_{BG}$  en un paramètre unique. Ce paramètre, qui caractérise les interactions à longue portée, offre une approche flexible pour décrire des systèmes complexes, conciliant les données expérimentales avec les prédictions théoriques. Cette extension de la physique statistique classique par Tsallis et ses collègues [22, 27, 28], via une entropie non-additive, trouve des applications diverses, notamment dans la modélisation de systèmes complexes tels que les plasmas et les systèmes financiers.

### 2.4.1 q-Algèbre

Pour un nombre réel fixe  $q$ , définissez q-somme (*q-sum*)  $x \oplus_q y$  et q-produit (*q-product*)  $x \otimes_q y$  avec  $x \in \mathbb{C}$  et  $y \in \mathbb{C}$  comme opération binaire, définie comme suit [32, 49] :

$$x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy \quad \text{avec } (x \oplus_1 y = x + y). \quad (2.13)$$

$$x \otimes_q y = (x^{1-q} + y^{1-q} - 1)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{avec } (x \otimes_1 y = xy). \quad (2.14)$$

De plus, avec ces généralisations mathématiques de la somme et du produit, un nouveau calcul pourrait être construit qui semble avoir certaines propriétés introuvables pour d'autres structures mathématiques. Nous pouvons vérifier directement les propriétés suivantes [49] :

$$\ln_q(x \cdot y) = \ln_q x \oplus_q \ln_q y. \quad (2.15)$$

$$e_q(x) e_q(y) = e_q(x + y + (1 - q)xy). \quad (2.16)$$

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y. \quad (2.17)$$

Nous pouvons définir l'opposé de  $x$  ( $\ominus_q x$ ) comme l'élément qui, lorsque q-somme avec  $x$ , donne l'élément neutre :  $x \oplus_q (\ominus_q x)$ . Donc, nous avons [50] :

$$\ominus_q x \equiv \frac{-x}{1 + (1 - q)x} \quad \left( x \neq \frac{1}{(q - 1)} \right). \quad (2.18)$$

Cette définition nous permet de définir la q-différence (*q-difference*), comme la q-somme avec la q-opposée (*q-opposite*) :

$$x \ominus_q y \equiv x \oplus_q (\ominus_q y) = \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \quad \left( y \neq \frac{1}{(q - 1)} \right). \quad (2.19)$$

La q-différence obéit  $x \ominus_q y \equiv \ominus_q y \oplus_q x$  et  $x \ominus_q (y \ominus_q z) = (x \ominus_q y) \oplus_q z$ , mais  $a(x \ominus_q y) \neq (ax \ominus_q ay)$ .

Cela, nous amènons à la définition du q-produit et q-rapport (*q-ratio*) entre les deux nombres, donc ils défini par :

$$x \otimes_q y \equiv [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, y > 0). \quad (2.20)$$

$$x \oslash_q y \equiv [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, y \geq 0). \quad (2.21)$$

Ici, le symbole  $(\cdot)_+$  signifie [32] :

$$(a)_+ = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}. \quad (2.22)$$

Ces relations q-algébriques nous permettent d'exprimer les propriétés du q-logarithme et de la q-exponentielle sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned} \ln_q(xy) &= \ln_q x \oplus_q \ln_q y, & e_q(x) e_q(y) &= e_q(x \oplus_q y) \\ \ln_q(x \otimes_q y) &= \ln_q x + \ln_q y, & e_q(x) \otimes_q e_q(y) &= e_q(x + y) \\ \ln_q(x/y) &= \ln_q x \ominus_q \ln_q y, & e_q(x) / e_q(y) &= e_q(x \ominus_q y) \\ \ln_q(x \oslash_q y) &= \ln_q x - \ln_q y, & e_q(x) \oslash_q e_q(y) &= e_q(x - y) \end{aligned}. \quad (2.23)$$

Le q-puissance (*q-power*) est défini comme suit :

$$x^{\otimes_q n} = \underbrace{x \otimes_q x \otimes_q x \otimes_q \dots \otimes_q x}_{n \text{ fois}} = [nx^{1-q} - (n-1)]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (2.24)$$

avec  $x^{\otimes_q 1} \equiv x$ , il s'ensuit aussi directement qu'une somme de  $n$  termes identiques :

$$\underbrace{x \oplus_q x \oplus_q x \oplus_q \dots \oplus_q x}_{n \text{ termes}} = \frac{1}{1-q} \{ [1 + (1-q)x]^n - 1 \}. \quad (2.25)$$

Dans la physique statistique non-extensive de Tsallis, les grandeurs thermodynamiques telles que, l'énergie totale  $U(\beta_q)$ , l'entropie  $S(\beta_q)$ , l'énergie libre  $F(\beta_q)$  et la chaleur spécifique  $C_v(\beta_q)$ , pour un système donné sont déterminées comme suit, respectivement [28] :

$$U(\beta_q) = -\frac{\partial \ln Z(\beta_q)}{\partial \beta_q}, \quad (2.26)$$

$$\frac{S(\beta_q)}{k_B} = \ln Z(\beta_q) - \beta_q \frac{\partial \ln Z(\beta_q)}{\partial \beta_q}, \quad (2.27)$$

$$F(\beta_q) = U(\beta_q) - TS(\beta_q) = -\frac{1}{\beta_q} \ln Z(\beta_q), \quad (2.28)$$

$$\frac{C_v(\beta_q)}{k_B} = \beta_q^2 \frac{\partial^2 \ln Z(\beta_q)}{\partial \beta_q^2}. \quad (2.29)$$

### 2.4.2 Entropie de Tsallis

Cette entropie non-extensive, symbolisée par  $S_q$ , généralise l'entropie de Boltzmann-Gibbs ( $S_{BG}$ ) en introduisant un paramètre de non-extensivité,  $q$ . Sa définition est la suivante [28,32,51] :

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} \quad (2.30)$$

où  $p_i$  sont les probabilités microcanoniques, et  $W$  est le nombre de micro-états accessibles du système. Lorsque  $q \rightarrow 1$ , l'entropie non-extensive converge vers l'entropie de Boltzmann-Gibbs.

La définition de l'entropie de Tsallis ( $S_q$ ) dans l'Eq. (2.30) est enrichie par les propriétés suivantes :

- Récupération de l'entropie BG :  $\lim_{q \rightarrow 1} S_q(f) = S_{BG}(f)$  pour toute fonction de densité de probabilité ( $f$ ),
- Non-négativité :  $S_q(f) \geq 0$  pour toutes les valeurs du paramètre de déformation ( $q \in \mathbb{R}$ ) et pour les fonctions de densité de probabilité discrète  $f \equiv \{p_j, j = 1, \dots, W\}$ ,
- Non-additivité pour  $q \neq 1$  : Pour deux sous-systèmes (A et B) indépendants et statistiquement non corrélés dans l'espace d'état, la relation suivante est valide :

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k_B} S_q(A) S_q(B),$$

Ainsi :

- L'entropie est superadditive pour  $q < 1$  :  $S_q(A+B) > S_q(A) + S_q(B)$ ,
- L'entropie est sous-additive pour  $q > 1$  :  $S_q(A+B) < S_q(A) + S_q(B)$ ,
- Concavité de l'entropie pour  $q > 0$  : Pour deux densités arbitraires  $f$  et  $g$ , la relation de concavité est définie comme suit :

$$S_q(\lambda f + (1-\lambda)g) \geq \lambda S_q(f) + (1-\lambda)S_q(g).$$

- Convexité de l'entropie pour  $q < 0$  : Pour deux densités arbitraires  $f$  et  $g$ , la relation de convexité est définie comme suit :

$$S_q(\lambda f + (1-\lambda)g) \leq \lambda S_q(f) + (1-\lambda)S_q(g).$$

- Composabilité :  $S_q/k$  est composable avec la fonction de composabilité associée

$$F(x, y; q) = x + y + (1-q)xy$$

- La dérivée de Jackson : Le mathématicien Jackson a généralisé la notion de dérivée d'une fonction générique  $f(x)$  pour  $q \neq 1$ . Il a présenté son opérateur différentiel  $D_q$  comme suit :

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x},$$

### 2.4.3 Statistique non-extensive de Tsallis

La théorie de BG s'avère insuffisante pour les divers types de systèmes complexes. En 1988, une généralisation de cette théorie par Tsallis, appelée physique statistique non-extensive, a été proposée, basée sur l'entropie  $S_q$ . Cette entropie peut être définie comme suit [28, 49, 51] :

$$S_q = k_B \left( \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \right) = k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \left( \frac{1}{p_i} \right), \quad (2.31)$$

où  $q \in \mathbb{R}$  et  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ .

Le paramètre de déformation ( $q$ ) est considéré comme un nombre réel positif, car cela garantit la stabilité de l'entropie de Tsallis. Cette entropie ( $S_q$ ) réussit à élargir le champ d'application des concepts de physique statistique à de nombreux systèmes. Elle remplit des propriétés thermodynamiquement pertinentes telles que l'expansibilité, la composabilité, la stabilité de Lesche et la concavité.

L'entropie non-extensive manifestée est régie par le paramètre  $(1 - q)$ . Les statistiques de BG sont récupérées dans la limite  $q \rightarrow 1$ .

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (2.32)$$

Pour introduire une généralisation  $q$  de la fonction exponentielle, Tsallis considère l'équation différentielle non linéaire suivante (où  $q \neq 1$ ) :

$$\frac{dy}{dx} = y^q, \quad \text{avec } q \in \mathbb{R}, \quad (2.33)$$

avec la condition initiale  $y(0) = 1$ , on trouve sa solution :

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x, \quad (2.34)$$

et sa solution inverse :

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (2.35)$$

Nous appellerons désormais ces deux fonctions respectivement  $q$ -exponentielle et  $q$ -logarithme. Elles joueront un rôle important tout au long de la théorie. Les rôles joués dans la théorie traditionnelle par les fonctions logarithmiques et exponentielles sont joués, dans la théorie généralisée,

par ce qu'on appelle q-exponentielle, donnée par l'équation (2.34), et son inverse, le q-logarithme, donné par l'équation (2.35).

Dans la théorie de Tsallis, la probabilité et la fonction de partition sont données respectivement par les équations suivantes [51] :

$$p_j = \frac{e_q^{-\beta_q E_j}}{Z(\beta_q)}, \quad (2.36)$$

dont

$$Z(\beta_q) = \sum_j e_q^{-\beta_q E_j}, \quad (2.37)$$

où  $\beta_q$  est un coefficient d'énergie défini comme [52] :

$$\beta_q = \frac{q\beta}{q + (1 + \alpha)(1 - q)}. \quad (2.38)$$

avec  $\alpha$  étant le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de normalisation.

## 2.5 Superstatistique de Beck

Einstein n'a jamais accepté le principe de Boltzmann ( $S = k \ln W$ ), soutenant que les statistiques ( $W$ ) d'un système devaient découler de sa dynamique et ne pouvaient pas être postulées a priori. Malgré cela, les statistiques de Boltzmann–Gibbs fonctionnent remarquablement bien pour les systèmes classiques, caractérisés par des forces à courte portée et une dynamique d'équilibre relativement simple. Toutefois, les critiques d'Einstein suggèrent que pour les systèmes avec une dynamique complexe, d'autres statistiques que celles de Boltzmann–Gibbs pourraient être plus appropriées. Une telle alternative a été proposée par Tsallis et observée dans divers systèmes complexes. Ainsi, pour ces types de systèmes, le formalisme de la mécanique statistique non-extensive s'avère être un concept théorique utile, introduisant un facteur de Boltzmann plus général dépendant d'un indice entropique  $q$  [34].

En 2003, Beck et al. ont abordé de manière assez générale les systèmes hors équilibre présentant un état stationnaire à long terme et possédant une quantité intensive fluctuant spatio-temporellement. Leur travail démontre qu'en moyennant les fluctuations, une description efficace peut être obtenue non seulement avec les statistiques de Tsallis, mais aussi avec un ensemble infini de statistiques plus générales, appelées "superstatistiques". Ce terme a été choisi car ces nouvelles statistiques représentent en quelque sorte des "statistiques des statistiques". Un paramètre  $q$  peut être défini pour toutes ces nouvelles statistiques et avoir une interprétation physique. Lorsque  $q = 1$ , toutes les superstatistiques se réduisent au facteur de Boltzmann  $e^{-\beta E}$  de la physique statistique ordinaire [34].

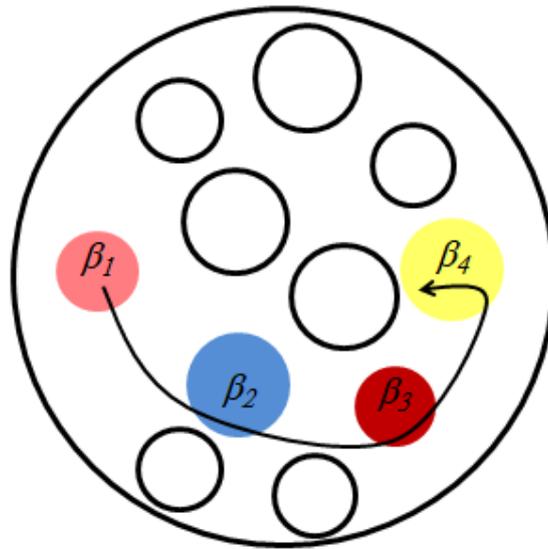


FIG. 2.1 : Schéma de la superstatistique.

### 2.5.1 La théorie de la superstatistique

On considère un système hors équilibre constitué de régions présentant des fluctuations spatio-temporelles d'une quantité intensive. Cette quantité peut être la température inverse, la pression, le potentiel chimique ou le taux de dissipation d'énergie dans un fluide turbulent, par exemple. On examine un état stationnaire hors équilibre d'un système macroscopique, composé de nombreuses cellules plus petites qui sont temporairement en équilibre local (voir Figure 2.1). Dans chaque cellule, la quantité fluctuante est approximativement constante, comme l'inverse de la température ( $\beta$ ), par exemple. Chaque cellule est suffisamment grande pour obéir à la physique statistique, mais elle est associée à une distribution de probabilité ( $f(\beta)$ ) différente.

Les températures locales dans les différentes cellules changent sur une longue échelle de temps  $t$ . Cette échelle de temps  $t$  est beaucoup plus grande que le temps de relaxation nécessaire aux cellules individuelles pour atteindre l'équilibre local. Il est clair que le modèle de Beck constitue une approximation appropriée pour un champ de température variant continuellement, ayant une longueur de corrélation spatiale de l'ordre de la taille de la cellule  $L$  et une longueur de corrélation temporelle  $t$  [34, 37, 48, 53, 54].

La physique superstatistique se caractérise par l'utilisation de la superposition de différents modèles statistiques pour atteindre la non-linéarité tant convoitée à différents  $\beta$  pondérés par une fonction  $f(\beta)$  [12, 34, 55, 56]. Ces systèmes peuvent atteindre l'équilibre local dans de petites cellules locales avec un  $\beta$  donné en un temps suffisant. Pour les systèmes hors équilibre, un

facteur de Boltzmann généralisé  $B(E)$ , introduit par Beck et al. [34], peut s'écrire comme suit :

$$B(E) = \int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta. \quad (2.39)$$

À partir de l'équation (2.39), nous observons que :

- $B(E)$  a la forme de la transformation de Laplace de  $f(\beta)$ ,
- $E$  représente l'énergie du système analysé,
- $f(\beta)$  est la fonction de distribution.

En outre, toujours à partir de l'équation (2.39), les superstatistiques du système fournissent une bonne base pour obtenir une variété infinie de fonctions de distribution  $f(\beta)$  [56,57]. Pour discuter de ce point, la fonction de densité de probabilité  $f(\beta)$  doit respecter certaines conditions afin de restreindre considérablement le nombre de cas physiquement pertinents, même s'il existe de nombreuses autres possibilités [12, 34, 55, 56] :

- La fonction de densité de probabilité peut être normalisée. En effet, cela peut être physiquement pertinent pour des statistiques telles que la distribution uniforme, log-normale, gamma, gaussienne et la distribution F.
- $\int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta$  doit exister.
- Les superstatistiques peuvent être réduites aux statistiques de Boltzmann-Gibbs.

Cela signifie que si l'une des conditions n'est pas vérifiée, il est nécessaire d'utiliser la distribution de probabilité stationnaire habituelle [12] :

$$p(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)} = \frac{B(E_n)}{Z(\beta)}, \quad (2.40)$$

où la fonction de partition est donnée par Labidi [12, 30, 31] :

$$Z(\beta) = \sum_n f(\beta) e^{-\beta E_n} = \sum_n B(E_n). \quad (2.41)$$

La statistique non-extensive caractérisée par la fonction q-exponentielle de Tsallis peut être décrite comme suit [12, 27] :

$$e_q^{-\beta E} = \begin{cases} (1 + (q-1)\beta E)^{-\frac{1}{q-1}} & \text{si } 0 < q < 1 \\ e^{-\beta E} & \text{si } q = 1 \end{cases}. \quad (2.42)$$

Dans cette équation,  $q$  est l'indice de la physique statistique non-extensive et  $\beta_0$  s'exprime comme suit :

$$\langle \beta \rangle = \int_0^{\infty} \beta f(\beta) d\beta. \quad (2.43)$$

Dans le cas d'asymptotiques de basse énergie, les conditions suivantes doivent être remplies [56] :

- Toute universalité superstatistique n'est contrôlée que par deux paramètres  $(\beta, q)$  :

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2}. \quad (2.44)$$

- Le paramètre  $\beta$  ne peut être considéré comme un multiplicateur de Lagrange local que pour une petite cellule spatiale en équilibre local,
- De plus, le paramètre  $\beta$  peut être considéré comme l'inverse de la température pour les fonctions de distribution choisies (distributions Gamma, Log-Normale et F),
- Les Eqs. (2.9, 2.10, 2.11, 2.12) sont valables et peuvent être appliqués dans ce cas.
- Enfin, il convient de noter que ces dernières années, les superstatistiques ont suscité une attention considérable et trouvé de nombreuses applications dans diverses branches de la physique [12, 36, 58–67].

Pour évaluer l'intégrale de l'équation (2.43), deux approches asymptotiques sont envisageables : les asymptotiques de basse et de grande énergie des distributions stationnaires de la superstatistique générale [34, 58]. Ces approches peuvent être définies comme suit :

- L'analyse des propriétés de  $f(\beta)$  de la variable intensive dans les différentes cellules spatiales pour déterminer le taux de désintégration asymptotique de  $B(E)$ ,
- L'examen des aspects universels des asymptotiques des grandes énergies.

Pour des raisons de simplicité, nous nous concentrons sur l'approximation asymptotique à basse énergie [34]. Dans ce contexte, l'approximation à basse énergie représente la principale correction de la physique statistique ordinaire avec des fluctuations de température pour de faibles valeurs de l'énergie.

Dans le cadre de la superstatistique, l'énergie libre de ce système est donnée par :

$$F = -\frac{1}{\langle \beta \rangle} \ln Z(\langle \beta \rangle), \quad (2.45)$$

où nous définissons l'entropie comme suit :

$$S = k_B (\ln Z(\langle \beta \rangle) + \langle \beta \rangle U). \quad (2.46)$$

Il est ainsi possible de traiter ce système comme en physique statistique ordinaire, où :

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{k_B T}. \quad (2.47)$$

## 2.5.2 Les différents types de distributions de probabilité

La fonction  $f(\beta)$  varie en fonction du type de distribution choisi [34]. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur l'étude de trois distributions importantes où la variable aléatoire  $\beta$  est toujours positive. Voici les expressions de  $f(\beta)$  pour chacune de ces distributions :

- Pour la distribution Gamma :

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}}, \quad c > 0, b > 0. \quad (2.48)$$

- Pour la distribution Log-Normale :

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta s \sqrt{2\pi}} e^{-\left\{\frac{(\log(\frac{\beta}{m}))^2}{2s^2}\right\}}, \quad (2.49)$$

- Pour la distribution F :

$$f(\beta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\omega}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left(\frac{b\nu}{\omega}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{\beta^{\left(\frac{\nu}{2}\right)-1}}{\left(1 + \left(\frac{\nu b}{\omega}\right)\beta\right)^{\frac{(\nu+\omega)}{2}}}. \quad (2.50)$$

Ainsi, le facteur de Boltzmann est exprimé en termes de paramètres universels  $q$  et  $\beta_0$  comme suit :

$$B(E_n) \approx e^{-\langle\beta\rangle E_n} \left(1 + \frac{q-1}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 + g(q) \langle\beta\rangle^3 E_n^3 + \dots\right). \quad (2.51)$$

La fonction  $g(q)$  dépend du type de distribution choisi, comme indiqué par [34] :

- Pour la distribution Gamma :  $g(q) = -\frac{1}{3}(q-1)^2$ .
- Pour la distribution Log-Normale :  $g(q) = -\frac{1}{6}(q^3 - 3q + 2)$ .
- Pour la distribution F :  $g(q) = -\frac{1}{3} \frac{(q-1)(5q-6)}{3-q}$ .

Le facteur de Boltzmann pour les trois distributions peut être écrit comme suit :

- Pour la distribution Gamma :

$$B(E_n) \approx e^{-\langle\beta\rangle E_n} \left(1 + \frac{q-1}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 - \frac{(q-1)^2}{3} \langle\beta\rangle^3 E_n^3 + \dots\right). \quad (2.52)$$

- Pour la distribution Log-Normale :

$$B(E_n) \approx e^{-\langle\beta\rangle E_n} \left(1 + \frac{q-1}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 - \frac{(q^3 - 3q + 2)}{6} \langle\beta\rangle^3 E_n^3 + \dots\right). \quad (2.53)$$

- Pour la distribution F :

$$B(E_n) \approx e^{-\langle\beta\rangle E_n} \left(1 + \frac{q-1}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 - \frac{(q-1)(5q-2)}{3(3-q)} \langle\beta\rangle^3 E_n^3 + \dots\right). \quad (2.54)$$

L'approximation d'ordre zéro ( $q = 1$ ) du facteur de Boltzmann généralisé correspond à la statistique « pure » de Boltzmann :

$$B(E_n) \sim e^{-\beta E_n}. \quad (2.55)$$

---

---

# CHAPITRE 3

---

## LES PROPRIÉTÉS SUPERSTATISTIQUES DE L'OSCILLATEUR DE DIRAC

### 3.1 Introduction

Dans la mécanique quantique non relativiste, l'oscillateur harmonique représente l'un des systèmes exactement solubles. En revanche, dans un cadre relativiste, la généralisation du champ oscillateur varie selon le choix du champ relativiste. Cependant, les oscillateurs relativistes sont généralement des systèmes exactement solubles. Parmi eux, l'oscillateur de Dirac (DO : *Dirac Oscillator*), introduit par des substitutions non-minimales dans l'hamiltonien de Dirac libre, est bien connu.

L'équation de Dirac est linéaire en impulsion et en coordonnées, et l'oscillateur de Dirac décrit des systèmes de mécanique quantique réelle, avec une large gamme d'applications, de la physique nucléaire à l'optique quantique. Il combine des aspects de mécanique quantique et de relativité restreinte, constituant une extension relativiste de l'oscillateur harmonique quantique ordinaire, intégrant les effets de spin via l'équation de Dirac.

L'étude des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac dans différentes dimensions de l'espace-temps est un domaine de recherche complexe. En dimension 3+1, il présente un spectre énergétique unique, comprenant à la fois des états discrets et continus, ce qui nécessite la considération d'un ensemble statistique de sous-systèmes avec leurs propres distributions de niveaux d'énergie et de probabilités associées.

L'exploration des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac dans des dimensions supérieures à 3+1 est un domaine de recherche actif, nécessitant des investigations approfondies et l'utilisation de techniques mathématiques avancées telles que la théorie des groupes, la géométrie différentielle et l'analyse spectrale.

Ce chapitre se concentre sur le calcul des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac en une, deux et trois dimensions. Nous utiliserons une approximation asymptotique à basse énergie pour garantir l'universalité des résultats. Nous examinerons ces propriétés pour différentes fonctions de distribution telles que la distribution Gamma, la distribution Log-Normale et la distribution F, en raison de leur utilisation répandue dans divers domaines de la physique. Par exemple, la distribution Gamma est utilisée dans les statistiques des rayons cosmiques et les processus de diffusion en physique des particules, la distribution Log-Normale est utilisée dans le modèle de turbulence, tandis que la distribution F est couramment utilisée en physique des plasmas et de la fusion.

## 3.2 Les énergies de l'oscillateur de Dirac dans les dimensions un, deux et trois

L'équation de Dirac pour un oscillateur de Dirac avec une interaction spécifique est exprimée par [1-3] :

$$H_D \Psi_D = E \Psi_D, \quad (3.1)$$

où  $\Psi_D$  représente la fonction d'onde et  $E$  l'énergie de l'oscillateur de Dirac. L'Hamiltonien de Dirac ( $H_D$ ) associé à l'équation (3.1) est défini par :

$$H_D = c \alpha \mathbf{p} + \beta m c^2, \quad (3.2)$$

où  $m$  est la masse de la particule,  $c$  est la vitesse de la lumière,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des matrices hermitiennes, et le moment  $\mathbf{p}$  est remplacé par :

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\beta w \mathbf{r}, \quad (3.3)$$

avec  $w$  et  $\mathbf{r}$  représentant respectivement la fréquence et le vecteur position.

### 3.2.1 Cas de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel (1D)

L'équation (3.1) dans le cas unidimensionnel se simplifie selon [12] :

$$\{c\alpha_x(p_x - im\beta w x) + \beta m c^2\} \Psi_D(x) = E \Psi_D(x), \quad (3.4)$$

dont  $\Psi_D = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ , avec

$$\alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où  $\sigma_i, i = (x, y, z)$  est la matrice de Pauli. À partir de l'équation (3.4), nous obtenons :

$$(E - mc^2) \Psi_1(x) = c(p_x + imwx) \Psi_2(x), \quad (3.6)$$

$$(E + mc^2) \Psi_2(x) = c(p_x - imwx) \Psi_1(x). \quad (3.7)$$

$\Psi_2(x)$  est exprimé en utilisant l'équation (3.7) :

$$\Psi_2(x) = \frac{c(p_x - imwx)}{E + mc^2} \Psi_1(x). \quad (3.8)$$

En substituant l'équation (3.8) dans l'équation (3.6), nous obtenons :

$$[c^2(p_x + imwx)(p_x - imwx) - E^2 + m^2c^4] \Psi_1(x) = 0, \quad (3.9)$$

ou

$$\left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{mw^2x^2}{2}\right) \Psi_1(x) = \left(\frac{E^2 - m^2c^4 + mw\hbar c^2}{2mc^2}\right) \Psi_1(x) = \tilde{E} \Psi_1(x), \quad (3.10)$$

dont

$$\tilde{E} = \frac{E^2 - m^2c^4 + mw\hbar c^2}{2mc^2} \quad (3.11)$$

L'équation (3.10) est l'équation standard d'un oscillateur harmonique en 1D, la forme des niveaux d'énergie est donnée par :

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

avec  $r = \frac{\hbar w}{mc^2}$  étant un paramètre contrôlant la limite non relativiste.

### 3.2.2 Cas de l'oscillateur de Dirac bidimensionnel (2D)

L'équation (3.1) dans le cas bidimensionnel devient [7] :

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c(p_x + imwx) - ic(p_y + imwy) \\ c(p_x - imwx) + ic(p_y - imwy) & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

avec

$$\alpha_y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

À partir de l'équation (3.13), nous obtenons :

$$mc^2 \Psi_1 + \{c[(p_x + imwx) - i(p_y + imwy)]\} \Psi_2 = E \Psi_1, \quad (3.15)$$

$$\{c[(p_x - imwx) + i(p_y - imwy)]\} \Psi_1 - mc^2 \Psi_2 = E \Psi_2. \quad (3.16)$$

$\Psi_2$  est exprimé en utilisant l'équation (3.16) :

$$\Psi_2 = \left\{ \frac{c [(p_x - imwx) + i(p_y - imwy)]}{E + mc^2} \right\} \Psi_1. \quad (3.17)$$

En substituant l'équation (3.17) dans l'équation (3.15), nous obtenons :

$$\left( \frac{p_x^2}{2m} + \frac{mw^2x^2}{2} \right) \Psi_1 + \left( \frac{p_y^2}{2m} + \frac{mwy^2}{2} \right) \Psi_1 = \tilde{E} \Psi_1, \quad (3.18)$$

où

$$\tilde{E} = \frac{E^2 - m^2c^4 + m\hbar c^2}{2mc^2} \quad (3.19)$$

L'équation (3.18) est l'équation standard d'un oscillateur harmonique en 2D, la forme des niveaux d'énergie est donnée par :

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + 4rn}. \quad (3.20)$$

### 3.2.3 Cas de l'oscillateur de Dirac tridimensionnel (3D)

L'équation (3.1) dans le cas tridimensionnel devient :

$$\{c\alpha(p - im\beta wr) + \beta mc^2\} \Psi = E\Psi. \quad (3.21)$$

À partir de l'équation (3.21), on a [1-3, 68, 69] :

$$E_{Nlj}^2 = \begin{cases} m^2c^4 + (2N - 2j + 1)\hbar wmc^2, & j = l + \frac{1}{2} \\ m^2c^4 + (2N + 2j + 3)\hbar wmc^2, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (3.22)$$

avec le nombre quantique principal  $N$  défini comme  $2n + l$ , où  $n$ ,  $j$  et  $l$  sont respectivement le nombre quantique radial, le moment cinétique total et le moment cinétique orbital. L'équation (3.22) peut être réécrite comme suit :

$$E_{Nlj}^2 = \begin{cases} m^2c^4 + 4n\hbar wmc^2, & j = l + \frac{1}{2} \\ m^2c^4 + (4n + 4l + 2)\hbar wmc^2, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.23)$$

Ici, il y a deux cas à considérer [3] :

- Le spectre d'énergie dépend uniquement de la valeur de  $n$  lorsque  $l = j - \frac{1}{2}$ . Donc, nous avons une dégénérescence accidentelle infinie, car toutes les paires  $(N, j)$ ,  $(N \pm 1, j \pm 1)$ ,  $(N \pm 2, j \pm 2)$  ont la même valeur d'énergie.
- Lorsque  $l = j + \frac{1}{2}$ , toutes les paires  $(N, j)$ ,  $(N \pm 1, j \pm 1)$ ,  $(N \pm 2, j \pm 2)$  garantissent d'avoir la même énergie, ce qui signifie que nous avons une dégénérescence finie.

Maintenant, en définissant  $k = n + l$  avec  $k \geq 1$ , on obtient les niveaux d'énergie positifs ( $E_k$ ) pour  $j = l - \frac{1}{2}$  [1-3, 68, 69] :

$$E_k = mc^2 \sqrt{1 + (4k + 2)r}. \quad (3.24)$$

### 3.3 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac à 1D, 2D, et 3D

#### 3.3.1 La fonction de partition via la formule d'Euler-Maclaurin

À partir du facteur de Boltzmann généralisé (2.51), la fonction de partition (2.41) est la suivante :

$$\begin{aligned} Z(\beta, q) &= \left( 1 + \frac{q-1}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 + g(q) \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots \right) z, \\ &= \left( 1 + \frac{q-1}{2} \langle \beta \rangle^2 \frac{d^2}{d\langle \beta \rangle^2} - g(q) \langle \beta \rangle^3 \frac{d^3}{d\langle \beta \rangle^3} + \dots \right) z, \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec l'utilisation :

$$E_n^2 e^{-\langle \beta \rangle E_n} = \frac{d^2}{d\langle \beta \rangle^2} \left( e^{-\langle \beta \rangle E_n} \right), \quad E_n^3 e^{-\langle \beta \rangle E_n} = -\frac{d^3}{d\langle \beta \rangle^3} \left( e^{-\langle \beta \rangle E_n} \right), \quad (3.26)$$

avec [9, 15] :

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle \beta \rangle E_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\langle \beta \rangle E_n}. \quad (3.27)$$

Pour le cas de l'oscillateur de Dirac (3D), l'équation (3.27) devient [68, 69] :

$$z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) e^{-\beta E_k}. \quad (3.28)$$

La fonction  $g(q)$  est liée au type de distribution étudiée (Gamma, Log-Normale, F) qui dépend du choix de la fonction de distribution ((2.48), (2.49), et (2.50)). La fonction  $z$  est la fonction de partition du système initial ( $q = 1$ ) sans aucune fluctuation sur le paramètre  $\beta$ . À partir des équations (2.9), (2.10), (2.11), et (2.12), on peut permettre de calculer les grandeurs thermodynamiques ; l'énergie totale  $U(\beta)$ , l'entropie  $S(\beta)$ , l'énergie libre  $F(\beta)$  et la chaleur spécifique  $C_v(\beta)$  par les étapes suivantes :

- On identifie  $z$  en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin (Cf Annexe. ??) :
- Pour l'oscillateur de Dirac unidimensionnel (1D), la fonction de partition  $z$  est :

$$z = \frac{e^{-\beta} (36e^{\beta} \beta^2 + 6(12 + 12\beta + 3\beta^2 + \beta^3))}{36\beta^2} - \frac{e^{-\sqrt{3}\beta} (36 + 36\sqrt{3}\beta + 18\beta^2 + \sqrt{3}\beta^3)}{36\beta^2}. \quad (3.29)$$

- Pour l'oscillateur de Dirac bidimensionnel (2D), la fonction de partition  $z$  est :

$$z = \frac{e^{-\beta} (30e^{\beta}\beta^2 + 5(6 + 6\beta + 3\beta^2 + 2\beta^3))}{30\beta^2} - \frac{e^{-\sqrt{5}\beta} (15 + 15\sqrt{5}\beta + 15\beta^2 + \sqrt{5}\beta^3)}{30\beta^2}. \quad (3.30)$$

- Pour l'oscillateur de Dirac tridimensionnel (3D), la fonction de partition  $z$  est :

$$z = \frac{e^{-\beta} (60e^{\beta}\beta^6 - e^{\beta-\sqrt{5}\beta} (225 + 225\sqrt{5}\beta + 585\beta^2 + 210\sqrt{5}\beta^3 + 285\beta^4 + 60\sqrt{5}\beta^5 + 45\beta^6 + 4\sqrt{5}\beta^7))}{60\beta^6} + \frac{2e^{-\beta} (225 + 225\beta + 135\beta^2 + 60\beta^3 + 15\beta^4 - 5\beta^6 + 3\beta^8)}{60\beta^6}. \quad (3.31)$$

- La fonction de partition finale ( $Z$ ) sera obtenue en utilisant (3.25) de chaque distribution.

### 3.4 Résultats et discussions

En analysant la fonction de partition des trois distributions distinctes utilisées en superstatistique, on peut déduire les caractéristiques thermiques basées sur la température (exprimée en  $1/\beta$  et le paramètre  $q$ ). Cette investigation explore notamment les propriétés thermiques de l'oscillateur de Dirac en unidimensionnelles (1D), bidimensionnelles (2D) et tridimensionnelles (3D), avec un accent particulier sur l'observation des changements d'entropie ( $S$ ) et de la chaleur spécifique ( $C_v$ ) dans ces systèmes.

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 illustrent comment les courbes d'entropie et de chaleur spécifique varient pour l'oscillateur de Dirac pour 1D, 2D et 3D en fonction de la température, en utilisant les trois distributions : Gamma, Log-Normale et F, respectivement. L'effet du paramètre  $q$  sur ces courbes de la chaleur spécifique est évident. Il convient de noter que pour le cas statistique standard ( $q = 1$ ), toutes les courbes de la chaleur spécifique saturent et coïncident avec les valeurs limites de 2 pour 1D, 2D et 3D. Cette saturation est indépendante du paramètre  $q$ . De plus, pour les courbes d'entropie, il est évident que l'entropie reste positive pour toutes les valeurs de  $q$  dans différents contextes, c'est-à-dire les distributions et les dimensions. On note également une augmentation de l'entropie ( $S$ ) lorsque la température ( $1/\beta$ ) augmente. Plus précisément, pour l'oscillateur de Dirac à 1D avec ( $q = 0.2$ ), l'entropie atteint une valeur maximale de 8 pour les distributions Gamma et Log-Normale et de 9 pour la distribution F. Pendant ce temps, pour les oscillateurs de Dirac à 2D et 3D, les valeurs de l'entropie les plus élevées observées sont 7 pour les distributions Gamma et Log-Normale et 8 pour la distribution F. Désormais, en augmentant le paramètre  $q$ , les valeurs de  $S$  diminuent avec l'existence d'une perturbation à  $q = 1$  pour les distributions Gamma et Log-Normale pour tous les cas considérés.

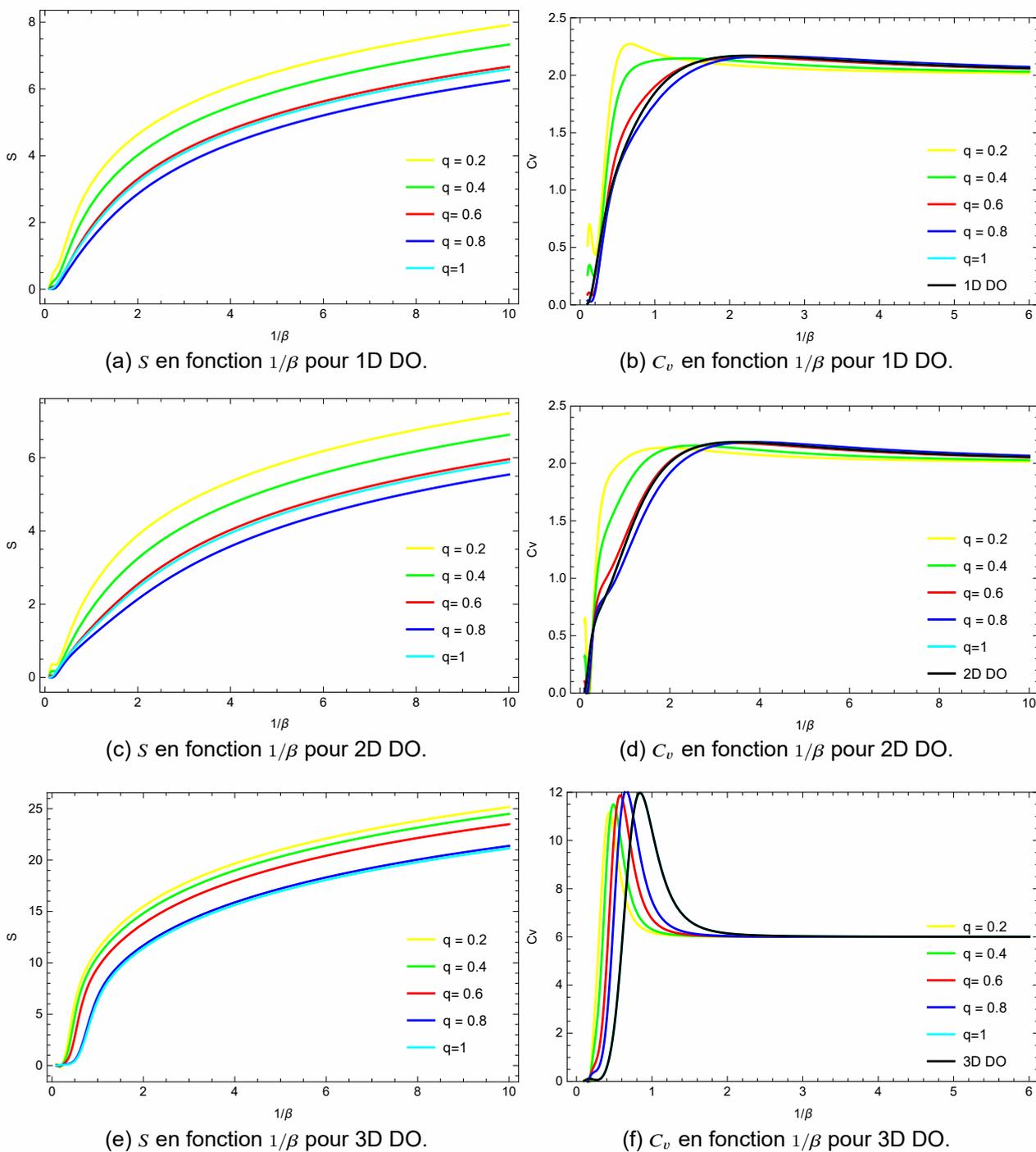


FIG. 3.1 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de DO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  via la distribution Gamma.

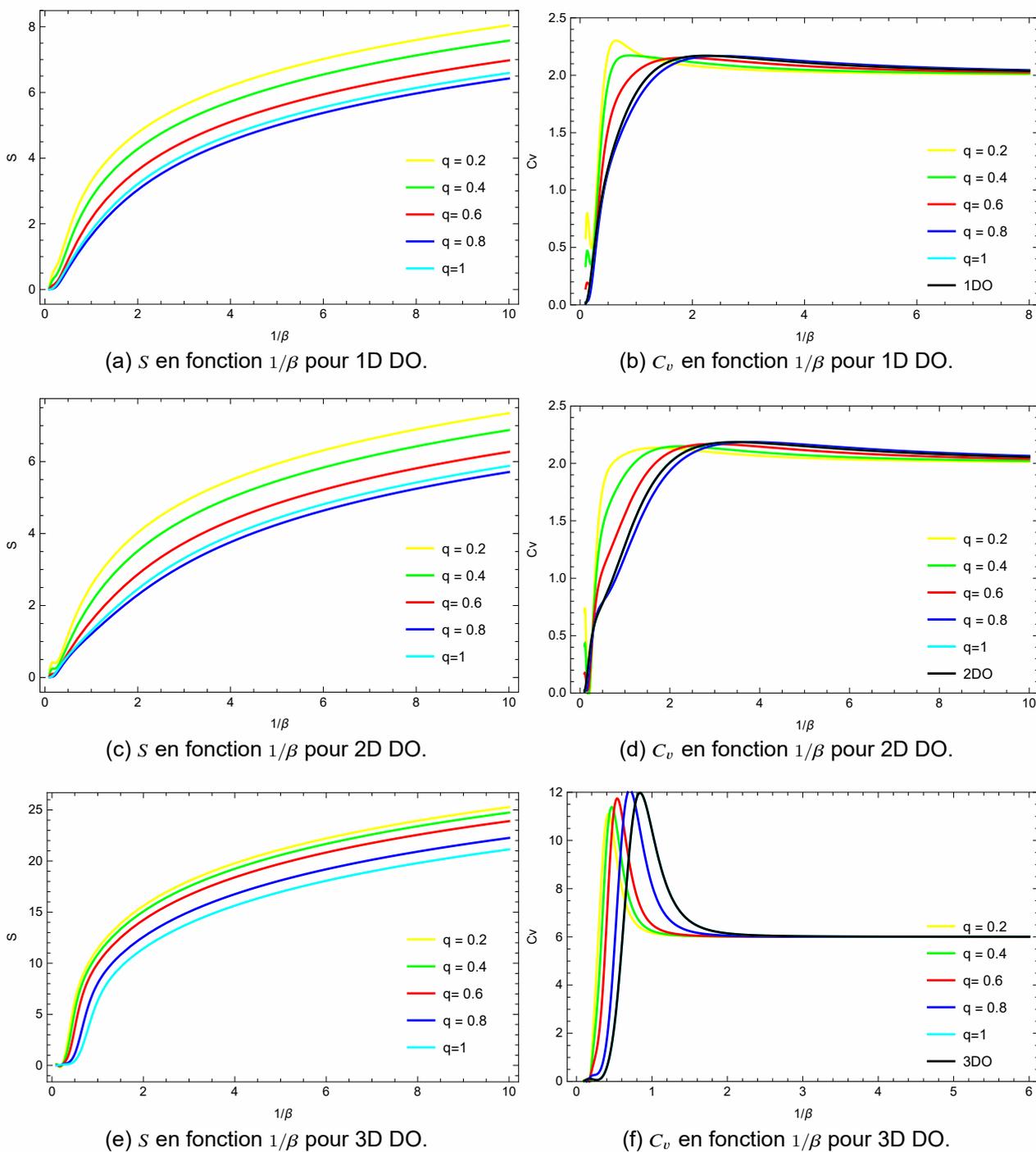


FIG. 3.2 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de DO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  via la distribution Log-Normale.

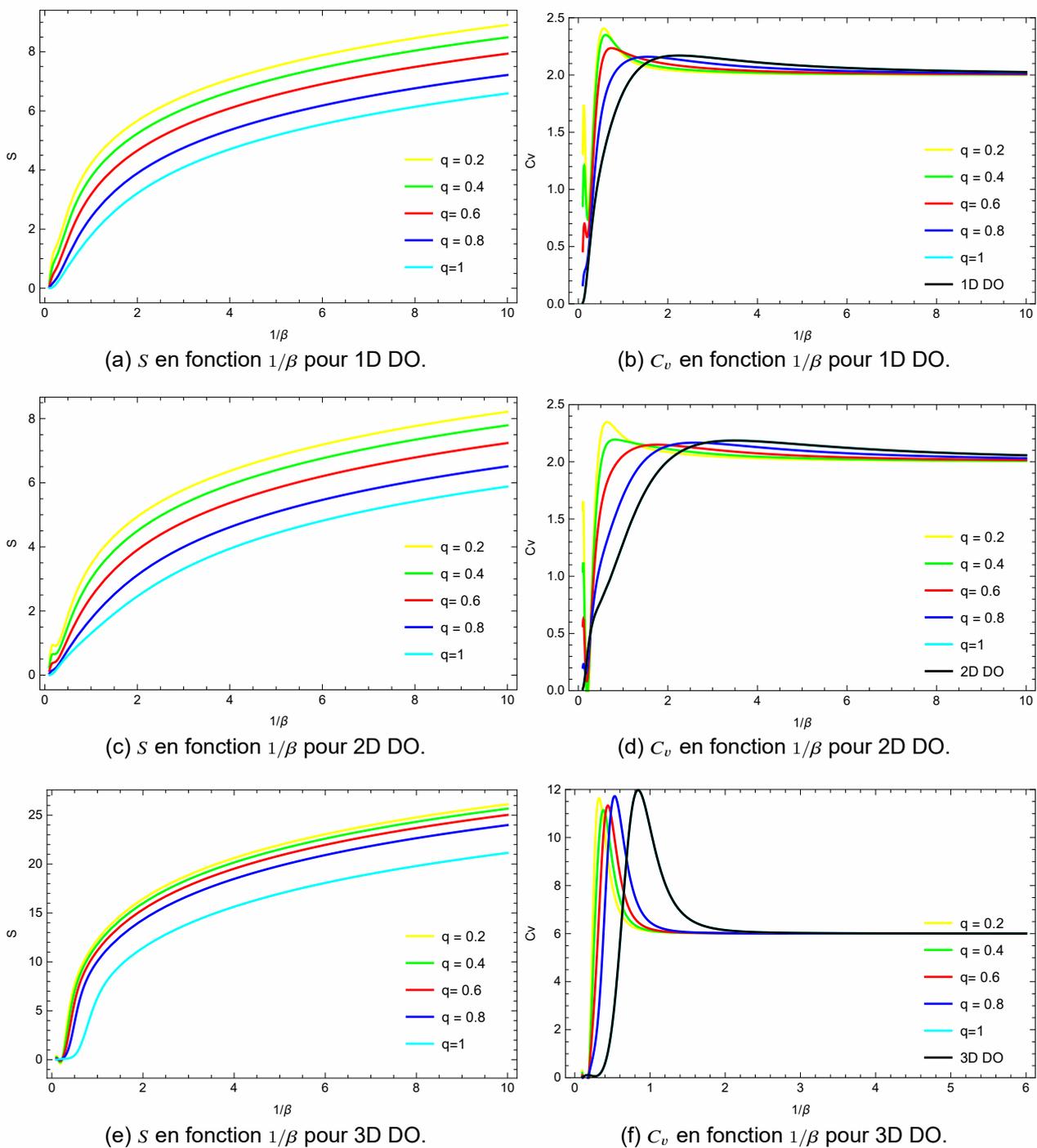


FIG. 3.3 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de DO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  via la distribution F.

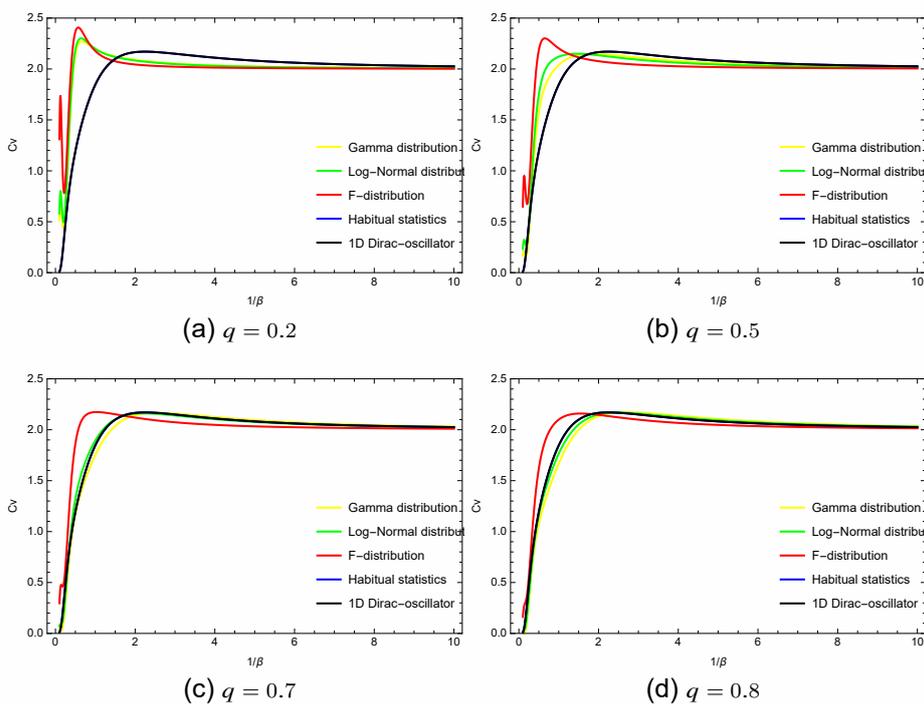


FIG. 3.4 : La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de  $1/\beta$  pour les différentes distributions pour le 1D DO pour différents paramètres  $q$ .

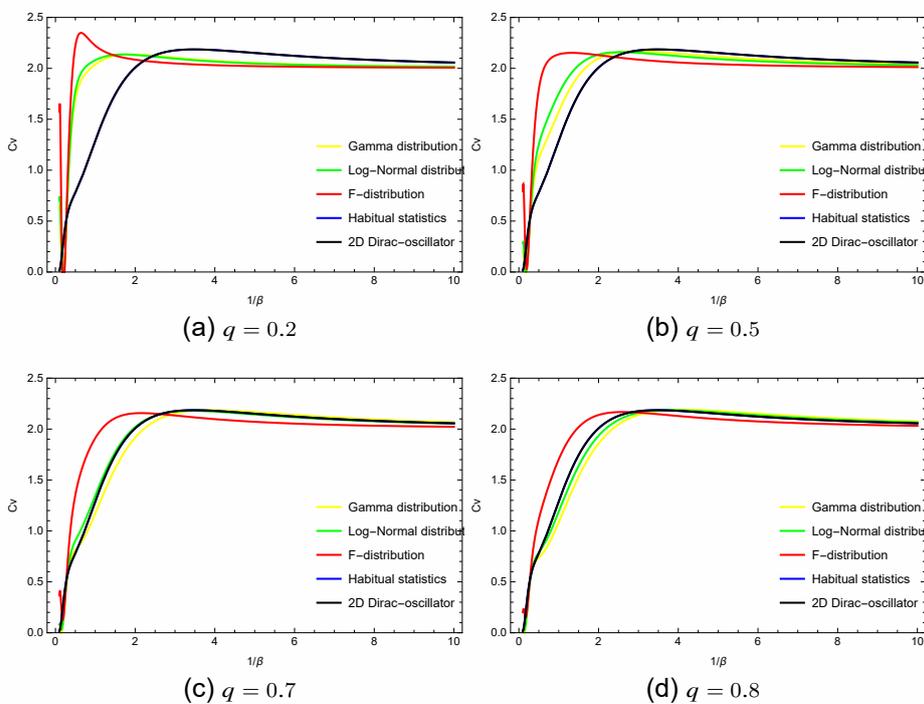


FIG. 3.5 : La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de  $1/\beta$  pour les différentes distributions pour le 2D DO pour différents paramètres  $q$ .

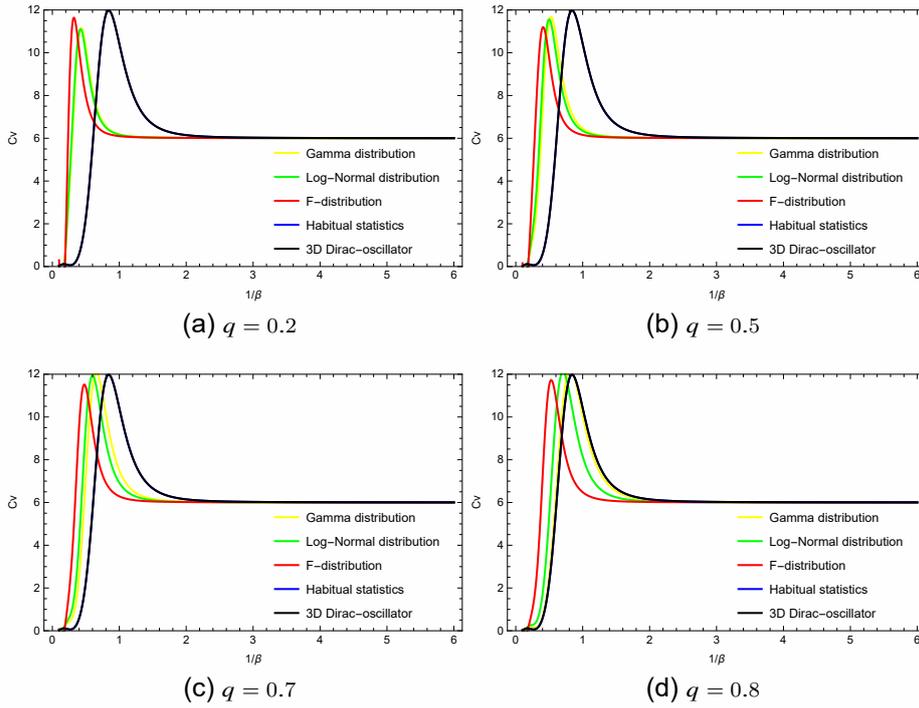


FIG. 3.6 : La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de  $1/\beta$  pour les différentes distributions pour le 3D DO pour différents paramètres  $q$ .

En observant les courbes de la chaleur spécifique, nous remarquons que les valeurs pour  $q = 1$  présentent un comportement uniforme et cohérent dans toutes les dimensions étudiées (1D, 2D, 3D) et pour toutes les distributions (Gamma, Log-Normale et F). Lorsque nous examinons les courbes pour  $q = 0.6$  et  $q = 0.8$  pour les distributions considérées, elles montrent un comportement similaire à celui de l'oscillateur de Dirac dans les trois dimensions. Notamment, pour la distribution F, la valeur limite de  $C_v$  (chaleur spécifique) atteignant 2 se produit à basse température ( $1/\beta$ ) par rapport aux deux autres distributions. De plus, des perturbations ont été observées à des températures plus basses lorsque  $q$  est inférieur ou égal à 0.6, les perturbations étant plus prononcées dans le cas de la distribution F pour toutes les dimensions considérées.

Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 comparent les courbes de chaleur spécifique dérivées des distributions à des valeurs spécifiques de  $q(0.2, 0.5, 0.7, \text{ et } 0.8)$  pour les dimensions 1D, 2D et 3D, respectivement. À partir de ces courbes, nous observons ce qui suit :

- Pour  $q = 1$  (cas de statistique habituelle), toutes les courbes de chaleur spécifique sont identiques et reflètent celles de l'oscillateur de Dirac dans les trois dimensions. Ainsi, les différences entre ces distributions ne deviennent perceptibles que lorsque  $g(q)$  est non nul dans le facteur de Boltzmann généralisé  $B(E)$ . Ces courbes peuvent être classées en trois intervalles en fonction des valeurs de  $q$ .

- Pour  $q \leq 0.2$ , toutes les courbes de chaleur spécifique des distributions dépassent la limite de 2 par rapport à celles de l'oscillateur de Dirac dans les trois dimensions.
- Pour  $q \geq 0.7$ , toutes les courbes de chaleur spécifique aux différentes distributions et dimensions étudiées se comportent de la même manière que celles de l'oscillateur de Dirac.
- Pour  $0.2 < q < 0.7$ , les courbes de chaleur spécifique pour les distributions Gamma et Log-Normale se comportent de la même manière que celles de l'oscillateur de Dirac, contrairement à celles de la distribution F qui sont plus turbulentes. En augmentant le paramètre  $q$ , les courbes de la chaleur spécifique de toutes les distributions s'améliorent pour les différentes dimensions étudiées.

Le paramètre  $q$  joue un rôle crucial dans la physique superstatistique, offrant une base mathématique pour décrire et analyser des systèmes complexes caractérisés par des propriétés statistiques évolutives. Contrairement à la physique statistique habituelle, qui repose souvent sur des distributions prédéfinies telles que la distribution gaussienne, le paramètre  $q$  permet de quantifier la non-extensivité ou la non-gaussianité des statistiques d'un système. En ajustant la valeur de  $q$ , on peut modéliser une gamme étendue de comportements statistiques, allant du cas gaussien traditionnel ( $q = 1$ ) aux distributions non gaussiennes ( $q \neq 1$ ), adaptant ainsi le cadre statistique pour correspondre précisément au comportement observé du système.

Cette flexibilité de  $q$  facilite l'interpolation entre les statistiques gaussiennes traditionnelles et des distributions plus complexes, ce qui est essentiel pour modéliser des systèmes aux propriétés statistiques diverses et évolutives. De plus, les statistiques  $q$ -déformées sont précieuses pour estimer le paramètre  $q$  à partir de données expérimentales, améliorant ainsi notre compréhension et caractérisation des propriétés statistiques du système.

Dans un domaine similaire, certains modèles ont utilisé l'oscillateur harmonique non relativiste pour décrire le confinement des quarks dans les mésons et les baryons, suggérant également l'utilisation potentielle de l'oscillateur de Dirac pour le confinement dans des systèmes de quarks lourds. Malgré le manque de données expérimentales sur les propriétés thermiques de l'oscillateur de Dirac dans la littérature existante, notre étude offre une contribution précieuse à la compréhension de ces propriétés dans divers scénarios. En fournissant une vision plus complète et plus raffinée du comportement de ces systèmes, notre travail peut orienter de futures recherches expérimentales et théoriques dans ce domaine.

---

---

# CHAPITRE 4

---

## LES PROPRIÉTÉS SUPERSTATISTIQUES DE L'OSCILLATEUR DE KLEIN-GORDON

### 4.1 Introduction

Comme indiqué précédemment ( Cf Chapitre 3), l'oscillateur de Dirac représente un modèle théorique fusionnant des concepts de mécanique quantique et de relativité restreinte, incorporant les effets de spin via l'équation de Dirac. Une extension de cette idée a été proposée par Bruce et Manning [20], qui ont introduit un nouveau type d'interaction linéaire dans l'équation de Klein-Gordon, appelé l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO : *Klein-Gordon Oscillator*). Cette interaction a été présentée de manière similaire à celle de l'oscillateur de Dirac, où l'opérateur impulsion  $P$  est remplacé par

$$P - im\hat{\gamma}\hat{\Omega}Q, \quad (4.1)$$

avec  $P = -i\frac{\partial}{\partial q}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des coordonnées canoniques définies comme  $P = \hat{\eta}p$  et  $Q = \hat{\eta}q$ , où  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{\gamma}$  et  $\hat{\eta}$  sont des matrices avec  $\hat{\eta}^2 = 1$ .

Cependant, la signification physique de l'incorporation de ces matrices ( $\hat{\gamma}$  et  $\hat{\eta}$ ) demeure floue. Ainsi, Dvoeglazo [70] a reformulé l'équation de Klein-Gordon sous forme hamiltonienne, où l'introduction de cette interaction consistait simplement à remplacer  $p^2$  par  $(p - im\omega r)(p + im\omega r)$  [70].

L'étude des superstatistiques dans le contexte de l'oscillateur de Klein-Gordon dans diverses dimensions de l'espace-temps (3+1) est un domaine de recherche complexe et en cours. Les résultats et informations spécifiques peuvent varier en fonction de la dimension étudiée (1D KGO, 2D KGO, 3D KGO). Il convient de noter que le domaine des superstatistiques est hautement spécialisé et que des investigations détaillées et des techniques mathématiques sont généralement nécessaires pour approfondir les propriétés superstatistiques du KGO dans différentes dimen-

sions de l'espace-temps. La théorie de la superstatistique pour les systèmes hors équilibre est composée sur la superposition d'ensembles canoniques à différents  $\beta$  pondérés par un facteur  $f(\beta)$  [33–39, 42, 47, 48]. De tels systèmes peuvent atteindre l'équilibre local dans de petites cellules locales avec un  $\beta$  donné en un temps suffisant.

L'objectif principal de ce chapitre est consacré au calcul des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon en une, deux et trois dimensions. Cet objectif sera atteint grâce à une approximation asymptotique à basse énergie garantissant l'universalité de toutes les superstatistiques, et nous analyserons ces propriétés pour différents choix de fonctions de distribution (distribution Gamma, distribution Log-Normale et distribution F) [33–39, 42, 47, 48].

## 4.2 L'oscillateur de Klein-Gordon à 1D, 2D, et 3D

### 4.2.1 Cas à 1D

Dans le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel, nous avons l'équation de mouvement libre [16] :

$$\left\{ p_x^2 - \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \right\} \Psi(x) = 0. \quad (4.2)$$

Lorsque l'interaction de type oscillateur de Dirac est présente, l'équation (4.2) devient :

$$(c^2 (p_x + im_0 \omega x) \cdot (p_x - im_0 \omega x) - E^2 + m_0^2 c^4) \Psi(x) = 0, \quad (4.3)$$

ou

$$\left( \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 x^2 \right) \Psi(x) = \left( \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \right) \Psi(x). \quad (4.4)$$

Nous définissons :

$$H = \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 x^2, \quad (4.5)$$

dont le spectre d'énergies est donné par :

$$\tilde{E} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2}. \quad (4.6)$$

L'équation (4.4) devient alors l'équation standard d'un oscillateur harmonique unidimensionnel avec :

$$H\Psi(x) = \tilde{E}\Psi(x). \quad (4.7)$$

dont :

$$\tilde{E} = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.8)$$

À partir de (4.6) et (4.8), la forme des niveaux d'énergie en 1D est donnée par :

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

avec  $r = \frac{\hbar\omega}{mc^2}$  qui est un paramètre contrôlant la limite non relativiste.

### 4.2.2 Cas à 2D

Dans le cas bidimensionnel, l'équation de mouvement libre de l'oscillateur de Klein-Gordon est exprimée comme suit :

$$\{(p_x + im_0\omega x) \cdot (p_x - im_0\omega x) + (p_y + im_0\omega y) \cdot (p_y - im_0\omega y)\} c^2 \Psi(x, y) = (E^2 - m_0^2 c^4) \Psi(x, y). \quad (4.10)$$

À partir de l'équation (4.10), nous obtenons :

$$\left\{ (p_x^2 + p_y^2) + m_0^2 \omega^2 (x^2 + y^2) \right\} \Psi(x, y) = \left( 2m_0 \hbar \omega + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \right) \Psi(x, y). \quad (4.11)$$

ou

$$\left\{ \left( \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 x^2 \right) + \left( \frac{p_y^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 y^2 \right) \right\} \Psi(x, y) = \left( \hbar \omega + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \right) \Psi(x, y). \quad (4.12)$$

Nous posons :

$$H = \left( \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 x^2 \right) + \left( \frac{p_y^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 y^2 \right), \quad (4.13)$$

dont

$$\tilde{E} = \hbar \omega + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2}. \quad (4.14)$$

L'équation (4.12) devient alors l'équation standard d'un oscillateur harmonique bidimensionnel avec :

$$\tilde{E} = \hbar \omega (n_x + n_y + 1). \quad (4.15)$$

À partir de (4.14) et (4.15), la forme des niveaux d'énergie en 2D est donnée par :

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2nr}, \quad (4.16)$$

où  $n = n_x + n_y$ . Selon le paramètre  $n$ , il y a une dégénérescence finie [71]. Ainsi, la dégénérescence est donnée par :

$$g_n = n + 1. \quad (4.17)$$

### 4.2.3 Cas à 3D

Dans le contexte tridimensionnel (3D), l'équation de mouvement libre de l'oscillateur de Klein-Gordon est formulée comme suit :

$$\begin{aligned} & \{(p_x + im_0\omega x) \cdot (p_x - im_0\omega x) + (p_y + im_0\omega y) \cdot (p_y - im_0\omega y)\} c^2 \Psi(x, y, z) \\ & + \{(p_z + im_0\omega z) \cdot (p_z - im_0\omega z)\} c^2 \Psi(x, y, z) = (E^2 - m_0^2 c^4) \Psi(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.18)$$

À partir de l'équation (4.18), nous obtenons :

$$\left\{ (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m_0^2 \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right\} \Psi(x, y, z) = \left( 3m_0 \hbar \omega + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \right) \Psi(x, y, z). \quad (4.19)$$

ou

$$\left\{ \left( \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 x^2 \right) + \left( \frac{p_y^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 y^2 \right) + \left( \frac{p_z^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 z^2 \right) \right\} \Psi(x, y, z) = \left( \frac{3}{2} \hbar \omega + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2} \right) \Psi(x, y, z). \quad (4.20)$$

Nous posons :

$$H = \left( \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 x^2 \right) + \left( \frac{p_y^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 y^2 \right) + \left( \frac{p_z^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 z^2 \right), \quad (4.21)$$

dont

$$\tilde{E} = \frac{3}{2} \omega \hbar + \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{2m_0 c^2}. \quad (4.22)$$

L'équation (4.20) devient alors l'équation standard d'un oscillateur harmonique tridimensionnel avec :

$$\tilde{E} = \hbar \omega \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right). \quad (4.23)$$

À partir de (4.22) et (4.23), la forme des niveaux d'énergie en 3D est donnée par :

$$E = \pm m c^2 \sqrt{1 + 2nr}, \quad (4.24)$$

avec  $n = n_x + n_y + n_z$ . Selon le paramètre  $n$ , il y a une dégénérescence finie. Ainsi, la dégénérescence est donnée par :

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (4.25)$$

## 4.3 Calcul de la fonction de partition via la formule d'Euler-Maclaurin

Dans le cadre général, sous l'approximation asymptotique de basse énergie et en utilisant le facteur de Boltzmann généralisé (2.51), la fonction de partition (2.41) peut être représentée de

manière condensée comme suit :

$$Z(\beta, q) = \left( 1 + \frac{q-1}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 + g(q) \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots \right) z, \quad (4.26)$$

avec [9, 15, 72] :

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-\langle \beta \rangle E_n} = 1 + \sum_n g_n e^{-\langle \beta \rangle E_n}, \quad (4.27)$$

où  $g_n$  représente le facteur de dégénérescence. Selon la dimension de l'espace, nous avons :

- $g_n = 1$ , pour l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D,
- $g_n = n + 1$ , pour l'oscillateur de Klein-Gordon à 2D, et
- $g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , pour l'oscillateur de Klein-Gordon à 3D.

La fonction  $g(q)$  est liée au type de distribution étudiée (Gamma, Log-Normale, F) qui dépend du choix de la fonction de distribution ((2.48), (2.49), et (2.50)). La fonction  $z$  est la fonction de partition du système initial ( $q = 1$ ) sans aucune fluctuation sur le paramètre  $\beta$ .

En utilisant les équations (2.9), (2.10), (2.11), et (2.12), nous pouvons calculer les grandeurs thermodynamiques suivantes : l'énergie totale  $U(\beta)$ , l'entropie  $S(\beta)$ , l'énergie libre  $F(\beta)$  et la chaleur spécifique  $C_v(\beta)$  en suivant les étapes suivantes [12] :

- Nous identifions  $z$  en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin (Annexe. ??) :
- Pour l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D, la fonction de partition  $z$  est :

$$z = \frac{e^{-\beta} (36e^{\beta} \beta^2 + 6(12 + 12\beta + 3\beta^2 + \beta^3))}{36\beta^2} - \frac{e^{-\sqrt{3}\beta} (36 + 36\sqrt{3}\beta + 18\beta^2 + \sqrt{3}\beta^3)}{36\beta^2}. \quad (4.28)$$

- Pour l'oscillateur de Klein-Gordon à 2D, la fonction de partition  $z$  est :

$$z = \frac{e^{-(1+\sqrt{3})\beta} (360e^{\beta+\sqrt{3}\beta} \beta^4 - 3e^{\sqrt{3}\beta} \beta^4 (-120 + \beta^3))}{360\beta^4} + \frac{10e^{\beta} e^{-(1+\sqrt{3})\beta} (108 + 108\sqrt{3}\beta + 180\beta^2 + 72\sqrt{3}\beta^3 + 33\beta^4 + 2\sqrt{3}\beta^5)}{360\beta^4}. \quad (4.29)$$

- Pour l'oscillateur de Klein-Gordon tridimensionnel (3D), la fonction de partition  $z$  est :

$$z = \frac{e^{-(1+\sqrt{3})\beta} (240e^{\beta+\sqrt{3}\beta} \beta^6 - e^{\sqrt{3}\beta} \beta^6 (-240 + 3\beta - 3\beta^2 + 2\beta^3))}{240\beta^6} + \frac{10e^{\beta} e^{-(1+\sqrt{3})\beta} (360 + 360\sqrt{3}\beta + 612\beta^2 + 252\sqrt{3}\beta^3 + 252\beta^4 + 72\sqrt{3}\beta^5 + 31\beta^6 + 2\sqrt{3}\beta^7)}{240\beta^6}. \quad (4.30)$$

- La fonction de partition finale  $Z$  est obtenue en utilisant (4.26) pour chaque distribution.

## 4.4 Résultats et discussions

Les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Klein-Gordon dans les dimensions unidimensionnelles, bidimensionnelles et tridimensionnelles peuvent être étudiées en se concentrant sur la variation de l'entropie et de la chaleur spécifique. Cependant, pour garantir la cohérence des résultats, nous nous limitons aux états stationnaires d'énergie positive, en tenant compte des considérations suivantes (voir figure 4.1) :

- L'oscillateur de Klein-Gordon présente une transformation exacte de Foldy-Wouthuysen (FWT) [73], ce qui implique que les solutions d'énergie positive et négative ne se mélangent jamais. Ainsi, nous considérons uniquement les particules à énergie positive pour déterminer les propriétés thermodynamiques, évitant tout mélange des deux branches qui pourrait entraîner l'annihilation des particules et des antiparticules.
- Nous supposons que l'énergie négative (antiparticules) est entièrement occupée. Contrairement aux fermions, où les niveaux d'énergie sont ordonnés selon le principe de Pauli, tous les bosons peuvent occuper le même niveau. Cette méthode de remplissage de la mer de Dirac peut être étendue du cas des fermions au cas des bosons.
- Les états des bosons sont ainsi divisés en deux secteurs : le secteur positif habituel avec un spectre d'énergie de bosons positif, et le secteur négatif avec un spectre d'énergie de bosons négatif. Une fois qu'un état entre dans le secteur négatif, il ne peut pas revenir au secteur positif habituel par une interaction ordinaire, en raison de la présence d'une barrière, analogue au gap en physique du solide.

Après avoir pris en compte ces considérations, nous pouvons étudier les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Klein-Gordon dans différentes dimensions en examinant la variation de l'entropie et de la chaleur spécifique de cet oscillateur [11].

Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 présentent l'évolution des courbes d'entropie et de chaleur spécifique de l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) en 1D, 2D et 3D en fonction de la température, pour différentes valeurs du paramètre  $q$ , en utilisant respectivement les distributions Gamma, Log-Normale et F.

Pour ce qui est des courbes d'entropie, on constate que les valeurs sont toujours positives, quelles que soient les valeurs de  $q$ , les différentes distributions et les dimensions considérées. De plus, ces courbes augmentent avec la température  $1/\beta$  jusqu'à atteindre une valeur maximale. Par exemple, pour le KGO en 1D avec  $q = 0.2$ , cette valeur maximale est de 8 pour les distributions

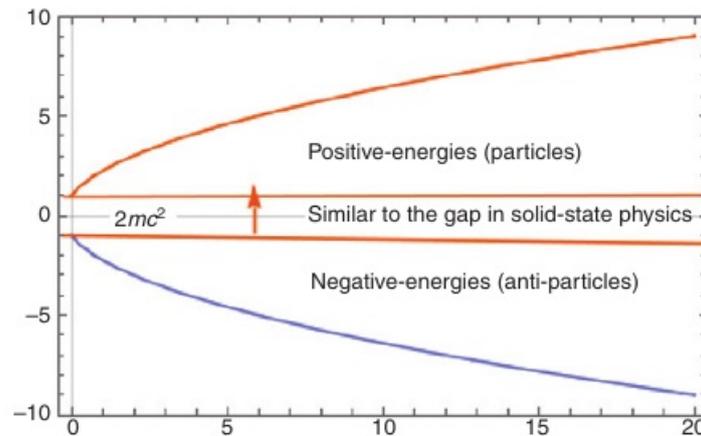


FIG. 4.1 : Diagramme énergétique d'une particule bosonique.

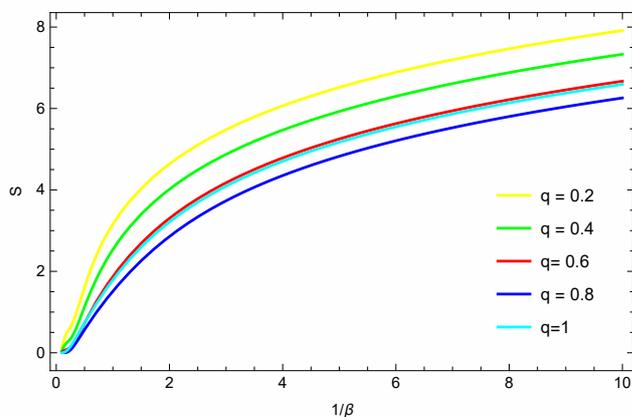
Gamma et Log-Normale, et de 9 pour la distribution F. En 2D, cette valeur maximale est de 17 pour toutes les distributions, tandis qu'en 3D, elle atteint 25 pour chacune des distributions.

En ce qui concerne les courbes de chaleur spécifique, l'influence du paramètre  $q$  est évidente. Pour  $q = 1$ , correspondant à la statistique habituelle, toutes les courbes de chaleur spécifique atteignent une saturation et convergent vers 2 pour le KGO en 1D, 4 pour le KGO en 2D et 6 pour le KGO en 3D, quelle que soit la valeur de  $q$ . Ce schéma reste constant pour toutes les dimensions et toutes les distributions étudiées.

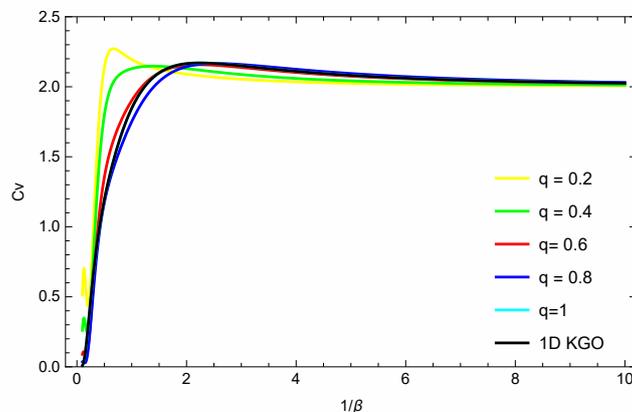
Pour d'autres valeurs de  $q$ , les courbes de chaleur spécifique présentent des comportements distincts. Par exemple, avec la distribution Gamma,  $q = 0.6$  et  $q = 0.8$  montrent un comportement similaire à celui du KGO en 1D. Avec la distribution Log-Normale,  $q = 0.8$  présente un comportement similaire à celui du KGO en 1D et 2D. De plus, des perturbations significatives sont observées à des températures plus basses pour  $q \leq 0.6$ , notamment pour le KGO en 3D avec toutes les distributions considérées.

Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 illustrent une comparaison des courbes de la chaleur spécifique tirées des différentes distributions étudiées à diverses valeurs du paramètre  $q$  (0.2, 0.5, 0.7 et 0.8) pour les cas de KGO en 1D, 2D et 3D respectivement. Lorsque  $g(q) = 0$  (la statistique habituelle), toutes les courbes de chaleur spécifique se superposent et correspondent à celle de l'oscillateur de Klein-Gordon (1D, 2D, 3D). Ainsi, la divergence entre ces distributions ne peut être étudiée qu'en introduisant  $g(q)$  sous sa forme générale dans la fonction  $B(E)$ . Les courbes de chaleur spécifique pour le KGO en 1D peuvent être subdivisées en trois plages, selon les valeurs de  $q$  :

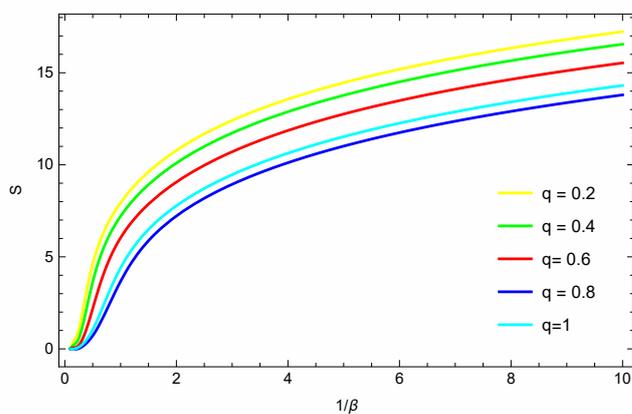
- Pour  $q \leq 0.2$ , toutes les courbes de chaleur spécifique pour toutes les distributions examinées dépassent la limite de 2 par rapport à celles de l'oscillateur de Klein-Gordon.



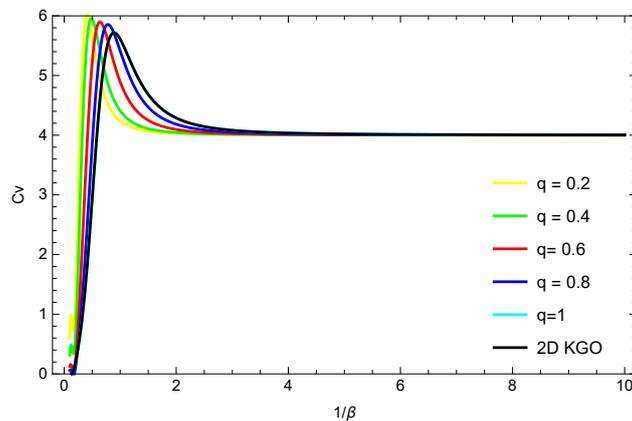
(a)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 1D KGO.



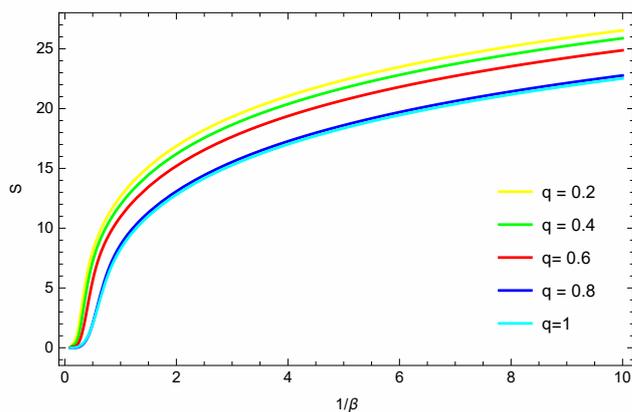
(b)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 1D KGO.



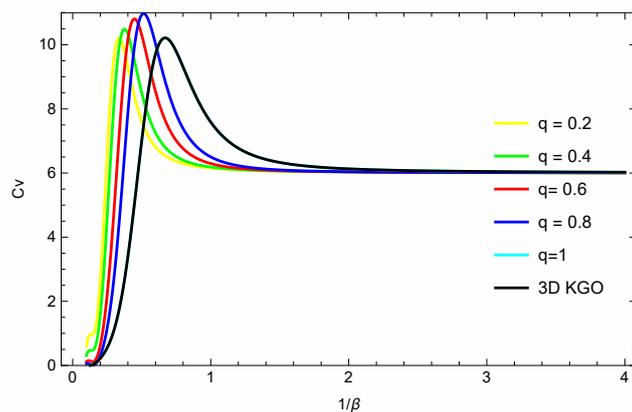
(c)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 2D KGO.



(d)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 2D KGO.

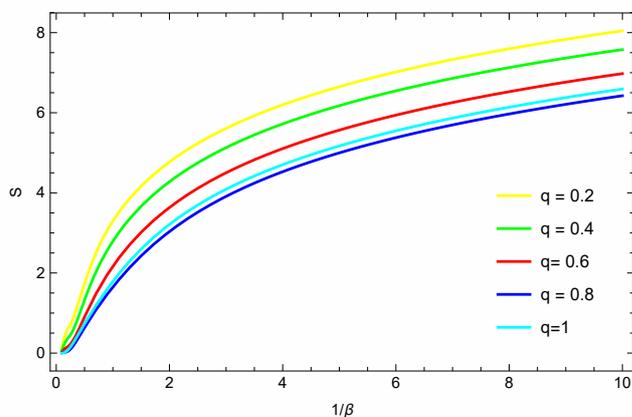


(e)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 3D KGO.

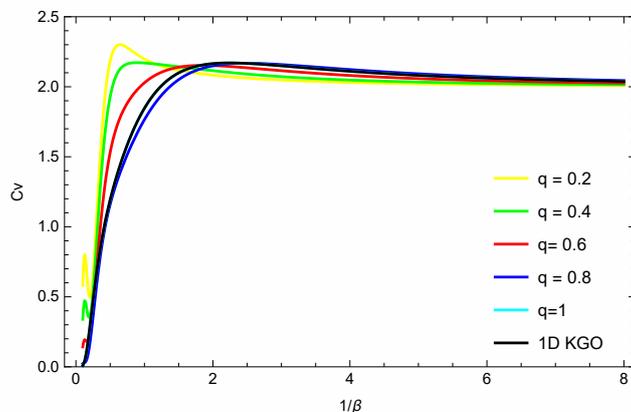


(f)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 3D KGO.

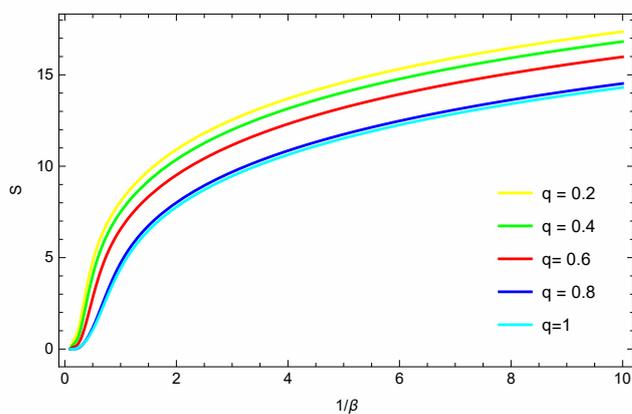
FIG. 4.2 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de KGO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  via la distribution Gamma.



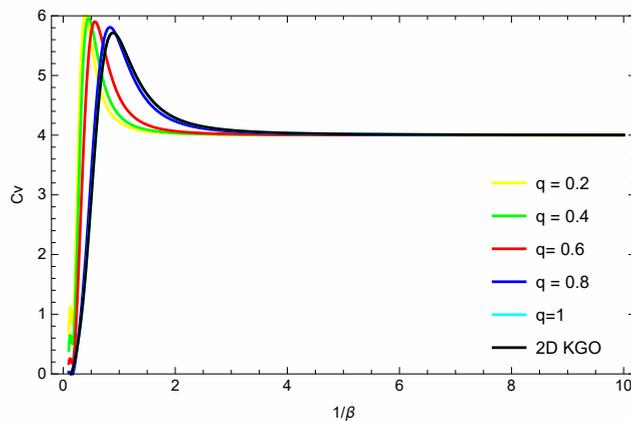
(a)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 1D KGO.



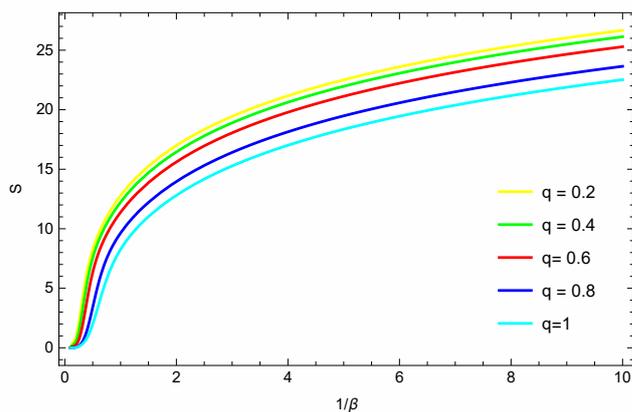
(b)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 1D KGO.



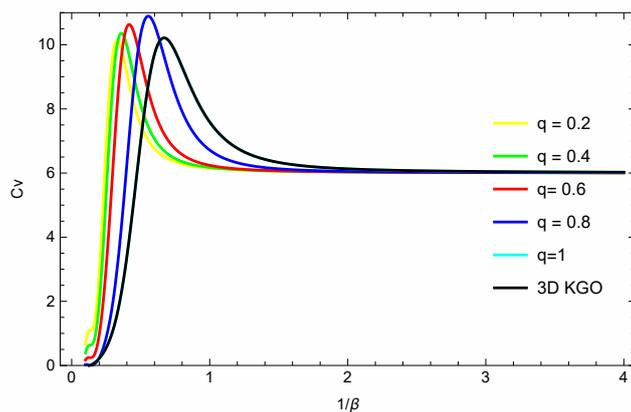
(c)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 2D KGO.



(d)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 2D KGO.

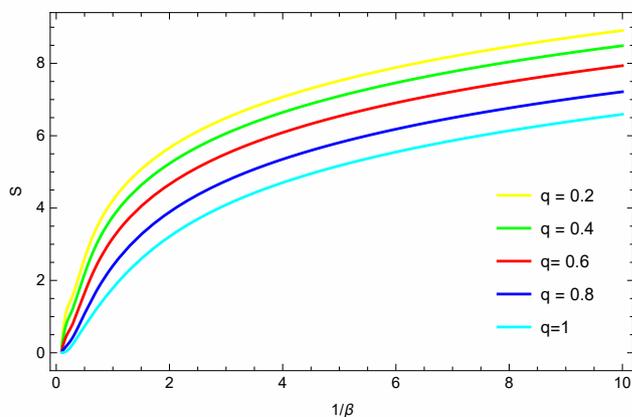


(e)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 3D KGO.

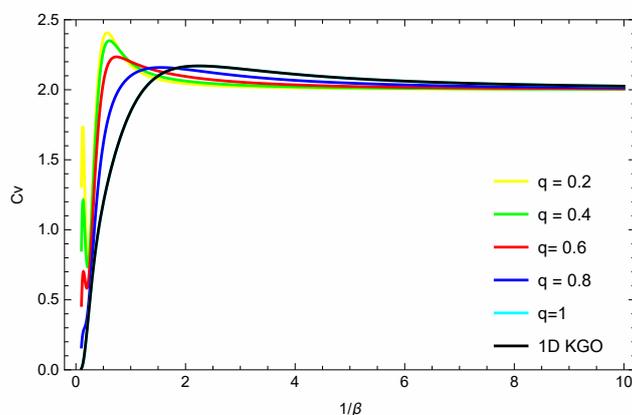


(f)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 3D KGO.

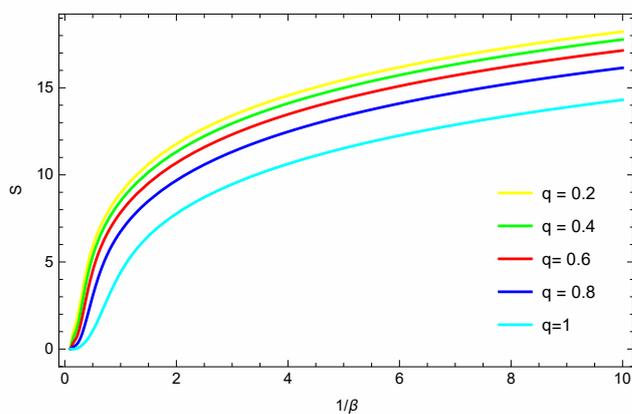
FIG. 4.3 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de KGO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  via la distribution Log-Normale.



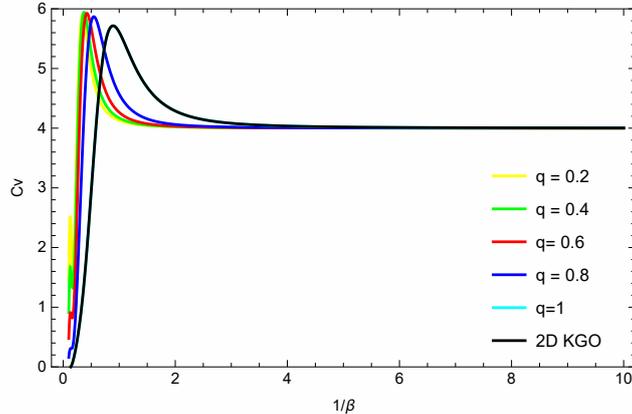
(a)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 1D KGO.



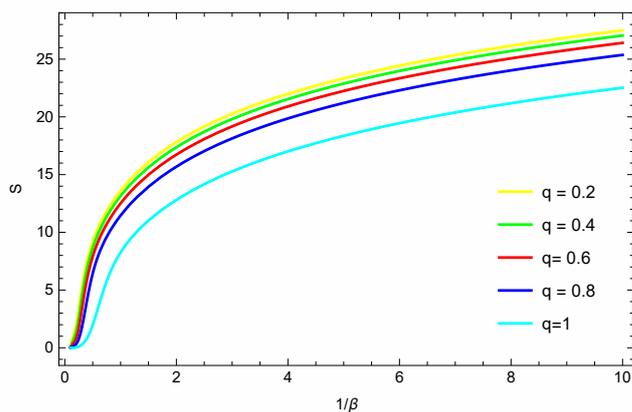
(b)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 1D KGO.



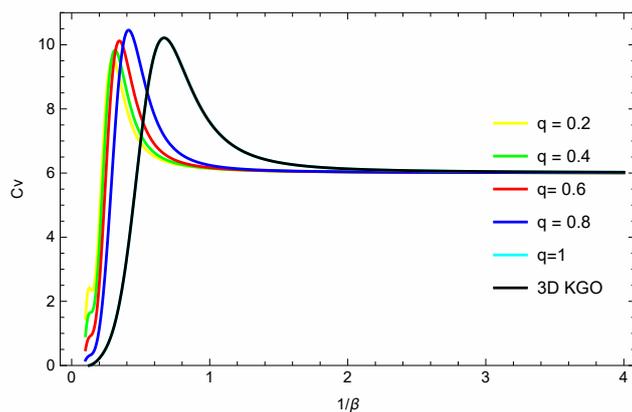
(c)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 2D KGO.



(d)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 2D KGO.



(e)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour 3D KGO.



(f)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour 3D KGO.

FIG. 4.4 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de KGO pour 1D, 2D, et 3D en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  via la distribution F.

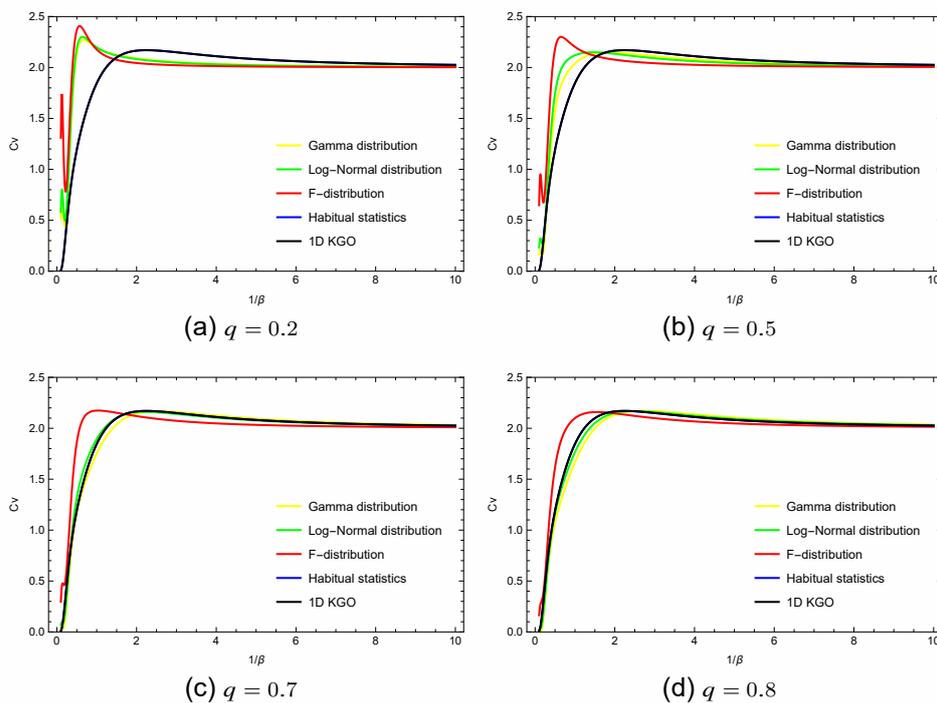


FIG. 4.5 : La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de  $1/\beta$  pour les différentes distributions pour le 1D KGO pour différents paramètres  $q$ .

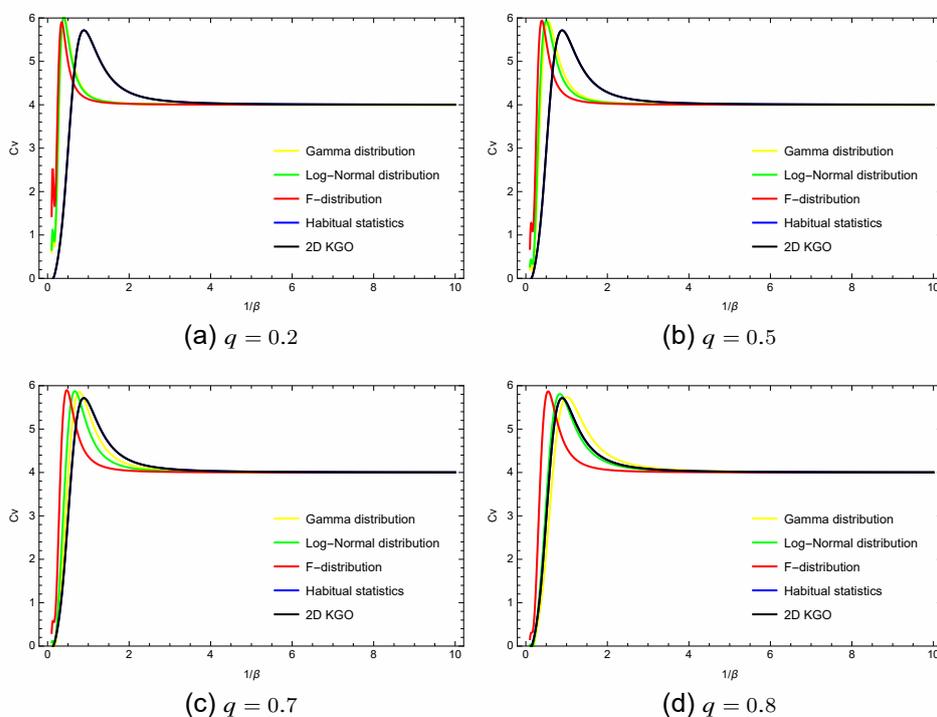


FIG. 4.6 : La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de  $1/\beta$  pour les différentes distributions pour le 2D KGO pour différents paramètres  $q$ .

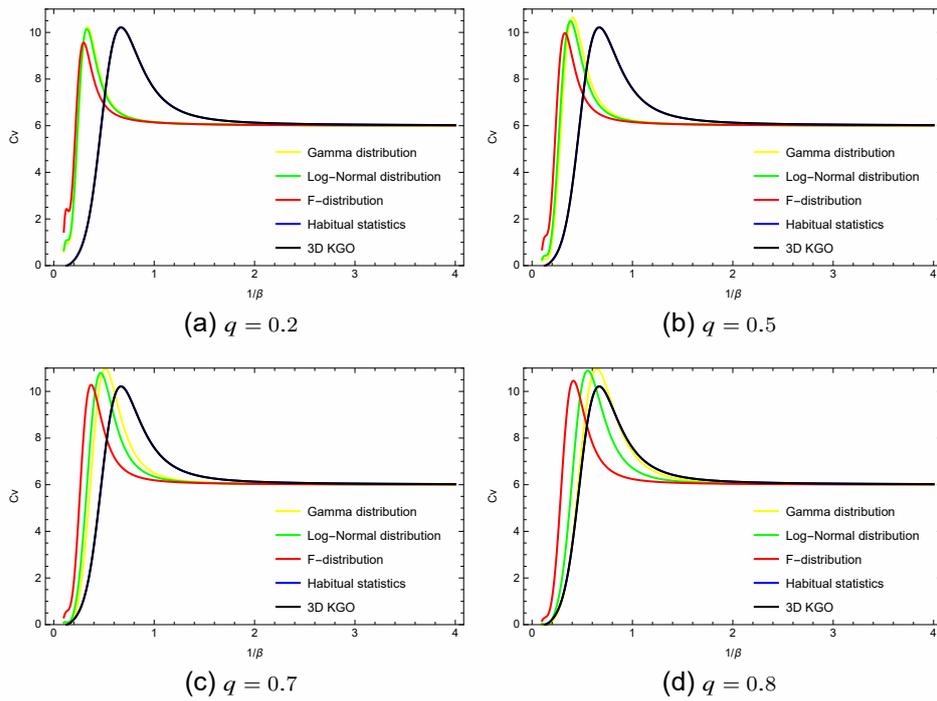


FIG. 4.7 : La comparaison de la variation de la chaleur spécifique en fonction de  $1/\beta$  pour les différentes distributions pour le 3D KGO pour différents paramètres  $q$ .

- Pour  $q \geq 0.7$ , on remarque que toutes les courbes de chaleur spécifique pour les différentes distributions et dimensions se comportent de la même manière que celles de l'oscillateur de Klein-Gordon.
- Pour  $0.2 < q < 0.7$ , les courbes de chaleur spécifique pour les distributions Gamma et Log-Normale se comportent de manière similaire à celle de l'oscillateur de Klein-Gordon, contrairement à celle de la distribution F qui présente une turbulence accrue par rapport à l'oscillateur de Klein-Gordon et aux deux autres distributions.

Pour le KGO en 2D (Figure 4.6) et 3D (Figure 4.7), la température de perturbation des courbes de chaleur spécifique des distributions étudiées est inférieure à celle du KGO et augmente avec l'augmentation de  $q$ .

Cette comparaison révèle qu'en augmentant  $q$ , les courbes de chaleur spécifique de toutes les distributions s'améliorent pour le KGO en 1D. Cependant, pour le KGO en 2D et 3D, l'amplitude du pic de chaleur spécifique des distributions étudiées diminue avec l'augmentation de  $q$  pour le KGO en 2D, tandis qu'elle augmente pour le KGO en 3D. Deux observations finales peuvent être formulées :

- La valeur de la chaleur spécifique du KGO en 1D, 2D et 3D est deux fois supérieure à celle de l'oscillateur harmonique non relativiste [6].

- Les courbures observées dans les courbes de chaleur spécifique ne signalent ni n'indiquent une transition de phase autour de la température spécifique (c'est-à-dire une transition du premier ou du deuxième ordre) : cette observation peut être mieux comprise en examinant les courbes d'entropie, où l'on remarque qu'elle augmente avec la température sans montrer de changement brusque de forme [12].

---

---

# CHAPITRE 5

---

## STATISTIQUE NON-EXTENSIVE DE TSALLIS POUR LES OSCILLATEURS RELATIVISTES À 1D

### 5.1 Préambule

La physique statistique non-extensive représente une extension de la physique statistique classique de Boltzmann-Gibbs, puisqu'elle la réintègre lorsque le paramètre de déformation  $q$  est égal à l'unité. Cette théorie, formulée par Tsallis en 1985 et publiée en 1988 [22–26, 32], offre un moyen potentiellement utile de quantifier divers aspects de la complexité, du moins dans de nombreux cas jusqu'à présent [52]. Au cœur de cette théorie se trouve un concept central, l'entropie notée  $S_q$ , qui, lorsque  $q$  est égal à l'unité, se réduit à l'entropie standard de Boltzmann-Gibbs, notée  $S_{BG}$  [28]. L'entropie  $S_{BG}$  est dite additive, ce qui signifie que pour un système constitué de deux sous-systèmes indépendants (probablement), l'entropie totale est la somme des entropies individuelles. En revanche, l'entropie de Tsallis ( $S_q$ ) pour  $q \neq 1$  ne suit pas cette propriété additive, ce qui souligne que l'additivité entropique dépend intrinsèquement de la forme fonctionnelle de l'entropie en fonction des probabilités.

Le principal objectif de ce chapitre est de calculer les propriétés statistiques de l'oscillateur harmonique (HO : *Harmonic Oscillator*), de l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO : *Klein-Gordon Oscillator*) et de l'oscillateur de Dirac (DO : *Dirac Oscillator*) à une dimension, en utilisant le formalisme des statistiques de Tsallis. Tout d'abord, nous résolvons l'équation de Schrödinger pour ces oscillateurs, puis nous déterminons la fonction de partition pour chacun d'eux en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin. En nous basant sur ces résultats, nous calculons quelques propriétés thermodynamiques.

## 5.2 L'énergie de l'oscillateur harmonique, l'oscillateur de Klein-Gordon, et l'oscillateur de Dirac unidimensionnel

L'équation simplifiée de l'oscillateur harmonique pour le cas unidimensionnel est donnée par [74] :

$$\left\{ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \right\} \Psi(x) = E\Psi(x), \quad (5.1)$$

où  $p_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$ . En utilisant cette équation, l'équation (5.1) devient :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \right\} \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (5.2)$$

La forme des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique unidimensionnel est donnée par :

$$E_{HO} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Selon l'équation (4.9), la forme des niveaux d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel est donnée par [16] :

$$E_{KGO} = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

avec  $r = \frac{\hbar w}{mc^2}$  qui est un paramètre contrôlant la limite non relativiste.

Selon l'équation (3.12), la forme des niveaux d'énergie de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel est donnée par [16] :

$$E_{DO} = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

## 5.3 Calcul de la fonction de partition à partir de la formule d'Euler-Maclaurin

En utilisant (2.34), l'Eq. (2.37) peut être exprimée comme suit :

$$Z(\beta_q) = \sum_n e^{-\beta_q E_n} = \sum_n e^{-\frac{1}{q-1} \ln(1+(q-1)\beta_q E_n)} = \sum_n e^{-\beta_q E_n} \cdot e^{\frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 E_n^2}, \quad (5.6)$$

Ici, nous avons utilisé le développement de la fonction comme suit :

$$\ln(1 + (q-1)\beta_q E_n) \simeq (q-1)\beta_q E_n - \frac{(q-1)^2 \beta_q^2 E_n^2}{2} + \dots + O(q^3) \quad (5.7)$$

Ainsi

$$e^{\frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 E_n^2} = 1 + \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 E_n^2. \quad (5.8)$$

Enfin, la fonction de partition devient :

$$Z(\beta_q) = \sum_n e^{-\beta_q E_n} + \sum_n \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 E_n^2 e^{-\beta_q E_n}. \quad (5.9)$$

Dans notre cas, on distingue trois type d'oscillateurs à 1D

- Pour le cas de l'oscillateur harmonique (1D), en substituant (5.3) dans (5.9),  $Z_{HO}$  devient :

$$\begin{aligned} Z_{HO}(\beta_q) &= \sum_n e^{-\beta_q \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} + \sum_n \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 \hbar^2 \omega^2 \left( n^2 + n + \frac{1}{4} \right) e^{-\beta_q \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} \\ &= \sum_n e^{-\frac{\beta_q \hbar \omega}{2}} \left\{ e^{-\beta_q \hbar \omega n} + \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 \hbar^2 \omega^2 \left( n^2 e^{-\beta_q \hbar \omega n} + n e^{-\beta_q \hbar \omega n} + \frac{e^{-\beta_q \hbar \omega n}}{4} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

dont

$$n^2 e^{-\beta_q \hbar \omega n} = \frac{d^2}{d\beta_q^2} \left( \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} e^{-\beta_q \hbar \omega n} \right), \quad n e^{-\beta_q \hbar \omega n} = -\frac{d}{d\beta_q} \left( \frac{1}{\hbar \omega} e^{-\beta_q \hbar \omega n} \right) \quad (5.11)$$

Ainsi, (5.10) devient :

$$Z_{HO}(\beta_q) = \sum_n e^{-\beta_q \hbar \omega n} e^{-\frac{\beta_q \hbar \omega}{2}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 \hbar^2 \omega^2 \left( \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \frac{d^2}{d\beta_q^2} - \frac{1}{\hbar \omega} \frac{d}{d\beta_q} + \frac{1}{4} \right) \right\}, \quad (5.12)$$

avec :

$$\sum_n e^{-\beta_q \hbar \omega n} = \frac{e^{-\frac{\beta_q \hbar \omega}{2}}}{2 \sinh\left(\frac{\beta_q \hbar \omega}{2}\right)}. \quad (5.13)$$

Ainsi, la fonction de partition pour l'oscillateur harmonique unidimensionnel  $Z_{HO}$  devient :

$$Z_{HO}(\beta_q) = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\beta_q \hbar \omega}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 \hbar^2 \omega^2 \left( \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \frac{d^2}{d\beta_q^2} - \frac{1}{\hbar \omega} \frac{d}{d\beta_q} + \frac{1}{4} \right) \right\}. \quad (5.14)$$

- Pour le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon (1D), la fonction de partition ( $Z_{KGO}$ ) devient :

$$\begin{aligned} Z_{KGO}(\beta_q) &= \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} + \sum_n \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 m^2 c^4 (1+2rn) e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} \\ &= \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} + \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 \frac{d^2}{d\beta_q^2} \left( \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

où

$$m^2 c^4 (1+2rn) e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} = \frac{d^2}{d\beta_q^2} \left( \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} \right) \quad (5.16)$$

- Enfin, pour le cas de l'oscillateur de Dirac (1D), on trouve :

$$\begin{aligned} Z_{DO}(\beta_q) &= \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} + \sum_n \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 m^2 c^4 (1+2rn) e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} \\ &= \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} + \frac{(q-1)}{2} \beta_q^2 \frac{d^2}{d\beta_q^2} \left( \sum_n e^{-\beta_q m c^2 \sqrt{1+2rn}} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

À partir des équations (2.9), (2.10), (2.11), et (2.12), on peut calculer les grandeurs thermodynamiques : l'énergie totale  $U(\beta_q)$ , l'entropie  $S(\beta_q)$ , l'énergie libre  $F(\beta_q)$  et la chaleur spécifique  $C_v(\beta_q)$ , respectivement, en suivant les étapes suivantes :

- On identifie  $\sum_n e^{-\beta_q mc^2 \sqrt{1+2rn}}$  en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin (Annexe. ??),
- La fonction de partition finale  $Z$  des trois oscillateurs sera obtenue en utilisant (5.14), (5.15) et (5.17), respectivement. Avec :

$$Z(\beta_q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta_q E_n} = 1 + \sum_n e^{-\beta_q E_n}. \quad (5.18)$$

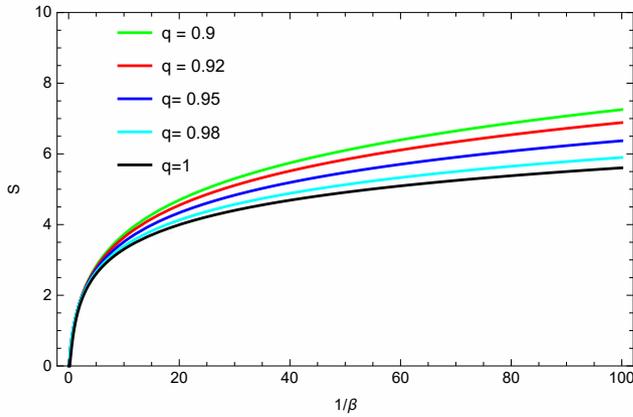
## 5.4 Résultats et discussions

À partir de la fonction de partition des différents oscillateurs utilisés dans la théorie de Tsallis, il est possible de dériver les propriétés thermiques en fonction de la température  $1/\beta$ , du paramètre de déformation  $q$  et du multiplicateur de Lagrange  $\alpha$ . Les propriétés thermiques de l'oscillateur harmonique (1D HO), de l'oscillateur de Klein-Gordon (1D KG) et de l'oscillateur de Dirac (1D DO) ont été étudiées, mettant un accent particulier sur la variation de l'entropie ( $S$ ) et de la chaleur spécifique ( $C_v$ ) selon les statistiques de Tsallis de ces oscillateurs.

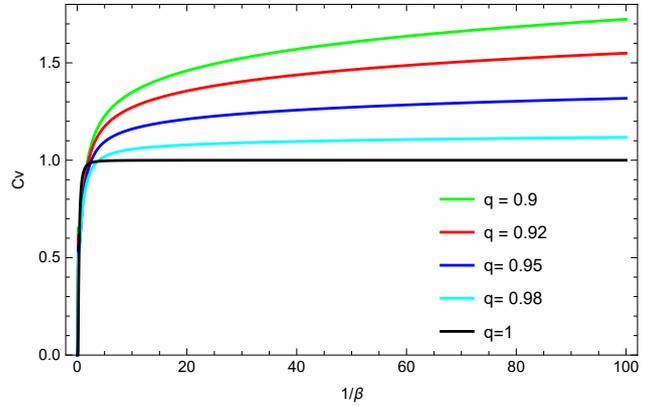
La variation des tracés d'entropie et de chaleur spécifique pour l'oscillateur harmonique unidimensionnel en fonction de la température est représentée dans la figure 5.1 pour différentes valeurs des paramètres  $q$  et  $\alpha$ , tandis que pour l'oscillateur de Klein-Gordon et l'oscillateur de Dirac, elle est illustrée dans la figure 5.2. Comme le montrent les courbes d'entropie  $S$ , les valeurs d'entropie pour tous les oscillateurs étudiés avec différentes valeurs de  $q$  et  $\alpha$  sont toujours positives et augmentent avec l'augmentation de la température  $1/\beta$ . En réduisant le paramètre  $q$ , les valeurs de l'entropie augmentent pour tous les oscillateurs, notant que ses valeurs dans les oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac sont plus grandes que dans l'oscillateur harmonique et ne sont pas liées au changement des valeurs  $\alpha$ .

Quant aux courbes de chaleur spécifique, l'effet du paramètre  $q$  sur ces courbes est évident. Remarquez que les courbes de chaleur spécifique de l'oscillateur harmonique à  $q = 1$  sont saturées à la limite 1, et il en va de même pour les oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac qui sont saturés à la limite 2 pour  $q = 1$ , et cela quelles que soient les valeurs prises par  $\alpha$ . Cette saturation est indépendante du multiplicateur de Lagrange  $\alpha$ .

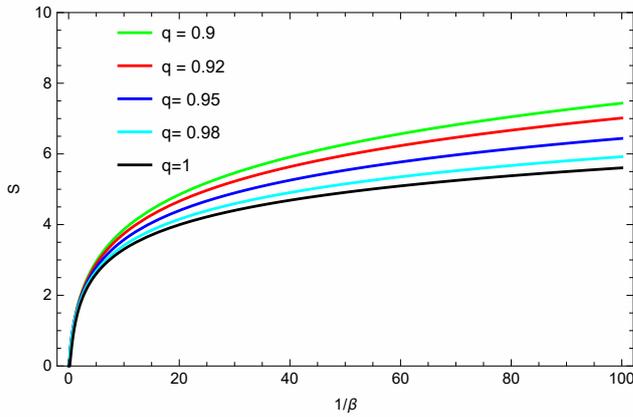
La variation des courbes de chaleur spécifique à  $q = 0.98$  pour les oscillateurs étudiés est proche des statistiques habituelles  $q = 1$ , car il a été observé que la valeur limite de  $C_v$  est de 1.1 pour l'oscillateur harmonique et de 2.2 pour les oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac. De



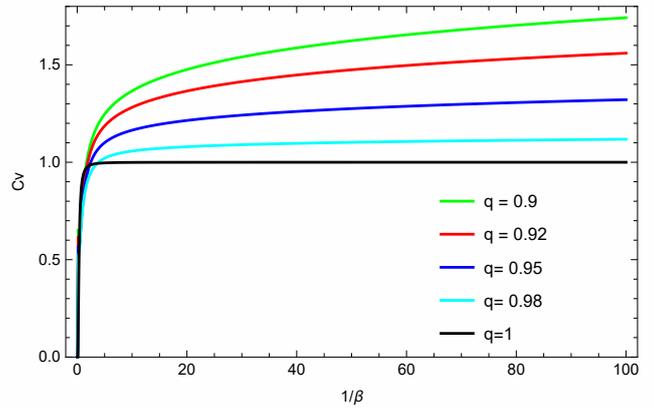
(a)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour  $\alpha = -1$ .



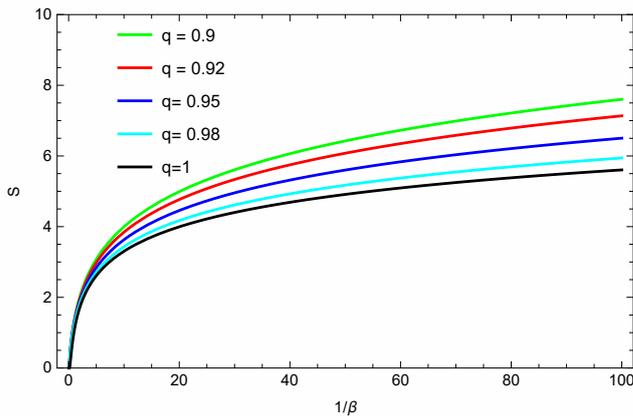
(b)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour  $\alpha = -1$ .



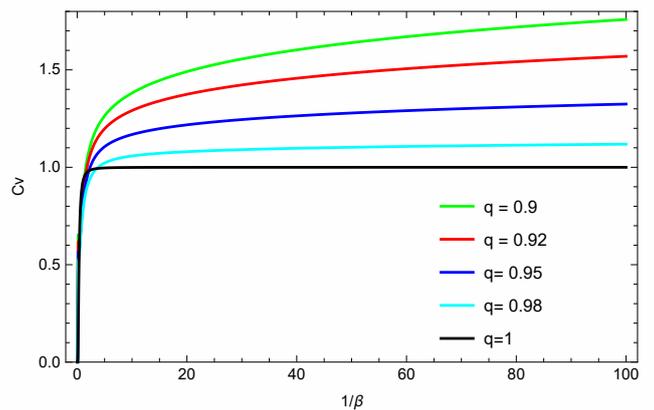
(c)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour  $\alpha = 0$ .



(d)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour  $\alpha = 0$ .



(e)  $S$  en fonction  $1/\beta$  pour  $\alpha = 1$ .



(f)  $C_v$  en fonction  $1/\beta$  pour  $\alpha = 1$ .

FIG. 5.1 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de 1D HO en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  et  $\alpha$ .

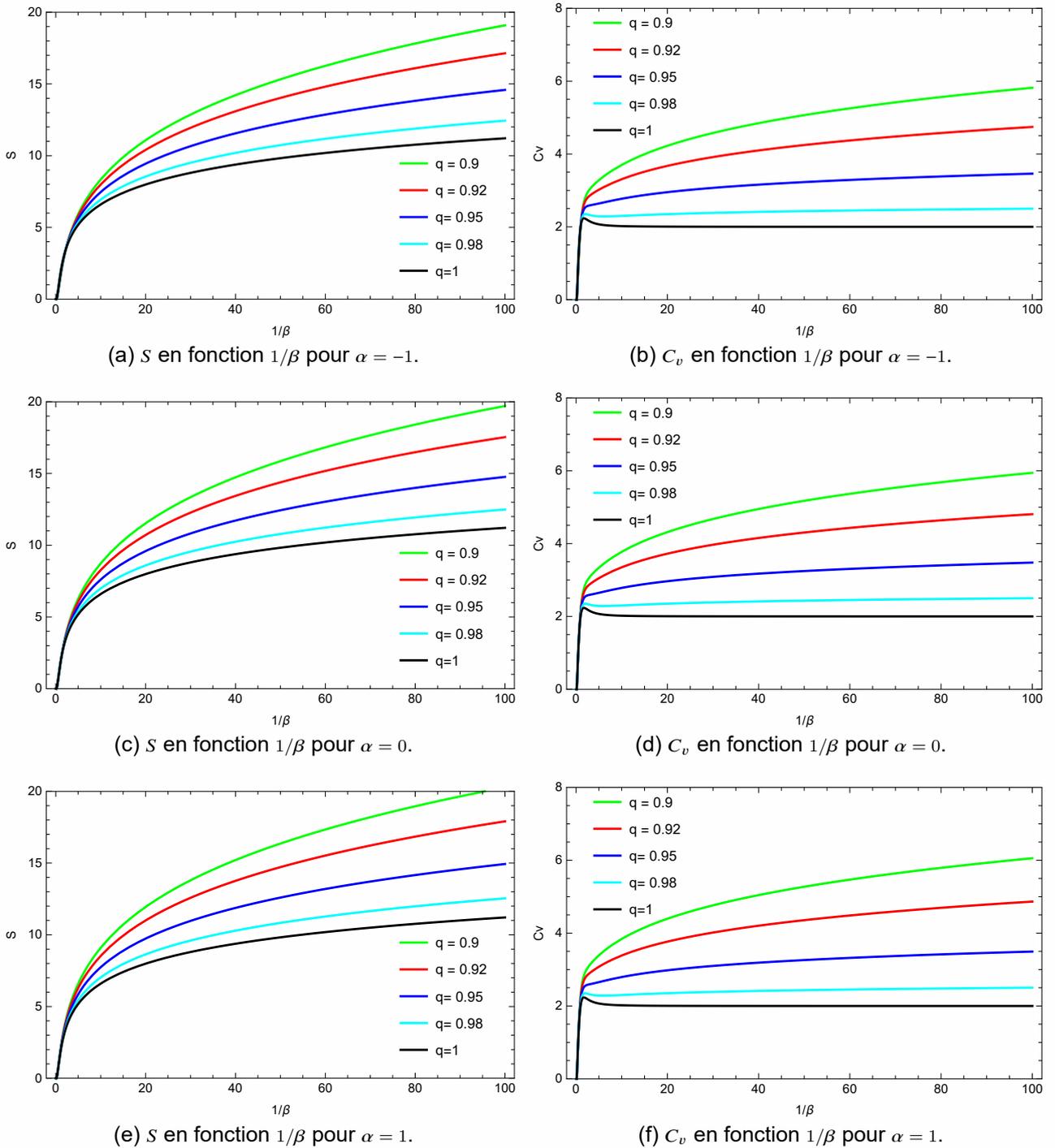


FIG. 5.2 : La variation de  $S$  et  $C_v$  de 1D KGO et 1D DO en fonction de  $1/\beta$  avec différents paramètres  $q$  et  $\alpha$ .

plus, pour le même type d'oscillateur étudié, les valeurs de la chaleur spécifique ne varient pas en fonction des valeurs  $\alpha$  étudiées  $\alpha = -1, 0, 1$ .

Pour les autres valeurs de  $q$  ( $= 0.90, 0.92, 0.95$ ), toutes les courbes de chaleur spécifique dépassent la limite 1 par rapport à la courbe de l'oscillateur harmonique et dépassent la limite 2 par rapport aux oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac. Ces courbes ne sont pas saturées par rapport aux statistiques habituelles  $q = 1$  pour toutes les valeurs du multiplicateur de Lagrange  $\alpha$ .

---

---

# CHAPITRE 6

---

## CONCLUSION

La superstatistique, une approche novatrice introduite par C. Beck et E.G.D. Cohen en 2003, constitue une extension intéressante de la physique statistique traditionnelle. Contrairement aux approches conventionnelles telles que la statistique de Tsallis, qui généralise l'entropie et les distributions de probabilité sous-jacentes, la superstatistique considère une superposition de plusieurs distributions statistiques. Cette approche permet de modéliser des systèmes complexes caractérisés par des fluctuations temporelles dans les paramètres thermodynamiques, tels que la température ou la densité d'énergie. En utilisant la superstatistique, il devient possible de décrire des systèmes hors équilibre de manière plus précise, en prenant en compte les fluctuations temporelles dans les paramètres thermodynamiques. Les domaines d'application de la superstatistique sont vastes et comprennent la physique des plasmas, la cosmologie, la physique des particules, ainsi que l'étude des fluctuations dans les systèmes financiers et socio-économiques. En résumé, la superstatistique offre une approche flexible et puissante pour comprendre et modéliser des systèmes statistiques complexes en considérant la superposition de plusieurs modèles statistiques, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives dans la compréhension des phénomènes hors équilibre.

Le présent travail de thèse se concentre sur l'analyse des propriétés statistiques des oscillateurs quantiques, notamment l'oscillateur harmonique, l'oscillateur de Klein-Gordon et l'oscillateur de Dirac. Nous avons calculé des solutions exactes pour chaque oscillateur, les utilisant ensuite pour déterminer la fonction de partition et ainsi prendre en compte diverses propriétés thermodynamiques. Notre étude se divise en deux parties distinctes, à savoir la physique statistique de Beck et celle de Tsallis.

Dans un premier temps, en suivant la théorie de Beck, nous avons examiné les propriétés statistiques de l'oscillateur de Dirac pour différentes dimensions (1D, 2D et 3D). Ce faisant, nous

avons utilisé diverses distributions telles que Gamma, Log-Normale et F, avec différentes valeurs du paramètre universel  $q$ . Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit :

- Cas de l'oscillateur de Dirac

Dans ce chapitre, une analyse approfondie des superstatistiques de l'oscillateur de Dirac a été entreprise dans les dimensions unidimensionnelle (1D), bidimensionnelle (2D) et tridimensionnelle (3D). Pour ce faire, nous avons d'abord dérivé les spectres d'énergie relativistes de l'oscillateur de Dirac dans chacune de ces configurations. La forme spécifique du spectre énergétique dans chaque dimension a révélé des informations essentielles sur les caractéristiques superstatistiques de l'oscillateur de Dirac.

Par la suite, nous avons appliqué la formule d'Euler-Maclaurin pour calculer les fonctions de partition correspondantes pour trois distributions de probabilité distinctes : la distribution Gamma, la distribution Log-Normale et la distribution F. En outre, nous avons identifié la fonction  $f(\beta)$  associée à chaque distribution. Il est à noter que ces distributions jouissent d'une reconnaissance significative dans la littérature scientifique contemporaine.

Nos résultats ont mis en évidence l'impact significatif de deux paramètres universels, à savoir  $\beta$  et  $q$ , sur la chaleur spécifique  $C_v$  et l'entropie  $S$  dans toutes les dimensions considérées (1D, 2D et 3D) de l'oscillateur de Dirac. Notamment, à mesure que le paramètre  $q$  augmentait, les courbes de la chaleur spécifique montraient une amélioration pour toutes les distributions et dimensions (1D, 2D et 3D), convergent finalement vers une limite commune  $C_v = 2$  pour toutes les dimensions. De plus, les courbes d'entropie ont systématiquement affiché une tendance à augmenter avec la température, diminuant avec des valeurs de  $q$  plus élevées.

- Cas de l'oscillateur de Klein-Gordon

- Dans ce chapitre, les superstatistiques d'un oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel, bidimensionnel et tridimensionnel ont été examinées. Pour ce faire, l'équation de Klein-Gordon a été résolue pour les différentes dimensions afin d'obtenir le spectre énergétique de cet oscillateur. La forme spécifique du spectre énergétique a été obtenue pour chaque dimension afin de faciliter la discussion des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon. En utilisant la formule d'Euler-Maclaurin, la fonction de partition a été calculée pour les trois distributions choisies, à savoir la distribution Gamma, Log-Normale et F, définies respectivement par les équations (2.48), (2.49) et (2.50). Ces formes de distributions sont largement employées dans la littérature. L'in-

fluence des deux paramètres universels  $(\beta, q)$  sur la chaleur spécifique et l'entropie est claire pour toutes les distributions choisies et pour toutes les différentes dimensions étudiées. De plus, il a été observé qu'en augmentant le paramètre  $q$ , les courbes de chaleur spécifique  $C_v$  ont convergé vers certaines limites spécifiques :  $C_v = 2$  pour le KGO en 1D,  $C_v = 4$  pour le KGO en 2D, et  $C_v = 6$  pour le KGO en 3D. Par ailleurs, l'entropie  $S$  a été notée pour augmenter avec la température et diminuer avec l'augmentation du paramètre  $q$ .

- Statistique non-extensive de Tsallis

Dans ce chapitre, nous avons examiné les statistiques de Tsallis pour trois types d'oscillateurs unidimensionnels : l'oscillateur harmonique, l'oscillateur de Klein-Gordon et l'oscillateur de Dirac. Dans un premier temps, nous avons résolu l'équation de Schrödinger pour chaque oscillateur afin d'obtenir leur spectre énergétique respectif. En analysant la forme de ces spectres, nous avons pu discuter de leurs propriétés statistiques. Pour les oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac, nous avons calculé la fonction de partition en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin.

L'impact des trois paramètres universels  $(\beta, q, \alpha)$  sur l'entropie et la chaleur spécifique est évident pour tous les oscillateurs unidimensionnels étudiés. Les courbes d'entropie augmentent avec la température et diminuent avec le paramètre  $q$ . De plus, nous avons observé qu'en augmentant le paramètre  $q$ , les courbes de chaleur spécifique pour tous les types d'oscillateurs étudiés (1D HO, 1D KGO, 1D DO) convergent vers une limite  $C_v = 1$  pour l'oscillateur harmonique et une limite  $C_v = 2$  pour les oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac. En ce qui concerne le multiplicateur de Lagrange  $\alpha$ , nous n'avons observé aucun changement dans les valeurs de l'entropie et de la chaleur spécifique pour un même type d'oscillateur.

En conclusion, les différences entre les résultats obtenus pour l'oscillateur de Dirac et celui de Klein-Gordon, selon la théorie de Beck, dans le cas des valeurs limites de l'entropie et de la chaleur spécifique en 2D, sont attribuables à la dégénérescence des niveaux d'énergie pour l'oscillateur de Klein-Gordon.

En comparant la théorie de Beck à celle de Tsallis pour les oscillateurs étudiés en une dimension (1D DO et 1D KGO), l'augmentation des valeurs limites de la chaleur spécifique dans la statistique de Tsallis s'explique par l'absence de phénomène de saturation, même lorsque les valeurs de  $q$  sont proches de 1, contrairement aux superstatistiques de Beck.

Ces résultats soulignent l'importance de choisir la bonne approche statistique en fonction des

caractéristiques spécifiques du système étudié, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles perspectives dans la compréhension des phénomènes thermodynamiques des oscillateurs quantiques.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A* **1989**, 22, L817.
- [2] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A* **1990**, 23, 2263.
- [3] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *Harwood academic publishers* **1996**.
- [4] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2005**, 346, 261–268.
- [5] A. Boumali, Ph.D. thesis, Université Badji Mokhtar-Annaba, **2006**.
- [6] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2007**, 76, 669.
- [7] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, 128, 124.
- [8] A. Boumali, *arXiv preprint arXiv :1409.6205* **2014**.
- [9] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2015**, 90, 045702.
- [10] A. Boumali, *Turki. J. Phys* **2007**, 31, 307–316.
- [11] A. Boumali, *Zeitschrift fur Naturforschung A* **2015**, 70, 867–874.
- [12] A. Boumali, F. Serdouk, S. Dilmi, *Physica A* **2020**, 553, 124207.
- [13] E. Sadurni, J. M. Torres, T. H. Seligman, *J. Phys. Math. Theor.* **2010**, 43, 285204.
- [14] E. S. Santos, G. R. de Melo, *Int. J. Theoret. Phys.* **2011**, 50, 332–338.
- [15] V. Santos, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Ann. Physics* **2014**, 349, 402–410.
- [16] A. Boumali, *EJTP* **2015**, 12, 1–10.
- [17] Z. Selama, Ph.D. thesis, Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi-Tébessa, **2023**.

- [18] M. Falek, Ph.D. thesis, Université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijle, **2011**.
- [19] J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **2013**, *111*, 170405.
- [20] S. Bruce, P. Minning, *Il Nuovo Cimento A* **1993**, *106*, 711–713.
- [21] M. Tribeche, K. Ourabah, *Rev. Alg. de Physique* **2015**, *2*, 110–122.
- [22] C. Tsallis, *J. Statist. Phys.* **1988**, *52*, 479–487.
- [23] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica A* **1998**, *261*, 534–554.
- [24] C. Tsallis, A. M. C. Souza, *Phys. Rev. E* **2003**, *67*, 026106.
- [25] C. Tsallis, J. C. Anjos, E. P. Borges, *Phys. Lett. A* **2003**, *310*, 372–376.
- [26] C. Tsallis, *Entropy* **2019**, *22*, 17.
- [27] C. Tsallis, *Nonextensive statistical mechanics and its applications*, Springer Berlin, Heidelberg, **2001**.
- [28] C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics*, Springer, **2009**.
- [29] A. Lavagno, G. Kaniadakis, M. Rego-Monteiro, P. Quarati, C. Tsallis, *arXiv preprint astro-ph/9607147* **1996**.
- [30] M. Labidi, Ph.D. thesis, Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tebessa, **2022**.
- [31] M. Labidi, A. Boumali, A. N. Ikot, *Rev. Mexicana Fis.* **2020**, *66*, 671–682.
- [32] S. Umarov, C. Tsallis, *Mathematical foundations of nonextensive statistical mechanics*, World Scientific, **2022**.
- [33] C. Beck, G. S. Lewis, H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **2001**, *63*, 035303.
- [34] C. Beck, E. G. D. Cohen, *Phys. A* **2003**, *322*, 267–275.
- [35] C. Beck, *Phys. Rev. Lett.* **2007**, *98*, 064502.
- [36] C. Beck, *Eur. Phys. J. A* **2009**, *40*, 267.
- [37] C. Beck, *Philos. Trans. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.* **2011**, *369*, 453–465.
- [38] C. Beck, *Braz. J. Phys.* **2009**, *39*, 357–363.
- [39] C. Beck, *Physica A* **2004**, *342*, 139–144.

- [40] S. Abe, S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino, *Phys. Lett. A* **2001**, *281*, 126–130.
- [41] S. Abe, C. Beck, E. G. D. Cohen, *Phys. Rev. E* **2007**, *76*, 031102.
- [42] L. L. Chen, C. Beck, *Physica A* **2008**, *387*, 3162–3172.
- [43] K. Briggs, C. Beck, *Physica A* **2007**, *378*, 498–504.
- [44] W. Greiner, L. Neise, H. Stocker, *Thermodynamics and statistical mechanics*, Springer Science & Business Media, **2012**.
- [45] A. M. Tremblay, *Notes de cours (PHQ 340)*, Université de Sherbrooke **2020**.
- [46] O. Cleynen, *Thermodynamique de l'ingénieur*, Framabook, **2015**.
- [47] C. Beck, *Physica D* **2004**, *193*, 195–207.
- [48] C. Beck, *Contin. Mech. Thermodyn.* **2004**, *16*, 293–304.
- [49] V. Schwämmle, C. Tsallis, *J. Math. Phys.* **2007**, *48*, 113301.
- [50] E. P. Borges, *Physica A* **2004**, *340*, 95–101.
- [51] R. Chakrabarti, R. Chandrashekar, S. S. N. Mohammed, *Physica A* **2010**, *389*, 1571–1584.
- [52] K. Kikuchi, H. Akatsuka, *Entropy* **2023**, *25*, 1400.
- [53] C. Beck, E. G. D. Cohen, H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **2005**, *72*, 056133.
- [54] C. B. E. Van der Straeten, *Physical Review E* **2009**, *80*, 036108.
- [55] E. G. D. Cohen, *Physica D* **2004**, *193*, 35–52.
- [56] A. Guvendi, A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus* **2021**, *136*, 1–18.
- [57] T. Yamano, *Prog. Theor. Phys. Supp.* **2006**, *162*, 87–96.
- [58] H. Touchette, C. Beck, *Phys. Rev. E* **2005**, *71*, 016131.
- [59] W. S. Chung, H. Hassanabadi, *Physica A* **2019**, *516*, 496–501.
- [60] A. Ayala, M. Hentschinski, L. A. Hernandez, M. Loewe, R. Zamora, *Phys. Rev. D* **2018**, *98*, 114002.
- [61] P. O. Amadi, C. O. Edet, U. S. Okorie, G. T. Osobonye, G. J. Rampho, A. N. Ikot, *arXiv preprint arXiv :2001.10496* **2020**.

- [62] J. D. Castano-Yepes, C. F. Ramirez-Gutierrez, *Phys. Rev. E* **2021**, *104*, 024139.
- [63] J. D. Castano-Yepes, D. A. Amor-Quiroz, *Physica A* **2020**, *548*, 123871.
- [64] J. D. Castano-Yepes, I. A. Lujan-Cabrera, C. F. Ramirez-Gutierrez, *Physica A* **2021**, *580*, 125206.
- [65] J. Fuentes, O. Obregon, *arXiv preprint arXiv :2101.09147* **2021**.
- [66] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **2018**, *133*, 1–14.
- [67] W. S. Chung, H. Hassanabadi, *Modern Phys. Lett. A* **2020**, *35*, 2050147.
- [68] M. H. Pacheco, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. A* **2003**, *311*, 93–96.
- [69] M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, R. R. Landim, *Europhys. Lett.* **2014**, *108*, 10005.
- [70] V. V. Dvoeglazo, *Il Nuovo Cimento* **1994**, *107*, 1411–1417.
- [71] V. A. Dulock, H. V. McIntosh, *Amer. J. Phys.* **1965**, *33*, 109–118.
- [72] V. Santos, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Ann. Physics* **2014**, *349*, 402–410.
- [73] L. L. Foldy, S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **1950**, *78*, 29.
- [74] W. Greiner, *Quantum mechanics : an introduction, Vol. 1*, Springer Science & Business Media, **2000**.
- [75] P. Cheung, V. G. Kac, *Quantum calculus*, Springer Heidelberg, **2001**.
- [76] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Cambridge University Press* **1999**.
- [77] P. Erdos, S. S. W. Jr, *Illinois J. Math.* **1980**, *24*, 104–112.
- [78] D. Elliott, *Anziam J.* **1998**, *40*, E27–E76.

---

---

# ANNEXE A

---

## LA FORMULE D'EULER-MACLAURIN

---

### LA FORMULE D'EULER-MACLAURIN

L'Euler-Maclaurin est une formule fondamentale en analyse numérique, qui remonte à près de 300 ans. Elle fournit une estimation de la somme à travers une intégrale, avec un terme d'erreur donné par une intégrale impliquant les nombres de Bernoulli. Cette formule a une application étendue dans de nombreux domaines mathématiques, tels que la théorie des nombres et la combinatoire. Elle a été découverte à l'origine par Leonhard Euler et améliorée par Bernard Maclaurin, d'où son nom. Depuis lors, des recherches continues ont enrichi notre compréhension de cette formule et de ses applications.

#### A.1 La formule d'Euler-maclaurin

Pour évaluer la fonction de partition ( $Z$ ) dans l'équation (2.7), nous utilisons la formule d'Euler-Maclaurin la plus générale, cela peut s'écrire [75, 76] :

$$\sum_{x=a}^b f(x) = \frac{1}{2} (f(b) + f(a)) + \int_a^b f(x) dx + \sum_{i=2}^k \frac{b_i}{i!} (f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)) - \int_a^b \frac{B_k(\{1-t\})}{k!} f^{(k)}(t) dt, \quad (\text{A.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels arbitraires avec la différence  $b - a$  étant un nombre entier positif,  $B_n$  et  $b_n$  sont respectivement des polynômes et des nombres de Bernoulli, et  $k$  est un entier positif. La condition que nous imposons à la fonction réelle  $f$  est qu'elle ait une dérivée  $k$ -ième continue. Le symbole  $\{x\}$  pour un nombre réel  $x$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ . Ici, le terme restant (terme d'erreur)

$$R_k = \int_a^b \frac{B_k(\{1-t\})}{k!} f^{(k)}(t) dt, \quad (\text{A.2})$$

est le plus essentiel de la formule d'Euler-Maclaurin.

Si  $f(x)$  et toutes ses dérivées tendent vers 0 lorsque  $x \rightarrow \infty$ , la formule peut être simplifiée comme suit :

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{i!} f^{(i-1)}(0) - \int_0^{\infty} \frac{B_k(\{1-t\})}{k!} f^{(k)}(t) dt, \quad (\text{A.3})$$

Les premiers nombres de Bernoulli sont :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{30}, \quad b_5 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Les termes impairs de la séquence sont tous nuls sauf le premier  $b_1$ .

## A.2 Les polynômes de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli ( $b_n$ ) apparaissent dans un certain nombre de théorèmes de théorie et d'analyse des nombres. Les polynômes de Bernoulli ( $B_n$ ) peuvent être définis par une fonction génératrice :

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (\text{A.5})$$

avec les premiers polynômes de Bernoulli sont :

$$\begin{aligned}
 B_0(x) &= 1, \\
 B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
 B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
 B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

Aussi, plus général, pour un entier positif  $n$ , on définit la fonction bernoullienne périodique  $\bar{B}_n(x) = B_n(\{x\})$ . On voit que  $\bar{B}_n$  est périodique (de période 1) et continu sur  $[0, 1]$ . Cela signifie que les parties fractionnaires des nombres de Bernoulli sont denses dans l'intervalle  $[0, 1]$  [77]. Suite à cette remarque et en utilisant la preuve d'Elliot [78], la forme finale de la fonction de partition devient :

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b}{i!} f^{(i-1)}(0) - \int_0^1 \frac{B_i(\{1-t\})}{i!} f^{(i)}(t) dt,
 \tag{A.7}$$

---

---

# ANNEXE B

---

## LISTE DES ARTICLES

- Soumia Siouane, Abdelmalek Boumali and Abdullah Guvendi, Theoret. Math. Phys., 219 , 673 - 687 (2024). (Classe A ; Impact-Factor = 1.0 ; CiteScore = 1.8 ) : Superstatistical properties of the Dirac oscillator with gamma, lognormal, and F distributions (**Published**)
- Soumia Siouane and Abdelmalek Boumali, Superstatistical properties of the Klein-Gordon oscillator with gamma, lognormal, and F distributions (**Published**)
- Abdelmalek Boumali and Soumia Siouane, Properties of non-extensive statistical of the relativistic harmonic oscillator (**Under Review**)