Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et Informatique

Introduction aux Probabilités et Statistique Descriptive

Présenter par: Boukhalfa El-hafsi

Maître de conférences classe : B

A propos des étudiants de 1ière année licence mathématiques et informatique

2019-2020

Table des matières

Chapitre 1

Notions de base et vocabulaire statistique

1.0.1 Concepts de base de la statistique (Population et individu, Variable (ou caractère))

Définition 1.1 *La statistique est un ensemble de méthodes scientifiques basées sur le* ***recueil****, l'****organisation****, la* ***présentation*** *de données, ainsi que sur la* ***modélisation*** *et la construction de* ***résumés numériques****.*

Statistique Discriptive

On parle de *statistique descriptive* lorsqu'on *décrit* et *analyse* des données observées et qu'on *tire des conclusions* valables uniquement pour l'ensemble étudié.

Population

On désigne par le mot population tout ensemble étudié par la statistique, on le note généralement Ω. On notera N le nombre d'éléments de Ω, dit l'**effectif total** (ou la **taille**) de la population.

Exemple 1.1 *l'ensemble des étudiants de la faculté.*

Exemple 1.2 *l'ensemble des rats d'une ferme.*

Échantillon Un *échantillon* désigne un sous-ensemble d'une population.

Exemple 1.3 *Une partie des rats de la ferme.*

Individu, Membre

Un *individu* ou un *membre* est un élément constitutif d'une population ou d'un échantillon.

Caractère

Un caractère statistique est ce qui est observé ou mesuré sur les individus d'une population statistique.

En d'autre terme, c'est une caractéristique prise par les individus d'une population.

Modalités

Sont les différents situations possibles d'un caractère.

Exemple 1.4 *1) Le caractère "nationalité" peut avoir comme modalités : Algérienne, française, guinéenne, américaine, malienne, sénégalaise...*

2)Le caractère "nombre d'enfants pris en charge" : 1, 2, 3 ou plus.

Remarque 1.1 *On remarque qu'il existe deux types de caractères.*

Caractère qualitatif

Si le caractère étudié admet des valeurs ou modalités non mesurables, on dit que le caractère est *qualitatif.*

Exemple 1.5 •*la profession* •*la nationalité*

Caractère quantitatif

Lorsque les modalités d'un caractère sont mesurables, on dit que ce caractère est *quantitatif*. On lui donne souvent le nom de *variable statistique*.

D'après ces modalités, une variable statistique peut être *discrète* ou *continue*.

Continue :

La variable statistique *continue* peut prendre n'importe quelle valeur à l'intérieur de son intervalle de définition (dans $\mathbb{R}$).

Exemple 1.6 •*poids* •*moyenne* •

Discrète ou discontinue :

La variable statistique *discrète* ne peut prendre que certaines valeurs isolées (en général dans $\mathbb{N}$).

Exemple 1.7 •*le nombre de frère* •*le nombre d'accidents pour une période donnée* •*le nombre de pièces d'un logement : 1, 2, 3, 4, 5*

Remarque 1.2 *Les variables continues sont regroupées en* **classes** *(des intervalles)*. *On appelle* ***amplitude*** *la longueur de l'intervalle d'une classe. Dans ce cas la taille de la population s'appelle* ***étendu****.*

Définition 1.2 ***Série statistique :*** *On appelle série statistique une liste de N observations faites pour un caractère d'une population*

.

Définition 1.3 ***Variable statistique :*** *Une série statistique ordonnée est appelée une variable statistique ou " distribution statistique".*

1.1 Les tableaux statistiques

Pour étudier un caractère ou une variable statistique, la première opération consiste à recueillir toutes les informations voulues. Elles doivent être ordonnées dans des *tableaux statistiques* ou bien dans des vusialisations *graphiques*, qui donnent un résumé plus clair et facilite l'interprétation des données.

Le tableau de distribution de fréquences est un mode synthétique de présentation des données. Sa constitution est immédiate dans le cas d'un caractère discret mais nécessite en revanche une transformation des données dans le cas d'un caractère continu.

Tableaux statistiques

A) Cas d'un caractère qualitatif

Considérons une population à N individus. On s'intéresse à connaître pour chaque **catégorie i**, le nombre d'individus qui ont cette modalié. Ce nombre est noté n_i appelé *effectif.*

Effectifs (d'une modalité)

L'effectif n_i d'une modalité x_i est égal au nombre d'individus de la population qui possèdent cette modalité x_i. On a bien sûr :

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_m = \sum_{n=1}^{m} n_i \tag{1.1}$$

avec m étant le nombre de modalités possibles sur le caractère étudié.

Pourcentage et fréquence relative

La fréquence d'une modalité, est la part des effectifs de cette modalité notée $f_i = \frac{n_i}{N}$. Cependant le pourcentage est noté $p_i = f_i \times 100$ et on a

$$\sum_i p_i = 100 \quad \text{et} \quad \sum_i f_i = 1. \tag{1.2}$$

Effectifs cumulés

Dans la pratique, lorsqu'on est en présence d'une distribution statistique, il est souvent intéressant de connaître le nombre de valeurs inférieures ou égales à une modalité x_i. Il en est de même pour le nombre de valeurs supérieures ou égales à une modalité x_i.

À cet effet, on calcule l'*effectif cumulé croissant (ECC)* de la modalité x_i :

$$E_i = n_1 + n_2 + ... + n_i = \sum_{k=1}^{i} n_k. \tag{1.3}$$

ou l'*effectif cumulé décroissant (ECD) :*

$$\begin{aligned} N - (n_1 + n_2 + ... + n_{i-1}) &= N - \sum_{k=1}^{i-1} n_k \\ &= N - E_{i-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Fréquence relative cumulée

Croissante (FCC)

$$F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i = \sum_{k=1}^{i} f_k \tag{1.5}$$

Cette somme désigne la proportion d'individus dans la population Ω pour lesquels la variable statistique X prend une valeur inférieure ou égale à x_i .

Si on s'intéresse à la proportion d'individus dans la population Ω pour lesquels la variable statistique X prend une valeur supérieure ou égale à x_i, on ait entrain de calculer la *fréquence cumulée décroissante (FCD)* :

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^{i-1} f_k &= 1 - (f_1 + f_2 + ... + f_{i-1}) \\ &= 1 - F_{i-1}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Remarque 1.3 *La fonction de fréquences cumulées est appelée aussi fonction de répartition, elle vérifie*

✓ $\forall x < x_1 : F(x) = 0$.

✓ $\forall x \geq x_m : F(x) = 1$.

Nons obtenons le tableau suivant

valeur de variable x_i	n_i	f_i	p_i	FCC F_i
catégorie 1	n_1	f_1	p_1	F_1
catégorie i	n_i	f_i	$p_i = f_i.100$	$\sum_{k=1}^{i} f_k$
catégorie m	n_m	f_m	p_m	$F_m = 1$
	$\sum_{i=1}^{m} n_i = N$	$\sum_{i=1}^{m} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{m} p_i = 100$	

(Tableau statistique pour une variable qualitative)

Exemple 1.8 *On a enquêté 20 employés d'une entreprise dont on veut étudier leur situation familiale. Le caractère situation familiale peut prendre les modalités suivantes : Célibataire : C, Marié : M, Veuf : V, Divorcé : D. Les résultats bruts sont les suivants*

Variable statistique (x_i) *Situation familiale*	*Effectif* (n_i) *nombre d'employés*
C	*7*
M	*8*
D	*2*
V	*3*
total	$\sum n_i = 20$

(tableau 1)

B) Cas d'un caractère quantitatif discret

Dans le cas où le caractère est *qualitatif discret*, on s'intéresse pour chaque **valeur** x_i, le nombre d'individus (n_i) prenant cette valeur x_i.

valeur de variable x_i	n_i	f_i	p_i	FCC F_i
x_1	n_1	f_1	p_1	F_1
x_i	n_i	f_i	$p_i = f_i.100$	$\sum_{k=1}^{i} f_k$
x_m	n_m	f_m	p_m	$F_m = 1$
	$\sum_{i=1}^{m} n_i = N$	$\sum_{i=1}^{m} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{m} p_i = 100$	

(Tableau pour une variable quantitative discrète)

C) Cas d'un caractère quantitatif continu

Dans le cas d'un caractère *quantitatif et continu*, théoriquement les valeurs recueillies sont infinies et très proches l'une de l'autre. Alors, pour simplifier l'étude on consruit des **classe** (intervalles), en divisant l'étendus de la série en plusieurs intervalles.

Etendu

L'étendu d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur dans cette série.

Classe

Dans la pratique, il est très fréquent pour une série statistique (en présence d'un grand nombre de valeurs) de regrouper des valeurs proches les unes des autres. On appelle un tel groupement de données une *catégorie* ou une *classe*.

Pour une classe $[a_i, a_{i+1}[$ ou $]a_i, a_{i+1}]$ on a :

- a_{i+1} et a_i sont les *bornes* ou *limites* de la classe
- le centre de la classe vaut $c_i = \dfrac{a_{i+1} + a_i}{2}$
- l'*amplitude* ou l'*étendue* de la classe vaut $e_i = a_{i+1} - a_i$
- l'effectif de la classe n_i correspond au nombre de valeurs appartenant à cette classe.

Remarque 1.4 *Le nombre de classe* (k) *ne doit pas être trop petit, pere d'information, ni trop grand, le regroupement en classe est alors inutile. Le nombre de classe qu'on peut consruire est donné par la formule* $k = \sqrt{N}$.

Exemple 1.9 *Répartition des employés d'une entreprise selon leur salaire mensuel net*

classes de Salaire	*nombre d'employés*	*amplitude*
[800-900[euros	*25*	*100*
[900-1000[	*30*	*100*
[1000-1100[	*28*	*100*
[1100-1500[	*25*	*400*
1500 ou plus	*10*	*/*
Total	*118*	

(tableau 2)

classes	centre classe	n_i	f_i	FCC F_i
$[a_1, a_2[$	c_1	n_1	f_1	F_1
$[a_i, a_{i+1}[$	c_i	n_i	f_i	$\sum_{k=1}^{i} f_k$
$[a_m, a_{m+1}[$	c_m	n_m	f_m	$F_m = 1$
		$\sum_{i=1}^{m} n_i = N$	$\sum_{i=1}^{m} f_i = 1$	

(Tableau pour une variable quantitative continue)

Représentation graphique

Aux tableau statistique on associe des représentations graphiques qui permettent une compéhension plus globale des données. Selon le besoin, on représente :

✓ Les effectifs et les effectifs cumulés.

✓ Les fréquences relatives et les fréquences relatives cumulées.

Les représentations sont différentes selon le type du caractère.

A) Variable qualitative

les représentations utilisées sont le diagramme à secteurs et le diagramme à bandes verticales ou horizontales.

1) Diagramme circulaire

Appelé aussi *diagramme sectoriel* ou *à secteurs* ou *camembert*.

- Dans ce diagramme l'effectif total n est représenté par un disque plan.
- A chaque modalité on fait correspondre un secteur du disque.

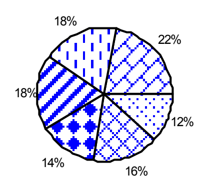
- L'angle au centre et donc la surface, de chaque secteur est proportionnel à l'effectif (n_i) ou à la fréquence (f_i).
- La totalité des 360° correspond à l'effectif total n.
- Si n_i est l'effectif de la modalité i à représenter, il est traduit par un angle α_i tel que : $\alpha_i = \dfrac{360 \times n_i}{n} = 360 \times f_i$

Exemple 1.10 *Une enquête à un temps donné a concerné 250 touristes visitant la ville de Jijel selon leur nationalité. Les résultats sont donnés par le ableau suivant*

Nationalité	*Effectifs (n_i)*	*Fréquence (%)*
Allemande	*55*	*22*
Italienne	*30*	*12*
Française	*40*	*16*
Américaine	*35*	*14*
Belge	*45*	*18*
Autres	*45*	*18*
Totaux	*250*	*100*

(tableau 3)

Diagramme circulaire



2) Diagramme en tuyaux d'orgue

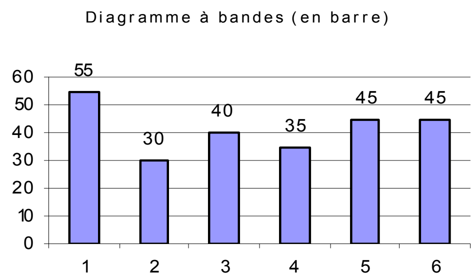
Appelé aussi *diagramme en barre* ou *diagramme à bandes.*

Dans ce diagramme :

- Les modalités sont placées sur une droite horizontale (attention ne pas orienter cette droite car les modalités ne sont pas mesurables et il n y a pas d'ordre entre elles).

- Les effectifs n_i (ou les fréquences f_i) sont placés sur un axe vertical .
- La hauteur du tuyau est proportionnelle à l'effectif n_i (ou la fréquence f_i)

Exemple 1.11 *Dans l'exemple précédent, on a*



B) Variable quantitative

Selon que la variable correspondante au caractère quantitatif est discrète ou continue, la représentation graphique sera différente.

B. 1) Variable discrète

3) Diagramme en bâtons des effectifs

- Les valeurs entières x_i prises par les modalités sont placées sur l'axe des abscisses et les effectifs n_i (ou les fréquences f_i) correspondants sur l'axe des ordonnées. La hauteur du bâton est proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence.
- L'ensemble des bâtons s'appelle un *diagramme en bâtons.*

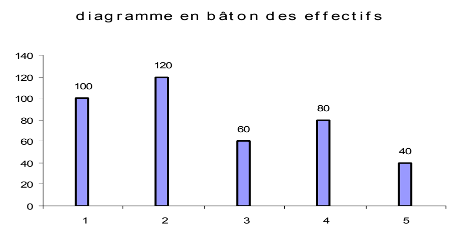
4) Le polygone des effectifs (ou des fréquences)

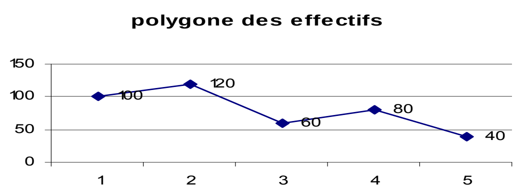
Le *polygone des effectifs* est obtenu en joignant les sommets des bâtons par des segments.

Exemple 1.12 *En vue de promouvoir la qualité de ses services, une agence de voyage a procédé au recensement des hôtels pouvant accueillir sa clientèle dans les grandes villes algériennes à une période donnée. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :*

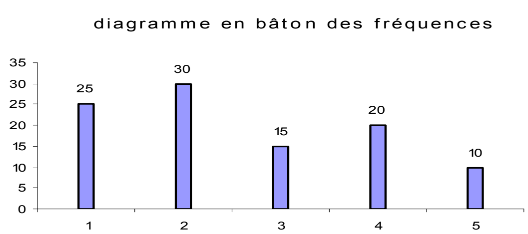
Nombre d'étoiles (Modalités x_i)	*Nombre d'hôtels (Effectifs n_i)*
1	*100*
2	*120*
3	*60*
4	*80*
5	*40*
Total	*400*

(tableau 4)





Remarque 1.5 *On a les mêmes représentations pour les* ***fréquences relatives.***



5) Diagrammes cumulatifs.

✓ On définie la fonction qui associe à chaque valeur $x \in \mathbb{R}$, la somme de tous les $x_i < x$ et qu'on appelle *fonction de distribution des effectifs.*

$$\begin{aligned} F: \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \in [x_i, x_{i+1}[\quad & \mapsto F(x) = F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k \end{aligned} \tag{1.7}$$

c'est-à-dire, une fonction escalier qui est constante dans toute classe de la forme $[x_i, x_{i+1}[$.

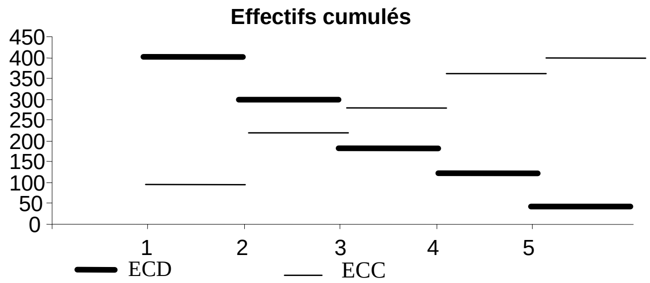
✓ La représentation graphique de cette fonction appelée *polygone des effectifs cumulés (courbe cumulative en escalier).*

Remarque 1.6 *1) Le polygone d'effectifs cumulés décroissants, s'obtient en remplaçant la fonction F par la fonction G définit par $G(x) = N - F(x)$, où N est la taille de la population.*

2) Et pour les fréquences relatives cumulées, nous utilisons les deux fonctions E et $1 - E$ définits par les formules (3) et (4) respectivement.

Reprenons la série statistique précédente et calculons et représentons graphiquement les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.

Nmbr étoile x_i	Nmbr hôtels n_i	% p_i	Effectifs cumulés crois (ECC)	Effectifs cumulés décrois (ECD)
1	100	25	100	400
2	120	30	220	300
3	60	15	280	180
4	80	20	360	120
5	40	10	400	40
Total	400	100	-	-



B. 2) Variable continue

Cas des classes à étendues égales

6) Histogramme

Sur l'axe des abscisses, on représente les bornes des différentes classes et on associe à chaque classe un rectangle, dans la base est une partie de l'axe des abscisses comprise entre les bornes de cette classe et dont la longueur est proportionnelle à n_i ou f_i.

7) Le polygone des fréquences (ou des effectifs)

Cette représentation est obtenue en joignant les milieux des sommets des rectangles par des segments de droite.

Remarque 1.7 *L'aire de touts les rectangles est égale à 1 si on représente les fréquences relatives et n si on représente les effectifs.*

Remarque 1.8 *L'aire comprise entre le polygone des effectifs et l'axe des abscisses est égale à l'aire de l'histogramme.*

Cas des classes à différentes étendues

✓ Si les classes n'ont pas les mêmes amplitudes, il est nécessaire de rectifier la hauteur des rectangles de telle sorte que la surface du rectangle soit proportionnelle à l'effectif (ou fréquence) correspondant.

✓ Pour rectifier la hauteur d'un rectangle on choisit une amplitude unitaire, généralement la plus fréquente.

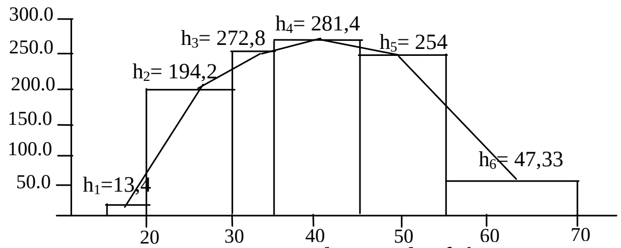
✓ Si une classe est d'amplitude k fois l'amplitude unitaire choisie alors on divise par k l'effectif correspondant à cette classe. Autrement dit, soit e l'amplitude unitaire choisie. Pour une classe i, si son amplitude est $e_i = k.e$, alors l'effectif rectifié correspondant sera la haueur du recangle noté $h_i = \dfrac{n_i}{k}$.

Méthode À chaque classe de valeurs en abscisses, on fait correspondre un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe (ou à la fréquence). En abscisse l'amplitude de la classe, en ordonnée l'effectif (ou la fréquence) par unité d'amplitude. Soit une distribution $\{[a_i; a_{i+1}[, n_i\}$ d'une variable statistique continue, pour chaque classe, l'histogramme associe un rectangle de largeur $e_i = a_{i+1} - a_i$ et de hauteur $h_i = \dfrac{n_i}{e_i}$.

Exemple 1.13 *Emplois féminins par âge*

classes	*étendu* e_i	n_i *(millier)*	$h_i = \dfrac{n_i}{e_i}$
$[15, 20[$	*5*	*67*	*13,4*
$[20, 30[$	*10*	*1942*	*194,2*
$[30, 35[$	*5*	*1364*	*272,8*
$[35, 45[$	*10*	*2814*	*281,4*
$[45, 55[$	*10*	*2540*	*254,0*
$[55, 70[$	*15*	*710*	*47,3*
total	*/*	*9437*	*/*

$$Surface = \textstyle\sum_i (h_i \times e_i) = 9437 = N$$



Histogramme et polygone des fréquences

8) Le polygone des effectifs cumulés croissants

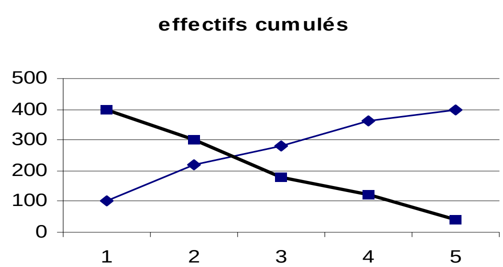
On obtient le polygone des effectifs cumulés croissants en joignant, par des segments droits, les points ayant pour abscisse les bornes supérieurs des classes et pour ordonnés les effectifs cumulés (ou les fréquences relatives cumulées) croissants correspondants à la classe considérée. Le premier point est $(a_0, 0)$.

9) Le polygone des effectifs cumulés décroissants

On obtient le polygone des effectifs cumulés décroissants en joignant, par des segments droits, les points ayant pour abscisse les bornes inférieurs des classes et pour ordonnés les effectifs cumulés (ou les fréquences relatives cumulées) décroissants correspondants à la classe considérée. Le premier point est $(a_m, 0)$.

Exemple 1.14 *Soit la série statistique de poids des nouveaux nés suivante*

Classes	n_i	*pi*	*ECC*	*ECD*
$[2.2, 2.5[$	*5*	*3.11*	*5*	*161*
$[2.5, 2.8[$	*11*	*6.83*	*16*	*156*
$[2.8, 3.1[$	*24*	*14.91*	*40*	*145*
$[3.1, 3.4[$	*40*	*24.84*	*80*	*121*
$[3.4, 3.7[$	*42*	*26.09*	*122*	*81*
$[3.7, 4.0[$	*20*	*12.42*	*142*	*39*
$[4.0, 4.3[$	*13*	*8.07*	*155*	*19*
$[4.3, 6.0[$	*6*	*3.73*	*161*	*6*
total	*161*	*100*	/	/



Chapitre 2

Représentation numérique des données

Une distribution statistique peut être résumé par quelques valeurs appelées paramètres caractéristiques, classées en 3 catégories :

✓ Les caractéristiques à tendance centrale (position).

✓ Les caractéristiques de dispersion.

✓ Les caractéristiques de forme.

2.0.1 A) Les caractéristiques à tendance centrale

1) La moyenne arithmétique

La *moyenne arithmétique* (dite aussi *moment d'ordre un* m_1) d'une série statistique $\{x_i\}_{i=1}^m$ d'effectifs $\{n_i\}_{i=1}^m$ est la valeur réelle notée $\bar{x}$ donnée par la formule

$$m_1 = \bar{x} = \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \sum_{i=1}^{m} f_i x_i \tag{2.1}$$

Si la viriable est continue,les centres de classes $\{c_i\}_{i=1}^m$, remplacent les valeurs $\{x_i\}_{i=1}^m$.

Exemple 2.1 *1) Calculer vorte moyenne semestrielle avec les coefficients modulaires.*

Note	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*	*total*
n_i	*3*	*4*	*4*	*5*	*7*	*13*	*5*	*41*
$n_i.x_i$	*15*	*24*	*28*	*40*	*63*	*130*	*60*	*360*

Réponse : moyenne $= \dfrac{360}{41} = 8.780\,5$

Propriétés

✓ La moyenne ne change pas si on remplace un nombre déterminé de valeurs par leur moyenne multipliée par la somme de leurs effectifs.

✓ La moyenne *conserve* les changements de l'axe et l'origine

$$\begin{aligned} X\left(x_i, n_i\right) &\rightarrow Y\left(y_i = a x_i + b, n_i\right) \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{y} = a\bar{x} + b. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Définition 2.1 *On appelle caractère (ou variable) centré le caractère défini par :* $X = x - \bar{x}$.

▷ On constate alors que, si x prend les valeurs $\{x_i\}_{i=1}^{m}$, X prend les valeurs $\{X_i\}_{i=1}^{m}$ telles que : $X_i = x_i - \bar{x}$. Donc $\bar{X} = 0$.

Théorème 2.1 *La somme des valeurs des différences d'une variable discrète à sa moyenne arithmétique est nulle.*

Lemme 2.1 *Le polynôme du second degré*

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma, \quad \alpha > 0 \\ &= \alpha\left(x + \tfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\gamma - \tfrac{\beta^2}{\alpha}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

prend une valeur ***minimum*** *égale à :* $\gamma - \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ *quand* $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Théorème 2.2 *La somme des carrés des différences d'un nombre x aux valeurs prises par un caractère discret, est* ***minimum*** *quand x est égal à la moyenne arithmétique de la série. C'es-à-dire $\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_i - x\right)^2$ est minimale si et seulement si $x = \bar{x}$.*

Preuve: Considérons la foncion de x

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - x)^2,$$

son terme de degré 2 est

$$\alpha x^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i . x^2 = N . x^2 > 0, \quad i.e. \quad \alpha = N$$

alors la foncion ϕ passe par un minimum pour $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Or

$$n_i (x_i - x)^2 = n_i . x^2 - 2 n_i . x_i . x + n_i . x_i^2,$$

d'où

$$2\beta x = -2x \sum_{i=1}^{m} n_i . x_i = -2N . \bar{x} . x$$

soit $-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{N.\bar{x}}{N} = \bar{x}$. ■

Remarque 2.1 *$x = \bar{x}$ rend donc minimum les deux sommes*

$$\left| \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - x) \right| \quad et \quad \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - x)^2,$$

puisque la première, prise en valeur absolue, s'annule alors. Par contre, la somme des écarts $\sum_{i=1}^{m} n_i . |x_i - x|$ est minimum pour $x = Me$.

2) La moyenne géométrique

Définition 2.2 *La moyenne géométrique notée G d'un ensemble de nombres est la racine $n^{ième}$ de leurs produit, i.e.*

$$G(x) = \sqrt[N]{x_1^{n_1} . x_2^{n_2} ... x_m^{n_m}} = x_1^{f_1} . x_2^{f_2} ... x_m^{f_m} \tag{2.4}$$

dans le cas où la variable est continue, on travail avec les centres des classes.

Exemple 2.2 $\{1, 2, 4, 32\}$.

Réponse : $G = \sqrt[4]{1 * 2 * 4 * 32} = 4.0$

Exemple 2.3 *Soit la série* $\{(x_1, 1), (x_2, 1)\}$, *alors* $G = \sqrt[2]{x_1^1 * x_2^1} = \sqrt{x_1 x_2}$

Remarque 2.2 *Lorsqu'on utilise le Logarithme, la moyenne géométrique devient* $\ln G(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i . \ln(x_i)$.

3) La médiane (Me)

Définition 2.3 *La médiane st la valeur qui partage la population en deux parties d'effectifs égaux, c'est la valeur de x qui coincide avec la moitié de l'échantillon.*

i) pour une variable discrète

Soit $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ une disrtibution statistique (série ordonnée).

- Si N est impaire, $i.\ e.$ $N = 2p + 1$, alors la médiane est la valeur $Me = x_{p+1}$.
- Si N est paire, $i.\ e.$ $N = 2p$, alors la médiane est donnée par $Me = \dfrac{x_p + x_{p+1}}{2}$.

Exemple 2.4 *1)* $\Omega = \{3, 6, 9, 10, 13, 13, 17\}$

2) $\Omega = \{11, 11, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 7, 19\}$.

ii) variable continue

- La lecture du tableau nous permet de déterminer la classe **médiane** (qui contient la médiane) à partir de laquelle la moitié d'effectifs est atteinte. La valeur exacte de la médiane est calculée en utilisant l'interpolation linéaire. Si $[x_k, x_{k+1}[$ est la classe médiane, alors

$$tg\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j - \sum_{j=1}^{k-1} n_j}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\frac{N}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} n_j}{Me - x_k} \tag{2.5}$$

donc

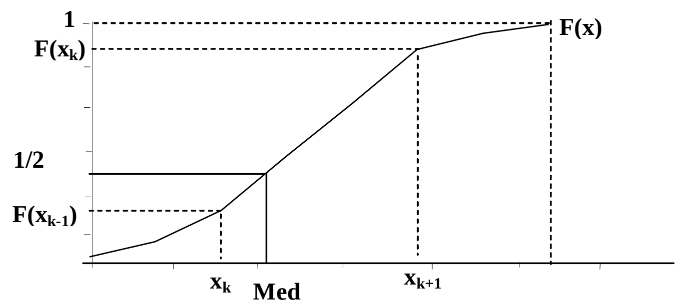
$$\begin{aligned} Me &= x_k + \frac{\frac{N}{2} - E_{k-1}}{E_k - E_{k-1}} (x_{k+1} - x_k) \\ &= x_k + \frac{\frac{N}{2} - E_{k-1}}{n_k} (x_{k+1} - x_k) \end{aligned} \tag{2.6}$$

- Nous définissons cette fois la médiane à partir des fréquences cumulées. Donc la valeur médiane est la solution de l'equation $F(Me) = \frac{1}{2}$, qui a une solution unique telle que

$$F(x_k) = F_k \leq \tfrac{1}{2} < F(x_{k+1}) = F_{k+1}$$

(si $F(x_k) = F_k = \frac{1}{2}$, alors $x_k = Me$).

- On détermine alors Me par interpolation linéaire.



$$\frac{Me - x_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\frac{1}{2} - F(x_{k-1})}{F(x_k) - F(x_{k-1})} \tag{2.7}$$

c'est-à-dire

$$Me = x_k + \frac{e_k}{f_k}\left[\frac{1}{2} - F(x_{k-1})\right] \tag{2.8}$$

Exercise 1 *Démontrer à l'aide de la méthode précédene, que la médiane peut se formuler aussi sous les deux formes suivantes*

$$Me = x_{k+1} + \frac{E_k - \frac{N}{2}}{n_k}(x_{k+1} - x_k) \tag{2.9}$$

$$Me = x_{k+1} + \frac{(x_{k+1} - x_k)}{f_k}\left[F(x_k) - \tfrac{1}{2}\right] \tag{2.10}$$

Remarque 2.3 *Géométriquement, 1) Le point d'intersection de (ECC) et (ECD) est la médiane. 2) Le point d'intersection de (ECC) ou (ECD) avec la droite d'equation $y = \frac{N}{2}$ est la médiane.*

4) Le mode (Mod)

Définition 2.4 *Est la valeur de la variable d'effectif maximum.*

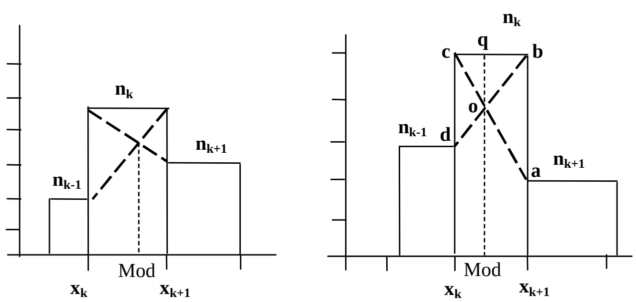
ii) pour une Variable continue

On utilise une méthode algébrique pour déterminer la valeur du mode.

Théorème 2.3 *Soit* $[x_k, x_{k+1}[$ *la classe modale, alors le mode est donné par la formule*

$$Mod = x_k + \left[\frac{n_k - n_{k-1}}{(n_k - n_{k+1}) + (n_k - n_{k-1})}\right](x_{k+1} - x_k). \tag{2.11}$$

Preuve: Utilisons le théorème de Thalès.



Les triangles qco et bca sont en situation de Thalès, il en est de même des triangles abo et cod. Ainsi

$$\frac{qc}{bc} = \frac{co}{ac} = \frac{qo}{ab} \tag{2.12}$$
$$\frac{ao}{co} = \frac{bo}{od} = \frac{ab}{cd} \tag{2.13}$$

Soit en utilisant

$$\begin{cases} qc = Mod - x_k & , \quad bc = x_{k+1} - x_k \\ ab = n_k - n_{k+1} & , \quad cd = n_k - n_{k-1} \end{cases} \tag{2.14}$$

remplaçons $ao = ac - co$ dans (25), on obient

$$\frac{ac - co}{co} = \frac{ac}{co} - 1 = \frac{bo}{od} = \frac{ab}{cd} = \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k - n_{k-1}} \tag{2.15}$$

utilisons ensuite (27) et (24) pour avoir que

$$\frac{n_k - n_{k+1}}{n_k - n_{k-1}} = \frac{ac}{co} - 1 = \frac{bc}{qc} - 1 = \frac{x_{k+1} - x_k}{Mod - x_k} - 1$$

on utilisons la première et la dernière fraction, on obient

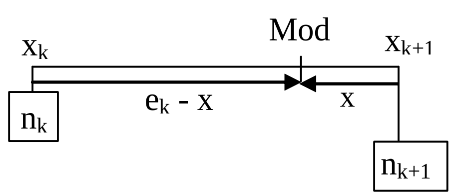
$$Mod = x_k + \left[\frac{n_k - n_{k-1}}{(n_k - n_{k+1}) + (n_k - n_{k-1})}\right](x_{k+1} - x_k) \tag{2.16}$$

■

Exercise 2 *Vérifier qu'on peut écrire aussi le mode sous la forme suivante*

$$Mod = x_{k+1} - \left[\frac{n_k - n_{k+1}}{(n_k - n_{k+1}) + (n_k - n_{k-1})}\right](x_{k+1} - x_k). \tag{2.17}$$

Remarque 2.4 *On peut supposer que le mode est le barycentre du système* $\{n_k, n_{k+1}\}$



$$n_{k+1}.x = n_k.(e_k - x) \Rightarrow x = \left(\frac{n_k}{n_k + n_{k+1}}\right)e_k,$$

alors le mode est

$$Mod = x_{k+1} - x = x_k + (e_k - x). \tag{2.18}$$

5) La moyenne harmonique (H)

Si aucun des x_i n'est nul, la moyenne harmonique est donnée par

$$\frac{1}{H(x)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{m}\frac{f_i}{x_i} \tag{2.19}$$

Le calcul d'une moyenne harmonique sera intéressant chaque fois que l'on peut donner un sens aux membres inverses des valeurs de la variable statistique (coût moyen, vitesse moyenne

...)

6) La moyenne quadratique (Q)

Utilisée généralement pour les variables statistiques qui ont des valeurs toutes positives

$$Q(x)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i.(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} f_i.(x_i)^2 \tag{2.20}$$

Exercise 3 *Comparer les trois moyennes $H(x), G(x), \overline{x}$ dans la série statistique $\{(x_1,1),(x_2,1)\}$*

2.0.2 B) Les paramètres de dispersion

Dans une distribution statistique, on remarque toujours qu'il y a une valeurs de concenration c'est ce qu'on appelle les paramètres de positions. D'autre part, on trouve quelques valeurs plus au moins *dispersées* par rapport à cette valeur centrale.

Exemple 2.5 *Comparer les salaires mensuels de deux ensembles d'employés en Dinar*

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{1500, 1800, 2000, 2300, 2400\}\\ \Omega_2 &= \{1000, 1100, 2000, 2600, 3300\}.\end{aligned}$$

La moyenne arithmétique des deux ensembles est 2000, cependant, l'étendue de la première est 900 et de la deuxième est 2300.

Cette phénomène est mis en évidence par le calcul des nombres appelés caractéristiques de dispersion.

1 L'étendue

Définition 2.5 *L'étendue d'une distribution statistique est la valeur donnée par $e = x_{\max} - x_{\min}$. C'est la longueur du phénomaine étudiée.*

Dans le cas d'une variable continue, les valeurs $x_{\max}$ et $x_{\min}$ sont respectivement les centres de la dernière et la première classe.

2) L'écart-moyen

Définition 2.6 *Est la moyenne de l'écart (un écart est une différence prise en valeur absolue) des valeurs de la variable statistique à une moyenne centrale (la moyenne arithmétique, la médiane ou le mode).*

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i.\left|\bar{x} - x_i\right| \tag{2.21}$$

Dans le cas d'une variable continue, les x_i seront remplacées par les centres des classes c_i.

3) La variance et écart-type

Définition 2.7 *On appelle variance, la moyenne arithmétique du carré de l'écart à la moyenne, soit*

$$Var\left(x\right) = E\left(x - \bar{x}\right)^2 \tag{2.22}$$

c'est-à-dire

$$Var\left(x\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i.\left(\bar{x} - x_i\right)^2 \tag{2.23}$$

Sa racine carrée positive est *l'écart-type* ou *fluctuation*

$$\sigma\left(x\right) = \sqrt{Var\left(x\right)} \tag{2.24}$$

Notation 2.1 *On note habituellement les moments et les moments centrés d'ordre r respectivement par*

$$m_r = \sum_{i=1}^{m} f_i.\left(x_i\right)^r \quad et \quad m_{cr} = \sum_{i=1}^{m} f_i.\left(x_i - \bar{x}\right)^r \tag{2.25}$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.4 *(théorème de Kœnig)*

$$Var\left(x\right) = m_2 - \left(m_1\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} f_i.\left(x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} f_i.x_i\right)^2 \tag{2.26}$$

Preuve: Développant les termes du type $(x_i - \bar{x})^2$, on trouve

$$Var\,(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i.\,(x_i)^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{m} f_i.x_i + (\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{m} f_i,$$

or

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} f_i.x_i = \bar{x}.$$

Alors

$$Var\,(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i.\,(x_i)^2 - 2\,(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2\,.$$

■

Remarque 2.5 *La variance est encore le moment d'ordre deux de la variable centrée $X = x - \bar{x}$*

$$Var\,(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i.\,(X_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} f_i.\,(\bar{x} - x_i)^2$$

et l'écart-type est la moyenne quadratique de cette même variable $\sigma\,(x) = Q\,(X)\,.$

Propriété

1. La variance est toujours positive ou nulle.
2. Changement d'échelle et d'origine

$$\begin{aligned} X\,(x_i, n_i) &\to Y\,(y_i = ax_i + b, n_i) \\ Var\,(x) &\longmapsto Var\,(y) = a^2 V\,(x)\,, \\ \sigma\,(x) &\longmapsto |a|\,\sigma\,(y)\,. \end{aligned} \tag{2.27}$$

3. Si la variance tend vers0, alors les données, sont dit centrées, réciproquement, si la variance agrandit, alors les données sont dit dispersées.

11) Intervalle interquartile

La connaissance d'un élément de position tel que la moyenne $\bar{x}$ est insuffisante, puisque l'on ne sait pas si la distribution est très concentrée autours de cette valeur ou non.

L'étendue est un paramètre de dispersion simple, mais elle est trop sensible à des valeurs aberrantes. Aussi lui substitue-t-on souvent l'*intervalle interquartile :* $i = q_3 - q_1$ qui donne l'étendue de la moitié centrale des observations.

✓ q_1 est la médiane de la série statistique obtenue en restreignant la population aux membres tels que la valeur x du caracère soit inférieure à la médiane (et en doublant naturellement la fréquence), (c'es-à-dire 25% des valeurs sont inférieur ou égale à q_1).

✓ q_3 est de même ma médiane de la série obtenue en prenant la population complémentaire, (c'est-à-dire, 75% des valeurs son inférieur ou égal à q_3). La deuxième quartile est la médiane. On a donc

$$F(q_1) = \tfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad F(q_3) = \tfrac{3}{4}.$$

✓ Les quartilles q_1, $q_2 = Me$ et q_3 divisent la courbe des fréquences en quatres surfaces d'aires égales. L'intervalle interquartile contient la moitié de la population.

✓ On pourrait définir les *déciles* $d_1, ..., d_9$ tels que $F(d_1) = \frac{1}{10}$, $F(d_2) = \frac{2}{10}$, etc., les *centiles* (ou *percentiles*), etc., et les intervalle correspondants.

✓ Dans le cas où la variable est continue, on utilise la même méthode pour déterminer la médiane et la classe médiane, on trouve

$$q_1 = x_k + \frac{\frac{N}{4} - E_{k-1}}{n_k}(x_{k+1} - x_k) \quad (2.28)$$

$$q_3 = x_k + \frac{\frac{3N}{4} - E_{k-1}}{n_k}(x_{k+1} - x_k) \quad (2.29)$$

✓ Le rapport $\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$ s'appelle *coefficient de variation.* S'il est faible, la distribution est concentrée autour de la moyenne (dans le cas où les valeurs sont grandes et positives). Si ce coefficient est grand, la forme de la courbe des fréquences est en général aplatie (étroite).

Remarque 2.6 *Q_1, $Q_2 = Med$ et Q_3 sont donnés dans le cas discret par :*

1. $n = 4p$: $Q_1 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$, $Q_2 = \frac{x_{2p} + x_{2p+1}}{2}$, $Q_3 = \frac{x_{3p} + x_{3p+1}}{2}$
2. $n = 4p + 1$: $Q_1 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$, $Q_2 = x_{2p+1}$, $Q_3 = \frac{x_{3p+1} + x_{3p+2}}{2}$
3. $n = 4p + 2$: $Q_1 = x_{p+1}$, $Q_2 = \frac{x_{2p+1} + x_{2p+2}}{2}$, $Q_3 = x_{3p+2}$
4. $n = 4p + 3$: $Q_1 = x_{p+1}$, $Q_2 = x_{2p+2}$, $Q_3 = x_{3p+3}.$

C) Coefficient de variation

Définition 2.8 *le coéfficient de variation est donné par*

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

**L'écart-type seul ne permet le plus souvent pas de juger de la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Si par exemple une distribution a une moyenne de 10 et un écart-type de 1 (CV de 10 %), elle sera beaucoup plus dispersée qu'une distribution de moyenne 1000 et d'écart-type 10 (CV de 1 %).*

**Ce nombre est sans unité, c'est une des raisons pour lesquelles il est parfois préféré à l'écart type qui lui ne l'est pas. En effet, pour comparer deux séries de données d'unités différentes, l'utilisation du coefficient de variation est plus judicieuse.*

**Quand la moyenne est proche de zéro, le coefficient de variation va tendre vers l'infini et sera par conséquent très sensible aux légères variations de la moyenne.*

**Contrairement à l'écart type, le coefficient de variation ne peut être utilisé directement pour construire un intervalle de confiance autour de la moyenne.*

Chapitre 3

Calcul des probabilités

3.1 Analyse combinatoire

Principef ondamentalde dénombrement : Soit une expérience aléatoire E composée de rexpériences successives, la première pouvant produire un résultat quelconque parmi $n_1$résultats possibles, la deuxième produisant un résultat quelconque parmi n_2 résultats possibles,....., la $r$ième pouvant produire un résultat quelconque parmi n_r résultats possibles. Le nombre total de résultats possibles pour l'expérience aléatoire E est le produit de $n_1 \times .n_2 \times ... \times n_r = \prod_{i=1}^{r} n_i$

Exemple 3.1 *Calculer le nombre de téléphone possible, peut-on construire, dont l'indicatif est 037 (Tébessa-Guelma-Souk-Ahras)*

Réponse : on a six cases, chacune à la possibilité de voir 10 chiffres, donc $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$

3.1.1 Arrangements sans répetition

Définition 3.1 *Arrangement sans répétition :On appelle arrangement sans répétition de p éléments pris parmi les néléments de E, toute disposition ordonnée de p éléments de E*

Exemple 3.2 *Les arrangements à 2 éléments de l'ensemble (1,2 ,3) sont (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)*

Proposition 3.1 *le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :* $A_n^p = n(n-1)(n-2)...............(n-p+1)$

Preuve: Il y a n façons de choisir le premier élément de l'arrangement parmi les n éléments de

l'ensemble. Pour le deuxième élément de l'arrangement il y a $(n-1)$ façons de le choisir, puisqu'il ne doit pas y avoir répétition d'un élément. En itérant on vérifie qu'il y a $(n-p+1)$façons de choisir le

$p-$ ième élément de l'arrangement. Au total, le nombre d'arrangements d'après le principe de dénombrement est donc $n(n-1)............(n-p+1)$ ■

Exercise 4 *Montrer que* $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

3.1.2 Arrangements avec répetition

Par le meme principe, mais les p positions ont n possibilité de les remplis, est donc $\underbrace{n \times n \times n... \times n}$ -p fois

Définition 3.2 *Lorsqu'un élément peut être choisi plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de péléments pris parmi n, est alors :* $\underbrace{n \times n \times n... \times n} = n^p$ *pavec* $1 \leq p \leq n$

3.1.3 Permutations

Définition 3.3 *n appelle permutation des n éléments de l'ensemble E toute disposition ordonnéesde ces n éléments. Le nombre de permutations de n élémentsest noté* P_n *Les permutations de n éléments constituent un cas particulier des arrangements sans répétition : c'est le cas où* $p = n$*.Ainsi le nombre de permutation de n élément est :*$P_n = A_n^n = n!(n-n)! = n!$

Définition 3.4 *Permutations avec répétition : Dans le cas où il existerait plusieurs répétitions k d'un même élément parmi les n éléments, le nombre de permutations possibles des n éléments doit être rapporté aux nombres de permutations des k éléments identiques. Le nombre de permutations de n éléments est alors :$P_n = \frac{n!}{k!}$, En effet, les permutations de k éléments identiques sont toutes identiques et ne comptent que pour une seule permutation.*

3.1.4 Combinaisons

Définition 3.5 *On appelle combinaison de p éléments pris parmi les n éléments d'un ensemble E toute disposition non ordonnée de p éléments de E*

Exemple 3.3 *Les combinaisons à deuxéléments de l'ensemble* $1, 2, 3$ *sont :* $(1, 2); (1, 3); (2, 3)$*.*

Proposition 3.2 *Le nombre de combinaisons de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :* $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

3.2 Espace probabilisable

3.2.1 Probabilités sur un ensemble fini.

Définition 3.6 *Univers et évènements : l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire finie est dénommé "univers (des possibles)", noté traditionnellement Ω, et ses parties s'appellent des "évènements".*

Les évènements sont en général définis à partir de la propriété qui les caractérise, avec la notation :

$$\{P\} = \{\omega \in \Omega \;/\; \omega \text{ a la propriété } P\}$$

Par exemple, si l'expérience aléatoire consiste en un lancer de deux dés, alors

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2.2),...,(6,1),...,(6,6)\},\ card\Omega = 6\times 6 = 36\\ A &= \{\text{total des points} = 7\} = \{(1.6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},\ cardA = 6\end{aligned}$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}\{P \text{ ou } Q\} &= \{P\}\cup\{Q\}\\ \{P \text{ et } Q\} &= \{P\}\cap\{Q\}\\ P \text{ implique } Q &\Leftrightarrow \{P\}\subset\{Q\}\end{aligned}$$

Remarque 3.1 *: mathématiquement, l'évènement, qui est un ensemble, est différent de la propriété qui le détermine, mais, en probabilités, on fait souvent la confusion ; on dira par exemple : "l'évènement A est réalisé" alors que l'on ne réalise pas un ensemble, mais une propriété !*

Vocabulaire :

Les singletons de Ω sont les évènements *élémentaires.*

$\varnothing$ l'évènement *impossible.*

Ω l'évènement *certain* .

le *contraire* d'un évènement est son complémentaire d'un point de vue ensembliste.

deux évènements sont dits *incompatibles* si leur intersection est vide.

Probabilités

Définition 3.7 *une probabilité P sur un univers fini Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :*

$$\begin{aligned}P(\Omega) &= 1\\ \text{Si } A \textit{ et } B \textit{ sont des évènements incompatibles, } P(A\cup B) &= P(A)+P(B)\end{aligned}$$

Proposition 3.3 *premières propriétés :*

$$\begin{aligned}
P_1 &: \quad P(\varnothing) = 0 \\
P_2 &: \quad P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \\
P_3 &: \quad A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B) \\
P_4 &: \quad P(A) \leqslant 1 \\
P_5 &: \quad P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \ \text{ : \textit{formule de Poincaré}} \\
P_6 &: \quad \textit{si } (A_i)_{i \in I} \textit{ est une famille finie d'évènements deux à deux incompatibles} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \qquad (3.2)$$

Remarque 3.2 *la probabilité d'un événement A doit être vue comme la limite de la fréquence du cas où A est réalisé lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. Une probabilité de 0,6 signifie que si on répète par exemple 100 fois l'expérience, il y aura environ 60 cas où A est réalisé, et 40 où il ne l'est pas.*

"$P(A) = 0,6$" sera donc souvent énoncé sous la forme : il y a 60% de chances que A soit réalisé.

Autre façon de dire la même chose : si on répète l'expérience, le fait qu'un évènement ait une probabilité p signifie que l'évènement arrivera en moyenne tous les $1/p$ coups (par exemple : tous les 25 coups pour une proba de 0,04). L'inverse de la probabilité est la périodicité en moyenne de l'évènement.

Remarque 3.3 *on connaît entièrement une probabilité si on la connaît sur les évènements élémentaires.*

En effet

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

Toute probabilité peut donc être définie par la donnée d'une application p de Ω dans $\mathbb{R}_+$ en posant

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

à condition que p vérifie la condition de normalisation

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Exemple 3.4 *si dans un questionnaire les réponses sont "oui" à 60%, "non" à 30% et "ne sait pas" à 10%, on prendra* $\Omega = \{oui,\ non,\ ne\ sait\ pas\}$, $p(oui) = 0,6$; $p(non) = 0,3$; $p(ne\ sait\ pas) = 0,1$ *; alors,* $P(\{oui, non\}) = 0,6 + 0,3 = 0,9$ *etc...*

Remarque 3.4 *il est possible qu'un événement non vide soit de probabilité nulle (cela arrive plus souvent dans le cas de probabilités sur des univers infini). Un tel évènement est dit "presque (ou quasi-) impossible" ou "négligeable" ; de même, un évènement de probabilité 1 est dit "presque certain" ; et si* $P(A \cap B) = 0$, A *et* B *sont dits "presque incompatibles".*

Définition 3.8 *l'équiprobabilité (ou probabilité uniforme) est l'unique probabilité où tous les évènements élémentaires ont même probabilité.Cette probabilité est définie par :*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables (à l'évènement } A\text{)}}{\text{nombre de cas total}}$$

Remarque 3.5 *on reconnaît l'équiprobabilité lorsque dans l'énoncé on trouve l'expression "au hasard", ou "dés non pipés" etc...*

Définition 3.9 *un système (presque) complet d'évènements est une liste* $(A_i)_{i=1..n}$ *d'évènements deux à deux (presque) incompatibles dont la réunion est (presque) certaine.*

Exemple 3.5 $(A, \overline{A})$.

L'intéret de cette notion vient de ce que si $(A_i)_{i=1..n}$ est une telle famille, alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

(formule de filtration ou "du coupe-patate")

3.2.2 Espace probabilisé

Définition 3.10 *On appelle probabilité sur* (Ω, A) *l'application* $P : \underset{A \in \mathbb{A} \mapsto P(A)}{\mathbb{A} \to [0,1]}$ *satisfaisant :*

$P(\Omega) = 1$

$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, *pour toutes suites d'évenements duex à deux incompatible.*

Définition 3.11 *Le tripllet* (Ω, A, P), *s'appel espace de probabilité.*

Proposition 3.4 *Suite aux définitions précédentes, on a*

1-$P(\varnothing) = 0$

2-$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3-$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.3 Probabilités conditionnelles

Définition 3.12 *si* A *et* B *sont deux évènements,* B *de probabilité non nulle , on pose*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B)$ *est lu "probabilité que* A *soit réalisé, sachant que* B *l'est", ou, en simplifié "*P *de* A *sachant* B*".*

Remarque 3.6 *l'idée est rapporter la probabilité de* $A \cap B$ *à celle de* B *de sorte que* $P(B|B) = 1$.

Remarque 3.7 *on a donc, si* A *et* B *sont de proba non nulle (petite formule des probabilités composées)*

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

ainsi que (petite formule de Bayes)

$$P(A|B) = P(B|A)\,\frac{P(A)}{P(B)}$$

Remarque 3.8 *on a évidemment :* A *et* B *sont presque incompatibles ssi* $P(A|B) = 0$, *ssi* $P(B|A) = 0$.

3.3.1 la formule des probabilités composées

Définition 3.13 *si* $A_1, A_2, ..., A_n$ *sont* n *évènements d'intersection de probabilité non nulle, on a la formule dite "des probabilités composées" :*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 \cap A_2)\,...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

3.3.2 la formule des probabilités composées

Proposition 3.5 *si* $(A_i)_{i=1..n}$ *est un système quasi-complet d'évènements, et* B *un évènement donné, alors*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i) \ \ \textit{(formule des probabilités totales)}$$

avec la convention que si $P(A_i)$ *est nul, alors* $P(B|A_i)P(A_i)$ *est nul.*

si $P(B) > 0, P(A_j|B) = \dfrac{P(B|A_j)P(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$ *(grande formule de Bayes, ou formule de la probabilté des cause*

3.3.3 Évènements indépendants.

Définition 3.14 *si* A *et* B *sont deux évènements de probabilité non nulle alors*

$$P(A|B) = P(A) \text{ équivaut à } P(B|A) = P(B)$$

ces deux conditions étant équivalentes à $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ *.On dit que dans ce cas, les événements sont indépendants (et cette définition est étendue aux cas où* $P(A)$ *ou* $P(B)$ *est nul).*

Proposition 3.6 *si* A *et* B *sont indépendants,* A *et* $\overline{B}$ *également, donc aussi* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$*.*

Bibliographie

[1] O..Deheuvels (1996) La probabilite, le hasard et la certitude, Presses Universitaires de France,

[2] E.Dion (1997) Invitation à la theorie de l'information, Edition du Seuil, Collection Point Sciences.

[3] R.O.Duda & P.E.Hart (1973) Pattern Classification and Scene Analysis, John Wiley & Sons, New York.

[4] D. Ghorbanzadeh (1998) Probabilités : Exercices corriges, Editions Technip.

[5] C.Goujet & C.Nicolas (1981) Mathématiques Appliquées : probabilités, initiation 'a la recherche operationnelle, Masson.

[6] J.J.Schwarz (1980) Statistique : rappels de cours et exemples, Polycopié de cours, Département Informatique, INSA Lyon.

[7] J.P.Reau & G.Chauvat, Probabilités et statistiques. Excercices et corrigés, Armand Colin, Collection cursus TD, série économie, 1996.

[8] G.Saporta (1990) Probabilit´es, Analyse des donn´ees et statistique, Edition Technip.

[9] D.Schwartz (1984) Méthodes statistiques à l'usage des médecins et des biologistes, Flammarion,Médecine-Sciences, Collection Statistique en biologie et médecine.

[10] J.J.Schwarz (1980) Combinatoire et Probabilités, Polycopié de cours, Département Informatique,INSA Lyon.

[11] ALBARELLO, Luc, Jean-Luc GUYOT et Etienne BOURGEOIS (2002), Statistique descriptive, De Boeck.

[12] AVENEL, Jean-David (1999), Statistique descriptive : Cours et exercices corrigés, Dunod.

[13] BOURSIN, Jean-Louis (2000), La statistique pour l'économie et la gestion : QCM, EJA/Gualino.

[14] DAGNELIE, Pierre (1998), Statistique théorique et appliquée. Statistique descriptive et bases de l'inférence statistique, tome 1 , De Boeck.

[15] DELMAS, Bernard (2005), Statistique descriptive, Armand Colin, Fac économie.

[16] DUTHIL, Gérard (1998), Initiation à la statistique descriptive , Ellipse Marketing.

[17] GRAIS, Bernard (2003), Statistique descriptive : Techniques statistiques , Dunod.

[18] LETHIELLEUX, Maurice (2003), Statistique descriptive, éditions Dunod, Collection "Express".

[19] PILLER, Alain (2004), Statistique descriptive : Manuel d'exercices corrigés avec rappels de cours, éditions Premium.

[20] PY, Bernard (2007), Statistique descriptive : nouvelle méthode pour comprendre et bien réussir 5ème édition, Economica