



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
UNIVERSITE LARBI TEBESSI DE TÉBESSA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



DOMAINE DE FORMATION : SCIENCES ET TECHNOLOGIES (ST)

*Polycopié de Cours*

## **Construction Mécanique 2**

Matière : **Construction Mécanique 2**  
Spécialité : **Construction Mécanique**  
Niveau : **Licence (L3)**

Réalisé par : **BELGHALEM HADJ**

Année Universitaire : **2022**

## Table de Matières

Introduction.....	6
<b>Chapitre 1 : Les Engrenages</b>	
1. Généralités	
<b>1.1. Les Trains d'engrenages .....</b>	<b>7</b>
1.1.1 Avantages et désavantages des engrenages .....	8
1.1.2 Dents développantes.....	8
1.1.3 Fabrication des engrenages .....	9
<b>1.2 Les engrenages droits à dentures droites</b>	
1.2.1 Systèmes d'engrenages cylindriques à denture droite .....	10
1.2.2 Caractérisation des engrenages cylindriques à denture droite .....	11
1.2.3 Principales dimensions .....	12
1.2.4 Rapport de transmission d'un train d'engrenage .....	13
1.2.5 Cas des trains simples à deux engrenages .....	14
1.2.5.1 Cas général : trains à n engrenages.....	14
1.2.5.2 Transmission de puissance à travers un train d'engrenage.....	15
1.2.5.2.1 Puissance d'entrée et de sortie d'une chaîne cinématique .....	15
1.2.5.2.2 Rendement d'un engrenage .....	15
1.2.5.2.3 Relation entre la puissance d'entrée et la puissance de sortie .....	16
1.2.5.2.4 Relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie .....	16
1.2.6 Calcul de dentures .....	16
1.2.6.1 Calcul de la résistance .....	16
1.2.6.2 Dimensions normalisées .....	17
1.2.7 Efforts sur les dentures.....	18
1.2.8 Matériaux utilisés .....	19
1.2.9 Calcul de la pression superficielle.....	19
1.2.10 Applications.....	19
<b>1.3 Les Engrenages Cylindriques à dentures Hélicoïdales (E.C.D.H)</b>	
1.3.1 Introduction .....	28
1.3.2 Caractérisation des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale.....	28
1.3.3 Définitions .....	29
1.3.4 Dimensions .....	29
1.3.5 Calcul du module.....	30
1.3.6 Caractéristiques des engrenages à dentures hélicoïdales .....	30
1.3.7 Efforts appliqués sur la dent .....	31

1.3.8 Conséquences de l'inclinaison de la denture .....	31
1.3.9 Compensation de l'effort axial dans les réducteurs à engrenages hélicoïdaux .....	32
1.3.10 Applications .....	33
<b>1.4 Les Engrenages Coniques (E.C.)</b>	
1.4.1 Introduction .....	38
1.4.2 Avantages et inconvénients des roues coniques .....	38
1.4.3 Définitions.....	39
1.4.4 Rapport de transmission.....	40
1.4.4.1 Principe .....	40
1.4.5 Module Moyen .....	42
1.4.6 Caractéristiques des engrenages à dentures coniques .....	43
1.4.7 Efforts sur la denture .....	43
1.4.8 Applications .....	44
<b>1.5 Les Engrenages à Roues et Vis sans Fin</b>	
1.5.1 Introduction.....	50
1.5.2 Présentation .....	51
1.5.2.1 Les avantages .....	51
1.5.2.2 Les inconvénients .....	52
1.5.3. Principales applications .....	53
1.5.4. Caractéristiques dimensionnelles .....	53
1.5.5. Relations dimensionnelles .....	55
1.5.6. Caractérisation d'un engrenage gauche .....	55
1.5.7. Réversibilité et irréversibilité .....	57
1.5.8. Effort sur les dents et les filets .....	58
1.5.9. Rendement des engrenages roue et vis sans fin .....	59
1.5.10 Applications .....	60
<b>Chapitre 2 : Arbres et Axes</b>	
2.1 Introduction .....	63
2.2 La différence entre les axes et les arbres .....	63
2.3 Modes et causes de rupture des axes et des arbres .....	64
2.4 Calcul de la résistance .....	64
2.4.1 préliminaire .....	64
2.5. Applications .....	66

**Chapitre 3 : Transmission de Mouvement**

3.1 Introduction .....	71
<b>3.2 Transmission de puissance par courroie .....</b>	<b>72</b>
3.2.1 Introduction .....	72
3.2.2 Courroie .....	73
3.2.2.1 Principales familles de courroies .....	74
3.2.2.3 Matériaux des courroies .....	74
3.2.3 Poulies .....	75
3.2.3.1 Principe d'une transmission par poulie courroie.....	75
3.2.3.2 Cas d'arbres perpendiculaires .....	76
3.2.4 Définition : rotation et hypothèses .....	76
3.2.4.1 Rapport de réduction .....	77
3.2.5 Calcul des transmissions par courroies plates .....	77
3.2.5.1 La longueur de la courroie (L) à brins non croisés .....	77
3.2.5.2 La longueur de la courroie (L) à brins croisés .....	79
3.2.6 Relation entre les tensions dans les brins rectilignes.....	80
3.2.6.1 Tension d'un flexible embrassant un cylindre .....	80
3.2.6.1.1 La tension dans la courroie .....	81
3.2.7 Tensions dans les brins de la courroie .....	82
3.2.7.1 Paramétrage .....	82
3.2.7.2 Equation issue de l'expression de la puissance à transmettre .....	82
3.2.7.3 Equation issue de l'étude de l'équilibre dynamique d'un élément de courroie .....	83
3.2.7.3.1 Étude dynamique (Effet de la force centrifuge) .....	83
a) Hypothèse	
b) Hypothèse d'une courroie simplificatrice	
3.2.8 Tension initiale d'une courroie.....	84
3.2.9 Puissance transmissible .....	84
3.2.10Facteur de service $K_s$ . .....	85
3.2.11Applications .....	86
<b>3.3 Transmission de puissance par chaîne</b>	
3.3.1 Introduction .....	89
3.3.2 Les divers types de chaînes.....	90
3.3.3 Avantages et inconvénients .....	91
3.3.4 Terminologie .....	92

3.3.5 Rapport de transmission .....	93
3.3.6 Calcul de la longueur .....	93
3.3.7 Calcul de l'entraxe exprimé en nombre de maillons .....	94
3.3.8 Effets spécifiques .....	95
3.3.8.1 Introduction .....	95
3.3.8.2 Sollicitation dans les brins de la chaîne .....	96
3.3.9 Les Différentes Contraintes .....	97
3.3.10 La lubrification .....	98
3.3.11 Applications.....	98

## **Chapitre 4 : Réducteur et Boite de Vitesses**

4.1 Introduction .....	103
4.2 les réducteurs de vitesses .....	104
4.3 les principaux types de réducteurs .....	104
4.3.1 principe de fonctionnement.....	104
4.3.2 types de réducteurs de vitesses .....	104
4.3.2.1 réducteur à train d'engrenage .....	105
4.3.2.2 réducteurs à vis sans fin .....	105
4.4 Les types de boites de vitesses .....	106
4.4.1 Boîte de vitesses manuelle.....	106
4.4.2 Boîte de vitesses automatique.....	106
4.5 Boîte de vitesses à commande manuelle.....	107
4.5.1 Principe.....	107
4.5.2 Fonctionnement de la marche arrière.....	108
4.5.3 les avantages et inconvénients .....	108
4.6 Schéma cinématique.....	108

## **Chapitre 5 : Les Accouplements**

5.1 La Transmission de Puissance.....	112
5.2 Les Accouplements d'arbres.....	113
5.2.1 Les Types accouplements.....	113
5.2.1.1 Accouplements Permanents.....	115

5.2.1.2 Accouplements élastiques ou flexibles.....	116
5.2.1.2 Cardan et assimilés .....	117
5.2.2 Calcul des accouplements .....	120
5.2.2.1 Accouplement par Bride (rigide).....	120
5.2.2.2 Accouplement rigide par manchon et clavettes.....	121
5.2.2.2 Accouplement rigide par manchon et goupilles.....	122
5.3 Les embrayages.....	124
5.3.1 Définition .....	124
5.3.2 Les embrayages spéciaux .....	125
5.3.3 Les Constitutions d'un embrayage .....	126
5.4. Calcul d'embrayage à disque .....	128
5.4.1 Détermination des diamètres extérieur et intérieur du disque .....	128
5.4.2 Distribution de la pression .....	129
5.4.2.1. Cas d'une pression uniforme .....	129
5.4.2.2 Etude du cas à usure uniforme .....	130
5.5 Application numérique .....	131
Annexes .....	132
Références .....	137

## INTRODUCTION

Ce polycopié pédagogique s'adresse aux étudiants de troisième année licence d'option construction mécanique. Il est rédigé d'une manière simplifiée ou des exercices qui me semblent utiles pour une bonne assimilation du contenu des cours sont accompagnés à la fin de chaque chapitre. Ce cours offre à l'étudiant l'aptitude à analyser et calculer les différents organes d'une machine. Le contenu de ce polycopié est structuré en cinq chapitres. Le **chapitre 1** est consacré aux engrenages avec leurs différents types, engrenages droits à dentures droites, hélicoïdales, coniques et la roue et vis sans fin. Là on cherche les caractéristiques de chaque type ainsi le calcul du module en déterminant par la suite les caractéristiques de la roue et le pignon. Le **chapitre 2** est consacré à l'étude des arbres. Pour éviter un tel dysfonctionnement d'une machine tournante, le calcul préliminaire du diamètre de l'arbre soumise aux différentes sollicitations et le choix du bon matériau est primordial en se basant sur la résistance des matériaux. La transmission de puissance par les transmetteurs flexibles soit par engrenement tel que les chaînes et les courroies crantées ou par frottement telle que les courroies plates ont été évoquées, Le **chapitre 3** est consacré à l'étude des courroies. On cherche leurs caractéristiques essentielles telles que la longueur, le rapport de transmission et l'entraxe déjà étudiées. Les sollicitations dans les brins de la chaîne ont été également traitées. Le **chapitre 4** est consacré aux différentes boîtes de vitesses description et fonctionnement. Ainsi le schéma cinématique d'une boîte manuelle. Le **chapitre 5** est consacré à transmission par accouplement. Leurs types et leurs fonctionnements ont été étudiés, ainsi le calcul de quelques-uns. Les différents embrayages ont été évoqués. Le calcul d'embrayage à disque a été étudié dans le cas d'une pression uniforme et dans le cas à usure uniforme.

En fin, ce cours est conforme au programme d'enseignement adopté par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, il contribue à l'amélioration de l'enseignement de la construction mécanique.

# Chapitre 1 : Les Engrenages

## 1. Généralités

### 1.1. Les Trains d'engrenages

Les trains d'engrenages sont utilisés dans une grande quantité de machines et mécanismes divers. Une machine est souvent constituée d'un ensemble moteur et d'un ensemble récepteur.

On appelle chaîne cinématique, la chaîne de transmission de mouvement partant du moteur et allant jusqu'au récepteur.

Les trains d'engrenage font souvent partie intégrante de cette chaîne cinématique. Ils ont pour fonction d'adapter la fréquence de rotation entre le moteur et le récepteur.



Les engrenages ont pour fonction de transmettre une puissance d'un arbre en rotation à un autre arbre tournant à une vitesse généralement différente, les deux vitesses restent dans un rapport constant.

Donc, l'**engrenage** est un ensemble de deux roues dentées complémentaires, chacune en liaison (pivot ou glissière) par rapport à un support (souvent le bâti). La petite roue se nomme le **pignon**, la grande roue extérieure s'appelle la **roue** figure 1a, la grande roue intérieure s'appelle la **couronne** figure 1b. L'une des roues peut avoir un rayon infini, elle s'appelle alors une **crémaillère** figure 1c. Les principaux schémas des engrenages sont illustrés dans le tableau suivant :



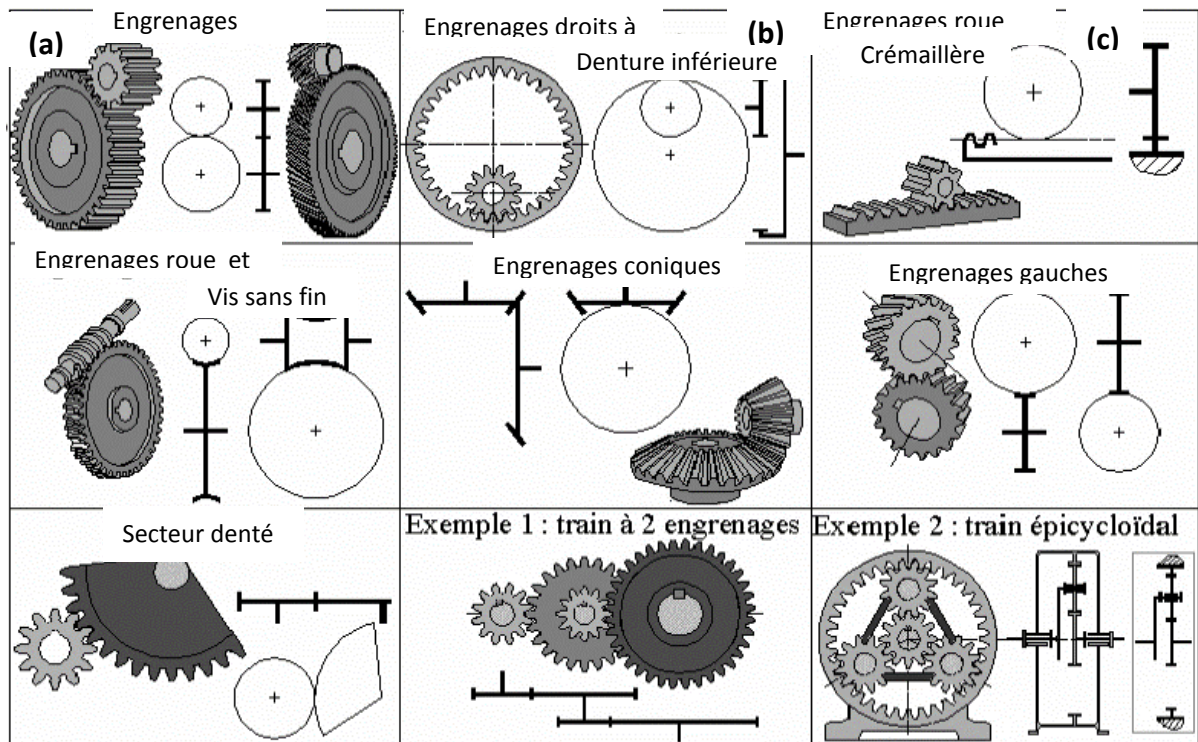


Fig. 1.1 : Schémas des Principaux Engrenages

### 1.1.1 Avantages et désavantages des engrenages

#### a) 1.1Avantages :

- Bon rapport puissance / encombrement
- Rendement élevé
- Toutes puissances à toutes vitesses
- Fiabilité et durée de vie élevées

#### b) Désavantages :

- Niveau sonore important (surtout à haute vitesse)
- Lubrification nécessaire
- Coût plus élevé

### 1.1.2 Dents développante

Une développante d'un cercle est une courbe plane générée par un point sur une tangente, qui roule sur le cercle sans glisser ou par un point sur une corde tendue qui est déballé à partir d'une bobine comme le montre la Fig. 2. Dans le cadre de roues dentées, le cercle est connu comme cercle de base.

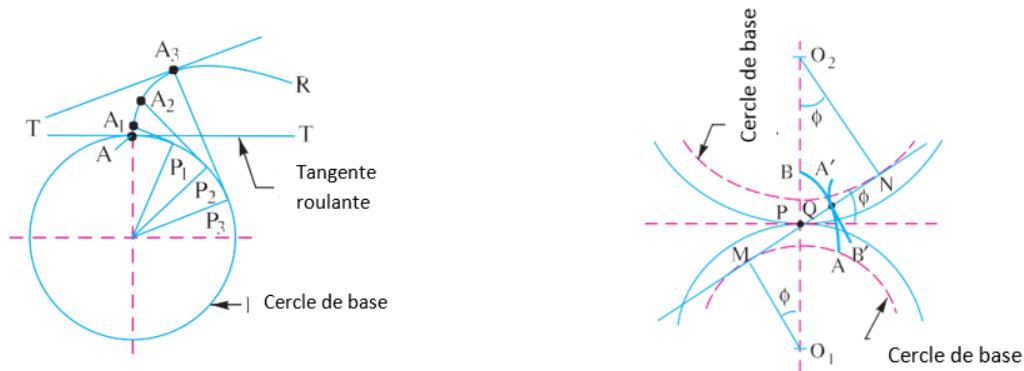


Fig. 1.2 : Construction de dents en développante de cercle.

On distingue les différents types d'engrenages suivants :

- Les engrenages à axes parallèles à denture droite ou hélicoïdale,
- Les engrenages à axes concourants à denture droite ou hélicoïdale,
- Les engrenages à axes non concourants ou gauches (roue-vis, hypoïde, etc.)

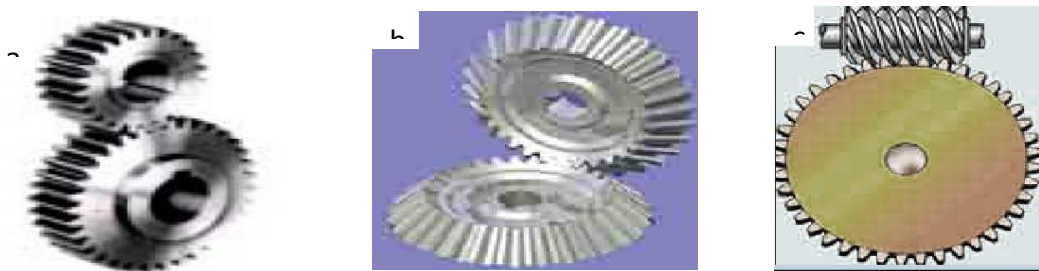


Fig. 1.3 : a) Les axes sont parallèles, b) Les axes sont concourants, c) Les axes dans deux plans différents

### 1.1.3 Fabrication des engrenages

Plusieurs méthodes sont possibles pour fabriquer les roues dentées, soit :

**Par moulage** : au sable, pour les solides en fonte ou en acier, sous pression pour roues en alliages légers, ou matières plastiques. Les dentures sont très souvent achevées sur une machine à tailler.

- **Par forgeage** : il donne également des dentures brutes.
- **Par taillage** :
  - **Taillage successif** : les dents sont usinées complètement et successivement soit par une fraise de forme (Fraise module) (figure 4a) ou par génération avec outil crémaillère (figure 4b), ou encore par génération avec outil-pignon figure 4c

- **Taillage progressif** : à chaque instant toutes les dents à tailler sont à peu près dans le même état dans la génération par vis mère figure 4d.

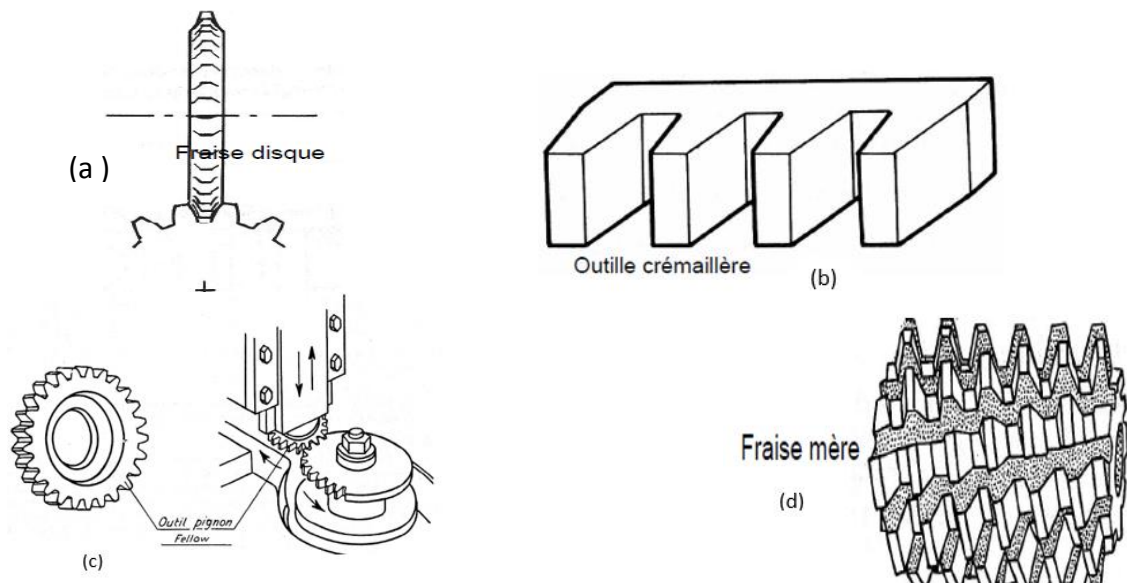


Fig.1.4 : Fabrication des engrenages

## 1.2 Les engrenages droits à dentures droites

### 1.2.1 Systèmes d'engrenages cylindriques à denture droite

Une roue est à denture droite lorsque le plan de symétrie de chaque dent contient l'axe de la roue. Les roues extérieures tournent en sens contraires mais pour un engrenage intérieur, les deux roues tournent dans le même sens.

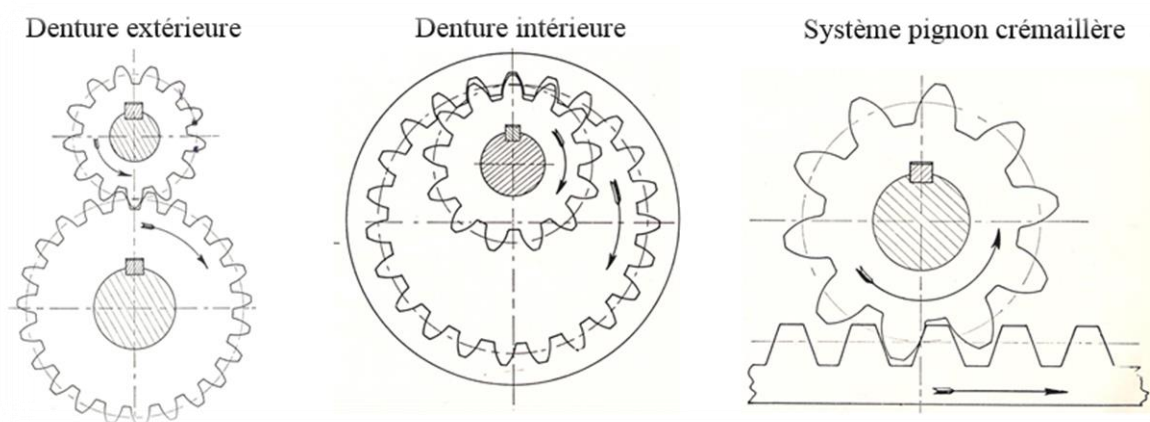


Fig.1.5 : Système d'engrenage cylindrique

### 1.2.2 Caractérisation des engrenages cylindriques à denture droite.

- *Cylindre primitif de fonctionnement ; diamètre primitif  $d$*  : cylindre décrit par l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de la roue conjuguée par rapport à la roue considérée. La section droite du cylindre primitif donne le cercle primitif de diamètre  $d$  ;
- *Cylindre de tête ; diamètre de tête  $d_a$*  : cylindre enveloppe du sommet des dents. La section droite du cylindre de tête donne le cercle de tête de diamètre  $d_a$  ;
- *Cylindre de pied ; diamètre de pied  $d_f$*  : cylindre enveloppe du fond des dents. La section droite du cylindre de pied donne le cercle de pied de diamètre  $d_f$  ;

*Saillie  $h_a$*  : distance radiale entre le cylindre de tête et le cylindre primitif.

- *Creux  $h_f$*  : distance radiale entre le cylindre de pied et le cylindre primitif ;
- *Hauteur de dent  $h$*  : distance radiale entre le cylindre de tête et le cylindre de pied ;
- *Flanc* : portion de surface d'une dent comprise entre le cylindre de tête et le cylindre de pied ;
- *Profil* : section d'un flanc par un plan normal à l'axe ;
- *Pas  $P$*  : longueur d'un arc de cercle primitif compris entre deux profils consécutifs.
- *Largeur de denture  $b$*  : largeur de la partie dentée d'une roue mesurée suivant une génératrice du cylindre primitif ;
- *Entraxe entre deux roues  $a$*  : plus courte distance entre les axes des deux roues ;
- *Cercle de base* : cercle permettant d'obtenir le profil en développante de cercle des dents ;
- *Ligne d'action* : normale commune à deux profils de dents conjuguées, en leur point de contact.

Cette ligne est fixe pour les engrenages à développante de cercle ;

- *Angle de pression  $\alpha$*  : angle de la ligne d'action avec la tangente aux cercles primitifs ( $\alpha = 20^\circ$  pour une denture normalisée) ;
- *Module  $m$*  : valeur permettant de définir les caractéristiques dimensionnelles de la roue dentée (calculer par la résistance des matériaux). C'est le rapport entre le diamètre primitif et le nombre de dents.

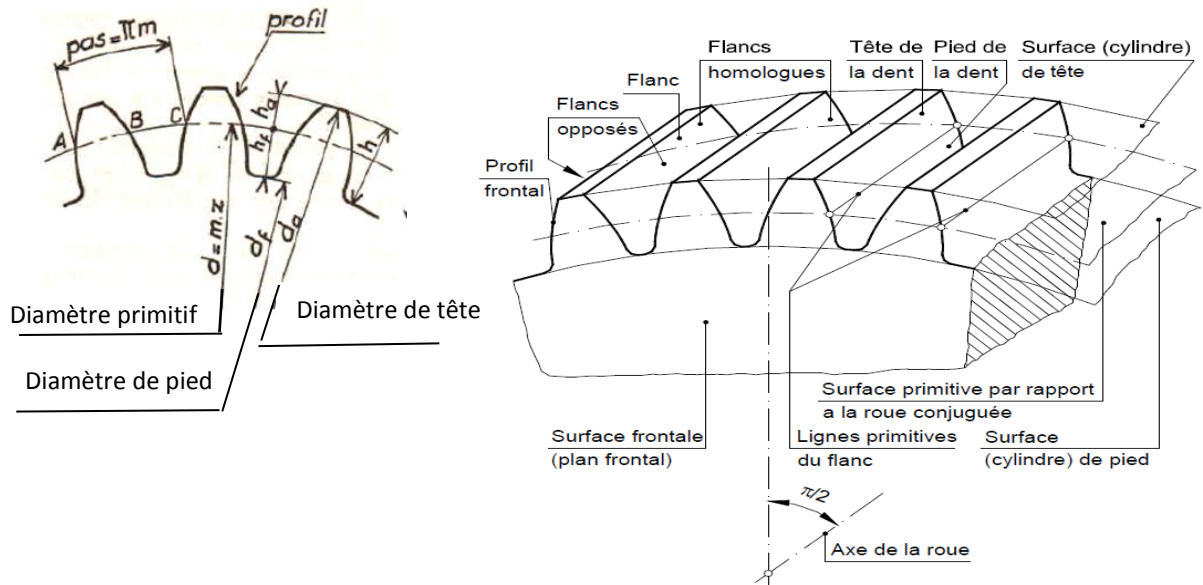


Fig. 1.6 : Paramètres géométriques d'une denture droite

### 1.2.3 Principales dimensions

Les principales caractéristiques des roues dentées sont illustrées dans la figure ci-dessous

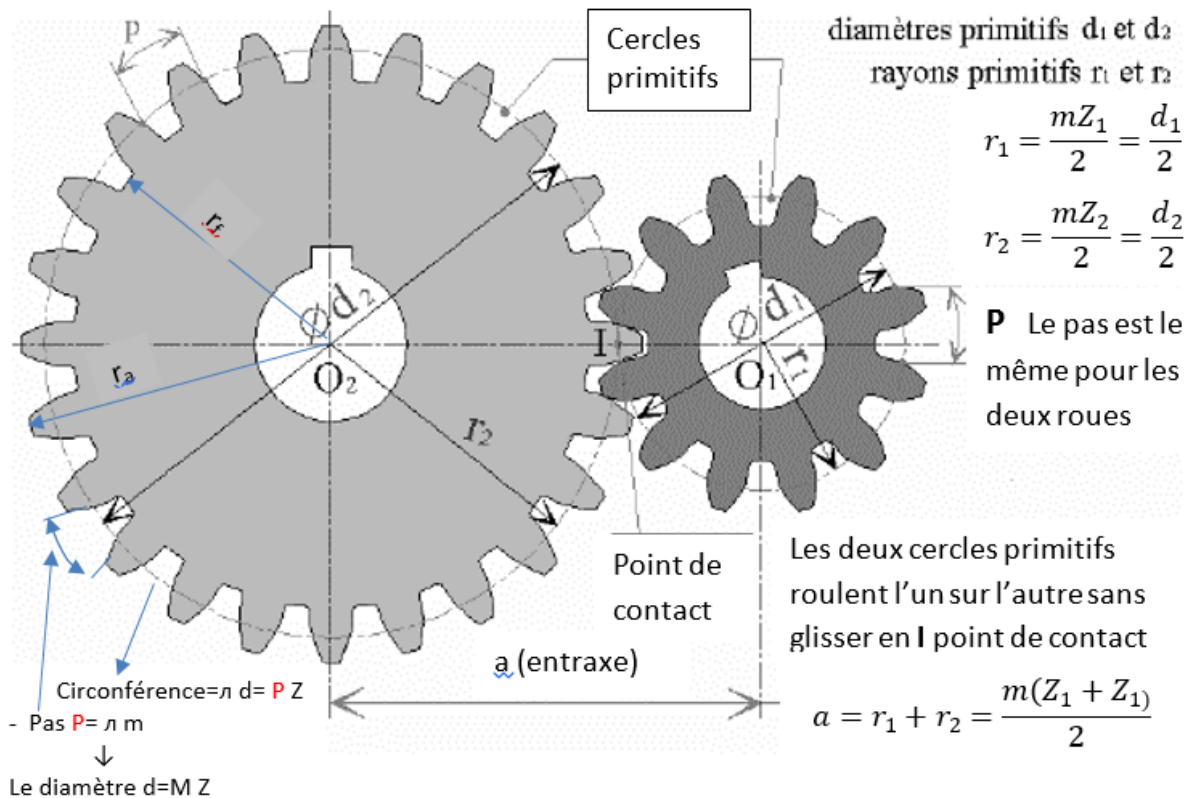


Fig.1.7 : Caractéristiques des engrenages Cylindriques

Le tableau 3 regroupe toutes les caractéristiques des roues dentées.

Désignation	Symbole	Formule
Module	$m$	Par un calcul de RDM
Nombre de dents	$Z$	Par un rapport de vitesse
Diamètre primitif	$d$	$d = mZ$
Diamètre de tête	$d_a$	$d_a = d + 2m$
Diamètre de pied	$d_f$	$d_f = d - 2,5m$
Saillie	$h_a$	$h_a = m$
Creux	$h_f$	$h_f = 1,25m$
Hauteur de dent	$h$	$h = 2,25m$
Pas	$p$	$p = \pi m$
Largeur de denture	$b$	$b = km \ (5 \leq k \leq 16)$
Entraxe	$a$	$a = (d_1 + d_2)/2$

Remarque: Deux roues dentées doivent avoir le même module pour pouvoir engrener ensemble

### 1.2.4 Rapport de transmission d'un train d'engrenage

Un train d'engrenages comporte une Entrée, liée au Moteur et une (ou plusieurs) Sortie liée au Récepteur.

On appelle Rapport de Transmission noté «  $K_{1,2}$  » le rapport entre la fréquence de rotation à la sortie du train par la fréquence de rotation à l'entrée.

- **Rapport de transmission**

$$K_{1,2} = \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie}}}{N_{\text{entrée}}} \tag{1.1}$$

Avec «  $\omega$  » en rad/s et «  $N$  » en tr/mn

Le signe moins (cas des roues extérieures) indique une inversion du sens de rotation entre l'entrée et la sortie.

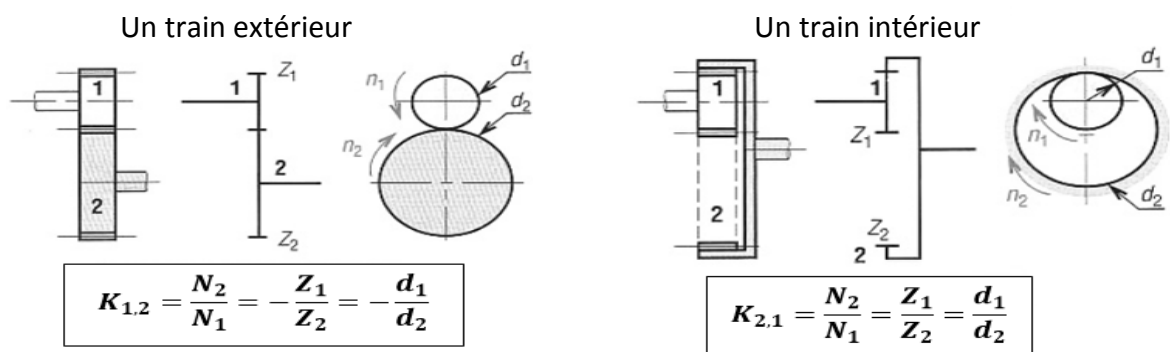


Fig.1.8 : Train d'engrenage simple.

### 1.2.5 Cas des trains simples à deux engrenages

Dans ce cas il y a deux couples de roues en série. Le rapport de transmission est égal au produit des rapports de transmission de chacun des deux couples de roues.

$$K_{2,5} = \frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_3} \cdot \frac{N_4}{N_5}$$

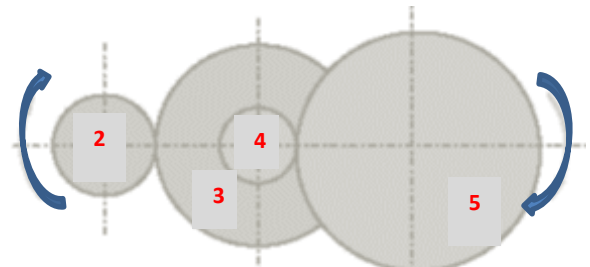


Fig1..9 : Train simple à deux engrenages

#### 1.2.5.1 Cas général : trains à n engrenages

Les roues menantes sont les roues motrices de chaque couple de roues. Les roues menées sont les roues réceptrices.

$$K_{\frac{S}{E}} = \frac{N_S}{N_E} = (-1)^y \frac{\text{produit nbre de dents des roues menantes}}{\text{produit nbre de dents des roues menées}} \quad (1.2)$$

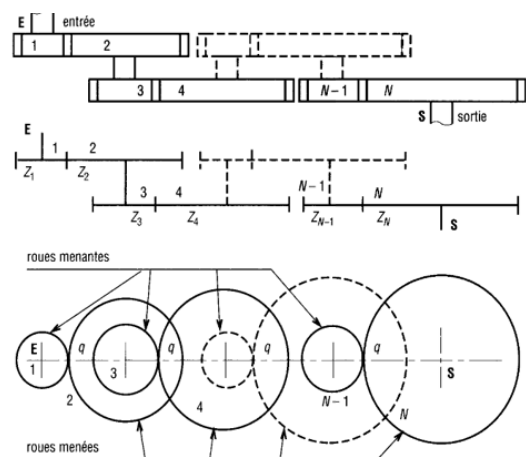
avec  $y$  = Nbre de contact extérieur

$$K_{\frac{S}{E}} = \frac{N_S}{N_E} = (-1)^y \frac{Z_1 Z_3 \dots Z_{N-1}}{Z_2 Z_4 \dots Z_N} = K_{\frac{2}{1}} K_{\frac{4}{3}} \dots K_{\frac{N}{N-1}} \quad (1.3)$$

La valeur de « y » permet de déterminer le signe du rapport de transmission « K ».

- 1 Si « K » est positif → l'arbre de sortie tourne dans le **même sens** que l'arbre d'entrée.
- 2 Si « K » est négatif → l'arbre de sortie tourne dans le **sens inverse** de l'arbre d'entrée

Fig. 1.10 : Train à ' n ' engrenages



### 1.2.5.2 Transmission de puissance à travers un train d'engrenage.

#### 1.2.5.2.1 Puissance d'entrée et de sortie d'une chaîne cinématique

Les trains d'engrenages transmettent la puissance du moteur situé à l'entrée jusqu'au récepteur situé à la sortie.

1. La puissance fournie par le moteur à l'arbre d'entrée  $P_{\text{moteur}}$  est donnée par la relation suivante :

$$P_{\text{moteur}} = C_{\text{moteur}} \cdot \omega_{\text{moteur}} \quad (1.4)$$

Avec :

$P_{\text{moteur}}$  : Puissance fournie par le moteur à l'arbre en Watt.

$C_{\text{moteur}}$  : Couple fourni par le moteur à l'arbre d'entrée en N.m.

$\omega_{\text{moteur}}$  : Fréquence de rotation du moteur en rad/s

*Remarque :*

Il ne faut pas confondre la puissance fournie par un moteur avec sa puissance maximale, car à une vitesse donnée, le moteur d'une voiture fournit une puissance beaucoup plus faible que sa puissance maximale.

La plupart du temps c'est la machine réceptrice qui définit son besoin en puissance, c'est au moteur et au train d'engrenage de satisfaire ce besoin.

De même, la puissance disponible pour le récepteur à la sortie de la chaîne cinématique - *récepteur* » est donnée par la même relation.

$$P_{\text{récepteur}} = C_{\text{résistant}} \cdot \omega_{\text{sortie}} \quad (1.5)$$

Avec :

- 1  $P_{\text{récepteur}}$  : Puissance utile (disponible) pour le récepteur  $P$  (en Wat).
- 2  $\omega_{\text{sortie}}$  : Fréquence de rotation de l'arbre de sortie (en rad/s)
- 3  $C_{\text{résistant}}$  : Couple résistant appliqué par le récepteur sur l'arbre de sortie (en N.m)

#### 1.2.5.2.2 Rendement d'un d'engrenage :

Un train d'engrenage est constitué d'un ou plusieurs engrenages. Le frottement au contact entre les dents entraîne une perte de puissance. Cette énergie perdue est transformée en chaleur. Les calories ainsi générées sont transportées par le lubrifiant (huile ou graisse) jusqu'à la paroi du carter afin d'y être évacuée par conduction dans l'atmosphère.



Un engrenage constitué d'un pignon « 1 » et d'une roue « 2 » aura un rendement noté  $\eta_{12}$ .  
Le rendement est proche de 100% pour les engrenages cylindriques à denture droite bien lubrifiés.  
 $\eta \approx 0.98$  (98%)

Le rendement global d'un train d'engrenage est le produit du rendement de chaque engrenage.

Donc

$$\eta_{glob} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \eta_4 \dots \dots \dots \quad (1.6)$$

### 1.2.5.2.3 Relation entre la puissance d'entrée et la puissance de sortie

En admettant que le rendement global de la chaîne cinématique est de 100%. Alors,

$$P_{\text{récepteur}} = P_{\text{moteur}}$$

Si le rendement global de la chaîne cinématique est inférieur à 100%. Alors,

$$P_{\text{récepteur}} = \eta_{global} \cdot P_{\text{moteur}} \quad (1.7)$$

### 1.2.5.2.4 Relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie :

On prend en considération les trois relations précédentes (1.4, 1.5 et 1.7), le rapport de transmission  $K_{s/E}$  s'écrit :

$$K_{s/E} = \eta_{global} \frac{C_{\text{moteur}}}{C_{\text{résistant}}} \quad (1.8)$$

## 1.2.6 Calcul de dentures

On va traiter dans cette partie le calcul de la résistance de la dent qui nous donne la possibilité par la suite de calculer le module (**m**), la pression superficielle appliquée sur la dent ainsi la vérification du dimensionnement des engrenages

### 1.2.6.1 Calcul de la résistance

Le calcul va nous permettre de trouver l'expression du module qui sera utilisé pour calculer les caractéristiques des roues dentées.

- **Calcul du module m**

La dent est assimilée à une poutre encastree chargé de l'autre côté par l'effort T (effort tangentiel). Ce dernier étant considéré perpendiculaire à l'axe de la dent.

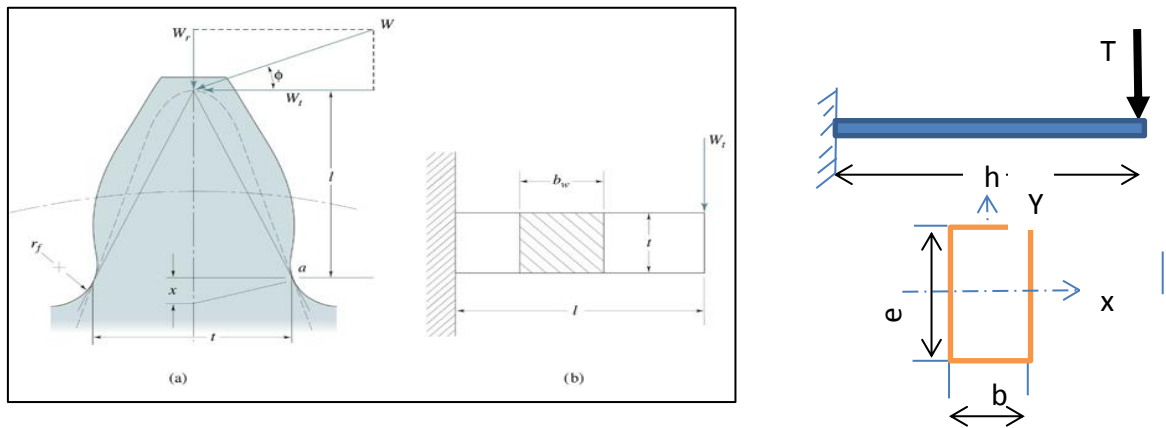


Fig. 1.11 : Une dent soumise à un effort tangentiel

D'après la condition de la résistance

$$\sigma_f \leq \sigma_{adm} \tag{1.9}$$

Contrainte pratique en extension du matériau

$$\sigma_f = \frac{M_f}{\frac{J}{Y}} \quad \text{avec} \quad J : \text{Moment d'inertie}, \quad M_f : \text{Moment de flexion}$$

maximal agissant à la base de la dent

$$M_f = h \cdot T = 2.25m \cdot T \quad (\text{en N.m})$$

T : effort tangentielle

m : est le module , il est toujours donnée en mm

$$\frac{J}{Y} = \frac{\frac{b \cdot e^3}{12}}{\frac{e}{2}} = \frac{b \cdot e^2}{6} \quad \text{avec} \quad e = \frac{\pi m}{2} \quad \text{et} \quad b = K \cdot m$$

$$\sigma_f = \frac{2.25m \cdot T}{\frac{K \cdot m \cdot (\frac{\pi m}{2})^2}{6}} \tag{1.10}$$

e : Epaisseur de la dent, b : Largeur de la dent ,la constante K généralement égale 10

Remplaçant dans (10) dans (9)

$$\frac{2.25m \cdot T}{\frac{K \cdot m \cdot (\frac{\pi m}{2})^2}{6}} \leq \sigma_{adm}$$

Après simplification en tire la relation du module

$$m \geq 2.34 \sqrt{\frac{T}{K \sigma_{adm}}} \quad (\text{mm}) \tag{1.11}$$

Dans les calculs, on travaille avec un module **m** normalisé.

### 1.2.6.2 Dimensions normalisées

Deux valeurs permettent de définir les roues dentées :

- Le **module m** calculé auparavant est choisi parmi les modules normalisés Tableau 1.

Valeurs normalisées du module $m$									
Valeurs principales en mm					Valeurs secondaires en mm				
0,06	0,25	1,25	5	20	0,07	0,28	1,125	5,5	22
0,08	0,30	1,5	6	25	0,09	0,35	1,375	7	28
0,10	0,40	2	8	32	0,11	0,45	1,75	9	36
0,12	0,50	2,5	10	40	0,14	0,55	2,75	11	45
0,15	0,75	3	12	50	0,18	0,7	3,5	14	55
0,20	1,0	4	16	60	0,22	0,9	4,5	18	70

Tableau 1.1 : Valeurs normalisée du module  $m$ 

- Le **nombre de dents Z** de chaque roue dentée permettant de définir le rapport des vitesses  $r$  de l'engrenage

Il existe un nombre minimal de dents pour avoir un engrenement correct pignon A/roue B

Tableau 2

Nombre minimal de dents					
$Z_A$	13	14	15	16	17
$Z_B$	13 à 16	13 à 26	13 à 45	13 à 101	13 à oo

### 1.2.7 Efforts sur les dentures – Couple transmis :

L'effort  $F$  normal à la dent étant incliné de l'angle de pression  $\alpha$  ( $20^\circ$  en général), on considère les deux projections de  $F$  suivantes :

- la tangente commune aux diamètres primitifs :  $T = \frac{2C}{d}$
- la normale commune aux cercles primitifs (radiale) :  $F_R = T \cdot \text{tg } \alpha$

$C$  : couple moteur,  $d$  : diamètre primitif

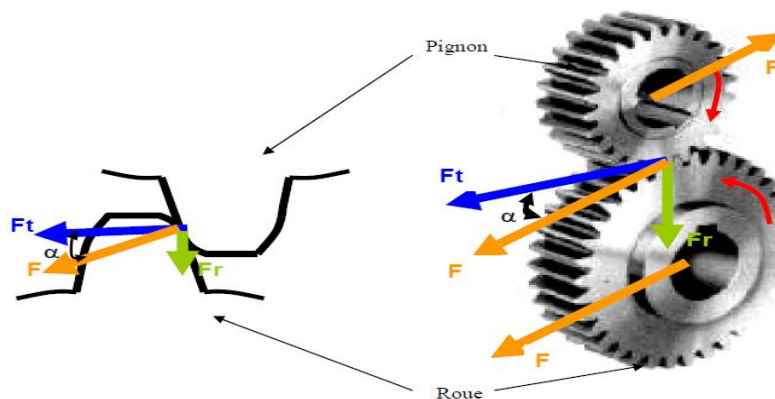


Fig. 1.12 : les efforts appliqués sur une dent

### 1.2.8 Matériaux utilisés

- 1 Les matériaux utilisés sont les fontes (Fonte à graphite sphéroïdal FGS) : pour les roues de grandes dimensions,
- 2 Les aciers alliés (Aciers au nickel-chrome 10 NC 12) : pour les engrenages fortement chargés ou non alliés,
- 3 Les alliages d'aluminium, les alliages de cuivre surtout le bronze car ils possèdent une bonne dureté et un faible coefficient de frottement avec l'acier,
- 4 D'autres matériaux plastiques comme les fibres en téflon, nylon... sont utilisés dans les appareils électriques en raison de leur faible coefficient de frottement et leur fonctionnement silencieux.

### 1.2.9 Calcul de la pression superficielle

La limite de la pression superficielle  $\sigma_{lim}$  est donnée par la formule de Hertz

$$\sigma_{Lim} = 0.6 \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\rho}{\gamma}} \quad (1.12)$$

**F** : action de contact sur la denture,

$$T = F \cos \alpha \Rightarrow F = \frac{T}{\cos \alpha} \quad (\text{en N}) \quad (1.13)$$

**T** : effort tangentielle, **b** : largeur de la dent  $b = K \cdot m$  (mm)

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} \right) \quad \begin{cases} + \text{ pour les engrenages extérieurs} \\ - \text{ pour les engrenages intérieurs} \end{cases} \quad (1.14)$$

$\rho_1$  et  $\rho_2$  : étant les rayons de courbures (en mm) des flancs du profil

$$\rho_1 = \frac{d_1}{2} \sin \alpha = \frac{Z_1 m}{2} \sin \alpha, \quad \rho_2 = \frac{d_2}{2} \sin \alpha = \frac{Z_2 m}{2} \sin \alpha$$

$$\text{Le coefficient } \gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} \pm \frac{1}{E_2} \right), \quad E_1, E_2 : \text{modules d'élasticité (en } \frac{N}{mm^2} \text{)} \quad (1.15)$$

### 1.2.10 Applications

#### Exercice 1

Montrer qu'on peut écrire l'expression du module (m) sous la forme suivante :

$$m = \sqrt{\frac{5.47 C_m \cdot (N_1 + N_2)}{a N_2 k \cdot \sigma_p}}$$

Calculer la valeur de (m) si on donne  $C_m = 2000 \text{ Nmm}$ ,  $d_1 = 100 \text{ mm}$ ,  $K = 10$   $\sigma_{pe} = 50 \text{ MPa}$

*Solution*

La condition de résistance est donnée par  $\sigma \leq [\sigma_{pe}]$

La contrainte de flexion  $\sigma = \frac{M_f}{I}$   $z \leq [\sigma_{pe}]$  (1)

Avec  $z = \frac{e}{2}$  et l'épaisseur  $e = \frac{\pi m}{2}$

Le moment d'inertie  $I = \frac{b \cdot e^3}{12}$  avec  $b = K \cdot m$

Le moment de flexion  $M_f = T \cdot h = 2,25 m \cdot T$

Le couple moteur  $C_m = \frac{T \cdot d}{2} \Rightarrow T = \frac{2 C_m}{d}$

Remplaçons toutes ces valeurs dans la relation (1)

$$\frac{2,25 m \cdot T}{K \cdot m \cdot \left(\frac{\pi m}{2}\right)^3} \frac{\pi m}{4} \leq [\sigma_{pe}]$$

Alors  $m \geq \sqrt{\frac{5,47.2 C_m}{K \cdot d \cdot [\sigma_{pe}]}}$

Cherchons la valeur de  $d_1$  en fonction de  $N_1$  et  $N_2$

On a

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 2a \\ N_1 d_1 = N_2 d_2 \end{cases} \quad \text{donc, } d_1 = \frac{2a}{N_1 + N_2} N_2$$

En fin  $m \geq \sqrt{\frac{5,47 \cdot C_m (N_1 + N_2)}{K \cdot a \cdot N_2 \cdot [\sigma_{pe}]}}$

### Exercice 2

Soit à transmettre une puissance de 6 KW la valeur de l'entraxe  $a = 225$  mm, la vitesse de rotation soit  $N_1 = 960$  tr/mn,  $N_2 = 120$  tr/mn avec  $K = 10$ . la matière de l'engrenage A75, le rendement  $\eta = 0,95$ , la contrainte admissible  $\sigma_{pe} = 90$  N/mm<sup>2</sup>

Tableau1 : Contrainte admissible (dan/mm<sup>2</sup>) pour le calcul du diamètre de l'arbre.

Matériaux	Vitesse circonférentielle en m/s		
	1	6	12
Fonte grise	4	3	2
Fonte alliée	5	4	3
Acier forgé A75	12	9	6
Acier 30NC 11 forgé et traité	18	13	9
Acier 30ND16 forgé et traité	25	18	12
Bronze phosphoreux	6	4	2

Calculer ;

- 1) Les diamètres  $d_1$  et  $d_2$  ;
- 2) Vérifier la contrainte normale ;

3) La pression superficielle avec  $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ .

*Solution*

1) *Les diamètres*

- La puissance de calcul est donnée par  $P' = \frac{P}{\eta} = \frac{6}{0,95} = 6,31 \text{ Kw}$
- Les diamètres  $d_1$  et  $d_2$

$$d_1 = \frac{2a}{N_1 + N_2} N_2 = \frac{2 \cdot 225}{960 + 120} 120 = 50 \text{ mm}$$

$$d_2 = \frac{2a}{N_1 + N_2} N_1 = \frac{2 \cdot 225}{960 + 120} 960 = 400 \text{ mm}$$

- Le module  $m$

$$m \geq 2,34 \sqrt{\frac{60,6 \cdot 31 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 960 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 90}} = 3,90 \approx 4 \quad (\text{Normalisé})$$

- *Le nombre de dents*

$$Z_1 = \frac{d_1}{m} = \frac{50}{4} = 12,5 \quad \text{soit} \quad Z_1 = 13 \text{ dents}$$

$$N_1 Z_1 = Z_2 N_2 \Rightarrow Z_2 = Z_1 \frac{N_1}{N_2} = 13 \cdot \frac{960}{120} = 104 \text{ dents}$$

Supposons que l'on peut modifier l'entraxe alors

$$a = \frac{m}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{13 + 104}{2} = 243 \text{ mm}$$

Supposons qu'on peut changer l'entraxe

$$d_1 = m Z_1 = 4 \cdot 13 = 52 \text{ mm}$$

$$d_2 = m Z_2 = 4 \cdot 104 = 416 \text{ mm}$$

2) *Vérification de la contrainte normale*

$$\sigma_{pe} = \frac{5,47 \cdot 60,6 \cdot 31 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 960 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 4^2} = 82,57 \text{ dan/mm}^2$$

$$\text{Vitesse circonférentielle en (m/s)} = \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 960 \cdot 52 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 2} = 2,6 \text{ m/s}$$

D'après le tableau la contrainte  $\sigma_{pe} = 5,16 \text{ dan/mm}^2$  comprise entre (9 ... 12)  $\text{dan/mm}^2$  donc elle est vérifiée.

3) *La pression superficielle*

La limite de la pression superficielle  $\sigma_{lim}$

$$\sigma_{Lim} = 0,6 \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\rho}{\gamma}}$$

Effort d'action de contact sur la denture

$$F = \frac{T}{\cos \alpha} \quad \text{avec } T = \frac{2C}{d} \quad C : \text{ couple du moteur}$$

$$C = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi N_1} = \frac{30 \cdot 6250}{\pi \cdot 960} = 62,2 \text{ N.m}$$

$$\text{Effort tangentiel est } T = \frac{2 \cdot 62200}{50} = 2488 \text{ N}$$

$$\text{- Donc la force d'action est } F = \frac{2488}{\cos(20^\circ)} = 2647 \text{ N}$$

$$\text{- Largeur de la dent } b = 10,4 = 40 \text{ mm}$$

Les rayons de courbures

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (+) \quad \text{puisque des engrenages extérieurs}$$

$$\rho_1 = \frac{50}{2} \sin(20^\circ) = 8,55 \text{ mm} \quad , \quad \rho_2 = \frac{400}{2} \sin(20^\circ) = 68,40 \text{ mm}$$

$$\text{- Donc la valeur de } \rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8,55} + \frac{1}{68,40} \right) = 0,066 \text{ mm}$$

$$\text{- Le coefficient } \gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} \pm \frac{1}{E_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cdot 10^5} + \frac{1}{2 \cdot 10^5} \right) = 5 \cdot 10^{-6}$$

Donc la contrainte superficielle est :

$$\text{- } \sigma_{\text{Lim}} = 0,6 \sqrt{\frac{2647 \cdot 0,066}{40 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} = 560,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Pour la matière A75 la contrainte est acceptable.

### Exercice 3

Un moteur électrique dont la vitesse cylindrique est de 1200 tr/mn . Transmet une puissance de 5000 W à un arbre devant tourner à la fréquence de 250 tr/mn.  $P = 5 \text{ KW}$

Les arbres sont parallèles et sont distants de 320 mm et  $K=10$

Déterminer les caractéristiques de taillage des deux roues  $\sigma_{pe} = 80 \text{ Mpa}$

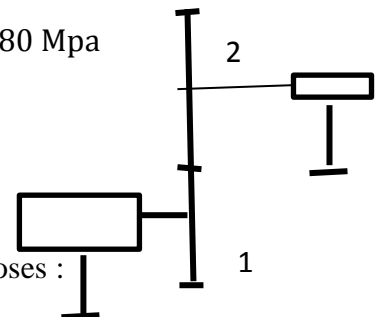
1 pignon → arbre motrice

2 Roue dentée pignon → arbre récepteur

### Solution

Avant de calculer les éléments de taillage il faut vérifier deux choses :

- Le rapport de transmission, il faut qu'il soit exact
- L'entraxe il faut qu'il soit exact ou une valeur proche à la valeur donnée



Calcul du module et les diamètres primitifs définitifs

- *calcul des diamètres primitifs approximatifs*

- Rapport de transmission

$$K_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad d_2 = 5 d_1 \quad (1)$$

de l'entraxe en déduire un autre équation  $\frac{d_1+d_2}{2} = 320 \text{ mm} \quad (2)$

de (1) et (2) en tire  $d_1 = 106,6 \text{ mm}$  et  $d_2 = 533,3 \text{ mm}$

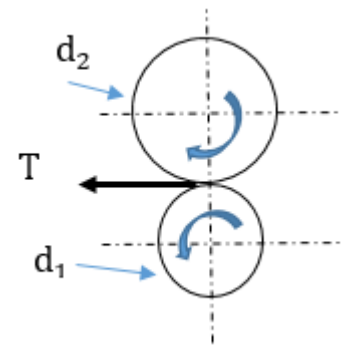
- *Le module*  $m \geq 2.34 \sqrt{\frac{T}{K \sigma_{pe}}}$

Le moment M égale  $M = T \frac{d_1}{2}$

La puissance  $P = M \omega$  ( $P = M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$ )

$$\begin{cases} M = T \frac{d_1}{2} \\ P = M_1 \omega_1 \end{cases}$$

$$T = \frac{2M_1}{d_1} = \frac{2P}{\omega_1 d_1} = \frac{60P}{\pi d_1 N_1} \text{ ou bien } \left( \frac{60P}{\pi d_2 N_2} \right)$$



La force tangentielle est :

$$T = \frac{60.510^3}{\pi . 0,1066 . 1200} = 746 \text{ N}$$

Donc le module  $m \geq 2.34 \sqrt{\frac{746}{10. 80}} = 2.25$  d'après le tableau  $m = 2.50$

- *Calcul des diamètres primitifs et l'entraxe définitifs*

Dans une première approche les nombres de dents sont

Pignon  $Z_1 = \frac{d_1}{m} = \frac{106,6}{2.50} = 42,64$  prenons  $Z_1 = 42$

Pignon  $Z_2 = \frac{d_2}{m} = \frac{533,3}{2.50} = 213,32$  prenons  $Z_2 = 213$

Le rapport est  $K_{12} = \frac{1}{5}$  n'est pas respecté

Il faut vérifier  $K_{12} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{5}$  en gardant  $Z_1 = 42$  , il vient  $Z_2 = 210$

Les diamètres  $d_1 = mZ_1 = 2,50. 42 = 105 \text{ mm}$

$$d_2 = mZ_2 = 2,50. 210 = 525 \text{ mm}$$

- *L'entraxe*  $a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = \frac{1}{2}(105 + 525) = 315 \text{ mm}$

Cette valeur est assez éloignée, donc on fait un autre choix du nombre de dents

$Z_1 = 43$  dents,  $Z_2 = 215$  dents ces valeurs conduisent aux résultats suivants

$d_1 = 107.5 \text{ mm}$  ,  $d_2 = 537.5 \text{ mm}$ ,  $a = 322,5$  (cette valeur est suffisante)

Donc on prend définitivement ces valeurs



- Les éléments de taillages du pignon et la roue

		Pignon	Roue
Diamètres	Primitif	107,5	537,5
	De tête	112,5	542,5
	De pied	101,25	531,25
Dent	h ( hauteur) creux	5,654 3,125	
	saillie	2,5	
	largeur	2,5	
	Pas	7,833	
	Intervalle	3,926	
	épaisseur	3,526	

Exercice 4

Même question calculer les éléments de taillage

Les données :

$$N_1 = 4320 \frac{tr}{mn}, \quad N_2 = 720 \frac{tr}{mn}, \quad \sigma_{pe} = 100 \text{ MPa}, \quad K = 10, \quad P = 5 \text{ Kw}, \quad E = 320 \text{ mm}$$

A vous de travailler

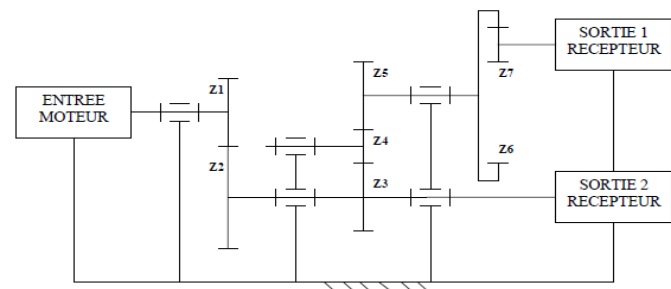
Résultats :

$$d_1 = 91.25 \text{ mm} , \quad d_2 = 547.5 \text{ mm}, \quad a = 319,37 \text{ (cette valeur est suffisante)}.$$

Exercice 5

Pour le train d'engrenage schématisé ci-dessous calculer :

- Le rapport de transmission du train d'engrenage (arbre 1 et arbre 2) ;
- Le rendement global ;
- La puissance de récepteur ainsi le couple résistant.



Engrenage	Pignon	Roue	Rendement
1-2	1 (Z1=30)	2 (Z2=40)	$\eta_{12} = 0.9905$
3-4	4 (Z4=18)	3 (Z3=28)	$\eta_{34} = 0.985$

Données

4-5	4 (Z4=18)	5 (Z5=32)	$\eta_{45} = 0.986$
6-7	7 (Z7=19)	6 (Z6=122)	$\eta_{67} = 0.992$

- Le nombre de tours  $N = 1500$  tr/min
- La puissance du moteur = 3200W

Solution

La chaîne cinématique est constituée de 4 engrenages et pour chaque engrenage, il faudra identifier

- L'élément **Menant** ou moteur (qui provoque le mouvement de rotation).
- L'élément **Mené** (qui reçoit son mouvement de rotation de l'élément moteur)

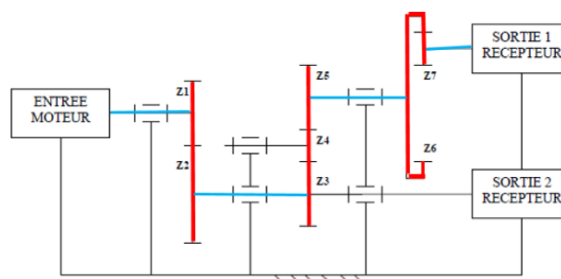
Pour notre exemple

Engrenage	Pignon	Roue	Menant	Mené
1-2 Extérieur	1	2	1	2
3-4 Extérieur	4	3	3	4
4-5 Extérieur	4	5	4	5
6-7 Intérieur	7	6	6	7

- La chaîne cinématique entre le moteur et la sortie 1

On appelle chaîne cinématique, la chaîne de transmission de mouvement partant du moteur et allant jusqu'au récepteur

- Traçons le chemin que parcourt le mouvement



- Le rapport de transmission.

$$K_s = \frac{N_s}{N_E} = (-1)^y \frac{\text{produit nbre de dents des roues menantes}}{\text{produit nbre de dents des roues menées}}$$

- Le train comporte « 3 engrenages extérieurs » alors «  $Y = 3$  ».

Donc, Le rapport de transmission est le suivant

$$K_{\frac{S}{E}} = \frac{\omega_{\text{sortie}1}}{\omega_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie}1}}{N_{\text{entrée}}} = (-1)^3 \cdot \frac{Z_1 Z_3 Z_4 Z_6}{Z_2 Z_4 Z_5 Z_7}$$

Nous constatons que le pignon « 4 » est à la fois **menant** et **mené**, sa présence ne modifie pas le rapport de transmission « K » en valeur absolue mais seulement son signe, c'est à dire le sens de rotation de l'arbre de sortie. Cette roue est appelée roue **folle**. En effet, la présence du pignon « 4 » implique que « y = 3 » c-à-dire sens de rotation inversé.

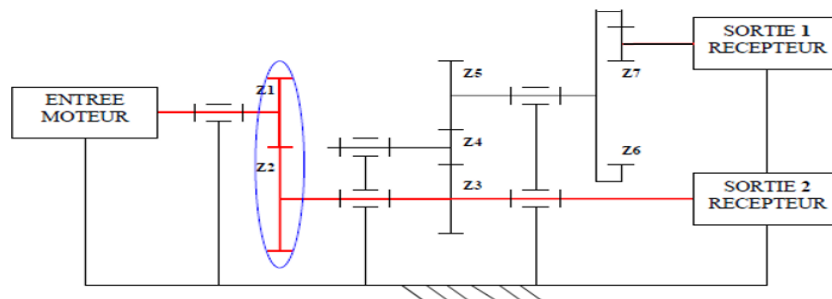
$$K_{\frac{S}{E}} = (-1)^3 \cdot \frac{30 \cdot 28 \cdot 12}{40 \cdot 32 \cdot 19} \approx -4.1238$$

- Un rapport de transmission est toujours donne en valeur exacte sous forme de fraction
- Le signe (-) indique que l'arbre de sortie tourne dans le sens opposé

$$\frac{N_{\text{sortie}1}}{N_{\text{entrée}}} = \frac{\omega_{\text{sortie}1}}{1500} = \frac{1281}{304} \rightarrow \omega_{\text{sortie}1} \approx 6320,7 \frac{\text{trs}}{\text{min}}$$

- *La chaîne cinématique entre le moteur et la sortie 2*

La chaîne cinématique est constituée d'un seul engrenage.



- *Calcul du rapport de transmission et le nombre de tours*

Le train comporte « l'engrenage extérieur » alors « y = 1 ».

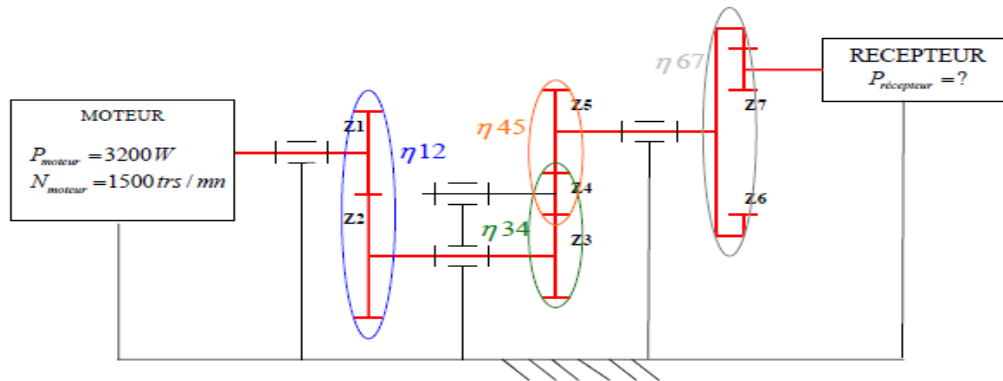
Donc le rapport de transmission est le suivant

$$K_{\frac{S}{E}} = (-1)^1 \cdot \frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{30}{40} = -\frac{3}{4} \approx -0.75$$

- La fréquence de rotation de l'arbre de sortie 2

$$\frac{N_{\text{sortie}2}}{N_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie}2}}{1500} = \frac{3}{4} \rightarrow N_{\text{sortie}2} \approx 1125 \frac{\text{trs}}{\text{min}}$$

- Calcul du rendement global d'un train d'engrenage :



La puissance est transmise par l'intermédiaire 4 engrenages.

Donc  $\eta_{glob} = \eta_{12} \cdot \eta_{34} \cdot \eta_{45} \cdot \eta_{67}$

$$\eta_{glob} = 0,9905 \cdot 0,985 \cdot 0,986 \cdot 0,992 = 0,954 \approx 95,4\%$$

- Calcul de la puissance du récepteur

Puisque le rendement global de la chaîne cinématique est inférieur à 100%.

$$P_{récepteur} = \eta_{global} \cdot P_{mot}$$

$$P_{récepteur} = 0,954 \cdot 3200 = 3052,8 \text{ W}$$

Donc la puissance perdue sous forme de chaleur est 447,2 W

- Calcul du couple moteur

$$C_{mot} = \frac{P_{mot}}{\omega_{mot}} \quad \text{avec,} \quad \omega_{mot} = \frac{\pi \cdot N_{mot}}{30} = \frac{3,14 \cdot 1500}{30} = 157,08 \left(\frac{rd}{s}\right)$$

$$D'où \quad C_{mot} = \frac{3200}{157,08} = 20,37 \text{ N.m}$$

- Calcul du couple résistant

A Partir de la relation du rapport de transmission en tire  $C_{résistant}$

$$K_{s/E} = \eta_{global} \frac{C_{mot}}{C_{résistant}} \Rightarrow$$

$$C_{résistant} = \eta_{global} \frac{C_{mot}}{K_{s/E}} = \frac{0,954 \cdot 20,37 \cdot 1281}{304} = 4,61 \text{ N.m}$$

Vérification de la valeur de la puissance de sortie  $P_{récepteur} = C_{résistant} \cdot \omega_{sortie}$

$$\text{La fréquence de sortie est} \quad \omega_{sortie} = \frac{\pi \cdot N_{sortie}}{30} = \frac{3,14 \cdot 6320,7}{30} = 661,9 \left(\frac{rd}{s}\right)$$

$$D'où \quad P_{récepteur} = 4,61 \cdot 661,9 = 3052,8 \text{ W}$$

Comme conclusion, on peut dire qu'une réduction de la fréquence de rotation à la sortie entraîne une augmentation du couple de sortie. Donc un réducteur de vitesse est aussi un multiplicateur de couple.

## 1.3 Les Engrenages cylindriques à Dentures Hélicoïdales (E.C.D.H)

### 1.3.1 Introduction

Un engrenage hélicoïdal a des dents en forme d'hélice figure 1. Ces engrenages à axe parallèles ont une ligne de contact, comme dans denture droite. Ceci permet d'obtenir un engagement progressif et un contact continu. Les engrenages hélicoïdaux donnent entraînement en douceur avec un rendement élevé de transmission.

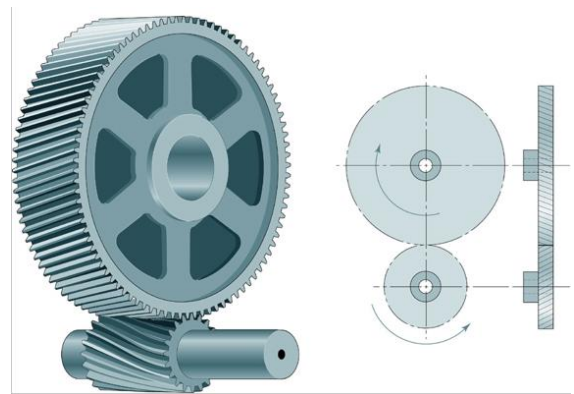


Fig.1.13 : Engrenage Hélicoïdale

### 1.3.2 Caractérisation des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale.

Quelque soit le diamètre, les roues dentées à denture hélicoïdale de **même module** et de **même angle** d'hélice engrènent entre elles est possible à condition que les hélices soient de **sens contraire** figure 14.

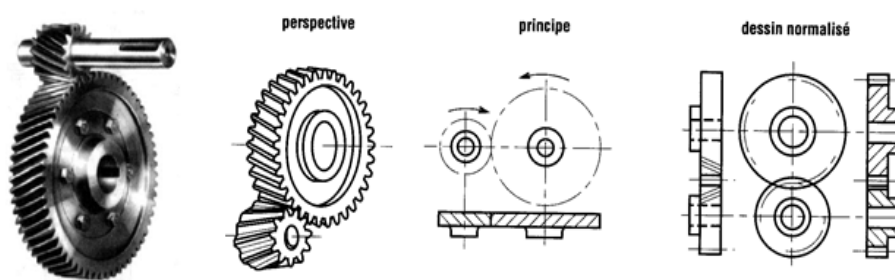


Fig.1.14 : dentures hélicoïdales

### a) Avantages – Inconvénients :

- Les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale ont un engrènement plus progressif que les engrenages à denture droite.
  - Ils réduisent notablement les bruits et vibrations engendrés durant l'engrènement.
  - Ils présentent également un meilleur rendement.
  - Ils sont notamment utilisés dans les boîtes de vitesse d'automobiles, les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses. Mais l'inclinaison de l'effort entre les dentures du fait que l'hélice engendre un effort axial durant l'engrènement.

### 1.3.3 Définitions

- ✚ *Hélice primitive* : intersection d'un flanc avec le cylindre primitif d'une roue hélicoïdale ;
- ✚ *Angle d'hélice  $\beta$*  : angle entre la tangente à l'hélice primitive et une génératrice du cylindre primitif ;
- ✚ *Pas apparent  $P_t$  ( $P_a$ )* : longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils homologues consécutifs ;
- ✚ *Pas réel  $P_r$*  : pas mesuré sur une hélice normale à l'hélice primitive ;
- ✚ *Module apparent  $m_a$  ( $m_t$ )* : rapport entre le pas apparent et le nombre de dents ;
- ✚ *Module réel  $m_n$  ( $m_r$ )* : rapport entre le pas réel et le nombre de dents.

### 1.3.4 Dimensions

Les dimensions d'une roue à denture hélicoïdale sont déterminées à partir :

- Du module normalisé, appelé ici module normal (ou réel) et désigné par  $m_n$ , (R.D.M.)
- Du nombre de dents  $Z$
- De l'angle d'inclinaison de l'hélice  $\beta$

La relation entre le pas normal  $P_n$  et pas le tangentiel  $P_t$  permet de définir un module tangentiel (ou apparent)  $m_t$  (figure3).

Les dimensions de la roue dépendent alors de ce module tangentiel. Il existe donc un pas réel et un pas apparent repérer sur la figure ci-contre. Chaque pas peut s'exprimer en fonction de son module respectif, ainsi que la relation entre ces pas.

$$\cos\beta = \frac{P_n}{P_t} = \frac{m_n\pi}{m_t\pi} = \frac{m_r}{m_a} \quad (1.16)$$

Le module et les pas dépendent tous du même angle d'inclinaison de la denture

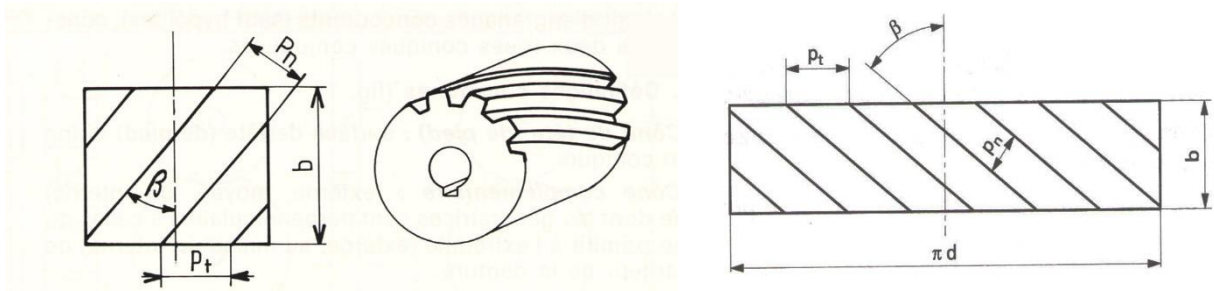


Fig.1.15 : Développée d'une roue à denture hélicoïdale

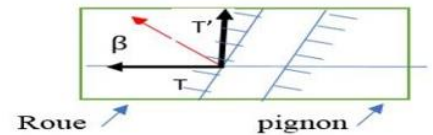
### 1.3.5 Calcul du module

$$\cos\beta = \frac{T}{T'} \Rightarrow T' = \frac{T}{\cos\beta} \quad (1.17)$$

T : composante tangentielle de l'effort de contact

Le module réel est :

$$m_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{T'}{K \cdot \sigma_e}} = 2,34 \sqrt{\frac{T}{K \cdot \sigma_e \cos\beta}} \quad (1.18)$$



$$\cos\beta = \frac{P_r(\text{pas réel})}{P_a(\text{pas apparent})} \Rightarrow P_r = P_a \cos\beta$$

Remarque

- $P_r(\text{plan réel}) = P_n(\text{plan normal})$
- $P_a(\text{plan apparent}) = P_t(\text{plan de travail})$

$$\pi m_r = \pi m_a \cos\beta \Rightarrow m_r = m_a \cos\beta \Rightarrow m_a = \frac{m_r}{\cos\beta}, \quad (m_a > m_r)$$

Pour satisfaire la continuité d'engrènement, il faut que :

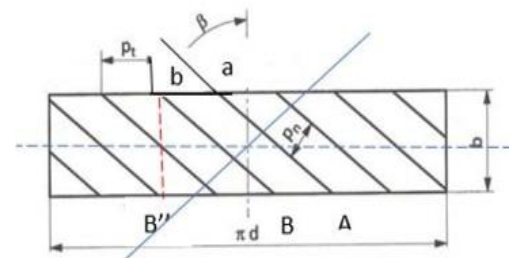
$$BB'' \geq AB \quad \text{Avec} \quad BB'' = b \operatorname{tg}\beta$$

D'où

$$b \operatorname{tg}\beta \geq \pi m_a = \frac{\pi m_r}{\cos\beta}$$

$$b > \frac{\pi m_r}{\sin\beta} = K m_r$$

$$\text{avec} \quad K = \frac{\pi}{\sin\beta}$$



$$(1.19)$$

### 1.3.6 Caractéristiques des engrenages à dentures hélicoïdales

Toutes les relations sont regroupées dans le tableau 1

Désignation	Symbole	Formule
Module réel	$m_n$	Par un calcul de RDM
Nombre de dents	$Z$	Par un rapport de vitesse
Angle d'hélice	$\beta$	Entre $20^\circ$ et $30^\circ$
Module apparent	$m_t$	$m_t = m_n / \cos \beta$
Pas apparent	$p_t$	$p_t = p_n / \cos \beta$
Pas réel	$p_n$	$p_n = \pi m_n$
Diamètre primitif	$d$	$d = m_t Z$
Diamètre de tête	$d_a$	$d_a = d + 2m_n$
Diamètre de pied	$d_f$	$d_f = d - 2,5m_n$
Saillie	$h_a$	$h_a = m_n$
Creux	$h_f$	$h_f = 1,25m_n$
Hauteur de dent	$h$	$h = 2,25m_n$
Largeur de denture	$b$	$b \geq \pi m_n / \sin \beta$
Entraxe	$a$	$a = (d_1 + d_2) / 2$

Tableau 1.2 : caractéristiques des engrenages hélicoïdaux

On constate que le diamètre primitif varie avec l'angle d'hélice  $\beta$ , il en est de même pour les diamètres de tête et de pied.

### 1.3.7 Efforts appliqués sur la dent :

La composante normale à la denture donne trois forces

Effort tangentielle

$$F_t = 2 \frac{C}{d} \quad (1.20)$$

C : couple moteur

Effort radial  $F_R$ , déterminé par la relation :

$$F_F = \frac{F_t}{\cos \beta} \cdot \tan \alpha \quad (1.21)$$

Effort axial A, déterminé par la relation :

$$F_a = F_t \cdot \tan \beta \quad (1.22)$$

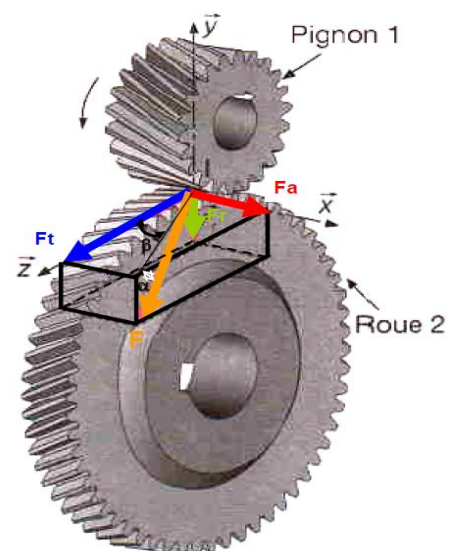


Fig. 1.16 : Efforts appliqués sur la roue dentée



### 1.3.8 Conséquences de l'inclinaison de la denture

- Douceur d'entraînement, d'où fonctionnement silencieux. L'incurvation des dents en hélice a

pour effet de réduire le glissement, d'assurer un contact progressif, d'augmenter la longueur de conduite des flancs conjugués.

- Possibilité d'obtenir des entraxes quelconques en faisant varier l'angle d'hélice  $\beta$

La formule de l'entraxe est similaire à celle de l'engrenage droit à denture droite, avec les modules apparents bien entendu **L'entraxe « a »** est :

$$a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = \frac{m_t}{2}(Z_1 + Z_2) = \frac{m_n}{2\cos\beta}(Z_1 + Z_2) \quad (1.23)$$

$d_1, d_2$  : diamètres primitifs,  $Z_1, Z_2$  : nombre de dents pour le pignon et la roue

de la relation précédente on peut tirer l'angle  $\beta$ , car ces données  $m_n, a, Z_1, Z_2$  sont imposées

$$\cos\beta = \frac{m_n}{2a}(Z_1 + Z_2) \quad (1.24)$$

- Comme les engrenages cylindriques à dentures droites, l'action de contact agissant aux dentures se projette suivant une composante radiale et l'autre tangentielle. Mais il y a une naissance d'une poussée axiale qu'il faut la remédier.

### 1.3.9 Compensation de l'effort axial dans les réducteurs à engrenages hélicoïdaux :

Les dentures hélicoïdales provoquent une poussée axiale, d'où la nécessité de l'emploi de butées. La poussée axiale est proportionnelle à l'angle d'hélice  $\beta$ . On peut donc réduire la poussée axiale en diminuant l'angle d'hélice, mais on peut également la supprimer, en utilisant des :

- **Roues à chevrons :**

Deux dentures hélicoïdales sont taillées en sens inverse sur la même roue. Ces roues ont donné le sigle des usines Citroën figure 18a.

- **Roues à dentures inversées accolées :**

Les roues sont fixées entre-elles, un positionnement angulaire précis entre les deux roues accolées doit être réalisé figure 18b.

- **Inclinaison des dentures sur les arbres intermédiaires des réducteurs :**

Les dentures sur les arbres intermédiaires doivent être inclinées dans le même sens pour que les efforts axiaux se compensent (dirigés en sens inverses). Le moto-réducteur ci-contre en montre une application figure 18c.

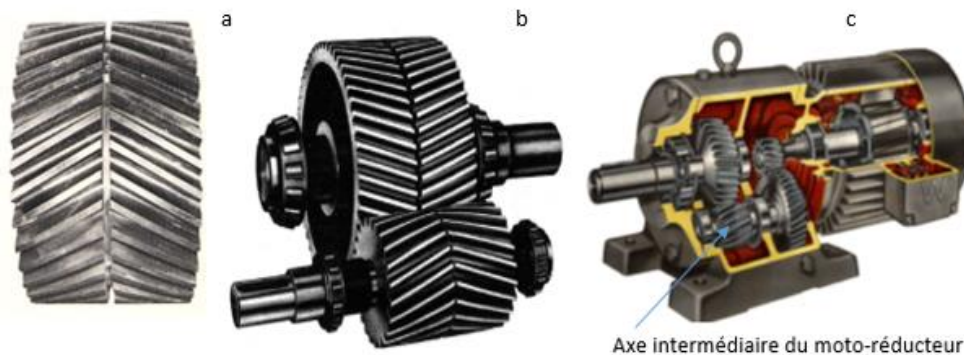


Fig.1.17 : (a) Roues à chevrons, (b) Roues à dentures inversées accolées (c), Inclinaison des dentures

### 1.3.10 Applications

#### Exercice 1

Un moteur électrique tournant à 720 tr/mn, transmet une puissance de 3680 w à un arbre récepteur devant tourner 240 tr/mn. Les roues dentées utilisées sont cylindriques à dentures hélicoïdales et à axe parallèles avec  $\beta = 25^\circ$ ; l'entraxe approximatif  $e_a = 240 \text{ mm}$  et  $\sigma_{pe} = 30 \text{ MPa}$ ,  $K = 8$

- 1) Déterminer pour les deux roues les éléments de taillage

#### Solution

- *Calcul des diamètres primitifs approximatifs*

- Le rapport de transmission

$$K_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3} \Rightarrow d_1 = 3 d_2 \quad (1)$$

-

$$- \text{ Entraxe} \quad a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = 240 \Rightarrow d_1 + d_2 = 480 \text{ mm} \quad (2)$$

de (1) et (2) on tire  $d_1 = 120 \text{ mm}$  et  $d_2 = 360 \text{ mm}$

- *Calcul des modules réel et apparent*

Le module réel est calculé d'après la formule suivante :  $m_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{T}{K \cdot \sigma_e \cos \beta}}$

$$\text{Avec} \quad K \geq \frac{\pi}{\sin \beta}, \text{ soit } K \geq 7,83 = 8 \quad \text{et} \quad T = \frac{60P}{\pi \cdot d_1 \cdot N_1}$$

$$m_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{60P}{K \cdot \pi \cdot d_1 \cdot N_1 \cdot \sigma_e \cos \beta}}$$

Après la substitution, on trouve

$m_r \geq 4,52$  , on choisit  $m_r = 5$  (valeur normalisée)

Le module apparent  $m_a = \frac{m_r}{\cos \beta} = \frac{5}{\cos 25^\circ}$  soit  $m_a = 5,516$

- *Calcul les diamètres définitifs*

$$d_1 = m_a Z_1 \Rightarrow Z_1 = \frac{d_1}{m_a} = \frac{120}{5,516} = 21,75 \rightarrow Z_1 = 22 \text{ dents}$$

$$K_{12} = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow Z_2 = 3 \cdot Z_1 = 3 \cdot 22 = 66 \text{ dents}$$

*Diamètres définitifs*

$$d_1 = M_a Z_1 = 5,516 \cdot 22 = 121,352 \text{ mm}$$

$$d_2 = M_a Z_2 = 5,516 \cdot 66 = 364,056 \text{ mm}$$

Pour accepter ces valeurs, il faut vérifier à la fois le rapport de transmission et l'entraxe " a "

$$K_{12} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3} \quad \text{Vérfifié}$$

$$- \text{ Entraxe} \quad a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = 242,704 \text{ mm} \quad \text{n'est pas vérifié}$$

Remarque:

Pour l'angle  $\beta = 25^\circ$  , l'entraxe calculé est différent de l'entraxe approché, pour avoir un entraxe exact ou acceptable, il suffit de changer l'angle  $\beta$ .

Cherchons une nouvelle valeur de l'angle  $\beta$  en se basant sur les diamètres trouvés

$$a = \frac{1}{2} m_a (Z_1 + Z_2) = \frac{m_r}{\cos\beta} (Z_1 + Z_2) \Rightarrow \cos\beta = \frac{m_r}{2a} (Z_1 + Z_2)$$

Avec  $m_r = 5$  ,  $Z_1 = 22$  ,  $Z_2 = 66$   $a = 240$  mm  $\Rightarrow \beta = 23^\circ, 55'$

Maintenant en refait le calcul avec  $\beta = 23^\circ, 55'$

Les résultats trouvés :  $m_r = 5$  ,  $m_a = 5.458$  ,  $a = 240,152$  mm est acceptable.

### Exercice 2

Même question (les éléments de taillages)

n moteur électrique tournant à 1650 tr/mn, transmet une puissance de 4600 w à un arbre récepteur devant tourner à 330 tr/mn. Les roues dentées utilisées sont cylindriques à dentures hélicoïdale et axe parallèles avec  $\beta = 20^\circ$ ; 'entraxe approximatif  $a = 270$  mm et  $\sigma_{pe} = 80$  MPa.

**Solution** : *A vous de travailler*

Résultats :  $m_r = 2,5$  ,  $Z_1 = 34$  mm,  $Z_2 = 170$  mm,  $d_1 = 91,39$  mm,  $d_2 = 456,96$  mm ,

$a = 271,71$ mm

Pour ajuster la valeur de l'entraxe, on cherche une autre valeur de l'angle  $\beta$

$\cos\beta = \frac{m_r}{2a} (Z_1 + Z_2)$  , donc ,  $\beta = 19^\circ, 18'$  cette valeur donne une valeur acceptable de l'entraxe  $a = 269,89$  mm  $\approx 270$  mm

### Exercice 3

Soit un engrenage cylindrique à denture hélicoïdale a les caractéristiques suivantes un nombre de dents  $Z=66$  dents, un diamètre de tête  $d_a = 400$  mm (exactement),  $d_f = 375$  mm (approx.)

Calculer

- Le module réel ; Le diamètre de pied ; Le diamètre primitif ; L'angle d'inclinaison et la largeur de la roue.

**Solution**

- *Le module réel*

Les diamètres sont donnés par les deux relations suivantes

$$d_a = d + 2m_r = m_a Z + 2m_r = \frac{m_r Z}{\cos\beta} + 2m_r = m_r \left( \frac{Z}{\cos\beta} + 2 \right)$$

$$d_a = m_r \left( \frac{Z}{\cos\beta} + 2 \right) \quad (1) \quad \text{et} \quad d_f = m_r \left( \frac{Z}{\cos\beta} - 2,5 \right) \quad (2)$$

La différence de (1) et (2) donne  $\frac{d_a}{m_r} - \frac{d_f}{m_r} = 4,5 \Rightarrow m_r = 5,55$

- *L'angle d'inclinaison*

L'addition de (1) et (2) donne  $\frac{d_a}{m_r} - 2 + \frac{d_f}{m_r} + 2,5 = \frac{2Z}{\cos\beta}$

$$\text{On tire} \quad \cos\beta = 2z \left( \frac{1}{\frac{d_a}{m_r} + \frac{d_f}{m_r} + 0,5} \right) \Rightarrow \beta = 21^\circ, 01'$$

- *La largeur b*  $b = \frac{\pi m_r}{\sin\beta} = \frac{\pi 5,55}{\sin(21^\circ, 01')} = 48,60 \text{ mm}$

- *Les diamètres*

-  $d_a = m_a z = \frac{m_r}{\cos\beta} z = \frac{5,55 \cdot 66}{\cos(21^\circ, 01')} = 392,38 \text{ mm}$

-  $d_f = m_r \left( \frac{z}{\cos\beta} - 2,5 \right) = 5,55 \left( \frac{66}{\cos(21^\circ, 01')} - 2,5 \right) = 378,51 \text{ mm}$

-

#### Exercice 4

On veut réaliser une transmission de puissance entre deux arbres parallèles dont l'entraxe est définitivement fixé à 80 mm, en utilisant des roues cylindriques à dentureS hélicoïdales. Les arbres moteur et récepteur doivent tourner respectivement à 1000 et 750 tr/mn. La condition de résistance de la dent en flexion implique l'utilisation d'un module réel compris entre 2 et 3, la largeur  $b = 23,56 \text{ mm}$

*Calculer :*

- Les diamètres primitifs ;
- L'angle d'inclinaison d'hélice de chacune des roues ;
- Le nombre de dents.

#### Solution

- *Les diamètres*

Pour calculer les diamètres, on prend par exemple  $m_r$

$$a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = \frac{d_2}{2} \left( \frac{d_1}{d_2} + 1 \right) = \frac{d_2}{2} (K_{12} + 1)$$

Donc le diamètre  $d_2 = \frac{2a}{K_{12}+1} = \frac{2.80}{0.75+1} = 91,42 \text{ mm}$

Le diamètre  $d_1 = d_2 \cdot K_{12} = 91,42 \cdot 0,75 = 68,57 \text{ mm}$

- *L'angle d'inclinaison*

On peut tirer l'angle  $\beta$  à partir de la largeur  $b \geq \frac{m_r \pi}{\sin \beta}$  avec  $m_r = 2$

$$\sin \beta \geq \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \beta \geq \text{Arcsin} \left( \frac{2\pi}{b} \right), \quad \beta = \text{Arcsin} \left( \frac{2\pi}{23,56} \right) = 15^\circ, 46'$$

- *Le nombre de dents*

Pour déterminer le nombre de dents, il faut calculer le module apparent  $m_a$

$$m_r = m_a \cos \beta \Rightarrow m_a = \frac{2}{\cos(15^\circ, 46')} = 2.07508$$

$$Z_1 = \frac{d_1}{m_a} = \frac{68,57}{2,075} = 33,04 \text{ on prend } Z_1 = 33 \text{ dents}$$

$$K_{12} = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow Z_2 = \frac{Z_1}{K_{12}} = \frac{33}{0,75} = 44 \quad \text{donc, } Z_2 = 44 \text{ dents}$$

## 1.4 Les Engrenages coniques (E.C.)

### 1.4.1 Introduction

Les engrenages coniques sont des engrenages à axes concourants figure 19. Ils permettent de transmettre le mouvement entre deux arbres concourants, avec un rapport de vitesse rigoureux. Les conditions d'engrènement imposent que les deux roues doivent avoir même module et que les sommets des deux cônes soient confondus. Ce dernier impératif oblige le concepteur à un centrage très précis des deux roues pour assurer un fonctionnement correct. Il faut donc prévoir au montage un réglage axial des deux roues. On peut utiliser par exemple des boîtiers et des cales de réglage.

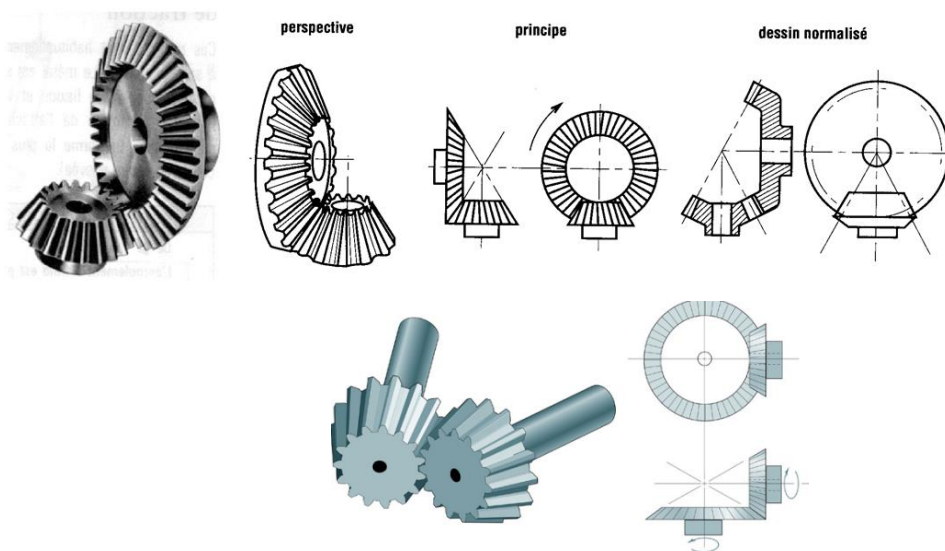


Fig. 18: les Engrenages Coniques

### 1.4.2 Avantages et inconvénients des roues coniques

#### a) Avantages

- Transmission de puissance entre arbre concourants ;
- Très grande puissance.

### b) Inconvénient

- Les roues coniques ne vont que par paire ;
- Réglage précis pour la coïncidence des sommets (S) ;
- La présence d'efforts axiaux importants ce qui entraîne l'utilisation de butée, de roulement à contact oblique.

### 1.4.3 Définitions

- *Cône primitif, angle primitif  $\delta$*  : cône décrit par l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de la roue conjuguée par rapport à la roue considérée. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle primitif  $\delta$  ;
- *Cône de tête, angle de tête  $\delta_a$*  : cône enveloppe des sommets des dents. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle de tête  $\delta_f$  ;
- *Cône de pied, angle de pied  $\delta_f$*  : cône enveloppe des bases des dents. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle de pied  $\delta_f$  ;

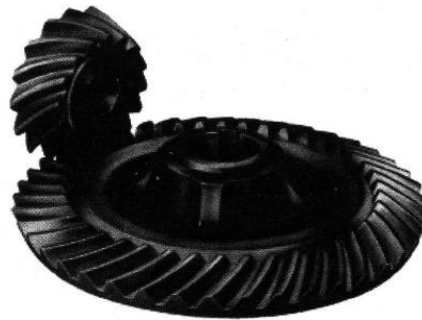
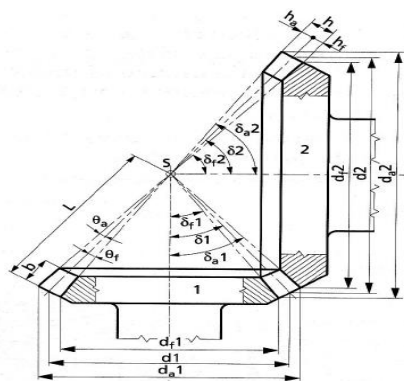


Fig. 1.19: Les éléments d'un engrenage Coniques

- *Cône complémentaire* : cône dont les génératrices sont perpendiculaires à celles du cône primitif, à l'extrémité externe de la largeur de la denture ;
- *Diamètre primitif  $d$*  : diamètre du cercle intersection du cône primitif et du cône complémentaire (cercle primitif) ;
- *Diamètre de tête  $d_a$*  : diamètre du cercle intersection du cône de tête et du cône complémentaire (cercle de tête) ;



- *Diamètre de tête  $d_f$*  : diamètre du cercle intersection du cône de pied et du cône complémentaire (cercle de pied) ;
- *Largeur de denture  $b$*  : largeur de la partie dentée de la roue mesurée suivant une génératrice du cône primitif ;
- *Saillie  $h_a$*  : distance entre le cercle primitif et le cercle de tête mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire ;
- *Creux  $h_f$*  : distance entre le cercle primitif et le cercle de pied mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire ;
- *Angle de saillie  $\theta_a$*  : différence entre l'angle de tête et l'angle primitif ;
- *Angle de pied  $\theta_f$*  : différence entre l'angle de pied et l'angle primitif.
- *Pas  $P$*  : longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils homologues consécutifs ;
- *Hauteur de dent  $h$*  : distance entre le cercle de tête et le cercle de pied, mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.

#### 1.4.4 Rapport de transmission

##### 1.4.4.1 Principe

Soient  $N_1$  et  $N_2$  les vitesses respectives des roues coniques 1 et 2. et soient  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les demi-angles aux sommets des cônes primitifs. Soit un point  $M$  sur la génératrice de contact des cônes primitifs., et soit  $S$  le sommet commun des cônes primitifs. Soient  $r_1$  et  $r_2$  les rayons des cônes primitifs au point  $M$ .

$$K_{12} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (1.25)$$

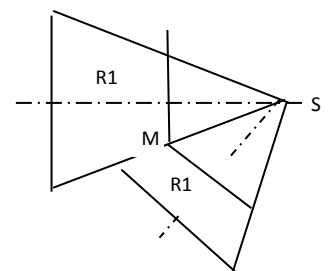
Or  $r_1 = SM \sin \delta_1$  et  $r_2 = SM \sin \delta_2$

On obtient la relation :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2}$$

Le rapport des vitesses détermine donc les demi-angles au sommet.

Dans le cas où  $d_1$  et  $d_2$  sont orthogonaux ( $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ )



Le rapport de transmission s'écrit :

$$K_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin(90-\delta_1)} = \frac{\sin \delta_1}{\cos \delta_1} = \tan \delta_1$$

$$K_{12} = \tan \delta_1 \tag{1.26}$$

A. Engrenage extérieur

Fig. 20a

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta_1 &= \frac{z_1}{z_2} \\ \tan \delta_2 &= \frac{z_2}{z_1} \\ \Sigma &= 90^\circ \end{aligned} \right\}$$

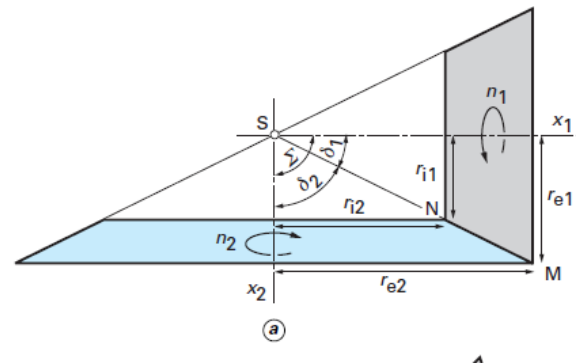


Fig.20 b

$$\left. \begin{aligned} \Sigma < 90^\circ \\ \tan \delta_2 &= \frac{\sin \Sigma}{\frac{z_1}{z_2} + \cos \Sigma} \\ \delta_1 &= \Sigma - \delta_2 \end{aligned} \right\}$$

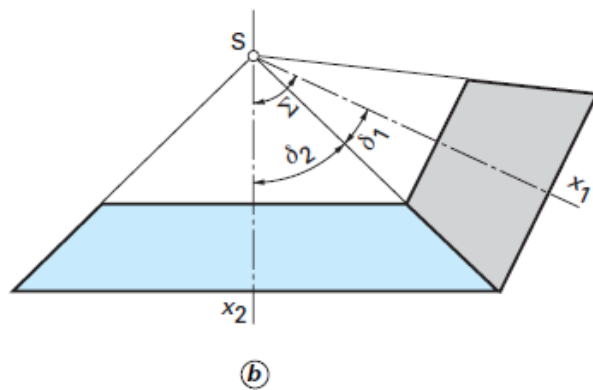
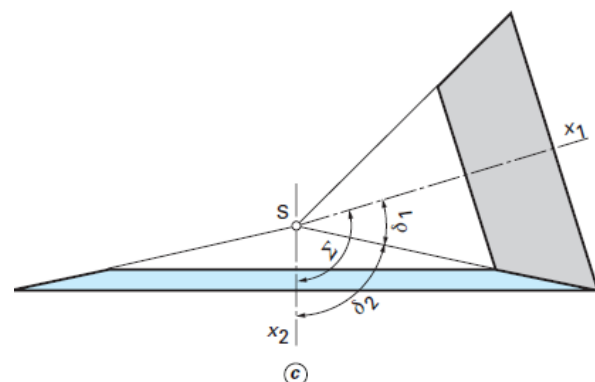


Fig.20c

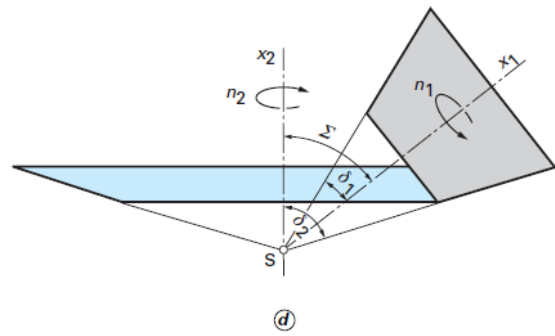
$$\left. \begin{aligned} \Sigma > 90^\circ \\ \tan \delta_2 &= \frac{\sin(180^\circ - \Sigma)}{\frac{z_1}{z_2} - \cos(180^\circ - \Sigma)} \\ \delta_1 &= \Sigma - \delta_2 \end{aligned} \right\}$$



B. Engrenage intérieur

Fig.20d

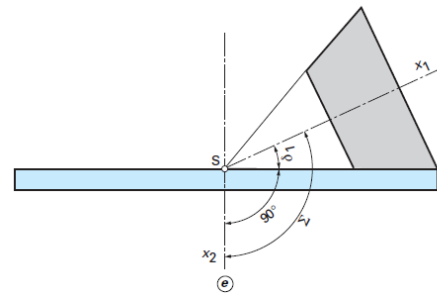
$$\left. \begin{aligned} \Sigma < 90^\circ \\ \tan \delta_2 &= \frac{\sin \Sigma}{\sin \Sigma - \frac{z_1}{z_2}} \\ \delta_1 &= \delta_2 - \Sigma \end{aligned} \right\}$$



Engrenage pignon-roue plate

Fig.20e

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 &= 90^\circ \\ \Sigma &= \delta_1 + 90^\circ \end{aligned} \right\}$$



1.4.5 Module Moyen

Le module moyen est donné par  $M_m \geq 2.34 \sqrt{\frac{T}{K\sigma_e}}$  (1.27)

T effort tangentiel  $T = \frac{60 P}{\pi d_{m1} N_1}$  ou bien  $(\frac{60 P}{\pi d_{m2} N_2})$

Le module normalisé

$$\frac{M_m}{r_m} = \frac{m}{r} \Rightarrow m = r \frac{M_m}{r_m} \text{ avec } r = r_m + \frac{b}{2} \sin \delta$$

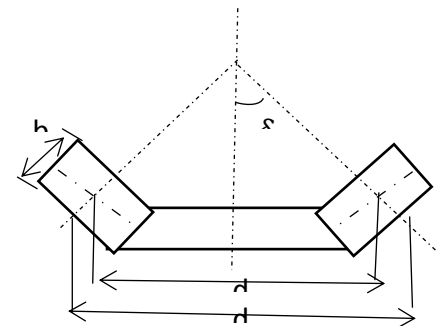


Fig.1.21 : Calcul du module *m*

D'où

$$m = (r_m + \frac{b}{2} \sin \delta) \frac{M_m}{r_m} \quad (1.28)$$

*m* : module normalisé de la série

Quand le nombre de dent est connu  $M_m \geq \sqrt[3]{\frac{10,94 C_m}{K \cdot Z \cdot \sigma_{pe}}}$  (1.29)

*C<sub>m</sub>* : Moment de couple à transmettre, *Z* : nombre de dents

### 1.4.6 Caractéristiques des engrenages à dentures coniques

Tableau 1

Désignation	Symbole	Formule
Module	$m$	Par un calcul de RDM
Nombre de dents	$Z$	Par un rapport de vitesse
Angle primitif	$\delta$	$\tan \delta_1 = Z_1/Z_2$
Diamètre primitif	$d$	$d_1 = mZ_1$ et $d_2 = mZ_2$
Largeur de denture	$b$	$b = km$ ( $5 \leq k \leq 16$ )
Diamètre de tête	$d_a$	$d_{a1} = d_1 + 2m \cos \delta_1$
Diamètre de pied	$d_f$	$d_{f1} = d_1 - 2,5m \cos \delta_1$
Saillie	$h_a$	$h_a = m$
Creux	$h_f$	$h_f = 1,25m$
Hauteur de dent	$h$	$h = 2,25m$
Angle de saillie	$\theta_a$	$\theta_a = m/L$
Angle de creux	$\theta_f$	$\theta_f = 1,25m/L$
Angle de tête	$\delta_a$	$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_a$
Angle de pied	$\delta_f$	$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_f$

### 1.4.7 Efforts sur la denture :

L'effort normal à la denture (F) donne ici trois efforts en projection sur les trois directions principales de la roue dentée (tangentielle T, axiale A et radiale R) figure 1.22.

- T est l'effort tangentielle déterminé à partir du couple
- La force F se compose de deux forces (T et Q, angle de pression  $\alpha$ ), puis l'effort Q se compose en (A et R, angle du cône  $\delta$ )

$$\tan \alpha = \frac{Q}{T} \Rightarrow Q = T \tan \alpha$$

$$\begin{cases} \sin \delta = \frac{A}{Q} \Rightarrow A = Q \sin \delta \\ \cos \delta = \frac{R}{Q} \Rightarrow R = Q \cos \delta \end{cases} \quad (1.30)$$

Remplaçons la valeur de Q dans le système (1.30) alors, les efforts axiale et radiale s'écrivent :

$$\begin{cases} A = T \cdot \tan \alpha \cdot \sin \delta \\ R = T \cdot \tan \alpha \cdot \cos \delta \end{cases} \quad (1.31)$$

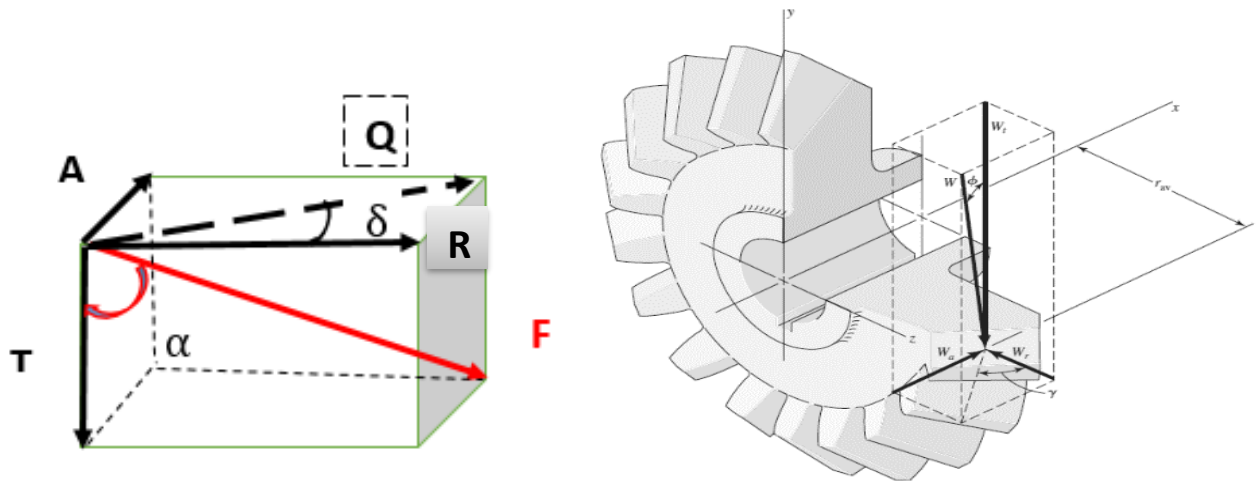


Fig.1.22 : Les efforts appliqués sur la dent de la roue conique

### 1.4. 8 Applications

#### Exercice 1

Il s'agit de transmettre une puissance de 1,5 kW entre deux arbres perpendiculaires et concourants dont les fréquences de rotation sont respectivement 400+- 5 tr/min

1) Définir, pour chacune des roues coniques à denture droite pyramidales, les éléments de taillage donnés dans le tableau 1, si la contrainte pratique en extension de l'acier constituant les engrenages est  $\sigma_{pe} = 140 \text{ MPa}$ : on donne le nombre de dents du pignon 1 :  $Z_1 = 23$

*Solution*

- *Calcul du module moyen*

D'après la relation du module  $M_m \geq \sqrt[3]{\frac{10,94C_m}{K.Z.\sigma_{pe}}}$  avec  $C_m$  : moment de torsion

$$P = C_m \cdot \omega \quad \text{pour la roue 1} \quad P = C_{m1} \omega_1$$

$$\text{Donc} \quad C_m = \frac{30P}{\pi N_1} = \frac{30 \cdot 1,5 \cdot 1000}{\pi 400} = 35,81 \text{ N.m}$$

La constante  $K \geq 5$  on prend  $K=5$ , mais cette valeur peut ensuite être augmentée

$$M_m \geq \sqrt[3]{\frac{10,9435,81 \cdot 10^3}{5 \cdot 140 \cdot 23}} = 2,89$$

- *Calcul des angles  $\delta_1$  et  $\delta_2$*

$$K_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{250}{400} = 0.625 \quad \text{avec} \quad Z_1 = 23 \text{ d'ou } Z_2 = \frac{23}{0.625} = 36,8$$

On peut prendre  $Z_2 = 37 \text{ dents}$

$$\tan \delta_1 = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow \delta_1 = 31^\circ, 51'$$

On sait que  $(\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ \Rightarrow \delta_2 = 58^\circ, 09')$

- Calcul du diamètre primitif approché  $d_1^*$

$$d_1^* = d_{m1} + 2\left(\frac{b}{2} \sin \delta_1\right) \quad \text{Avec} \quad d_{m1} = M_m Z_1 = 2,89 \cdot 23 = 66,47 \text{ mm}$$

- Largeur de la dent  $b = K \cdot M_m = 5 \cdot 2,89 = 14,45$  soit  $b = 15$

$$\text{D'où} \quad d_1^* = 66,47 + 2\left(\frac{15}{2} \sin 31,51\right) = 74,38 \text{ mm}$$

- Calcul des diamètres primitifs définitifs  $d_1$  et  $d_2$

$$d_1^* = m \cdot Z_1 \Rightarrow m = \frac{74,38}{23} = 3,23 \quad \text{On prend } M=3,25 \quad \text{d'après le tableau du module normalisé}$$

$$d_2 = m \cdot Z_2 = 3,25 \cdot 37 = 120,25 \text{ mm}$$

$$d_1 = m \cdot Z_1 = 3,25 \cdot 23 = 74,75 \text{ mm}$$

Pour les éléments de taillage, il faut faire une application numérique (tableau 1)

$$\frac{245}{400} \leq K_{12} \leq \frac{255}{400} \Rightarrow 0.612 \leq K_{12} \leq 0.637.$$

### Exercice 2

On veut assurer une transmission de puissance entre deux axes perpendiculaires et concourant en utilisant des roues coniques à dentures droites. Les diamètres de têtes des roues coniques  $da1$  et  $da2$  sont respectivement 100 et 150 mm, l'épaisseur de la dent  $e = 5.495$  mm

- Montrer qu'on peut écrire  $\tan \delta_1$  sous la forme suivante  $\tan \delta_1 = \frac{da1 - mZ2}{da1 - mZ1}$

Pour  $Z_1 = 15$  et  $Z_2 = 30$  dents, calculer :

- Les valeurs de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et le rapport  $K_{12}$  ;
- Déterminer les diamètres primitifs définitifs  $d_1$  et  $d_2$  ;
- Calculer les caractéristiques géométriques d'une roue dentée conique.

### Solution

$$\text{Le module} \quad e = \frac{m \pi}{2} \Rightarrow m = \frac{2e}{\pi} = \frac{2 \cdot 5,495}{\pi} = 3,5$$

$$90^\circ = \delta_2 + \delta_1 \Rightarrow \delta_2 = 90^\circ - \delta_1$$

$$\cos \delta_2 = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \delta_1 \right) = \cos \delta_1 \cos \frac{\pi}{2} + \sin \delta_1 \sin \frac{\pi}{2} = \sin \delta_1$$

Les diamètres sont donnés par

$$d_{a1} = d_1 + 2 m \cos \delta_1 \quad \text{avec } d_1 = m Z_1 \quad \text{et } d_2 = m Z_2$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 m \cos \delta_2$$

$$\begin{cases} d_{a1} = d_1 + 2 m \cos \delta_1 \\ d_{a2} = d_2 + 2 m \cos \delta_2 \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\cos \delta_2 = \sin \delta_1$  le système (1) devient :

$$\begin{cases} d_{a1} = d_1 + 2 m \cos \delta_1 \\ d_{a2} = d_2 + 2 m \sin \delta_1 \end{cases} \quad \text{Après manipulation le système devient}$$

$$\begin{cases} \cos \delta_1 = \frac{d_{a1} - m Z_1}{2 m} \\ \sin \delta_2 = \frac{d_{a2} - m Z_2}{2 m} \end{cases} \quad \text{On fait le rapport d'équation on trouve :}$$

$$\text{Donc, } \tan \delta_1 = \frac{d_{a2} - m Z_2}{d_{a1} - m Z_1}$$

Pour  $Z_1 = 15$  et  $Z_2 = 30$  dents

$$\tan \delta_1 = \frac{150 - 3,5 \cdot 30}{100 - 3,5 \cdot 15} = 0,94 \Rightarrow \delta_1 = 43^\circ, 45'$$

$$\text{Et } \delta_2 = 90^\circ - \delta_1 = 90 - 43,45 = 46^\circ, 55'$$

- *Le rapport de transmission*  $K_{12} = \tan \delta_1 = 0,94$
- *Les diamètres sont* :  $d_1 = m Z_1 = 3,5 \cdot 15 = 52,5 \text{ mm}$  et  $d_2 = m Z_2 = 3,5 \cdot 30 = 105 \text{ mm}$
- *La pression superficielle*

La limite de la pression superficielle  $\sigma_{lim}$

$$\sigma_{Lim} = 0.6 \sqrt{\frac{F}{b} \frac{\rho}{\gamma}}$$

Effort de contact sur la denture

$$F = \frac{T}{\cos \alpha} \quad \text{avec } T = \frac{2C}{d}$$

Le couple  $C = \frac{P}{\omega} = \frac{30 P}{\pi N_1} = \frac{30,6250}{\pi \cdot 960} = 62,2 \text{ N.m}$

Effort tangentiel est  $T = \frac{2 \cdot 62200}{50} = 2488 \text{ N}$

- Donc la force d'action est  $F = \frac{2488}{\cos(20^\circ)} = 2647 \text{ N}$

- Largeur de la dent  $b = 10,4 = 40 \text{ mm}$

-

Les rayons de courbures

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (+) \text{ puisque des engrenages extérieurs}$$

$$\rho_1 = \frac{50}{2} \sin(20^\circ) = 8,55 \text{ mm} \quad , \quad \rho_2 = \frac{91,24}{2} \sin(20^\circ) = 15,60 \text{ mm}$$

- Donc, la valeur de  $\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8,55} + \frac{1}{15,60} \right) = 0,090 \text{ mm}$

- Le coefficient  $\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} \pm \frac{1}{E_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cdot 10^5} + \frac{1}{2 \cdot 10^5} \right) = 510^{-6}$

Donc la contrainte superficielle est :

-  $\sigma_{\text{Lim}} = 0,6 \sqrt{\frac{2647 \cdot 0,090}{40 \cdot 510^{-6}}} = 654,83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

-

### Exercice 3

On veut assurer une transmission de puissance entre deux axes perpendiculaires et concourant en utilisant des roues coniques à dentures droites. La puissance transmise par l'arbre moteur tournant à 520 tr/mn et de 736 tr/mn. Le rapport de réduction exigé est de 0,75. Dans les calculs on adoptera un rayon  $r_m = 25 \text{ mm}$ . on donne la contrainte pratique du matériau  $\sigma_{pe} = 80 \text{ MPa}$  et  $K=10$

*Calculer*

- Les angles primitifs ;
- Le module moyen et le module normalisé ;
- Le diamètre primitif approximatif du pignon ;
- Les nombres de dents ;
- Le diamètre primitif définitif.



Solution*Les angles primitifs*

$$K_{12} = \tan \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = \text{Arc tan } K_{12} = \text{Arctan}(0,75) = 36^\circ, 87'$$

$$90 = \delta_2 + \delta_1 \Rightarrow \delta_2 = 90 - \delta_1 = 53^\circ, 13'$$

- *Le module moyen*  $M_m \geq 2.34 \sqrt{\frac{T}{K\sigma_e}}$

Avec  $T$ , effort tangentiel  $T = \frac{60 P}{\pi d_{m1} N_1}$  ou bien  $\left(\frac{60 P}{\pi d_{m2} N_2}\right)$

$$T = \frac{60 \cdot 736}{\pi \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 520} = 540,91 \text{ N}$$

Le module moyen est donné par :  $M_m \geq 2.34 \sqrt{\frac{540,91}{10.80}} = 1,82$

*Le module normalisé*

$$m = \left( r_{m1} + \frac{K \cdot M_m}{2} \sin \delta_1 \right) \frac{M_m}{r_{m1}} = \left( 25 + \frac{10 \cdot 1,92}{2} \sin (36,87) \right) \frac{1,92}{25} = 2; 36$$

D'après les valeurs normalisées de module  $m = 2,5$ *Le diamètre primitif approximatif du pignon*

$$d'_1 = d_{m1} + b \sin \delta_1 = 50 + 10 \cdot 1,92 \sin (36^\circ, 87) = 61,52 \text{ mm}$$

*Les nombres de dents*

$$d'_1 = m Z_1 \Rightarrow Z_1 = \frac{d'_1}{m} = \frac{61,52}{2,5} = 24,61 \quad \text{On prend par exemple 25 dents}$$

$$K_{12} = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow Z_2 = 32,81 \quad \text{On prend par exemple 33 dents}$$

$$K_{12} = \frac{25}{33} = 0,7575 \quad \text{N'est pas accepté}$$

Si on ne prend pas exemple  $Z_2 = 32$ ,  $Z_{12} = 24$  et en refait le calcul du rapport de transmission

$$K_{12} = \frac{24}{32} = 0,75 \quad \text{C'est vérifié.}$$

Alors, les diamètres définitifs sont :  $d_1 = m \cdot Z_1 = 2,5 \cdot 24 = 60$  et  $d_2 = m \cdot Z_2 = 2,5 \cdot 32$ 

$$d_2 = 80 \text{ mm}$$

Exercice 4

Sur un couple de roues coniques à dentures droite pyramidale de 30 à 40 dents, on a mésuré approximativement l'épaisseur de la dent  $e = 7 \text{ mm}$ .

Calculer

- L'angle des cônes primitifs ; Le module ; Les diamètres primitifs ; Le diamètre de tête.

Solution

- Les angles  $\delta_1$  et  $\delta_2$

Le rapport de transmission est donné par :  $\tan \delta_1 = \frac{Z_1}{Z_2}$

Donc l'angle  $\delta_1 = \arctan\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arctan\left(\frac{30}{40}\right) \Rightarrow \delta_1 = 36^\circ, 87'$

et  $90 = \delta_2 + \delta_1 \Rightarrow \delta_2 = 90 - \delta_1 = 53^\circ, 13'$

- Le module  $m$

$e = \frac{\pi m}{2} \Rightarrow m = \frac{2e}{\pi} = \frac{2 \cdot 7}{\pi} \approx 4,46$  d'après le tableau  $m = 4,5$

- Les diamètres définitifs sont :

$$d_1 = m \cdot Z_1 = 4,5 \cdot 30 = 135 \text{ mm}$$

$$d_2 = m \cdot Z_2 = 4,5 \cdot 40 = 180 \text{ mm}$$

- Les diamètres de tête

$$d_a = d + 2h_a \cos \delta \quad \text{Avec } h_a = m = 4,5$$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a \cos \delta_1 = 135 + 2 \cdot 4,5 \cos(36^\circ, 87') = 142,2 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a \cos \delta_2 = 180 + 2 \cdot 4,5 \cos(53^\circ, 13') = 185,4 \text{ mm}$$

# 1.5 Les Engrenages à Roues et Vis sans Fin

## 1.5.1 Introduction

C'est un engrenage hélicoïdal dont les axes sont orthogonaux et non concourants figure 23. La transmission par ce type d'engrenage donne une solution simple pour les grands rapports de réduction, avec un fonctionnement peu bruyant. La poussée de la vis est forte surtout si la démultiplication est grande. On utilise alors une butée à billes ou à rouleaux ou encore des roulements à contact oblique pour réaliser la liaison pivot avec le support. Lorsque l'inclinaison des filets est faible (vis à un filet), la transmission est irréversible, ce qui est souvent utile, car le réducteur s'oppose à toute rotation commandée par la machine réceptrice (exemple : appareils de levage). Toutefois le rendement est alors faible, et de plus le couple de démarrage est beaucoup plus fort que le couple à vitesse de régime



*Fig.1 ; 23 : Roue avec Vis sans fin*

Le rendement est meilleur avec les fortes inclinaisons, à condition que les métaux en présence soient bien choisis et l'exécution des dentures très précises, avec des états de surface très soignés. Le frottement est important et donne un rendement médiocre, mais suffisant dans le cas de faibles puissances

### 1.5.2 Présentation

Lors d'une étude, un mécanisme est représenté sous la forme d'un dessin d'ensemble. Si le mécanisme est complexe, il sera utile de le schématiser et de le représenter sous forme d'un schéma cinématique.

On appelle schéma cinématique minimal celui qui représente un mécanisme avec une liaison mécanique entre deux pièces ou classe d'équivalence. On peut aussi dire que c'est une représentation d'un mécanisme qui met en évidence les possibilités de mouvements relatifs entre les groupes cinématiquement liés.

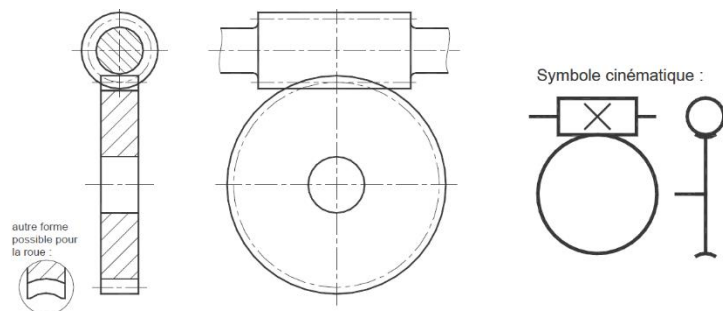


Fig.1. 24 : Présentation et schéma cinématique de la Roue- vis sans fin

Les Roues et Vis sans fin procèdent des avantages et des inconvénients on peut citer :

#### 1.5.2.1 Les avantages

Les avantages de ces engrenages par rapport aux engrenages cylindriques ou coniques :

- Le fonctionnement est silencieux et amortissant ;
- Grand rapport de vitesses pour un encombrement réduit ;
- Compacité notamment pour les rapports élevés ;
- Niveau sonore réduit, exempt de vibration, donnant une bonne qualité d'entraînement ;
- Charge radiale admissible élevée en sortie ;
- De plus en plus utilisés en combinaison avec d'autres réducteurs d'une part, et d'autres trains d'autre part afin d'améliorer le rendement.

### 1.5.2.2 Les inconvénients

Parmi les inconvénients par rapport aux engrenages cylindriques et coniques, on peut citer :

- Le mouvement de glissement des flancs cause une grande usure, une grande perte de puissance et un rendement plus bas.
- Rendement variable en fonction du rapport de réduction et de la vitesse
- Échauffement plus important que dans d'autres technologies,
- Roue bronze pouvant engendrer une usure.
- La présence de forces axiales nécessite pour les arbres l'utilisation de paliers plus rigides.

Dans un tel système, la roue est une roue cylindrique à denture hélicoïdale. D'autre part, la vis peut être assimilée elle aussi à une roue cylindrique à denture hélicoïdale dont le nombre de dents ou de filets, est au nombre 1, 2 ou 3.

Nous appellerons  $\beta_2$  et  $\beta_1$  les angles d'hélice respectivement de la roue 2 et de la vis 1. Les axes  $D_1$  et  $D_2$  sont orthogonaux.

Les angles  $\beta_2$  et  $\beta_1$  sont mesurés par rapport aux axes des engrenages :

$$\text{Notons que : } \beta_2 + \beta_1 = 90^\circ$$

Les hélices de la vis 1 et de la roue 2 sont toutes les deux à droite, ou les deux à gauche.

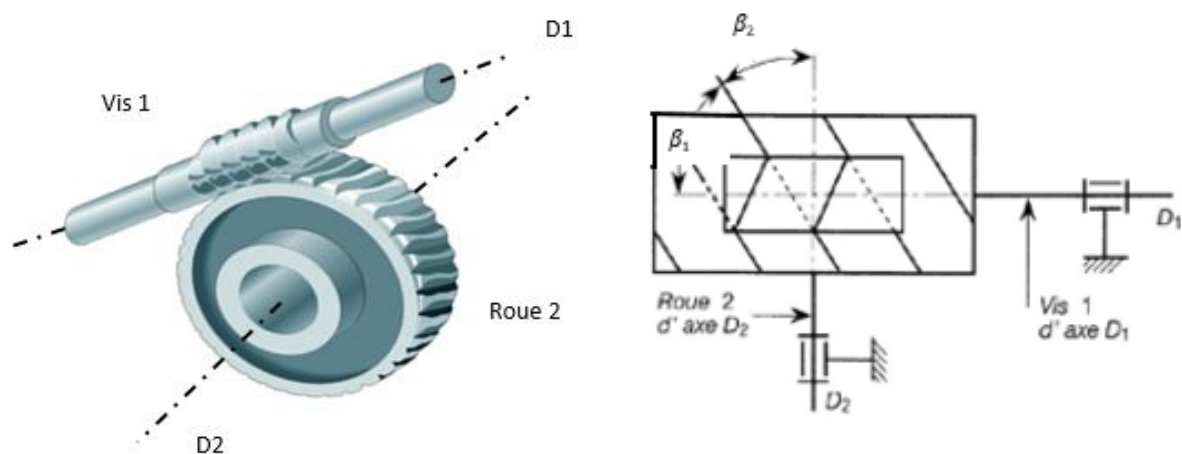


Fig.1.25: Les axes  $D_1$  et  $D_2$  sont orthogonaux.

### 1.5.3 Principales applications

- Convoyeurs, notamment les petits,
- Manutention.
  
- Treuils,
- Applications à vitesse lente (par exemple : ponts racleurs de station d'épuration. . .),
- Combinaisons souvent utilisées : réducteur roue et vis associé à une vis sans fin, plusieurs trains (schéma)



Fig.1.26 : Quelques applications

### 1.5.4 Caractéristiques dimensionnelles

Définitions de quelques caractéristiques de la roue et de la vis

#### Pour la Vis

- *Filet* : une des dents de la vis. Les vis peuvent avoir un ou plusieurs filets.
- *Cylindre de référence* : surface primitive de référence de la vis.
- *Hélice de référence* : hélice d'intersection d'un flanc avec le cylindre de référence de la vis.
- *Pas hélicoïdal*  $p_z$  : distance axiale entre deux profils homologues consécutifs d'un filet.

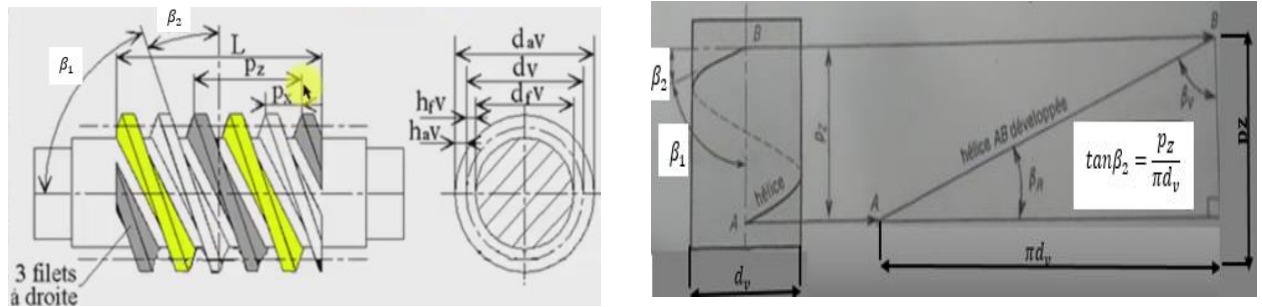


Fig.1.27 : les différents pas de la vis.

- *Pas axial*  $p_x$  : rapport entre le pas hélicoïdal et le nombre de filets (le pas axial est égal au pas hélicoïdal si le nombre de filets est égal à 1).
- *Module axial*  $m_x$  : rapport entre le pas et le nombre  $\pi$

**a) Pour la roue**

- Le profil de la roue est le profil conjugué de celui de la vis. L'engrènement d'une vis avec une roue n'est possible que si elles ont le même module axial et le même angle d'hélice. Les caractéristiques dimensionnelles de la roue sont identiques celles d'une roue à denture hélicoïdale. La roue est généralement cylindrique pour transmettre des efforts relativement faibles, mais pour transmettre des efforts importants, une roue creuse est préférable figure (28 a)

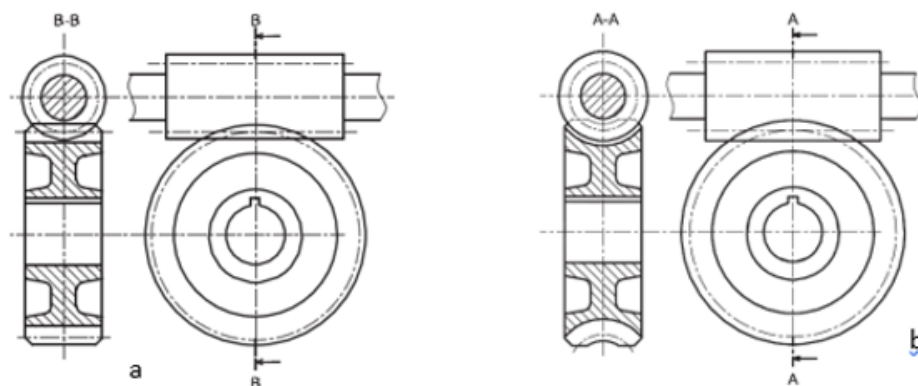


Fig.1.28 : Vis sans fin avec roue cylindrique (a) et roue creuse (b)

### 1.5.5 Relations dimensionnelles

Tableau des caractéristiques de la Roue et Vis sans fin

$m_n$	RDM	Module en mm
$Z_1$		Nombre de filets
$P_n$	$P_n = \pi \cdot m_n$	Pas primitif
$\beta_1$		Angle d'hélice
$m_t$	$m_t = m_n / \sin \beta_V$	Module axial $m_t = m_n / \cos \beta_R$
$P_t$	$P_t = \pi \cdot m_t$	Pas axial
$P_z$	$P_z = P_t \cdot Z_1 = \pi d / \tan \beta_V$	Pas de l'hélice
$d$	$d = P_z / \pi \cdot \tan \beta_V$	Diamètre primitif ( $d = m_n \cdot Z / \sin \beta_V$ )
$\alpha$	$\alpha = 20^\circ$	Angle de pression
$h$	$h = 2,25 \cdot m_n$	Hauteur de la dent
$h_a$	$h_a = m_n$	saillie
$h_f$	$h_f = 1,25 \cdot m_n$	creux
$d_a$	$d_a = d + 2 \cdot m_n$	Diamètre de tête
$d_f$	$d_f = d - 2,5 \cdot m_n$	Diamètre de pied
Relations cinématiques		
Rapport de transmission	$N_2 / N_1 = Z_1 / Z_2 = D \cdot \tan \beta_V / d$	

**Remarque :**  $m_n = m_r$  ,  $P_n = P_r$  ,  $m_x = m_a$  et  $P_x = P_a$

### 1.5.6 Caractérisation d'un engrenage gauche : le système roue-vis sans fin

#### a) Caractéristiques de la roue

Sont similaires à celles d'une roue à denture hélicoïdale d'angle d'hélice  $\beta_R = \gamma_{vis}$  de même sens pour la vis et la roue.

#### a) Développement de la vis

Pour la vis en faisant rouler le cylindre primitif de la vis 1, autour de son axe sur un plan on obtient le développement voir, figure 29



-  $M_{a1}$  : module apparent de la vis.

-  $M_{r1}$  : module réel de la vis.

$$\tan\beta = \frac{n M_{a1}}{d_1} \quad \text{et} \quad \sin\beta = \frac{n M_{r1}}{d_1} = \cos\gamma$$

**1<sup>ère</sup> cas :**

$$m_r \geq 2,34 \sqrt{\frac{T}{K_n \sigma}} \quad (\text{mm})$$

$$K_n = \frac{K}{\cos\beta_2}, \quad \text{Avec} \quad K=10 \quad (\text{généralement})$$

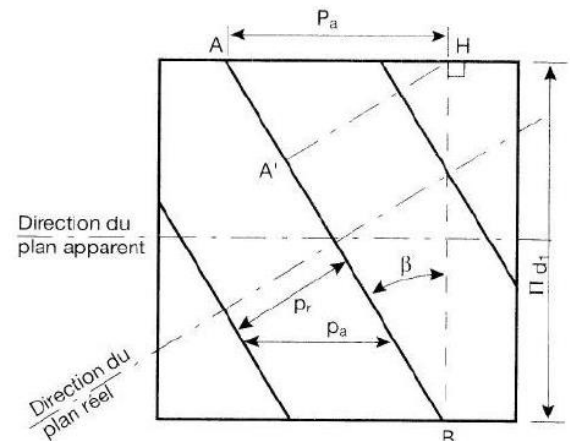


Fig.1.29 : différents plans

$\beta_2$  : angle de l'inclinaison de la dent de la roue

**2<sup>ème</sup> cas :**

Nous avons  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$

- si  $\frac{N_1}{N_2} \geq 30$  , la vis est à 1 filet et  $Z_2 = \frac{N_1}{N_2}$
- si  $\frac{N_1}{N_2} < 30$  la vis est à 2 filet ou 3 filets

$$Z_2 = n \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow Z_2 = 2 \frac{N_1}{N_2} \quad \text{ou} \quad Z_2 = 3 \frac{N_1}{N_2}$$

$Z_1$  : Nombre de filets de la vis,  $Z_2$  : Nombre de dents de la roue ;  $n$  : nombre de filet par pas principale



Fig. 1.30 : Vis à 1 et 3 filets

$$m_r \geq 10 \sqrt[3]{\frac{11P}{K_n \sigma Z_2 \omega_2}} \quad (m \text{ m})$$

P en (W) ;  $Z$ , nombre de dents de la roue ;  $\omega_2$ , étant le taux de rotation de la roue en (rd/s)

Pour P en Kw,  $\sigma$  en (dan/mm<sup>2</sup>) ;  $N_2$  (en tr/mn) ,  $m_r$  devient :

$$m_r \geq 219 \sqrt[3]{\frac{P}{K_n \sigma Z_2 N_2}} \quad (1.31)$$

### b) Calcul d'entraxe

$$L'entraxe \text{ peut se calculer ainsi : } a = \frac{1}{2}(d + D) = \frac{1}{2} m_r \left( \frac{Z_1}{\sin \beta_2} + \frac{Z_2}{\cos \beta_2} \right) \quad (1.32)$$

D : diamètre de la roue

d : diamètre de la vis

### c) Diamètre primitif

Pour une bonne tenue en torsion de la vis un diamètre primitif minimal s'impose :

$$10 m_r < d < 15 m_r$$

### d) Rapport de transmission

Le rapport de transmission entre roue et vis sans fin ( $K_{12}$ ) se calcule de la même façon que pour un autre engrenage.

$$K_{12} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{D} \tan \beta_2 \quad (1.33)$$

### e) La longueur de la Vis

Le nombre de filets de la vis en prise avec les dents de la roue soit satisfaisant, il est conseillé d'adopter une longueur L de la vis telle que :

$$L \approx \sqrt{8 D \cdot h_a} \quad (1.34)$$

## 1.5.7 Réversibilité et irréversibilité

Un système roue et vis sans fin est dit réversible quand la rotation de la vis entraîne celle de la roue et réciproquement, sinon le système est dit irréversible. La réversibilité dépend des valeurs relatives des angles d'inclinaison d'hélice ( $\beta_2$  ou  $\beta_1$ ) et de l'angle de frottement  $\varphi$ . L'état de surface et la lubrification sont aussi des éléments déterminants. Condition de réversibilité s'écrit :

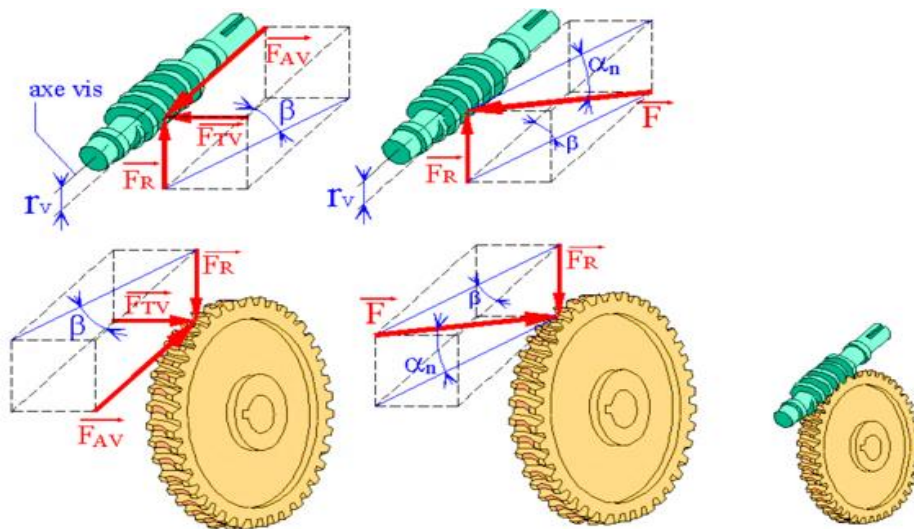
quand  $\beta > \varphi$ . En général le mécanisme devient irréversible pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à  $6^\circ$ . Cette propriété est intéressante pour des mécanismes exigeant un non-retour.

- si  $0 < \beta_1 < \varphi$  Transmission irréversible (Roue menante seulement)
- Si  $\varphi < \beta_1 < 90^\circ - \varphi$  Transmission réversible
- Si  $90^\circ - \varphi < \beta_1 < 90^\circ$  Transmission irréversible (Vis menante seulement)

$\varphi$  : l'angle de frottement,  $\tan\varphi = f$ , étant le coefficient de frottement existant entre le couple de matériaux (vis-roue)

### 1.5.8 Effort sur les dents et les filets

Le frottement dans le système roue et vis sans fin est très important, les relations ci-dessus ne prennent pas en compte ce frottement. En général les efforts appliqués sur la roue et la vis sont schématisés sur la figure 31.



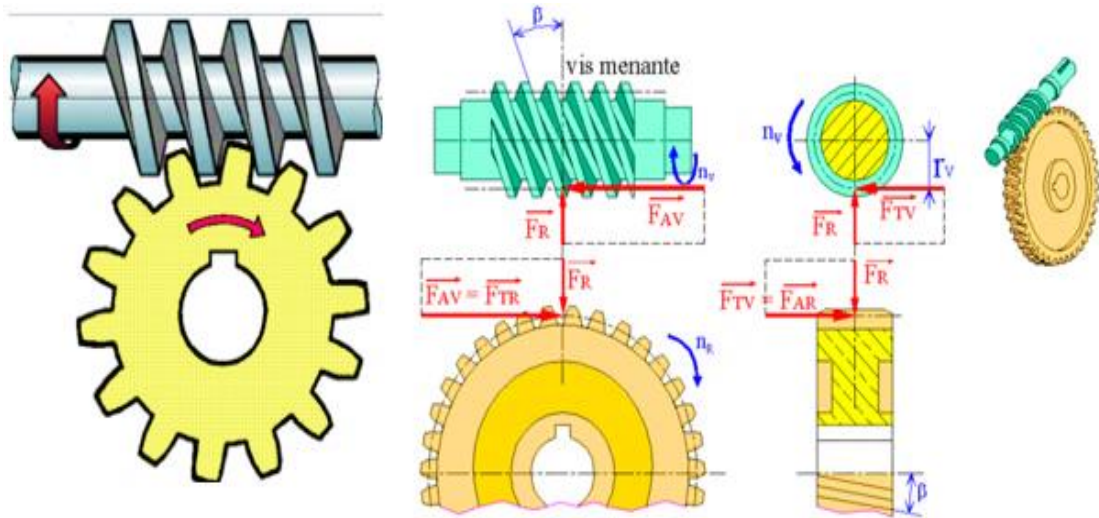


Fig. 1.31 : Les efforts appliqués sur la roue et la vis sans fin

Par exemple pour le sens de rotation indiqué sur la figure 1.3.1, Les efforts appliqués sur le système sont :

$$\begin{cases} F_{AV} = F_{TR} = \frac{F_{TV}}{\tan\beta} \\ F_R = \frac{F_{TV}}{\sin\beta} \tan \alpha_n \\ F_R = F \sin \alpha_n \\ F_{AR} = F_{TV} = \frac{C_v}{r_v} \end{cases} \quad (1.35)$$

$F_{tv}$  : Effort tangentiel sur la vis ;  $F_{av}$  : Effort axial sur la vis ;  $F_r$  : Effort radial de la vis

$F$  : effort total sur la dent,  $C_v$  : couple sur la vis et  $r_v$  : rayon primitif de la vis

### 1.5.9 Rendement des engrenages roue et vis sans fin

Le frottement est un facteur important de ce type d'engrenage en raison d'un glissement élevé. Si  $f$  est le coefficient de frottement entre les roues les efforts précédents deviennent on déduit:

$$\begin{cases} F_{TV} = F(\cos \alpha_n \sin \beta + f \cos \beta) \\ F_{TR} = F(\cos \alpha_n \cos \beta - f \sin \beta) \\ F_R = F \sin \alpha_n \end{cases} \quad (1.36)$$

Le rendement  $\eta$  est donné par :

$$\eta = \frac{\text{puissance de sortie}}{\text{puissance d'entrée}} = \frac{C_R \cdot \omega_R}{C_V \cdot \omega_V} = \frac{F_{TR} \cdot r_R \cdot \omega_R}{F_{TV} \cdot r_V \cdot \omega_V} = \frac{F_{TR} \cdot V_R}{F_{TV} \cdot V_V}$$

Le rapport  $\frac{V_R}{V_V} = \tan\beta$  (composition de vitesse d'un point de contact appartenant à la roue et la vis)

En remplaçant les valeurs des efforts tangentiels dans l'expression de rendement

$$\eta = \frac{F_{TR} \cdot V_R}{F_{TV} \cdot V_V} = \frac{\cos\alpha_n \cos\beta - f \sin\beta}{\cos\alpha_n \sin\beta + f \cos\beta} \tan\beta$$

On bien sous la forme 
$$\eta = \frac{\cos\alpha_n - f \cdot \tan\beta}{\cos\alpha_n + f \cdot \tan\beta} \quad (1.37)$$

- Si la vis est motrice (cas d'un réducteur de vitesse),  $\eta = \frac{\cotan\beta_1}{\tan((90^\circ - \beta_1) + \varphi)}$
- Si la roue est motrice (cas d'un multiplicateur de vitesse),  $\eta = \frac{\tan(90^\circ - \beta_1) - \varphi}{\cotan\beta_1}$

Avec  $\varphi$  est l'angle de frottement,  $\beta_1$  angle de la vis

### 1.5.10 Applications

#### Exercice 1

Soit à transmettre 6 kW par engrenage à vis sans fin,  $N_1 = 600 \text{ tr/min}$ ,  $N_2 = 30 \text{ tr/min}$ .  
L'entraxe  $a = 250 \text{ mm}$ ; la vis est en Acier nitrué; la roue en bronze phosphoreux, l'angle de pression =  $20^\circ$ , prenons  $\beta_V = 60^\circ$ .

*Calculer :*

- Les diamètres de la vis et de la roue ;
- Le rendement ;
- La vitesse circonférentielle V.

#### Solution

##### 1) Calcul de diamètres

On va vérifier le nombre de filet

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{600}{20} = 20 < 30 \quad \text{donc, la vis à 2 filets}$$

Le nombre de dents de la roue est  $Z_2 = n \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow Z_2 = 2 \frac{N_1}{N_2} = 2 \frac{600}{30} = 40$  dents

$$\text{On sait que} \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{D \cdot \tan \beta_V}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{D \cdot \tan (60^\circ)}{d} = 20$$

$$\text{Donc} \quad D = 11,547 \cdot d \quad (mm) \quad (1)$$

$$\text{L'entraxe donne} \quad D + d = 500 \text{ mm} \quad (2)$$

La solution de (1) et (2) donne  $D = 460,15 \text{ mm}$  et  $d = 39,85 \text{ mm}$

$$\text{Le module apparent de la vis est} \quad m_t = \frac{D}{Z_2} = \frac{460,15}{40} = 11.5$$

$$\text{Pour vérification} \quad m_t = \frac{d}{Z_1 \cdot \tan \beta_1} = \frac{39,85}{2 \cdot \tan (60^\circ)} = 11,5$$

Le problème trouvé c'est que le diamètre de la vis est trop faible par rapport au module apparent 11.5. Donc il faut augmenter le diamètre de la vis en augmentant l'angle et en prend par exemple, pour

$$\beta_1 = 75^\circ, \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{D \cdot \tan \beta_1}{d} \Rightarrow \frac{D \cdot \tan (75^\circ)}{d} = 20$$

$$\text{Donc} \quad \begin{cases} D = 5,359 \cdot d \quad mm \\ \text{l'entraxe} \quad D + d = 500 \text{ mm} \end{cases}$$

La solution du système donne  $D = 421,32 \text{ mm}$  et  $d = 78,63 \text{ mm}$

$$\text{Le module apparent de la vis est} \quad m_t = \frac{D}{Z_2} = \frac{421,32}{40} = 10.53$$

$$\text{Pour vérification} \quad m_n = m_t \sin(75^\circ) = 10,17 \approx 10$$

Cette valeur est admissible à condition que le calcul de  $m_n$  d'après la puissance à transmettre ne donne pas une valeur supérieure.

$$\text{Puisque } m_n \text{ est arrondi alors : } m_n \neq m_t \sin \beta_1 \neq \frac{D \sin \beta_1}{Z_2} \quad m_n = \frac{D \sin \beta_1}{Z_2} \Rightarrow 10 = \frac{D \sin \beta_1}{40}$$

$$\begin{cases} D = \frac{400}{\sin \beta_R} \\ d = \frac{D \cdot \tan \beta_V}{20} \\ D + d = 500 \text{ mm} \end{cases}$$

On va essayer avec diverses valeurs de  $\beta_V$  jusqu'à ce que l'entraxe soit égal à 250 mm

Après des essais, l'angle trouvé est  $\beta_1 = 77^\circ 5'$

Donc,  $D = 410,383$  mm ,  $d = 89,472$  mm et  $m_t = \frac{D}{Z_2} = \frac{410,383}{40} = 10,26$

Pour vérification  $m_n = m_t \sin(75^\circ) = 10,26 \cdot \sin(77^\circ 5') = 10$  résultat satisfaisant

- *Le rendement*

$$\eta = \frac{\cotan \beta_V}{\tan((90^\circ - \beta_V) + \varphi)} \quad \text{Avec } \tan \varphi = f = 0.06 \Rightarrow \varphi = 3^\circ 26'$$

$$\text{D'où } \eta = \frac{\cotan(77^\circ 5')}{\tan((90^\circ - 77^\circ 5') + 3^\circ 26')} = 0.78$$

La vitesse circonférentielle V de la vis est :

$$V = \omega \cdot r = \frac{2 \pi N}{60} \cdot r = \frac{2 \pi \cdot 600}{60} \cdot 0,089472 = 2.8 \left(\frac{m}{s}\right)$$

# Chapitre 2 : Arbres et Axes

## 2.1 Introduction

Un **arbre** est un organe mécanique transmettant une puissance sous forme d'un couple et d'un mouvement de rotation. La forme cylindrique de cet organe est à l'origine de son nom.

L'arbre supporte généralement des engrenages, poulies, volants, manivelles, pignons de chaînes ou autres éléments qui transmettent une position angulaire ou une puissance. Il est donc l'un des éléments mécaniques les plus fréquemment utilisés. Selon sa géométrie et ses fonctions, un arbre peut porter différentes qualifications telles que :

- **arbre de transmission** : s'il transmet une puissance d'un moteur à une machine ou à un élément de machine.
- **arbre de renvoi** : s'il distribue un mouvement de rotation entre différents éléments.

S'il ne tourne pas, un arbre prend le nom d'axe, de tirant, de barre, de barre de torsion, etc.

La contrainte de torsion est la sollicitation principale auquel est soumis un arbre. Ce type de sollicitation implique que les contraintes maximales soient à la surface de la pièce. La qualité de cette surface (rugosité) est donc un paramètre essentiel pour la tenue d'un arbre. Suivant le rôle qui lui est dévolu, l'arbre peut être également soumis à des contraintes de flexion (comme l'arbre à cames) et de charge axiale.

Dans ces cas, les efforts mécaniques au sein de la matière sont souvent variables, à la manière d'une sinusoïde. Cela implique alors une résistance nécessaire à la fatigue.

Un arbre est maintenu par des paliers, qui permettent sa rotation ou empêchent son déplacement axial (butée)

## 2.2 La différence entre les axes et les arbres

**Axes** : servent principalement de supporter les organes mécaniques ou bien axes d'articulation

Selon la forme géométrique de l'axe en distingue :



- Arbres droits
- Arbres coudés ou vilebrequin

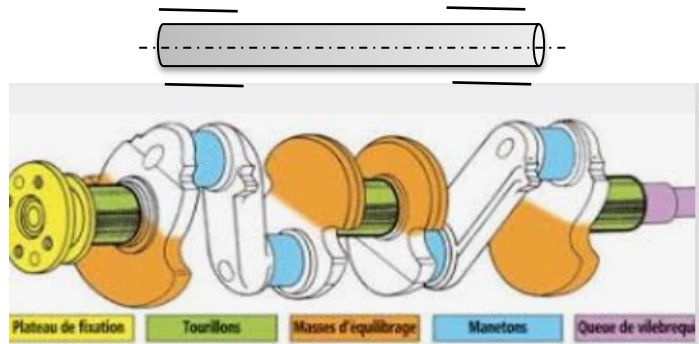


Fig. 2.1 : Arbre Coudé

### 2.3 Modes et causes de rupture des axes et des arbres

Dans la plupart des cas, les ruptures des arbres et des axes sont dues à la fatigue. Les causes qui provoquent la rupture sont:

- Surcharge cyclique résultant d'une erreur d'estimation par l'ingénieur d'étude ;
- Appréciation erronée de l'action produite par la concentration des contraintes (congés, rainures de clavetage, perçage, gorge...);
- Concentration des contraintes déterminée par circonstances d'ordre technologie (entaille ; traces d'usinage ; moletage) ;
- Infractions aux normes d'exploitation technique (diminution des jeux imposés ; réglage incorrect des paliers).

### 2.4 Calcul de la résistance

Avant de procéder au calcul de l'arbre ou l'axe, il faut d'abord tracer le diagramme des efforts. Dans ce cas, les arbres et les axes sont considérés comme des poutres reposant sur des appuis articulés, le diagramme des efforts ainsi établi permet de déterminer en faisant appel aux résistances des matériaux (RDM) les dimensions nécessaires de la pièce. Les valeurs des contraintes admissibles étant choisies le matériau considéré, c'est un calcul préliminaire. Les dimensions déterminées à ce stade permettent de donner à l'arbre ou à l'axe la forme requise.

#### 2.4.1 Calcul préliminaire

Le cas le plus courant est celui d'une sollicitation simultanée de l'arbre par un moment de torsion et un moment de fléchissant

Pour le moment  $M_z \rightarrow \tau = \frac{M_z}{J_p} \rho$

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{w_p} \quad (\text{Au bord de la section } \rho = \frac{d}{2})$$

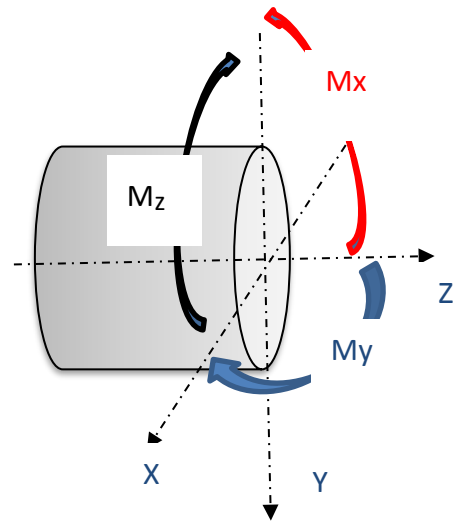
$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = 0.05 d^4$$

$$J_p = 2J_x = 2J_y = \frac{\pi d^4}{32} = 0.1 d^4$$

$$\text{Avec } w_p = \frac{J_p}{R} = \frac{2J_x}{R} = 2w_x$$

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \end{cases} \rightarrow \vec{M}_f = \vec{M}_x + \vec{M}_y$$

$$\sigma_{max/min} = \frac{M_f}{w_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{w_x}$$



En vérifiant la résistance des matériaux d'après le critère de la résistance.

- Critère de Saint-venant  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{adm}$  (1)
- Critère de Hubert-Mises  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{adm}$  (2)

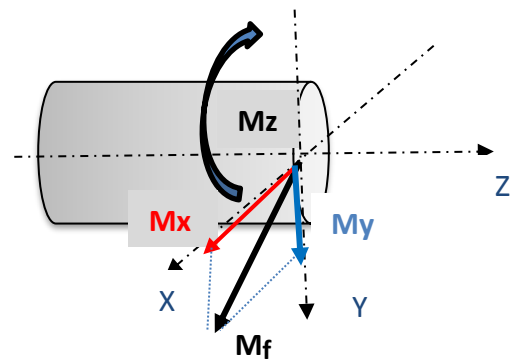
D'après Saint-Venant, en remplaçant les valeurs de la contrainte et normale et de cisaillement la condition de la résistance (1) s'écrit :

$$\sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{w_x^2} + 4 \frac{M_z^2}{w_p^2}} \leq \sigma_{adm}$$

$$\text{Avec } w_p = 2w_x$$

$$\sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{w_x^2} + 4 \frac{M_z^2}{4w_x^2}} \leq \sigma_{adm} \rightarrow \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{w_x} \leq \sigma_{adm} \quad \text{Avec } w_x = 0.1 d^3$$

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{0.1 \sigma_{adm}} \leq d^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}{0.1 \sigma_{adm}}} \quad (1)$$



D'après Hubert-Mises, la relation (2) s'écrit :  $d \geq \sqrt[3]{\frac{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_z^2}{0.1 \sigma_{adm}}}$

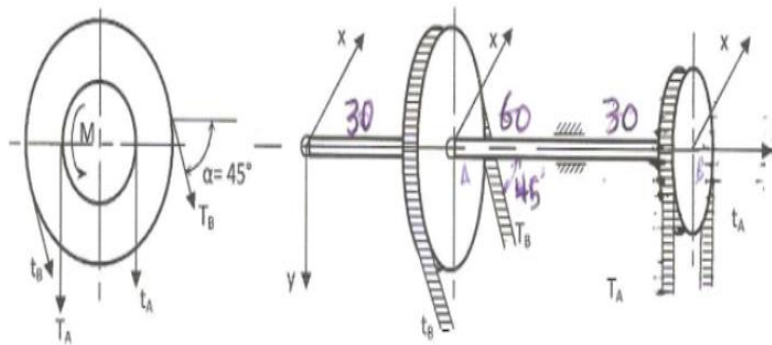
## 2.5 Applications

### Exercice 1

Calculer le diamètre '  $d$  ' d'un arbre portant deux poulies A et B, transmettant un couple  $M_0 = 10$  Kn.cm. La poulie menante a des tensions au deux courroies  $T_A$  et  $t_A$ . La poulie menée a des tensions au deux courroies  $T_B$  et  $t_B$ . La courroie de la poulie B est inclinée d'angle de  $45^\circ$ .

### Données

$M_0=10$  Kn.cm,  $T_A = 2 t_A$ ,  $T_B = 2 t_B$ ,  $D_A= 20$  cm ,  $D_B= 30$  cm ,  $\sigma_{adm}= 16$  Kn/mm<sup>2</sup>



### Solution

On veut calculer le diamètre  $d$  de l'arbre, appliquant la relation (1)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{0.1 \sigma_{adm}}}$$

Donc, il faut calculer les moments  $M_x$  et  $M_y$ , en cherchant les différentes forces appliquées aux A et B.

En tenant compte de  $T_A = 2t_A$  et  $T_B = 2t_B$  Pour la section A.

$$\sum F_A = 0 \Rightarrow P_A = T_A + t_A = 3t_A$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (T_A - t_A) \frac{D_A}{2} = M_0 \Rightarrow T_A - t_A = \frac{2M_0}{D_A} = \frac{2 \cdot 10}{20} = 1Kn \Rightarrow t_A = 1Kn$$

$$P_A = 3Kn = \begin{cases} P_{ax} = P_A \sin(45^\circ) = 2.12Kn \\ P_{ay} = P_A \cos(45^\circ) = 2.12Kn \end{cases}$$

- Pour la section B

$$P_B = T_B + t_B = 3t_B$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (T_B - t_B) \frac{D_B}{2} = M_0 \Rightarrow T_B - t_B = \frac{2 M_0}{D_B} = \frac{2 \cdot 10}{30} = \frac{2}{3} Kn$$

$$T_B - t_B = \frac{2}{3} \Rightarrow t_B = \frac{2}{3} Kn$$

$$P_B = 3 \frac{2}{3} Kn = \begin{cases} P_{Bx} = P_B \sin(30^\circ) = 1 Kn \\ P_{By} = P_B \cos(30^\circ) = \sqrt{3} Kn \end{cases}$$

-Calcul des moments  $M_x$  et  $M_y$

$$M_{1c} = 30 P_{ax} = 30 \sqrt{3} = 51.96 Kn.cm$$

$$M_{1b} = \frac{30 M_{1c}}{90} = 17.32 Kn.mm \quad \text{et} \quad M_{2b} = \frac{30 \cdot 90 P_{By}}{90} = 34.64 Kn.cm$$

D'où, le moment  $M_x$

$$M_{xb} = M_{2b} - M_{1b} = 34.64 - 17.32 = 17.32 Kn.cm$$

$$M_{xc} = M_{1c} + 0 = 51.96 Kn.cm$$

La même chose pour le moment  $M_y$

$$M_{yb} = 21.2 Kn.cm$$

$$M_{yc} = 63.6 Kn.cm$$

Cherchons les zones les plus sollicitées

$$\text{Point C : } \sqrt{M_{xc}^2 + M_{yc}^2} = \sqrt{51.96^2 + 63.6^2} = 82.12 Kn.cm$$

$$\text{Point B : } \sqrt{M_{xb}^2 + M_{yb}^2} = \sqrt{17.32^2 + 21.2^2} = 27.37 Kn.cm$$

La zone la plus sollicitée est la zone C, donc on calcul le diamètre de l'arbre a point C

Appliquant le relation (1)

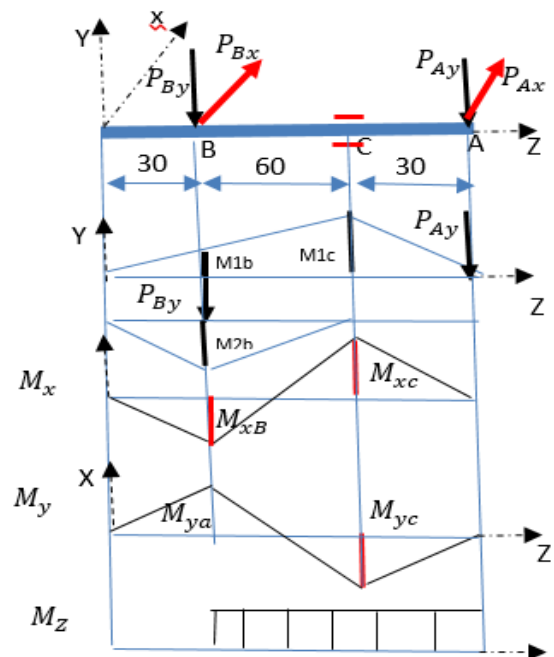
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{xc}^2 + M_{yc}^2 + M_z^2}{0,1 \sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{51.96^2 + 63.6^2} + 10^2}{0,1 \cdot 16}} = 3.72 cm \quad \text{on prend } d=38 mm$$

### Exercice 2

La figure suivante montre une boite de vitesse formée par deux couples d'engrenages.

- 1<sup>er</sup> couple : Engrenage cylindrique à dentures droites

Le module  $m = 3$ , Nombre de dents  $Z_1 = 20$  dents,  $Z_2 = 40$  dents, angle de pression  $\alpha = 20^\circ$



- 2<sup>me</sup> couple : Egrenage cylindrique à dentures Hélicoïdales

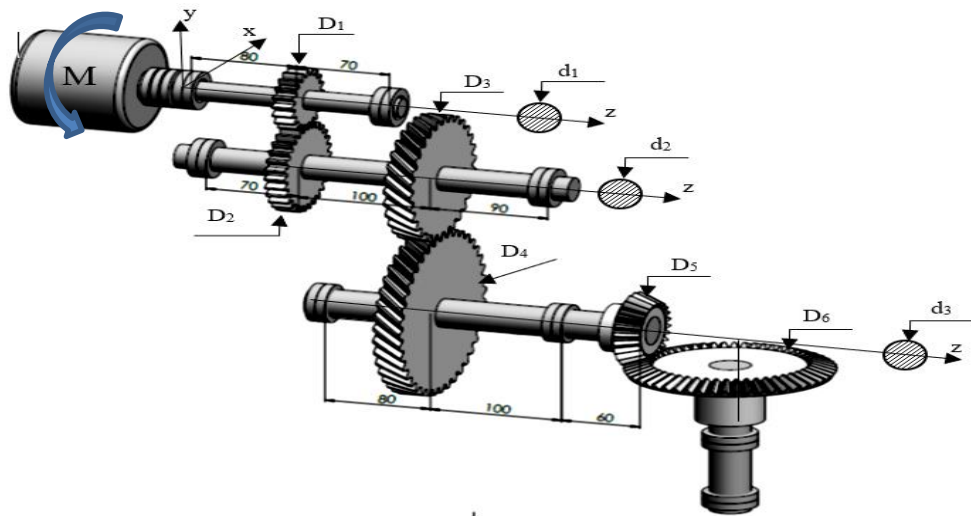
Le module  $m = 3$ , Nombre de dents  $Z_3 = 30$  dents,  $Z_4 = 30$  dents, angle de pression  $\alpha = 20^\circ$ , angle d'hélice  $\beta = 30^\circ$

L'arbre de sortie transmet le moment par l'intermédiaire d'un pignon conique à dentures droites.

- 3<sup>eme</sup> couple : Egrenage conique à dentures

Le module  $m = 5$ , Nombre de dents  $Z_5 = 9$  dents,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ , angle de cône  $\delta = 35^\circ$

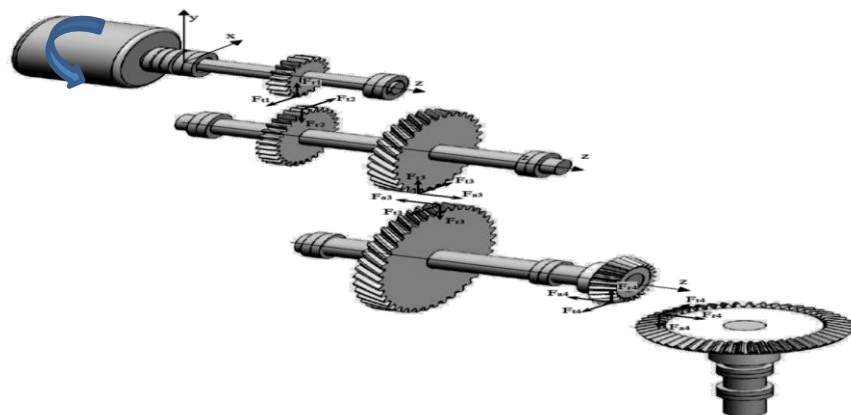
- Couple moteur  $M_t = 120$  N.m, contrainte admissible  $\sigma = 16 \cdot 10^4$  Kn/m<sup>2</sup>



Solution

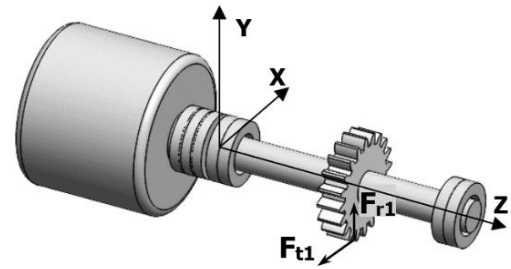
- Schéma en perspective des forces appliquées.

$D_i$ ,  $d_i$  : diamètre des roues et de l'arbre respectivement



- 
-

- Le diamètre de l'arbre n°1 ( $D_1$ )
- Calcul des forces (tangentielle et radial) appliquées sur la dent.



$$d_1 = m Z_1 = 3.20 = 60 \text{ mm}^2$$

$$M_t = F_{t1} \frac{d_1}{2} \Rightarrow F_{t1} = 2 \frac{M_t}{d_1} = 2.120 \frac{10^3}{60} = 4000 \text{ N}$$

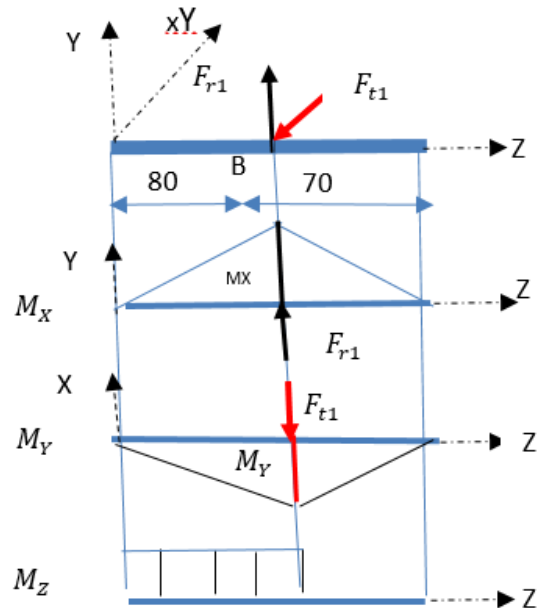
$$F_{R1} = F_{t1} \tan \alpha = 4000. \tan 20^\circ = 1456 \text{ N}$$

- Calcul des moments  $M_x$  et  $M_y$

$$M_x = \frac{F_{R1} 80.70}{80+70} = \frac{1456.80.70}{80+70} = 54357 \text{ N.mm}$$

$$M_y = \frac{F_{t1} 80.70}{80+70} = \frac{4000.80.70}{80+70} = 149333 \text{ N.mm}$$

d'où le diamètre est :



$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{xc}^2 + M_{yc}^2} + M_t^2}{0,1 \sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{54357^2 + 14933^2} + (12010^3)^2}{0,1.160}} = 20,3 \text{ mm}$$

On prend une valeur du diamètre  $d_1 = 21 \text{ mm}$

### Le diamètre de l'arbre N°2

Calcul des forces appliquées sur les dents droites

Le moment appliqué sur le deuxième arbre.

$$\begin{cases} M_t = T_1 \frac{d_1}{2} \\ M_{t2} = T_2 \frac{d_2}{2} \end{cases} \Rightarrow M_{t2} = M_t \frac{d_2}{d_1} = M_t \frac{mZ_2}{mZ_1}$$

Avec l'effort tangentiel  $T_1 = T_2 = 4000 \text{ N}$

D'où le moment  $M_{t2} = M_t \frac{Z_2}{Z_1} = 12010^3 \frac{40}{20} = 24010^3 \text{ N.mm}$

Les forces appliquées sur les dents hélicoïdales sont

$$F_{t2} \frac{d_2}{2} = F_{t3} \frac{d_3}{2} \Rightarrow F_{t3} = F_{t2} \frac{d_2}{d_3} = F_{t2} \frac{Z_2}{Z_3} = 4000 \frac{40}{30}$$

$$F_{t3} = 533,3 \text{ N}$$

Les efforts radiaux

$$F_{R1} = F_{R2} = 1456 \text{ N}$$

$$F_{R3} = \frac{F_{t3} \tan \alpha}{\cos \beta} = 533,3 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\cos 30^\circ} = 7734,6 \text{ N}$$

- Calcul des moments  $M_x$  et  $M_y$

- Les moments dû à l'effort  $F_{R2}$

$$M_{1b} = \frac{F_{R2} \cdot 70 \cdot 190}{70 + 190} = 74480 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{1c} = \frac{M_{1b} \cdot 90}{190} = 35280 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

- Les moments dû à l'effort  $F_{R3}$

$$M_{2c} = \frac{F_{R3} \cdot 90 \cdot 170}{260} = 455151,46 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{1c} = \frac{M_{2c} \cdot 70}{170} = 187415 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Donc,

$$M_{XB} = 112935 \text{ N} \cdot \text{mm} \text{ et } M_{XC} = 419871 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

La même chose pour les moments  $M_{YB}$  et  $M_{YC}$

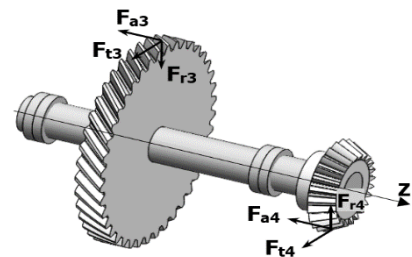
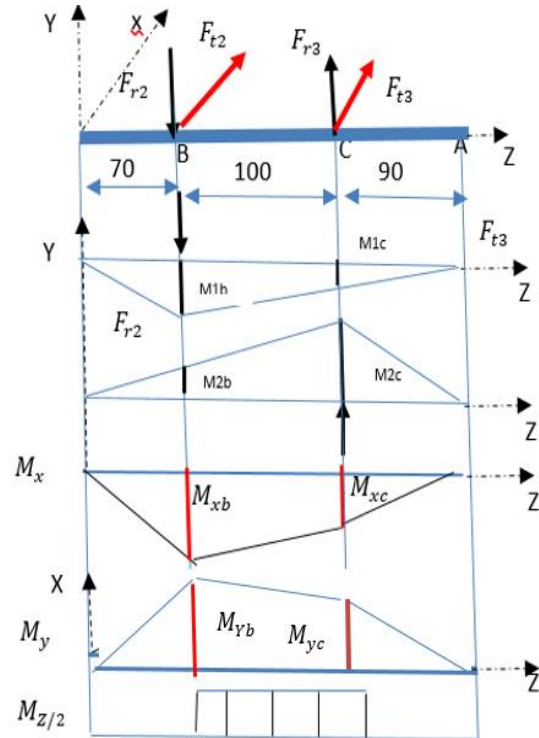
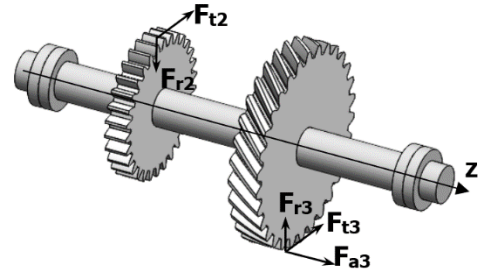
$$M_{Yb} = 31382,65 \text{ N} \cdot \text{mm} \text{ et } M_{Yc} = 12922,26 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Le diamètre est donné par :

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{xc}^2 + M_{yc}^2 + M_{t2}^2}}{0,1 \sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{419871^2 + 12922,26^2 + (24010^3)^2}}{0,1 \cdot 160}} = 31,15 \text{ mm}$$

On peut prendre une valeur  $d = 32 \text{ mm}$

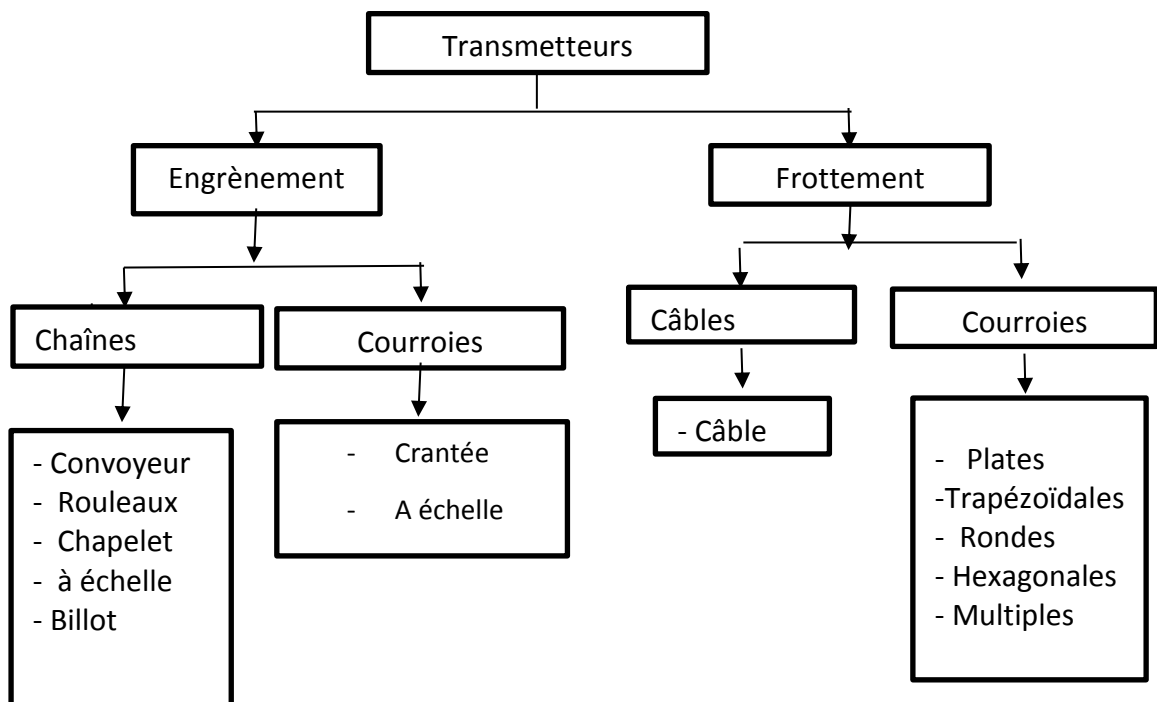
Même raisonnement pour l'arbre N°3, essayer de trouver le diamètre  $d_3$



# Chapitre 3 : Transmission de Mouvement

## 3.1 Introduction

Les liens flexibles destinés à assurer une transmission de puissance entre un arbre moteur et un arbre récepteur dont les axes peuvent occuper diverses positions relatives. La vitesse et le couple transmis peuvent varier en intensité et sens exemple pour les courroies (brins croisés ou non) en fonction des valeurs des diamètres primitifs des poulies en pivot avec le bâti. Le système poulie- courroie est utilisé pour des vitesses et couples faibles et pour transmettre un mouvement de rotation entre 2 arbres très éloigné, d'autres systèmes sont illustrés dans la figure 3.1



*Fig.3.1 : Les types de transmetteurs flexibles*



## 3.2 Transmission de puissance par courroie

### 3.2.1 Introduction

Les courroies des dernières années pour la transmission de puissance et les travaux de convoyage ont été développés avec un élément porteur flexible en haut des fibres de traction ou des cordons d'acier, enfermés dans une enveloppe faite de certains résilients matériaux tel que le caoutchouc. L'enveloppe fermement liée à la tension d'élément, fournit à la courroie le frottement et l'absorption des chocs nécessaires qualités, et transmet la charge de la surface de la poulie à l'élément de tension. Ce dernier est destiné à avoir un module d'extension si élevé qu'il rend la ceinture pratiquement inextensible pendant le fonctionnement,

La théorie du CREEP suppose que la ceinture est flexible, extensible et suffisamment mince pour rendre les contraintes de cisaillement et de flexion négligeables. Puis, chaque fois qu'un changement de tension de la courroie se produit en raison des forces de frottement entre la courroie et la poulie, la courroie s'étendra ou se contractera élastiquement et se déplacent par rapport à la surface de poulie rigide.



Fig. 3.2 : Transmission par chaîne et courroie

La solution par courroie s'est développée du fait des avantages nombreux qu'elle propose :

- Transmission à grande vitesse 5 à 33 m/s (20 m/s optimale)
- Entraxe élevé (positions éloignées des arbres);
- Amortissement des chocs et vibrations, souplesse d'utilisation ;

- Silence de fonctionnement ;
- Bon rendement ;
- Faible coût, montage et entretien facile ;
- Légèreté, longue durée de vie.

Ainsi quelques inconvénients tels que :

- Glissement, fluage élastique  $\Rightarrow \frac{N_1}{N_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- Sensibilité aux conditions d'opération (huile, poussière, température, humidité)

Les courroies plates, ont été progressivement remplacées par des courroies à section trapézoïdales pour suivre l'augmentation des vitesses et de la puissance des machines. Il est possible d'assurer la transmission du mouvement de rotation par poulies et courroies quelque soient les positions des arbres d'entrée et de sortie.

Deux cas sont à distinguer :

- ✚ Arbres à axes parallèles ;
- ✚ Arbres à axes quelques.

### 3.2.2 Courroies

Elles peuvent d'être réalisées en différentes matières (cuir, fibre flexible, laine de chameau acier, tissus caoutchoutés .....).

Les courroies peuvent acquérir aux courroies les caractéristiques suivantes :

- Résistance à l'extension ;
- Adhérence sur les poulies ;
- Souplesse ;
- Elasticité ;
- Résistance à l'agressivité du milieu ambiant (humidité, vapeur acides, huile minérale et température élevée.

### 3.2.2.1 Principales familles de courroies

Il existe plusieurs types de courroies, parmi ces courroies :

- **Courroie Plate**

Largeur supérieure de l'épaisseur, grande surface de contact, grande flexibilité.



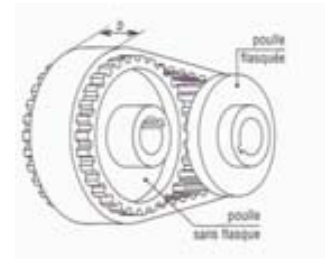
- ✚ **Courroie trapézoïdale**

Courroie trapézoïdale grande résistance à la traction, résistance au fluage élastique, rendement élevé (95%), bonne résistance à la fatigue et à l'usure



- ✚ **Courroie crantée**

Courroie crantée est une courroie plate avec dents, fonctionne par engrènement, sans glissement.



- ✚ **Courroie ronde**

Courroie ronde ces courroies sont surtout utilisées dans les petits mécanismes.

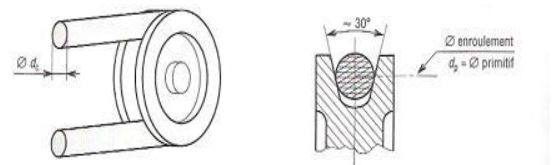


Fig 3.3 : Types des courroies

### 3.2.2.3 Matériaux des courroies

Les matériaux utilisés pour fabriquer les courroies sont le cuir, le caoutchouc naturel, le caoutchouc synthétique (néoprène), la soie, le nylon, l'acier, le polyuréthane...

#### 1) Cuir :

Le cuir possède une limite d'élasticité  $Re = 6$  à  $7$  MPa, un module de Young  $E = 130$  à  $400$  MPa, coefficient de frottement  $f = 0,2$  à  $0,5$  et une masse volumique  $\rho = 1000$  à  $1100$  kg/m<sup>3</sup>.

- Sensible aux conditions d'opération ;
- Exemple moulin à scie.

#### 2) Composites cuir-perlon, cuir-nylon, etc.

- Grande durabilité

- Vitesses petites et moyennes

### 3) Tissus caoutchoutés

- Fibres de coton, nylon ou autres imprégnées de caoutchouc, augmentent le coefficient de friction.
- Disponible en rouleaux, il faut relier par un joint (chauffé et meulé)

### 4) Caoutchoucs ou élastomères renforcés

- PVC, uréthane, nylon avec les renforts : fibres de verre ou de carbone, acier

## 3.2.3 Poulies

Sont des roues réalisées en fontes, en bois ou en tôle et profilés. Ces roues peuvent avoir une jante cylindrique, ou bombée pour la courroie plate avec gorge pour les courroies trapézoïdales. La poulie doit être un peu plus large que la courroie (surtout si elle est réceptrice).

### 3.2.3.1 Principe d'une transmission par poulie courroie

- Arbres parallèles tournant dans le même sens (fig.3.4a)
- Pour le cas d'une transmission par courroie droite irréalizable par suite de faible arc embrassé sur la petite poulie

#### Inverseurs

- Arbre parallèle tournant en sens inverses au droit de croisement (fig.3.4 b)
- Transmission du mouvement d'un arbre à plusieurs arbres parallèles

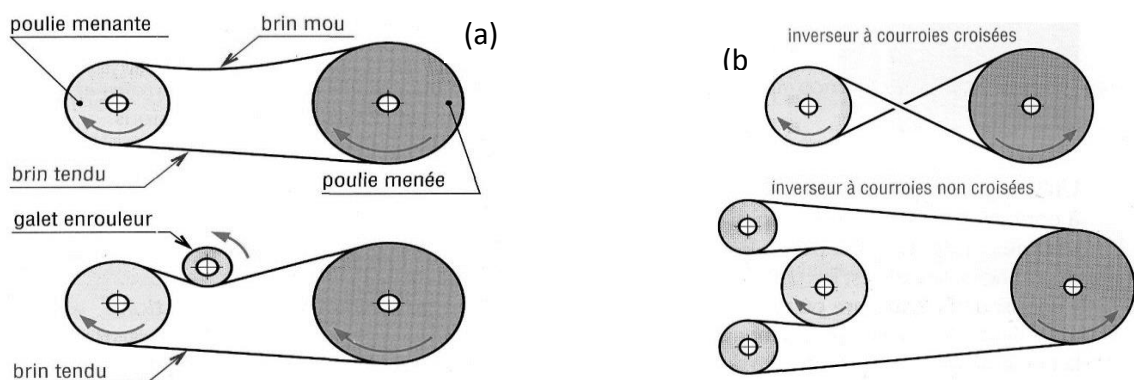


Fig 3.4 : Transmission par des arbres parallèles

### 3.2.3.2 Cas d'arbres perpendiculaires

Courroies semi croisées ont un sens de rotation bien défini, pour que la courroie en mouvement ne glisse pas, largeur des poulies doit être (  $B > 1,4 b$ .)

Avec,  $B$  : largeur de la poulie,  $b$  : largeur de la courroie

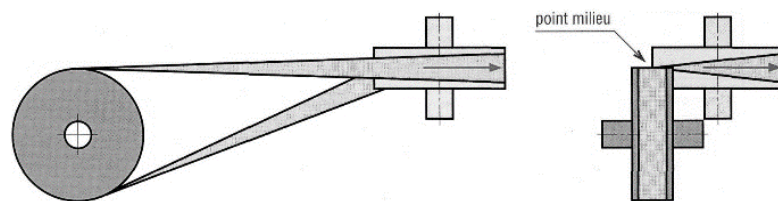


Fig 3.5 : Transmission par des arbres perpendiculaires

### 3.2.4 Définition : rotation et hypothèses

- Arcs d'enroulement d'angles  $\alpha_1 = \alpha$  et  $\alpha_2 = 2\pi - \alpha$
- Les deux brins tendus (A1 et A2) sont mou (B1 et B2) de la courroie sont supposés rectilignes
- Les tensions  $T_a$  et  $T_b$  des brins A1 A2 et B1 B2 sont élevés devant les actions transversales
- Le poids de la courroie est supposé négligeable
- Les guidages des poulies sont supposés parfaitement rigides et sans frottement.

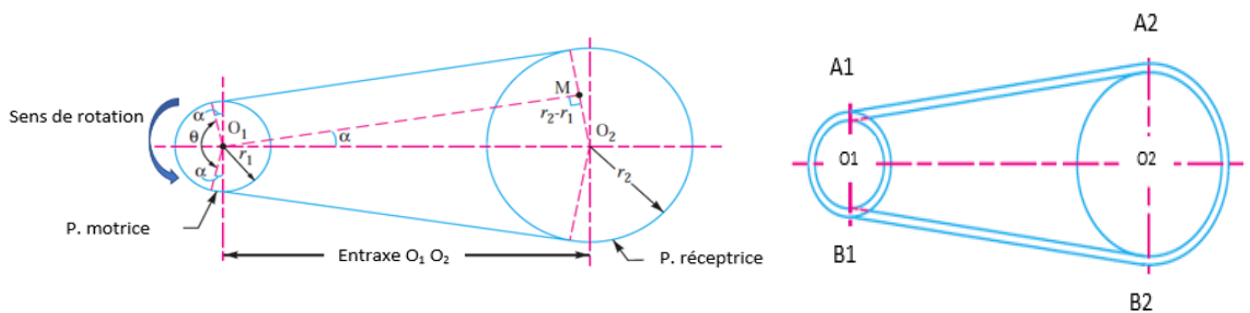


Fig. 3.6 : Paramétrage géométrique

### 3.2.4.1 Rapport de réduction

Si on suppose que la transmission de mouvement se fait sans glissement, le rapport des fréquences de rotation est donné par la relation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (1)$$

$N_1$  et  $N_2$ : vitesse de rotation de petite et la grande poulie en tr/min

$\omega_1$  et  $\omega_2$  : vitesses en rad/s ,  $R_1$  et  $R_2$  Rayons de la petite et la grande poulie en mm

$C_1$  et  $C_2$  : couples sur la petite poulie et la grande poulie en N.m respectivement

### 3.2.5 Calcul des transmissions par courroies plates

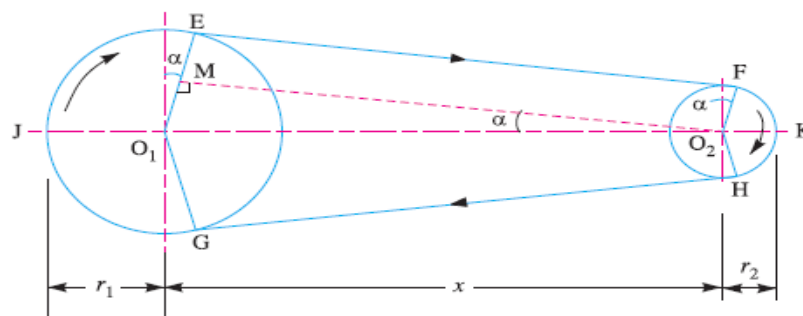


Fig. 3.7 : Courroies plate à brins parallèles

#### 3.2.5.1 La longueur de la courroie (L) à brins non croisés

$R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de la grande et la petite poulie

La distance  $x = O_1O_2$  appelée entraxe

$L$  : est la longueur totale de la courroie

D'après la figure 1.7, cette longueur s'écrit :

$$L = ArcGJE + EF + ArcFKH + HC = 2(Arc JE + EF + Arc FK) \quad (2)$$

D'après la figure au-dessus, on peut écrire

$$\sin\alpha = \frac{O_1M}{O_1O_2} = \frac{O_1E - EM}{O_1O_2} = \frac{r_1 - r_2}{x} \quad (3)$$

Pour l'angle  $\alpha$  trop petite, on peut poser  $\sin\alpha = \alpha$  (radian)

Même chose pour les autres termes

$$\begin{cases} \text{ARC } JE = r_1 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \text{ARC } FK = r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$EF = MO_2 = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (O_1M)^2} = \sqrt{x^2 - (r_1 - r_2)^2} = x \sqrt{1 - \frac{(r_1 - r_2)^2}{x^2}}$$

et le développement limité de l'équation trouvée s'écrit :

$$EF = x \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_2)^2}{x^2} + \dots \dots \right] = x - \frac{1}{2} \frac{(r_1 - r_2)^2}{x}$$

En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} L &= 2 \left[ r_1 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + x - \frac{(r_1 - r_2)^2}{2x} + r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \\ &= 2 \left[ r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + r_1 \alpha + x - \frac{(r_1 - r_2)^2}{2x} + r_2 \cdot \frac{\pi}{2} - r_2 \alpha \right] \\ &= \pi(r_1 + r_2) + 2\alpha(r_1 - r_2) + 2x - \frac{(r_1 - r_2)^2}{x} \end{aligned} \quad (5)$$

En substituant la valeur de  $\alpha$  dans (5), on obtient :

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{x} + 2x - \frac{(r_1 - r_2)^2}{x} \quad (6)$$

En termes rayons  $L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{(r_1 - r_2)^2}{x} + 2x$

En termes de diamètres  $L = \frac{\pi}{2}(d_1 + d_2) + \frac{(d_1 - d_2)^2}{4x} + 2x$

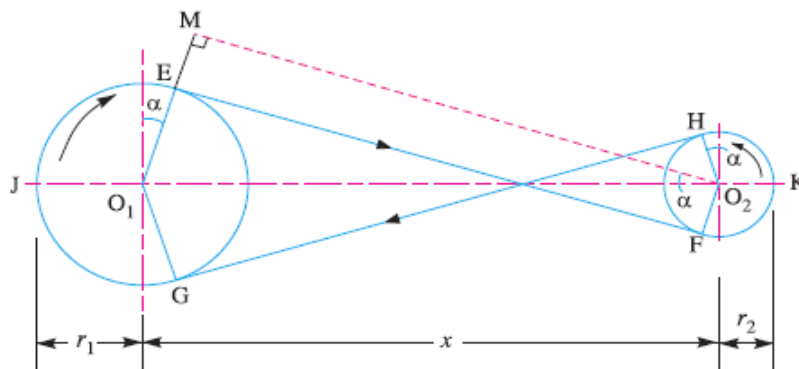


Fig. 3.8 : Courroies plates à brins croisés

### 3.2.5.2 La longueur de la courroie (L) à brins croisés

$R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de la grande et de la petite poulie

La distance  $x = O_1O_2$  appelé entraxe,  $L$  : est la longueur totale de la courroie

Cette longueur s'écrit  $L = \text{Arc}GJE + EF + \text{Arc}FKH + HC$

$$L = 2(\text{Arc} JE + EF + \text{Arc} FK) \quad (7)$$

D'après la figure au-dessus, on peut écrire

$$\sin\alpha = \frac{O_1M}{O_1O_2} = \frac{O_1E + EM}{O_1O_2} = \frac{r_1 + r_2}{x}$$

Pour l'angle  $\alpha$  trop petite, on peut poser

$$\sin\alpha = \alpha \text{ (radians)} = \frac{r_1+r_2}{x} \quad (8)$$

Même chose 
$$\begin{cases} \text{Arc} JE = r_1 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ \text{Arc} FK = r_2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{cases} \quad (9)$$

et 
$$EF = MO_2 = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (O_1M)^2} = \sqrt{x^2 - (r_1 + r_2)^2} = x \sqrt{1 - \frac{(r_1+r_2)^2}{x^2}}$$

Le développement limité de l'équation trouvée s'écrit :

$$EF = x \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(r_1 + r_2)^2}{x^2} + \dots \dots \right] = x - \frac{1}{2} \frac{(r_1 + r_2)^2}{x}$$

En remplaçant les expressions trouvées dans l'équation (7), on obtient :

$$\begin{aligned} L &= 2 \left[ r_1 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + x - \frac{(r_1+r_2)^2}{2x} + r_2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right] = 2 \left[ r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + r_1 \alpha + x - \frac{(r_1+r_2)^2}{2x} + r_2 \cdot \frac{\pi}{2} + r_2 \alpha \right] \\ &= \pi(r_1 + r_2) + 2\alpha(r_1 + r_2) + 2x - \frac{(r_1+r_2)^2}{x} \end{aligned} \quad (10)$$

En substituant la valeur de  $\alpha$  dans l'équation (10), on obtient :

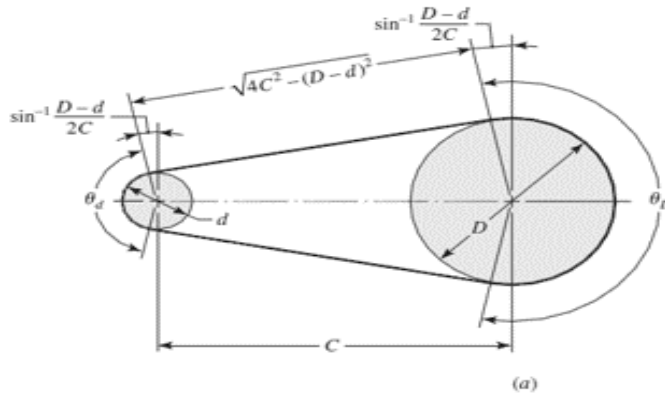
$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2 \frac{(r_1+r_2)^2}{x} + 2x - \frac{(r_1+r_2)^2}{x} \quad (11)$$

En termes de rayons 
$$L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{(r_1+r_2)^2}{x} + 2x$$

En termes de diamètres 
$$L = \frac{\pi}{2} (d_1 + d_2) + \frac{(d_1+d_2)^2}{4x} + 2x$$



En d'autres formes, les longueurs des courroies à brins croisés et non croisés s'écrivent



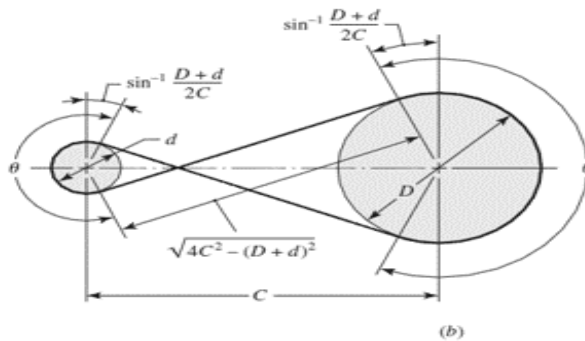
C : entraxe

- Brins non croisés

$$\theta_d = \pi - 2 \sin^{-1} \frac{D - d}{2C}$$

$$\theta_D = \pi + 2 \sin^{-1} \frac{D - d}{2C}$$

$$L = \sqrt{4C^2 - (D - d)^2} + \frac{1}{2}(D\theta_D + d\theta_d) \quad (12)$$



Brins croisés

$$\theta_d = \pi + 2 \sin^{-1} \frac{D + d}{2C}$$

$$L = \sqrt{4C^2 - (D + d)^2} + \frac{1}{2}(D + d)\theta \quad (13)$$

Fig. 3.9 : Autres formes de la longueur pour les deux types

### 3.2.6 Relation entre les tensions dans les brins rectilignes

#### Hypothèses

- Les fréquences de rotation ( $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) de chaque poulie sont uniformes
- Rendement = 1 la courroie est parfaitement adhérente sur les poulies
- Couple moteur C1 est connu

#### 3.2.6.1 Tension d'un flexible embrassant un cylindre

La transmission par courroie a pour base la relation établie par L. Euler (en 1775)

Tension dans la courroie

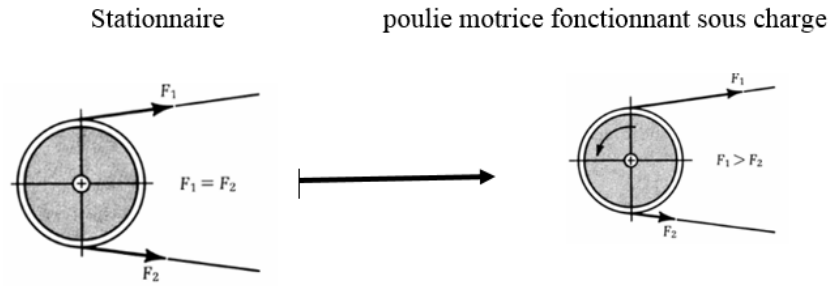


Fig.3.10 : les tensions embrassant un cylindre

3.2.6.1.1 La tension dans la courroie

L'équilibre suivant Y :

$$(F + dF) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + F \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = dN \quad (a)$$

L'équilibre suivant X :

$$(F + dF) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + F \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = f dN \quad (b)$$

Avec  $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$  et  $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx 1$

Après simplification, les deux équations (a et b) deviennent

$$\begin{cases} F d\theta \approx dN \\ dF = f dN \end{cases}$$

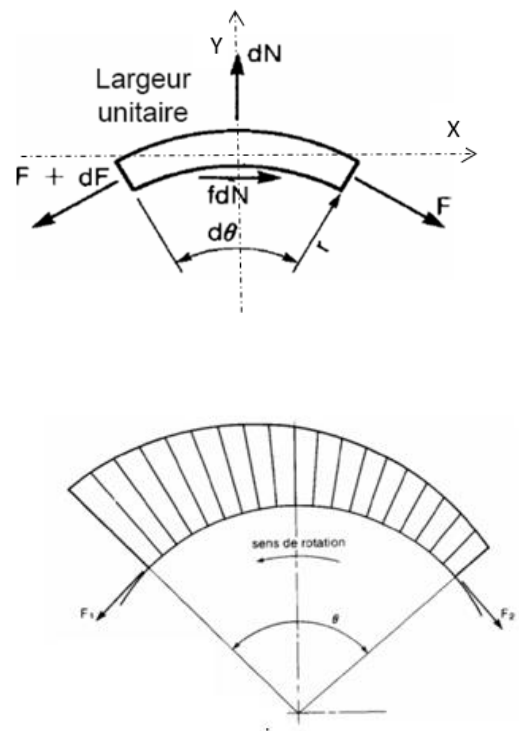


Fig.3.11 : la tension dans la courroie

Donc,  $F \approx f F d\theta \Rightarrow \frac{dF}{F} = f d\theta \Rightarrow \int_t^T \frac{dF}{F} = \int_0^\theta d\theta \Rightarrow \ln \frac{T}{t} = f \cdot \theta$

$$\frac{T}{t} = e^{f \cdot \theta} \quad \theta \text{ en (rd)} \quad (14)$$

La relation trouvée est appelée l'équation d'Euler

Cette relation prend une forme avec une constante  $\lambda$

$$\frac{T}{t} = e^{\lambda f \theta} \tag{15}$$

T, t : Efforts appliqués aux extrémités,  $\lambda$  : constante ( $\lambda < 1$ )

f : Coefficient de frottement entre le lien et la surface du cylindre

$\theta$  : Arc embrassant de la petite poulie (angle d'enroulement en rd)

### 3.2.7 Tensions dans les brins de la courroie

#### 3.2.7.1 Paramétrage

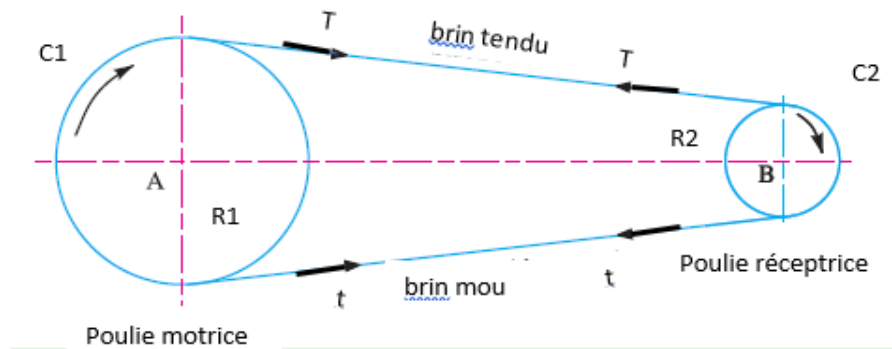


Fig. 3.12 : Paramétrage

#### 3.2.7.2 Equation issue de l'expression de la puissance à transmettre

- Sur la grande poulie

- Sur la petite poulie

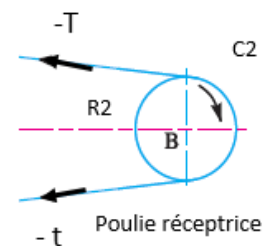
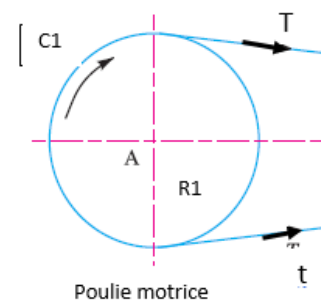


Fig.3.13 : Efforts de Tension

$C_1$  : couple moteur

Avec  $C_1 = P / \omega_1$  , P est la puissance et  $\omega_1$  la vitesse de rotation

On fait respectivement la somme des moments égale à zéro sur la grande et la petite poulie

$$C_1 + (T - t).R_1 = 0 \quad (16)$$

$$C_2 + (T - t).R_2 = 0 \quad (17)$$

de (16) on tire  $T - t = - \frac{C_1}{R_1}$  (18)

Les deux tensions **T** et **t** sont déterminés par les relations (15) et (18)

### 3.2.7.3 Equation issue de l'étude de l'équilibre dynamique d'un élément de courroie

#### 3.2.7.3.1 Étude dynamique (Effet de la force centrifuge)

La force centrifuge est donnée par :

$$F_c = \rho_l \cdot v^2 \quad \text{avec } \rho_l : \text{ masse linéique (kg/m)}$$

A la présence de la force centrifuge l'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{T-F_c}{t-F_c} = e^{f \cdot \theta} \quad (19)$$

Pour une vitesse  $v < 10 \frac{m}{s}$ ,  $F_c \ll T$  peut être négligé

Cette étude peut être généralisée aux autres courroies.

**T** : Tension du brin tendu (en N)

**t** : Tension du brin mou «  $t < T$  » (en N) ; **T<sub>0</sub>** : tension initiale de la courroie (en N)

**f** : Coefficient de frottement entre poulie et courroie ; **V** : vitesse (linéaire) de la courroie (en m/s)

**m** : Masse de 1 m de courroie (kg/m) ;  $\theta = \alpha_1$  : arc d'enroulement

#### a) Hypothèse :

Les forces de frottement entre poulie et courroie sont supposées uniformes sur toute la longueur de l'arc d'enroulement. Tout en tenant compte de la force centrifuge ( $F_c$ ) sur la courroie

- *Courroie plate* :  $\frac{T-F_c}{t-F_c} = e^{\lambda f \alpha_1}$  (20)

avec  $F_c = mv^2$

- *Courroie trapézoïdale* :  $\frac{T-F_c}{t-F_c} = e^{\frac{1}{\sin(\frac{\beta}{2})} \lambda f \alpha_1}$  (21)

**b) Hypothèse d'une courroie simplificatrice**

- La vitesse  $v$  est faible, on peut négliger  $F_c$
- L'angle de  $\beta \approx 40^\circ \Rightarrow \frac{1}{\sin(\frac{\beta}{2})} \approx 3$

D'où les relations deviennent

$$\bullet \quad \frac{T}{t} = e^{\lambda f \alpha_1} = e^{\lambda f (2\pi - \alpha_2)} \quad \text{Courroie plate} \quad (22)$$

$$\bullet \quad \frac{T}{t} = e^{3\lambda f \alpha_1} = e^{3\lambda f (2\pi - \alpha_2)} \quad \text{Courroie trapézoïdale} \quad (23)$$

Remarque :

L'angle d'enroulement  $\alpha_1$  (en rad) doit être mesuré sur la petite poulie (puisque le glissement est plus grand (poulie motrice). Le risque de glissement est plus important sur la poulie possédante l'angle d'enroulement le plus petit.

**3.2.8 Tension initiale d'une courroie**

Si  $T_0$  est la tension initiale (appliquée au moment de l'installation) lorsque la courroie tourne à vide ( $T \approx t \approx T_0$ ), en fonctionnement sous charge, on a :

$$T_0 = \frac{1}{2}(T + t) \quad (24)$$

$T$  est maximale lorsque  $t$  est minimale ( $t = 0$ ) :  $T_{max} = 2T_0$

**3.2.9 Puissances transmissibles**

En fonctionnement normal :  $P = (T - t) \cdot V$

Puissance maximale transmissible (cas où  $T_{max} = 2T_0$ ) :

$$P = (T_{max} - t_{min})V = (2T_0 - 0)V = 2T_0V$$

En pratique, on pose :

$$P = 2 \cdot K_P \cdot K_V \cdot T_0 \cdot V / K_s \quad (25)$$

$P$  en watts,  $T_0$  en N,  $V$  en m/s

- $K_P$  : coefficient correcteur fonction du diamètre de la poulie
- $K_V$  : coefficient correcteur fonction de la vitesse (V) de la courroie
- $K_S$  : coefficient correcteur fonction des conditions de service

On peut poser

$$P_b = 2.K_P. K_V.T_0 .V \tag{26}$$

$P_b$  est la puissance de base de la courroie avec la condition  $[P.K_s \leq P_b]$ .

### 3.2.10 Facteur de service $K_s$ .

Facteur de service	Intermittent	7à 10h/j	24h/j	même chose		
	<b>Moteur</b>					
<b>Machine entraînée</b>	Moteur induction, synchrone CA, design B ou C Moteur CC, couple normal Moteur à combustion interne multicylindres		Moteur induction CA, design D Moteur CC, couple élevé Moteur à combustion interne uni cylindre Arbre de transmission			
Agitateur pour liquides Petits convoyeurs Pompes et compresseurs centrifuges Ventilateurs	1,0	1,1	1,2	1,1	1,2	1,3
Convoyeurs à courroie Cribles Génératrices Machines d'imprimerie Machines outils Pompes à déplacement positif	1,1	1,2	1,3	1,2	1,3	1,4
Compresseurs à pistons Élévateurs à godets Machines à bois	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,6
Broyeurs Concasseurs Extrudeuses	1,3	1,4	1,5	1,5	1,6	1,8

### 3.2.11 Applications

- *Exemple de calcul approché*

Un moteur électrique développant une puissance de 24 KW entraîne un compresseur d'air dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Débit volumique  $q_v = 6.7 \text{ m}^3/\text{s}$
- Pression relative  $P = 0.7 \text{ MPa}$
- Les fréquences de rotation du moteur et du compresseur respectivement  
 $N_1 = 2850 \text{ tr/min}$ ,  $N_2 = 1250 \text{ tr/min}$ ,
- Entraxe souhaité  $E = 760 \text{ mm}$ .
- Compte tenu de l'encombrement de diamètre  $D_{\max} = 220 \text{ mm}$
- L'installation sera utilisée 24/24 pour une durée de vie souhaitée un an
- Une courroie de section trapézoïdale.

*Solution*

- *Calcul des angles d'enroulement  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$*

$$\begin{cases} K_{12} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_2}{N_1} \\ \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{r_1 - r_2}{e} \end{cases} \Rightarrow \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{r_2}{e} (1 - K_{12})$$

Soient

$$\alpha_1 = 2 \text{Arccos} \left( \frac{r_2}{e} (1 - K_{12}) \right) = 2 \text{Arccos} \left( \frac{110}{760} \left( 1 - \frac{1250}{2850} \right) \right) = 170^\circ, 68' = 2,98 \text{ (rd)}$$

$$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1 = 2.3,14 - 2,98 = 189^\circ, 32' = 3,30 \text{ (rd)}$$

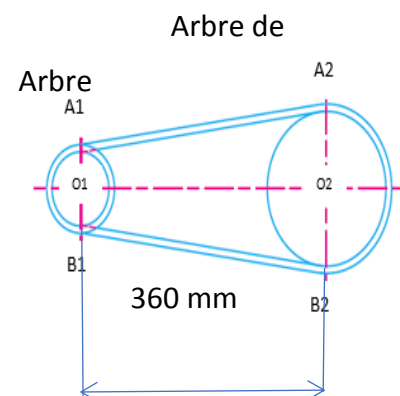
- *Le diamètre  $d_1$  est donné à travers le rapport de transmission*

$$K_{12} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{220} = \frac{N_2}{N_1} = 0,438 \Rightarrow d_1 = 96,5 \text{ mm}$$

- *Calcul de la longueur de la courroie  $L$*

$$L = 2e \sin \frac{\alpha_1}{2} + r_1 \alpha_1 + r_2 (2\pi - \alpha_1)$$

$$L = 2.760. \sin \frac{2,98}{2} + 48,25.2,9 + 110.3,30 = 2022 \text{ mm}$$



- *Calcul des tensions de fonctionnement*

Cette transmission fonctionne en réducteur car  $K_{12} = 0.438 < 1$

On a deux relations qui déterminent les tensions  $T$  et  $t$

$$\begin{cases} T - t = \frac{C_1}{R_1} \\ \frac{T}{t} = e^{3\lambda f \alpha_1} \end{cases} \quad \text{Avec } C_1 = \frac{30P}{\pi N_1} = \frac{30.24 \cdot 10^3}{\pi \cdot 2850} = 80,40 \text{ N.m}$$

$$\begin{cases} T - t = \frac{80,40}{48,25 \cdot 10^{-3}} = 1666 \text{ N} \\ \frac{T}{t} = 2,871^{3 \cdot 3,09 \cdot 0,40 \cdot 2,98} = 25 \end{cases} \quad (\text{On prend l'angle d'enroulement la plus petite } (\alpha_1))$$

La solution donne  $T = 1735,5 \text{ N}$  et  $t = 69,5 \text{ N}$

- *La tension de repose  $T_0$*  :  $T_0 = \frac{T+t}{2} = \frac{1735,5+69,5}{2} = 902 \text{ N}$

### Exercice 2

Soit une installation composée d'un moteur électrique d'une puissance  $P = 45 \text{ kW}$ , avec une vitesse de rotation  $N_d$  de 1455 tr/min, et d'une pompe centrifuge (machine conduite) dont la vitesse de rotation  $N_D$  est de 1300 tr/min. Le couple est uniforme et les conditions d'utilisation sont de 16 h par jour en atmosphère normale. L'entraxe souhaité est de l'ordre de 600 mm (la courroie de section trapézoïdale).

- 1) Choisir une solution possible pour l'installation.

### Solution

Une solution possible c'est à dire le choix des caractéristiques (petite poulie, grand poulie, longueur et le nombre de la courroie).

- 1) *La puissance corrigée*

La puissance corrigée est donnée par  $P_{cal} = S_s \cdot P$

Avec  $S_s$ : facteur de service (voir annexe tableau 1 et 2) on tire  $S_s = 1,12$

$$P_{cor} = 1,12 \cdot 45 = 50,4 \text{ Kw}$$

- 2) *Le rapport de transmission*

$$\eta = \frac{N_d(\text{moteur})}{N_D(\text{pompe})} = \frac{1455}{1300} = 1,12$$

L'abaque 1 permet de choisir les diamètres de la petite et la grande poulie en se basant sur la valeur du rapport de transmission



Donc,  $d = 180 \text{ mm}$  et  $D = 200 \text{ mm}$

La vitesse linéaire de la courroie est donnée par :

$$V = \frac{2 \pi \cdot N_d \cdot d}{60 \cdot 10^3 \cdot 2} = \frac{\pi \cdot 1455 \cdot 180}{60 \cdot 10^3} = 13,7 \text{ m/s}$$

### 3) La longueur de la courroie

Il existe plusieurs formules approchées pour calculer la longueur de la courroie, on peut utiliser :

$$L = 2 \cdot E + \frac{\pi}{2}(D + d) + \frac{(D-d)^2}{4E} = 2 \cdot 600 + \frac{\pi}{2}(200 + 180) + \frac{(200-180)^2}{4 \cdot 600} = 1797 \text{ mm}$$

D'après les constructeurs, la valeur la plus proche de la valeur trouvée est  $L = 1800 \text{ mm}$

Donc le nouvel entraxe est :

$$E = \frac{L - \frac{\pi}{2}(D + d)}{2} - \frac{(D - d)^2}{4 \left[ L - \frac{\pi}{2}(D + d) \right]}$$

$$= \frac{1800 - \frac{\pi}{2}(200 + 180)}{2} - \frac{(200 - 180)^2}{4 \left[ 1800 - \frac{\pi}{2}(200 + 180) \right]} = 601,5 \text{ mm}$$

### 4) La section de la courroie

Nous pouvons choisir les sections de la courroie d'après l'abaque 2 (voir annexe). On va étudier les deux cas suivants type SPB ou type SPBX

### 5) Puissance transmissible par courroie

Le choix se fait d'après le tableau 3 et 4 (voir annexe)

Section SPB :  $P_0 = 10,4$  pour une longueur de 1800 mm  
 Section SPBX :  $P_0 = 14,1$  pour une longueur de 1800 mm

### 6) Le nombre de courroie Z

Ce nombre est donné par :  $Z = \frac{P_{cor}}{P_{cal}}$

La puissance calculée est donnée par :

$$P_{cal} = C_\alpha \cdot C_L \cdot P_0 \quad \text{avec } C_\alpha : \text{ le facteur d'arc}$$

Ce facteur est donné par :  $C_\alpha = 1,25 \left[ 1 - 5^{-\frac{\alpha}{\pi}} \right]$ , ou bien par l'abaque 5 (voir annexe)

On calcule  $\frac{D-d}{E} = \frac{200-180}{601,5} = 0,033$  puis en tire  $C_\alpha = 1$

$$P_{\text{Cal}} = 1,088 \cdot 10,4 = 9,152 \quad \text{pour le type SPB}$$

$$P_{\text{Cal}} = 1,094 \cdot 14,1 = 13,25 \quad \text{pour le type SPBX}$$

$$\text{Donc } Z = \frac{50,4}{9,15} = 5,51 \approx 6 \quad \text{pour section SPS}$$

$$Z = \frac{50,4}{13,25} = 3,80 \approx 4 \quad \text{pour section SPBX}$$

Les deux solutions possibles ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Poulie motrice } 6\text{SPB } 180 \\ \text{Poulie réceptrice } 6\text{SPB}200 \\ 6 \text{ courroies SPB}1800 \end{array} \right. \quad \text{Ou bien} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\text{ SPBX } 180 \\ 4\text{ SPBX } 200 \\ 4 \text{ courroies SPBX}1800 \end{array} \right.$$

Remarque :

- ✚ Augmentons le diamètre des poulies tout en conservant sensiblement le même rapport.
- ✚ Prenons  $d = 190$  mm et  $D = 212$  mm (voir annexe Abaque 1) avec le même entraxe, la longueur devient  $L = 1\,832$  mm
- ✚ La longueur standard la plus proche est de  $L = 1850$  mm, ce qui correspond à un entraxe  $E = 609,2$  mm
- ✚ La puissance brute transmissible, dans ce cas, et pour une section SPB est :  $P_o = 11,4$  kW. Les facteurs correctifs sont :  $C_\alpha \approx 1$  et  $C_L = 0,885$ , d'où  $Z = 5,00$ . Ainsi, le fait d'augmenter de 6 % le diamètre des poulies  $[(212 - 200) / 212 = 0,056]$  et  $(190 - 180) / 190 = 0,052$  permet de réduire le nombre de courroies à  $Z = 5$ .

### 3.3 Transmission de puissance par chaîne

#### 3.3.1 Introduction :

Les chaînes, comme les courroies, sont des éléments flexibles qui permettent la transmission de la puissance entre deux arbres parallèles mais éloignés l'un de l'autre.

Les chaînes peuvent être soumises à des conditions d'utilisation plus difficiles que celles appliquées aux courroies. Les chaînes sont des éléments normalisés sur le plan international et fabriqués en série par des firmes spécialisées. Les fabricants publient des catalogues et autres documents destinés à guider le concepteur qui doit choisir les divers paramètres géométriques d'une transmission par chaîne.

### 3.3.2 Les divers types de chaînes

On classe les chaînes en deux grandes catégories

- Les chaînes de manutention, utilisées principalement dans les convoyeurs à chaînes pour la manutention, utilisées principalement dans les usines figure 3.14a.
- Les chaînes de transmission utilisées pour la transmission, de la puissance figure 3.14b.

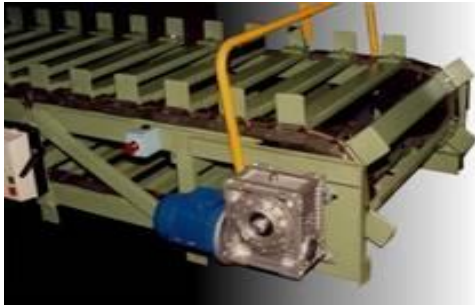


Fig. 3.14 : Chaînes pour la manutention (a), Chaînes pour transmission de puissance (b)

On peut classer les chaînes de transmission utilisées pour la transmission de la puissance en deux grandes catégories :

- Chaînes à rouleaux
- Chaînes silencieuses

#### a) Les chaînes à rouleaux

Les chaînes à rouleaux sont constituées d'une succession de deux types de maillons différents disposés alternativement : les maillons intérieurs et les maillons extérieurs.

- Les chaînes à rouleaux de précision à pas court sont plus spécialement utilisées dans les transmissions de puissance ou en manutention légère.
- Les chaînes des pas plus longs sont spécialement utilisées pour la manutention lourde ou pour applications à faible vitesse.

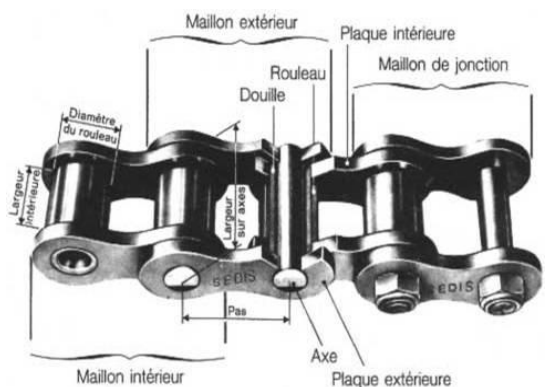


Fig. 3.15 : Chaîne à rouleaux

### b) Chaînes à blocs

Les chaînes à blocs reçoivent des maillons extérieurs semblables à ceux des chaînes à rouleaux, mais les maillons intérieurs sont constitués de pièces massives. Ce type de chaîne est généralement utilisé pour exercer un effort important de traction, dans les bancs d'étirage par exemple.

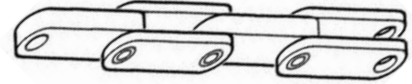


Fig. 3.16 : Chaîne à blocs

### c) Les chaînes à maillons coudés

Sont formées d'un seul type de maillons : les plaques, coudées à mi-longueur, portent une douille à une extrémité et un axe à l'autre.

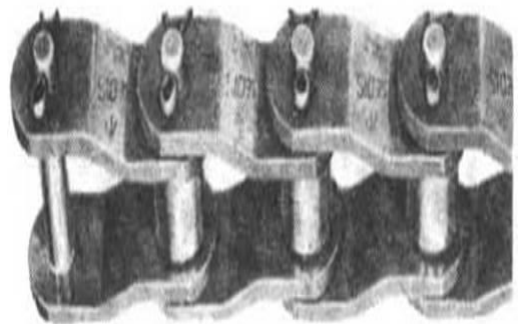


Fig. 3.17: Chaîne à Maillons

### d) Les chaînes à maillons jointives

Sont constituées que de plaques s'articulant sur des axes et la combinaison des plaques sur deux maillons consécutifs est variable selon les types de chaînes.



Fig.3.18 : Chaîne à Maillons

## 3.3.3 Avantages et les inconvénients

Les chaînes procèdent des avantages et des inconvénients, on peut citer :

*Avantages :*

- Rapport de vitesse précis (absence de glissement – synchronisation)
- Puissance transmise élevée à faible vitesse
- Rendement élevé (jusqu'à 98 %)
- Bonne durée de vie (environ 15 000 heures)
- Montage simple et entretien facile (par rapport aux engrenages)
- Possibilité de changer ou bien de faire varier l'entraxe en modifiant la longueur de la chaîne

- Conditions d'utilisation plus difficiles par rapport à une courroie (humidité, corrosif, chocs)
- Possibilité d'entraîner plusieurs arbres récepteurs à partir d'un unique arbre moteur.
- Fiabilité
- Le coût de l'installation qui reste inférieur à celui d'une transmission par engrenage dans les mêmes conditions dans le cas d'entraxe court.

*Désavantages :*

- Niveau sonore élevé (par rapport à une courroie)
- Absence d'amortissement des chocs (fatigue)
- L'existence des vibrations longitudinales et transversales
- Nécessité de lubrification
- Masse linéique élevée
- Arbres parallèles seulement

### 3.3.4 Terminologie

C - entraxe , P - pas de la chaîne , $P = \frac{\pi d}{Z}$		
	<b>Pignon (1)</b>	<b>Roue (2)</b>
$\omega_{1,2}$	Vitesse angulaire	Vitesse angulaire
$d_{p1,p2}$	Diamètre primitif	Diamètre primitif
$Z_{1,2}$	Nombre de dents	Nombre de dents

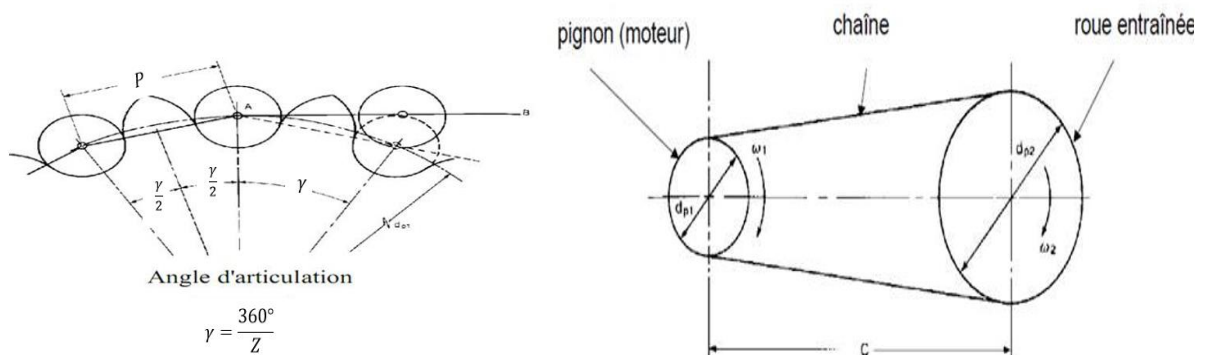


Fig. 3.19 : Terminologie de la chaîne et l'angle d'articulation

### 3.3.5 Rapport de transmission

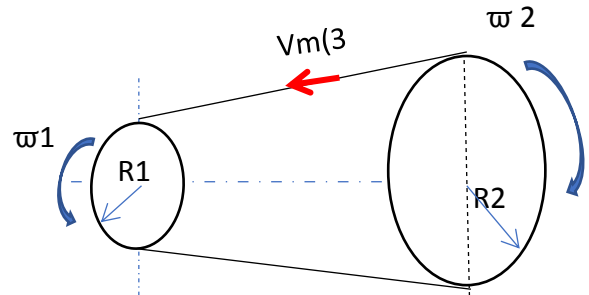
Le non glissement aux contacts (chaîne - pignon) conduit aux égalités suivantes

- Pour le contact (3---1)  $\vec{V}_{m(3/0)} = \vec{V}_{m(1/0)}$  avec  $\vec{V}_{m(1/0)} = \omega_1 r_1$
- Pour le contact (3---1)  $\vec{V}_{m(3/0)} = \vec{V}_{m(2/0)}$  avec  $\vec{V}_{m(2/0)} = \omega_2 r_2$

Il vient que 
$$K_{12} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Il est aussi en fonction de nombre de dents

$$K_{12} = \frac{z_1}{z_2} \quad z : \text{nombre de dents}$$



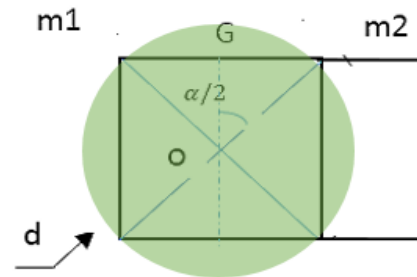
Avec

$$m_1 m_2 = P, \quad Om_1 = \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2\pi}{z}$$

soit l'angle

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m_1 G}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{P}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{P}{d}$$

$$d = \frac{P}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{P}{\sin\left(\frac{2\pi}{2z}\right)} = \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$



Donc,

$$K_{12} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z_2}\right)}{P} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z_2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)}$$

Avec une valeur approximative de l'angle  $\sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \approx \frac{\pi}{z_1}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{z_2}\right) \approx \frac{\pi}{z_2}$

D'où 
$$K_{12} = \frac{z_1}{z_2} \tag{27}$$

### 3.3.6 Calcul de la longueur

#### Procédure

- 1) Estimation de la longueur :

$$L \approx 2C + \frac{P(Z_1+Z_2)}{2} + \frac{P^2}{C} \left( \frac{Z_2-Z_1}{2\pi} \right)^2 \quad (28)$$

C : l'entraxe

Z1 : le nombre de dents du pignon moteur

Z2 : le nombre de dents de la roue dentée

P : le pas de la chaîne

2) *Calcul de la longueur exprimée en maillons :*

$L_m = L/p$     L : longueur de la chaîne, p : le pas

$$L_m = \frac{L}{P} = \frac{2C}{P} + \frac{Z_1+Z_2}{2} + \frac{(Z_2-Z_1)^2}{4\pi^2 \left(\frac{C}{P}\right)} \quad (29)$$

Pour ajuster  $L_m$ , il faut arrondir à l'entier supérieur (nécessité d'avoir un nombre fini de maillons). Idéalement, choisir un nombre pair (pour éviter un maillon coudé).

L'ajustement de la longueur de la chaîne est     $L = L_m \cdot P$

### 3.3.7 Calcul de l'entraxe exprimé en nombre de maillons :

$$C_m = \frac{C}{P} = \frac{L_m}{4} - \frac{Z_1+Z_2}{8} + \sqrt{\left(\frac{L_m}{4} - \frac{Z_1+Z_2}{8}\right)^2 - \frac{(Z_2-Z_1)^2}{8\pi^2}} \quad (30)$$

L'ajustement de l'entraxe est     $C = C_m \cdot P$

- *La longueur de la chaîne « L »*

La longueur d'une chaîne dépend directement de son pas « P » et du nombre entier « n » des maillons qui le composent.

- *Expression de la longueur théorique – L- de la chaîne*
- Entraxe  $C = O_1O_2$      $l = AD = BC = OH = e \cos \alpha$

- Les rayons

$$r_1 = O_1D = \frac{P}{2 \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)}$$

$$r_2 = O_2D = \frac{P}{2 \sin\left(\frac{\pi}{z_2}\right)}$$

- La longueur de la chaîne est

$$L = \widehat{AMB} + \widehat{CM'D} + 2l$$

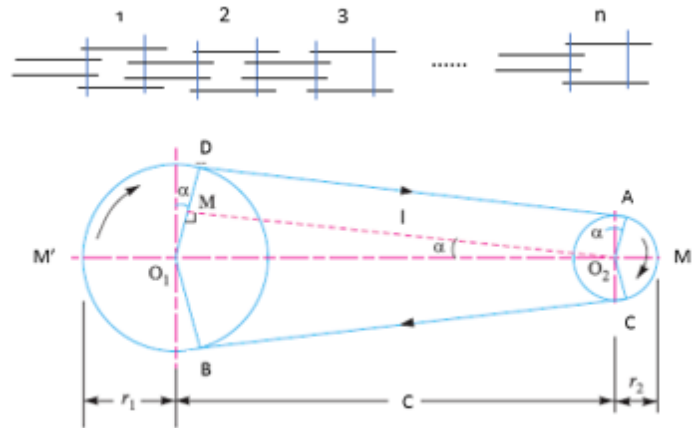


Fig. 3.20 : la longueur théorique

### 3.3.8 Effets spécifiques

#### 3.3.8.1 Introduction

Une chaîne est en ensemble de maillons articulés les uns par rapport aux autres. L'analyse cinématique met en évidence les méfaits consécutifs aux caractéristiques proposées à ce type de transmission.

- *Effet vibratoire* : le phénomène de vibratoire diminue avec l'augmentation du nombre de dents
- *Effet de choc* : le phénomène du choc s'explique par l'inversion instantanée de la composante suivant la direction de l'axe.
- *Effet d'articulation* : cet effet d'articulation entraîne usure par frottement dans les liaisons pivot d'axe.
- *Effet de succion* : Ce phénomène de succion a pour conséquence un accroissement de la tension initiale de la chaîne.

L'importance de la masse volumique de la chaîne intervient aussi comme élément de perturbation à travers.

- *Effet caténaire* (effet induit par le poids de la chaîne) : les brins tendus et mous se comportent approximativement comme des fils pesants.

La sollicitation due à l'effet caténaire pour le brin tendu est donnée par :

$$T_{ca} = \frac{PL}{8y} \quad (31)$$

Avec P, L et y sont respectivement le poids, longueur et la flèche du brin tendu de la chaîne. Même chose pour le brin mou.



- *L'effet centrifuge* : Cet effet entraine l'existence de sollicitation en traction de la chaîne dans les deux brins.

Soit un élément (tronçon ab) de longueur

$$\widehat{ab} = \frac{d_1}{2} d\theta$$

La force centrifuge élémentaire est :

$$dF_c = d_m \gamma_G \text{ avec } \gamma_G = \omega_1^2 \frac{d_1}{2}$$

La masse linéaire de la chaîne élémentaire en (kg/m) est :

$$d_m = m \frac{d_1}{2} d\theta$$

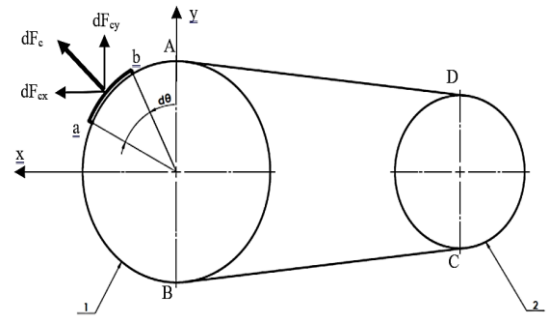


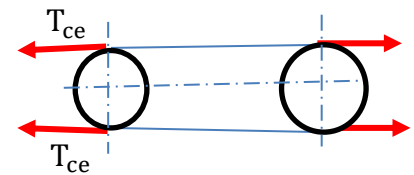
Fig.3.23 : les composantes de la force centrifuge

D'où la force centrifuge s'écrit :

$$dF_c = m \frac{d_1}{2} d\theta. \omega_1^2 \frac{d_1}{2} = mv^2 d\theta, \text{ Avec } v = m \frac{d_1}{2} \text{ (vitesse linéaire de la chaîne en m/s)}$$

$$F_{cx} = \int_0^\pi dF_c \sin \theta = \int_0^\pi mv^2 \sin \theta d\theta \Rightarrow F_{cx} = 2mv^2$$

Cet effet entraine l'existence de sollicitation en traction de la chaîne dans les deux brins



La sollicitation due à l'effet centrifuge en (N) est

$$T_{ce} = \frac{T_{cx}}{2} = \frac{2mv^2}{2} = mv^2 \tag{31}$$

### 3.3.8.2 Sollicitation dans les brins de la chaîne

L'effet de traction principal  $T_P$  dans le brin tendu provient de la puissance à transmettre, il s'annule dans le brin mou.

La puissance à transmettre  $P = C_1 \omega_1$

avec  $\omega_1 = \frac{\pi N_1}{30}$  ( $\omega_2 = \frac{\pi N_2}{30}$ )

Le couple  $C_1 = T_P \frac{d_1}{2}$  ou bien ( $C_2 = T_P \frac{d_2}{2}$ )

L'effort de traction principal est

$$T_P = \frac{60P}{d_1 \pi N_1} \left( \frac{60P}{d_2 \pi N_2} \right) \tag{32}$$

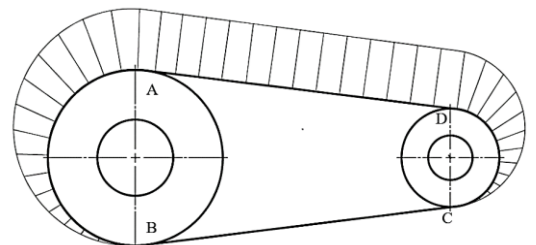


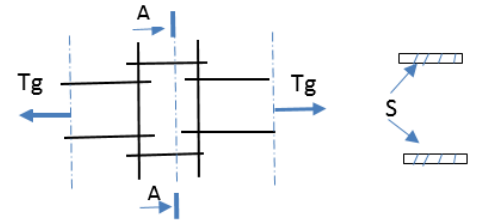
Fig.3.22 : Les sollicitations dans les brins de la chaîne

(P en W), (d en m), ( $N_1$  en Tr/min), ( $T_P$  en N)

La sollicitation globale  $T_g$  dans les brins mou et tendu est

- dans le brin tendu  $T_g = T_P + T_{ca} + T_{ce} = \frac{60P}{d_1 \pi N_1} + \frac{Mgl}{8b} + mv^2$  (33)

- dans le brin mou  $T_g = T_{ca} + T_{ce} = \frac{Mgl}{8b} + mv^2$



### 3.3.9 Les différentes contraintes

#### a) Contrainte dans les maillons

La contrainte moyenne

$$\sigma_{moy} = \frac{T_g}{S} \quad (MPa) \quad (34)$$

$T_g$  : effet de traction global dans la chaîne (N)

$S$  : section la plus petite des plaques ( $mm^2$ )

#### b) La contrainte normale maximale

La contrainte normale maximale est

$$\sigma_{max} = K \cdot \sigma_{moy} \quad (35)$$

$K$  : coefficient de

La condition de résistance en traction des plaques

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{pe}$$

$$K \cdot \frac{T_g}{S} \leq \sigma_{pe} \Rightarrow S = K \cdot \frac{T_g}{2\sigma_{pe}} \quad (2 \text{ sections})$$

$\sigma_{pe}$ : Contrainte pratique en extension (MPa)

#### c) Contrainte de cisaillement

Cherchons le diamètre de l'axe des maillons

La contrainte tangentielle est

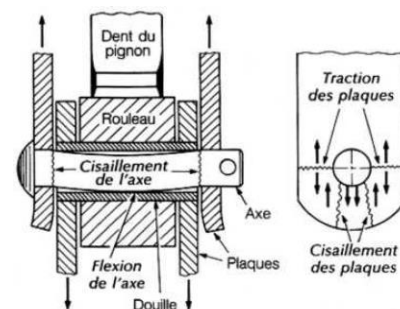


Fig.3.22: Différentes sollicitations sur l'axe et les plaques

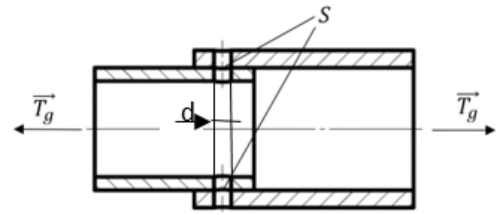
$$\tau = \frac{T_g}{2S} \leq \tau_{pg} \quad \text{Avec} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\text{D'où le diamètre est } d \geq \sqrt{\frac{2T_g}{\pi\tau_{pg}}}$$

(36)

$\tau_{pg}$  : Contrainte tangentielle pratique (MPa)

d : diamètre de l'axe (mm)



### 3.3.10 Lubrification

- Lubrification par Graissage périodique au pinceau ou à la burette pour les chaînes dont la vitesse  $v < 1$  m/s et la puissance  $P < 3.5$  kW.
- Lubrification par Compte-gouttes lorsque :  $1 \text{ m/s} < v < 2 \text{ m/s}$
- Lubrification Barbotage par un bain d'huile lorsque  $2 \text{ m/s} < v < 7 \text{ m/s}$  et lubrification Sous-pression lorsque  $v > 7 \text{ m/s}$  dans un carter étanche. L'huile doit être maintenue à une température inférieure à  $70^\circ\text{C}$

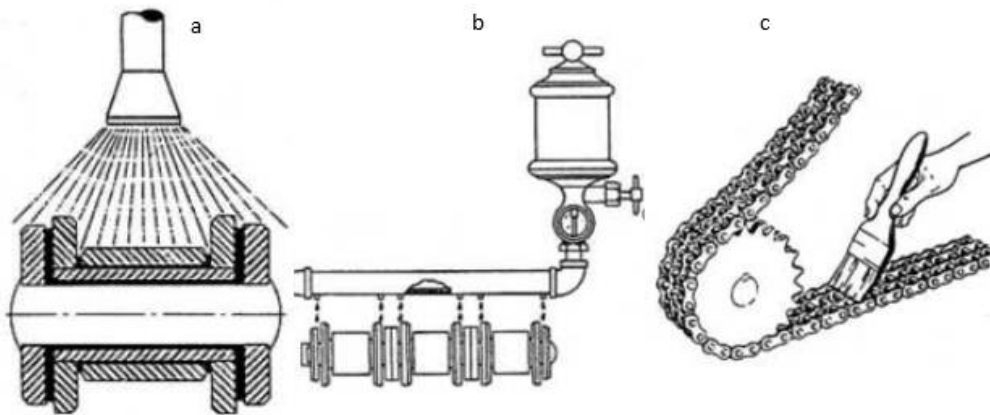


Fig. 3.23 : Lubrification par a) Pression, b) gout à goutte, c) localisation principale

### 3.3.11 Applications

#### Exercice 1

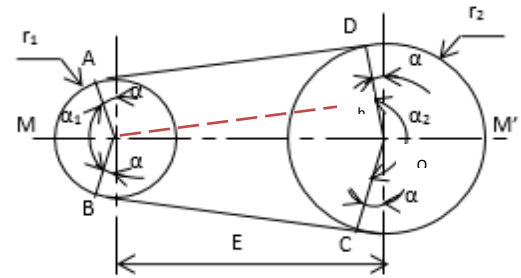
Un moteur électrique développant une puissance et  $N_1 = 60$  tr/mn, entraîne en rotation un arbre porte-outil  $N_2 = 15$  tr/mn, nombre de dents  $Z_1 = 21$  dents,

La contrainte tangentielle pratique =  $500$  MPa , le pas  $P = 15$  mm et l'entraxe  $E = 600$  mm

- Trouver l'expression de la longueur théorique (L).
- Trouver la longueur en maillon.
- Trouver l'expression du diamètre en fonction des forces agissantes sur l'axe.

Si on néglige l'effet caténaire et l'effet centrifuge

- Trouver la valeur du diamètre (d).



Solution

1) expression de la longueur théorique

$$L = \widehat{AMB} + BC + \widehat{CM'D} + DA$$

Soit  $O_1O_2 = E$  avec  $O_1O_2 = E$

$$\sin \alpha = \frac{r_2 - r_1}{e} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{r_2 - r_1}{e}\right)$$

Les arcs :  $\widehat{AMB} = r_1(\pi - 2\alpha) = \frac{P(\pi - 2\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{z_1})}$  et  $\widehat{CM'D} = r_2(\pi + 2\alpha) = \frac{P(\pi + 2\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{z_2})}$

Donc la longueur s'écrit  $L = E \cos \alpha + \frac{P}{2} \left( \frac{\pi - 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{z_1})} + \frac{\pi + 2\alpha}{\sin(\frac{\pi}{z_2})} \right)$  (1)

Le rapport de transmission

$$K_{12} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

Cherchons le nombre  $Z_2$

$$K_{12} = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_2 = \frac{z_1}{K_{12}} = 84 \text{ dents}$$

Les rayons

$$r_1 = \frac{P}{2\sin(\frac{\pi}{z_1})} = \frac{15}{2\sin(\frac{180}{21})} = 50.3 \text{ mm} \quad \text{Et} \quad r_2 = \frac{15}{2\sin(\frac{180}{84})} = 200,58 \text{ mm}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{200,58 - 50,3}{600}\right) = 14,50^\circ = 0.25 \text{ rd}$$

En remplaçant dans (1), la valeur de la longueur  $L = 2034 \text{ mm}$

2) La longueur en maillons :  $L_m = \frac{L}{P} = \frac{2034}{15} = 135,6 \approx 136 \text{ Maillons}$

Calcul du diamètre

$$\tau = \frac{T_g}{2S} \leq \tau_{pg} \quad \text{Avec} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{4T_g}{2\pi d^2} \leq \tau_{pg} \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{2T_g}{\pi\tau_{pg}}} \quad \text{avec}$$

La sollicitation globale  $T_g$

$$T_g = T_P + T_{ca} + T_{ce} = \frac{60P}{d_1\pi N_1} \quad \text{avec} \quad T_{ca} = T_{ce} = 0$$

$$T_g = T_P = \frac{60P}{d_1\pi N_1} = \frac{60 \cdot 800}{100,6 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 60} = 2532,57 \text{ N}$$

Le diamètre  $d$  :

$$d \geq \sqrt{\frac{2 \cdot T_g}{\pi \tau_{pg}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2532,57}{\pi \cdot 500}} = 1,79 \approx 2 \text{ mm}$$

### Application 2

- Soit une installation composée d'un moteur électrique d'une puissance  $P = 45 \text{ kW}$ , avec une vitesse de rotation  $N_d$  de 1455 tr/min, et d'une pompe centrifuge (machine conduite) dont la vitesse de rotation  $N_D$  est de 1300 tr/min. Le couple est uniforme et les conditions d'utilisation sont de 16 h par jour en atmosphère normale. L'entraxe souhaité est de l'ordre de 600 mm (la courroie de section trapézoïdale).

- 1) Choisir une solution possible pour l'installation.

#### Solution

Une solution possible c'est à dire le choix des caractéristiques (petite poulie, grand poulie, longueur et le nombre de la courroie).

- 1) *La puissance corrigée*

La puissance corrigée est donnée par  $P_{cal} = S_S \cdot P$

Avec  $S_S$ : facteur de service (voir Annexe **tableau 1 et 2**) on tire  $S_S = 1,12$

$$P_{cor} = 1,12 \cdot 45 = 50,4 \text{ Kw}$$

- 2) *Le rapport de transmission*

$$\eta = \frac{N_d}{N_D} = \frac{1455}{1300} = 1,12$$

L'**abaque 1** permet de choisir les diamètres de la petite et la grande poulie en se basant sur la valeur du rapport de transmission

donc,  $d=180 \text{ mm}$  et  $D=200 \text{ mm}$

La vitesse linéaire de la courroie est donnée par :

$$V = \frac{\pi \cdot N_d \cdot d}{60 \cdot 10^3} = \frac{\pi \cdot 1455 \cdot 180}{60 \cdot 10^3} = 13,7 \text{ m/s}$$

3) *La longueur de la courroie*

Il existe plusieurs formules approchées pour calculer la longueur de la courroie, on peut utiliser cette formule :

$$L = 2 \cdot E + \frac{\pi}{2}(D + d) + \frac{(D-d)^2}{4E} = 2 \cdot 600E + \frac{\pi}{2}(200 + 180) + \frac{(200-180)^2}{4 \cdot 600} = 1797 \text{ mm}$$

D'après les constructeurs la valeur la plus proche à la valeur trouvée est  $L=1800 \text{ mm}$

Ce qui donne un nouvel entraxe, cet entraxe est donné par :

$$E = \frac{L - \frac{\pi}{2}(D + d)}{2} - \frac{(D - d)^2}{4 \left[ L - \frac{\pi}{2}(D + d) \right]} = \frac{1800 - \frac{\pi}{2}(200 + 1800)}{2} - \frac{(200 - 180)^2}{4 \left[ 1800 - \frac{\pi}{2}(200 + 180) \right]} = 601,5 \text{ mm}$$

4) *La section de la courroie*

Nous pouvons choisir les sections de la courroie d'après l'**abaque 2**. On va étudier les deux cas suivant type SPB ou type SPBX

5) *Puissance transmissible par courroie*

Le choix se fait d'après le **tableau 3 et 4**

Section SPB :  $P_0 = 0,88$  pour une longueur de 1800 mm

Section SPBX :  $P_0 = 0,94$  pour une longueur de 1800 mm

6) *Le nombre de courroie Z*

Ce nombre est donné par :  $Z = \frac{P_{cor}}{P_{cal}}$

La puissance calculée est donnée par :

$$P_{cal} = C_{\alpha} \cdot C_L \cdot P_0 \quad \text{avec } C_{\alpha} : \text{ le facteur d'arc}$$

Ce facteur est donné par la formule suivante :  $C_{\alpha} = 1,25 \left[ 1 - 5^{-\frac{\alpha}{\pi}} \right]$ , ou bien il est donné par

l'abaque. On calcule  $\frac{D-d}{E} = \frac{200-180}{601,5} = 0,033$  puis on tire  $C_{\alpha} = 1$

$$P_{cal} = 1 \cdot 0,88 \cdot 10,4 = 9,152 \quad \text{pour le type SPB}$$

$$P_{cal} = 1 \cdot 0,94 \cdot 14,1 = 13,25 \quad \text{pour le type SPB}$$

$$\text{Donc } Z = \frac{50,4}{9,15} = 5,51 \approx 6 \quad \text{pour section SPS}$$

$$Z = \frac{50,4}{13,25} = 3,80 \approx 4 \quad \text{pour section SPBX}$$

Les deux solutions possibles ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Poulie motrice } 6\text{SPB } 180 \\ \text{Poulie réceptrice } 6\text{SPB}200 \\ 6 \text{ courroies SPB}1800 \end{array} \right. \quad \text{Ou bien} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ SPBX } 180 \\ 4 \text{ SPBX } 200 \\ 4 \text{ courroies SPBX}1800 \end{array} \right.$$

### Remarque

Augmentons le diamètre des poulies tout en conservant sensiblement le même rapport.

Prenons  $d = 190$  mm et  $D = 212$  mm (voir **Abaque 1**) avec le même entraxe, la longueur devient

$$L = 1\,832 \text{ mm}$$

La longueur standard la plus proche est de  $L=1850$  mm, ce qui correspond à un entraxe

$$E = 609,2 \text{ mm}$$

La puissance brute transmissible, dans ce cas, et pour une section SPB est :  $P_0 = 11,4$  kW. Les facteurs correctifs sont :  $C_{\alpha} \approx 1$  et  $C_L = 0,885$ , d'où  $z = 5,00$ . Ainsi, le fait d'augmenter de 6 % le diamètre des poulies  $[(212-200)/212 = 0,056]$  et  $(190-180)/190 = 0,052$  permet de réduire le nombre de courroies à  $Z=5$ .

# Chapitre 4 : Réducteurs et Boîtes de Vitesses

## 4.1 Introduction

La boîte de vitesse est un élément mécanique proposant plusieurs rapports de transmission entre un arbre moteur et un arbre de sortie. Son cas d'utilisation le plus fréquent est la transmission du couple d'un moteur thermique aux roues motrices d'un véhicule. Elle est aussi utilisée dans de multiples autres contextes telles que les machines-outils, machines agricoles...

On peut dire aussi que la boîte de vitesse est un élément qui adapte le couple moteur disponible, au couple souvent très variable et nécessaire au fonctionnement d'un dispositif mécanique : mise en mouvement, entretien du mouvement, transformation de puissance.

Pour un véhicule, il s'agit de la résistance inertielle au démarrage ou celle à l'avancement variant suivant les conditions de roulage (plat, montées, descente, virages...). L'augmentation du couple disponible sur la roue (l'essieu moteur), le réducteur à engrenages étant la solution la plus commune. De plus, les conditions d'usage : arrêt court, limitation de vitesse, ralentissement, relief, imposent des allures de fonctionnement différentes. Un véhicule doit donc disposer d'un organe de transmission de puissance. Il s'agit donc d'un ensemble de réducteurs disposés dans un même boîtier. La dénomination « boîte de vitesses » est en partie erronée puisque, en réalité, son rôle est



d'adapter le couple. Cette appellation est liée aux premières machines industrielles qui recevaient l'énergie motrice d'un arbre moteur commun, animé par un moulin à eau ou une machine à vapeur tournant à vitesse constante, des systèmes de pignons permettaient le choix d'une vitesse de fonctionnement. La dénomination anglo-saxonne est donc plus juste :

Gear box (littéralement : boîte à engrenage), cependant, toutes les boîtes de vitesses ne sont pas construites sur le principe de transmission par engrenages.

La technologie renaissante des véhicules électriques annonce l'abandon de cet organe de transmission. En effet les moteurs électriques sont de plus en plus performants (couple important et compacité inégalée, rendement sans égal). Ils peuvent dorénavant être directement implantés dans la roue, ce qui élimine tous les éléments de transmission (différentiel, cardans...).

## **4.2 Les réducteurs de Vitesses**

Les réducteurs de vitesses sont toujours été considérés comme des composants essentiels dans le monde de la mécanique, leur succès réside dans leur utilité. Les boîtes de vitesses sont des transmissions à engrenages mécaniques qui transportent le mouvement d'un moteur vers la machine à laquelle elles sont appliquées, réduisant la vitesse dont le but de l'adapter aux besoins du fonctionnement. Tout en réduisant la vitesse, le réducteur multiplie le couple.

### **4.3 Les principaux types de réducteurs**

- Les réducteurs à vis sans fin ;
- Les réducteurs planétaires ;
- Les réducteurs à couple conique ;
- Les réducteurs à train d'engrenages.

#### **4.3.1 Principe de fonctionnement**

A une extrémité, un moteur électrique ou hydraulique est appliqué tandis que l'autre extrémité de l'arbre l'énergie est convertie un couple à faible vitesse.

### 4.3.2 Types de réducteurs de vitesses

#### 4.3.2.1 Réducteur à train d'engrenage

les réducteurs à trains d'engrenage à axes parallèles (figure 4.1) sont généralement utilisés pour applications nécessitant une grande puissance comme par exemple les convoyeurs . la simplicité de leur technologie rend le coût de maintenance raisonnable. En plus ils ont un rendement élevé, ils sont utilisés pour les grandes puissances



*Fig. 4.1 : Réducteurs à trains d'engrenage à axes parallèles*

#### 4.3.2.2 Les réducteurs à vis sans fin

Le mécanisme est basé sur une roue à vis sans fin qui ressemble beaucoup à un engrenage cylindrique traditionnel. Une spirale qui était en avant par une roue de créer alors une action glissante parfois un peu inefficace , mais hautement spécialisée. Les réducteurs à vis sans fin (figure 4.2) ont un arbre d'entrée et un arbre de sortie perpendiculaire, ils sont généralement pour les applications nécessitant une grande démultiplication.

Ce mécanisme est non réversible, il assure une plus grande sécurité du système moins onéreux que d'autres réducteurs. Ils sont également plus silencieux, car ils ne vibrent pas ,ils génèrent donc peu de bruit et leur utilisation est plus confortable.

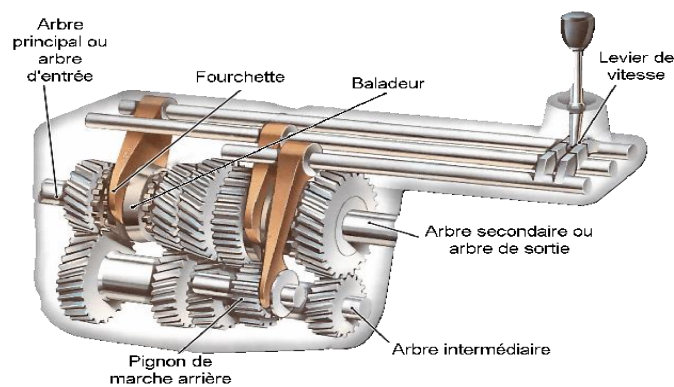


*Fig. 4.2 : Réducteurs à vis sans fin*

## 4.4 Les types de boîtes de vitesses

### 4.4.1 Boîtes de vitesses manuelles

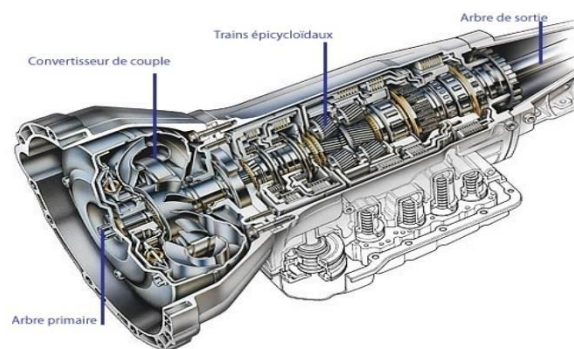
Aujourd'hui, la boîte de vitesse manuelle est le type de boîte le plus courant en Europe (figure 4.3). À cause des séries de pignons qui permettent de changer de rapport de manière synchronisée. Elle est aussi dite « à engrenages ». Une grande partie des boîtes de vitesse de ce type compte 5 ou 6 rapports différents.



*Fig.4.3 : Boîte de vitesse manuelle*

### 4.4.2 Boîtes de vitesses automatiques

Il y a quelques années, on retrouvait souvent les boîtes de vitesse automatiques (figure 4.4) sur des modèles de voitures de haute gamme. Désormais, ce type de boîte de vitesse commence à se démocratiser et à être de plus en plus présent sur les autres voitures.



*Fig.4.4 : Boîte de vitesse automatique*

## 4.5 La Boîte de vitesse à commande manuelle

### 4.5.1 Principe

Les différents engrenages (pignon-roue) des différents rapports de vitesses sont toujours en prise, Les pignons et roues situés sur l'arbre primaire (arbre qui sera lié à l'arbre moteur) sont solidaires de ce dernier donc ils tournent tous à la même vitesse.

Les pignons et roues situés sur l'arbre récepteur sont en liaison pivot sur ce dernier donc ils tournent tous à des vitesses différentes autour de cet arbre. Ces liaisons pivots sont réalisées :

- ✚ Soit par un contact direct métal-métal,
- ✚ Soit par un coussinet (bimétal alvéolée),
- ✚ Soit par une cage à aiguilles.

Ces pignons et roues sont appelés pignons « fous » et roues « folles » Au point mort, aucune roue folle n'est solidarisée avec l'arbre récepteur. Sous chaque fourchette, on distingue un baladeur ou le pignon intermédiaire de MAR. Chaque fourchette est actionnée par un axe différent.

Le déplacement transversal au point mort du levier de vitesse dans l'habitacle, qui sert à se mettre en face de soit la 1-2 ou soit la 3-4 ou soit la 5-MAR, permet en fait de sélectionner un axe de fourchette, et donc de commander un seul des trois baladeurs.

Le déplacement longitudinal du levier de vitesse dans l'habitacle, qui sert à « passer une vitesse », permet en fait de déplacer la fourchette et son baladeur qui a pour rôle de solidariser une roue folle avec l'arbre récepteur.

Avant d'engager un baladeur, il faut nécessairement dégager l'autre, donc ramener le levier de vitesses de l'habitacle au point mort.

### 4.5.2 Fonctionnement de la marche arrière

La marche arrière est un peu particulière car elle ne comporte pas de synchroniseur, sauf sur les véhicules de haute gamme. Les pignons des arbres primaires et secondaire ne sont pas en contact. C'est un troisième pignon sur un autre arbre qui va venir s'intercaler et assurer la liaison de l'ensemble formé alors de trois pignons. Puisqu'il y a un pignon supplémentaire, 3 au lieu de 2, cela inverse le sens de rotation des roues.

Le déplacement de ce pignon intermédiaire devra se faire à l'arrêt (d'où l'absence de synchroniseur), et avec des pignons à denture droite. Les autres rapports ont des dentures hélicoïdales. La roue de la MAR sur l'arbre récepteur, est montée généralement sur un des baladeurs, qui est déjà solidaire de l'arbre.

### 4.5.3 Les avantages et inconvénients

Ce type de boîte de vitesse permet au conducteur de décider des changements de rapport et de s'adapter à la situation dans laquelle il est. Par exemple les rapports sont passés à haut régime dans le cas d'une conduite sportive alors qu'en conduite tranquille les rapports sont passés à un plus bas régime. La consommation de carburant varie aussi en fonction du type de conduite, le conducteur peut donc réaliser des économies grâce à ce type de boîte de vitesse. Avec ce type de boîte de vitesse, la conduite en ville peut paraître moins agréable et confortable qu'avec une pour boîte de vitesse automatique. Ceci est dû au fait que le changement de rapport est plus fréquent car il s'effectue en fonction du trafic, de la signalisation

La technologie renaissante des véhicules électriques annonce l'abandon de cet organe de transmission. En effet les moteurs électriques sont de plus en plus performants (couple important et compacité inégalée, rendement sans égal). Ils peuvent dorénavant être directement implantés dans la roue, ce qui élimine tous les éléments de transmission (différentiel, cardans...).

## 4.6 Schéma cinématique

Le schéma cinématique est un outil de description qui permet en gros de comprendre la constitution du système et comment il fonctionne. Il nous permet également de paramétrer le système et cela sert de base à tout calcul par la suite.

**Exemple 1**

Un moteur électrique entraîne une vis sans fin (1). Le mouvement de rotation de la vis sans fin (1) est transmis à l'arbre de sortie de la roue dentée (7) par la chaîne cinématique composée de 2 sous-ensembles A et B.

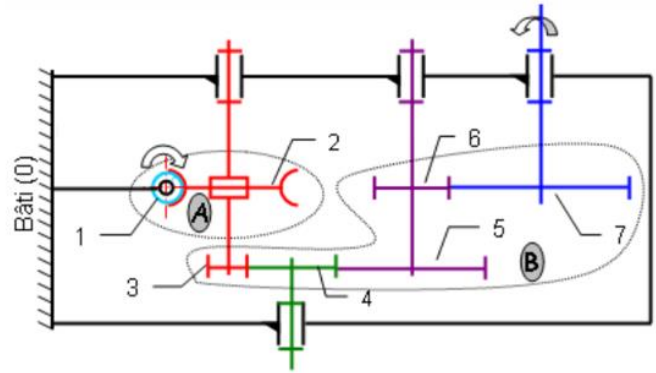
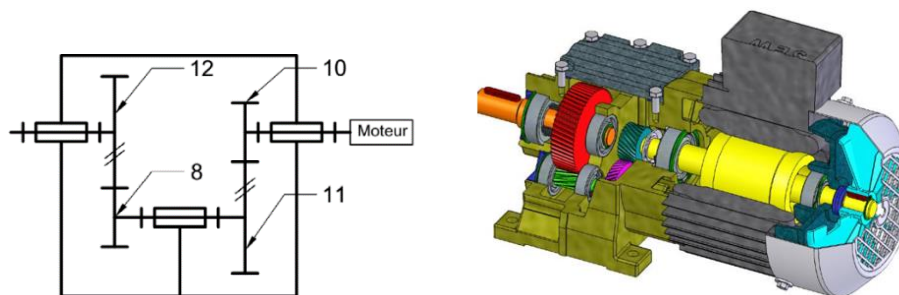


Fig. 4.5 : Réducteur à vis sans fin

***Réducteur à trains ordinaires***

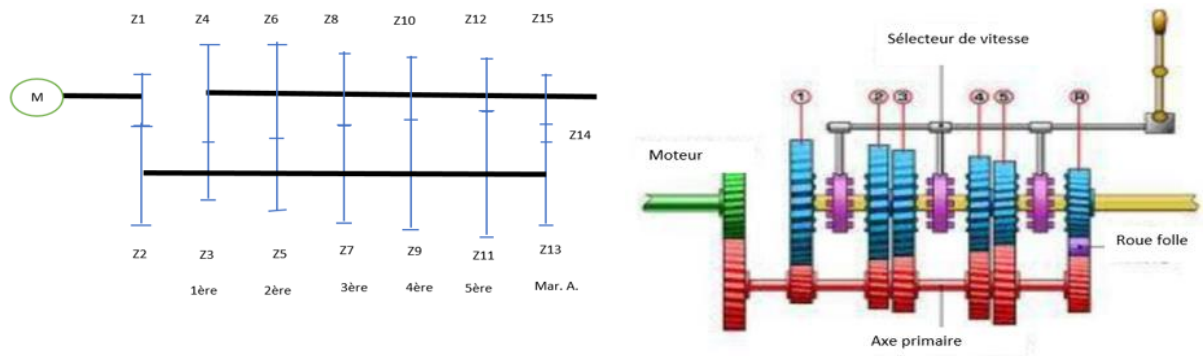
A travers l'arbre moteur, le mouvement est transmis à l'arbre intermédiaire par la roue 10 et 11 et par la suite à l'arbre de de sortie par les roues 8 et 12



Fig;4.6 : Schéma cinématique du réducteur

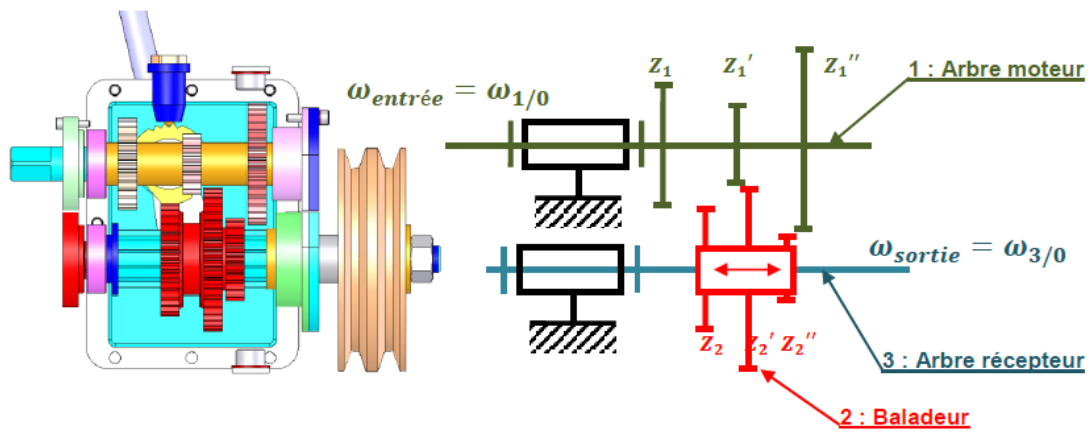
***Exemples des schémas cinématiques des boîtes de vitesses******Exemple 1 : Boîte à cinq Vitesses***

Cette boîte de vitesses se compose de trois axes (deux arbres principaux et un arbre intermédiaire). La boîte de vitesses sera manuelle et aura six rapports : cinq avant et un arrière. En plus trois synchroniseurs pour changer les vitesses.

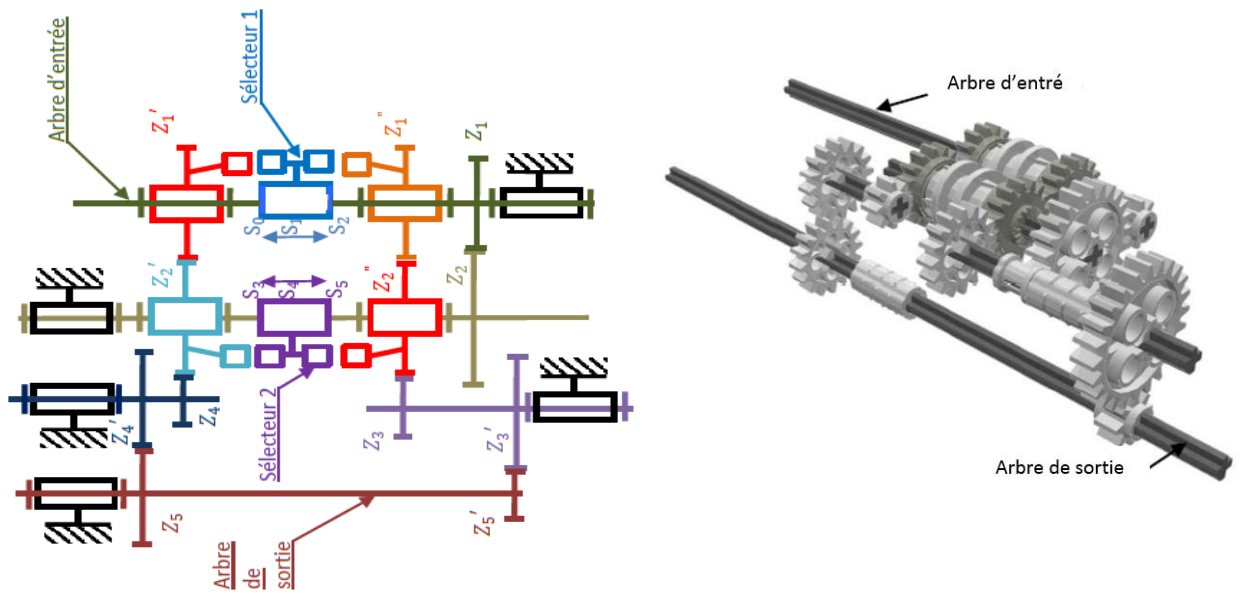


*Boîte de vitesses à trois arbres et schéma cinématique*

Exemple 2 : La sélection de la vitesse se fait grâce au levier qui déplace le baladeur (2) par l'intermédiaire d'une fourchette

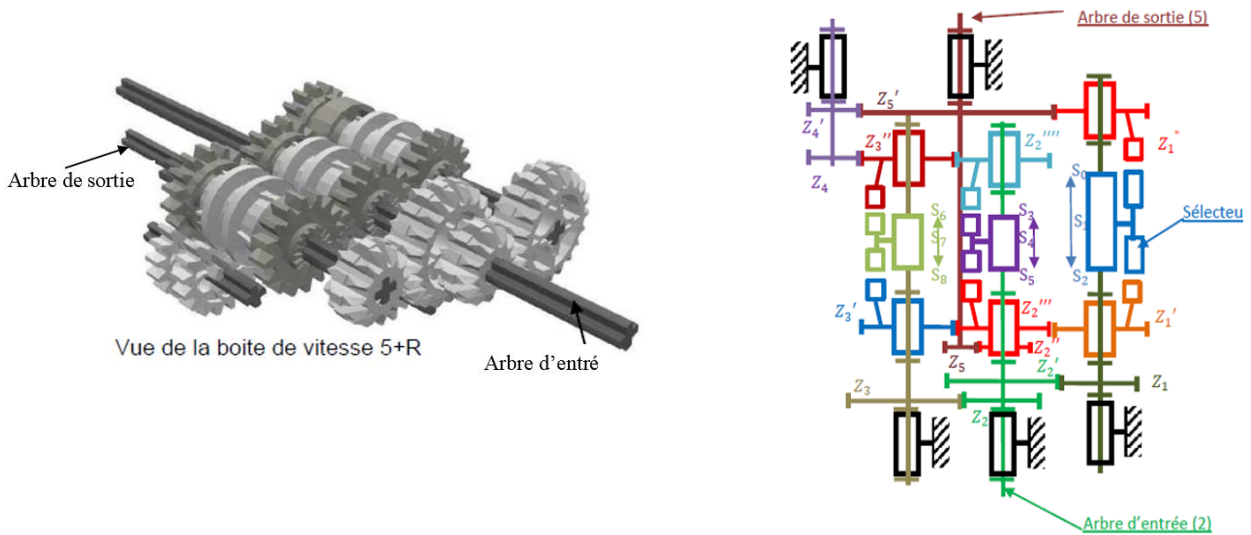


Exemple 3



Exemple 4 :

Le schéma d'une boîte de 5 vitesses et la marche arrière avec trois positions des 3 manchons de sélection.





# Chapitre 5: Les Accouplements

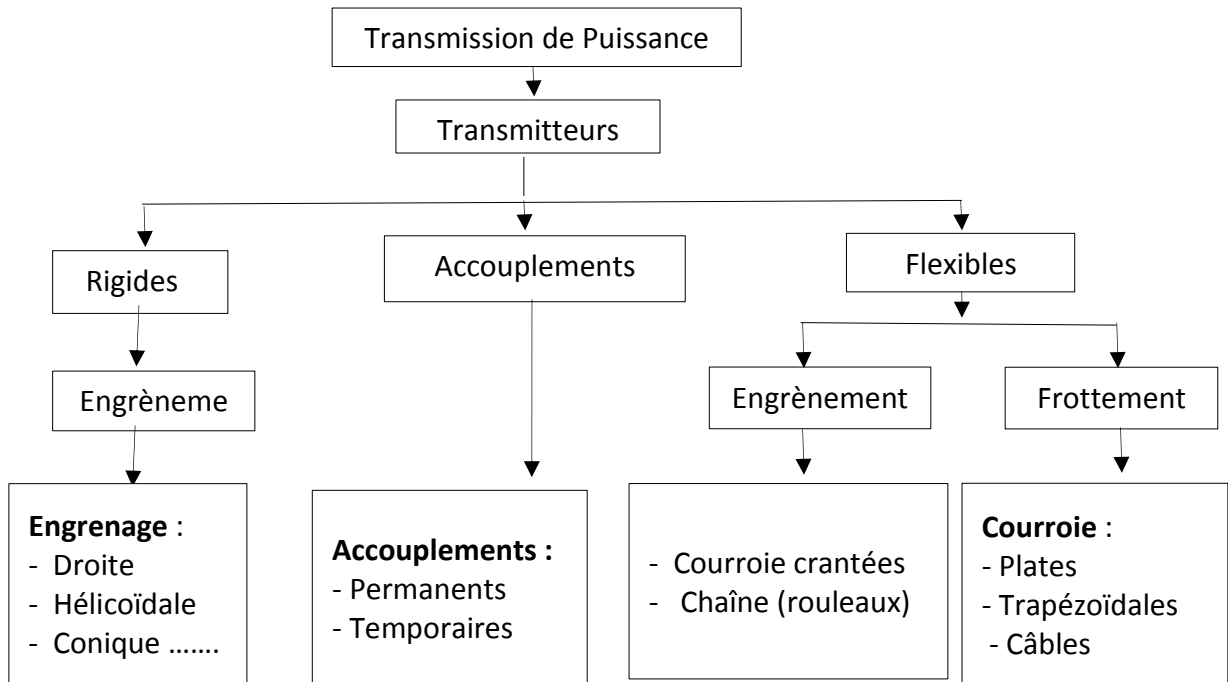
## 5.1 La Transmission de Puissance

La transmission de puissance mécanique était la norme la plus ancienne technologie de transmission d'énergie à longue distance impliquait des systèmes de pousoirs ou de lignes à secousses reliant les roues hydrauliques à des pompes de drainage minier et de puits de saumure distantes. La transmission est concrétisée par plusieurs formes :

- Les courroies (courroies) d'entraînement deviendraient la norme pour relier les machines individuelles aux arbres.
- Directement à l'aide d'une structure solide telle qu'un arbre de transmission.
- Les systèmes hydrauliques qui utilisent un liquide (huile) sous pression pour transmettre la puissance
- Les systèmes pneumatiques utilisent des gaz sous pression pour transmettre la puissance
- Les engrenages de transmission peuvent ajuster la quantité de couple ou de force par rapport à la vitesse.

En général, la transmission de puissance diffère suivant selon le transmetteur, on distingue trois types figure 5.1 :

- 1) Accouplements
- 2) Les transmetteurs flexibles
- 3) Les transmetteurs rigides



*Fig. 5.1 : Les types de transmission*

## 5.2 Les Accouplements d'arbres

### 5.2.1 Les Types Accouplements

Les accouplements sont utilisés pour transmettre la vitesse et le couple, ou la puissance, entre deux arbres de transmission en prolongement l'un de l'autre comportant éventuellement des défauts d'alignement. Il existe une grande diversité de solution pouvant répondre à une multitude de cas posés

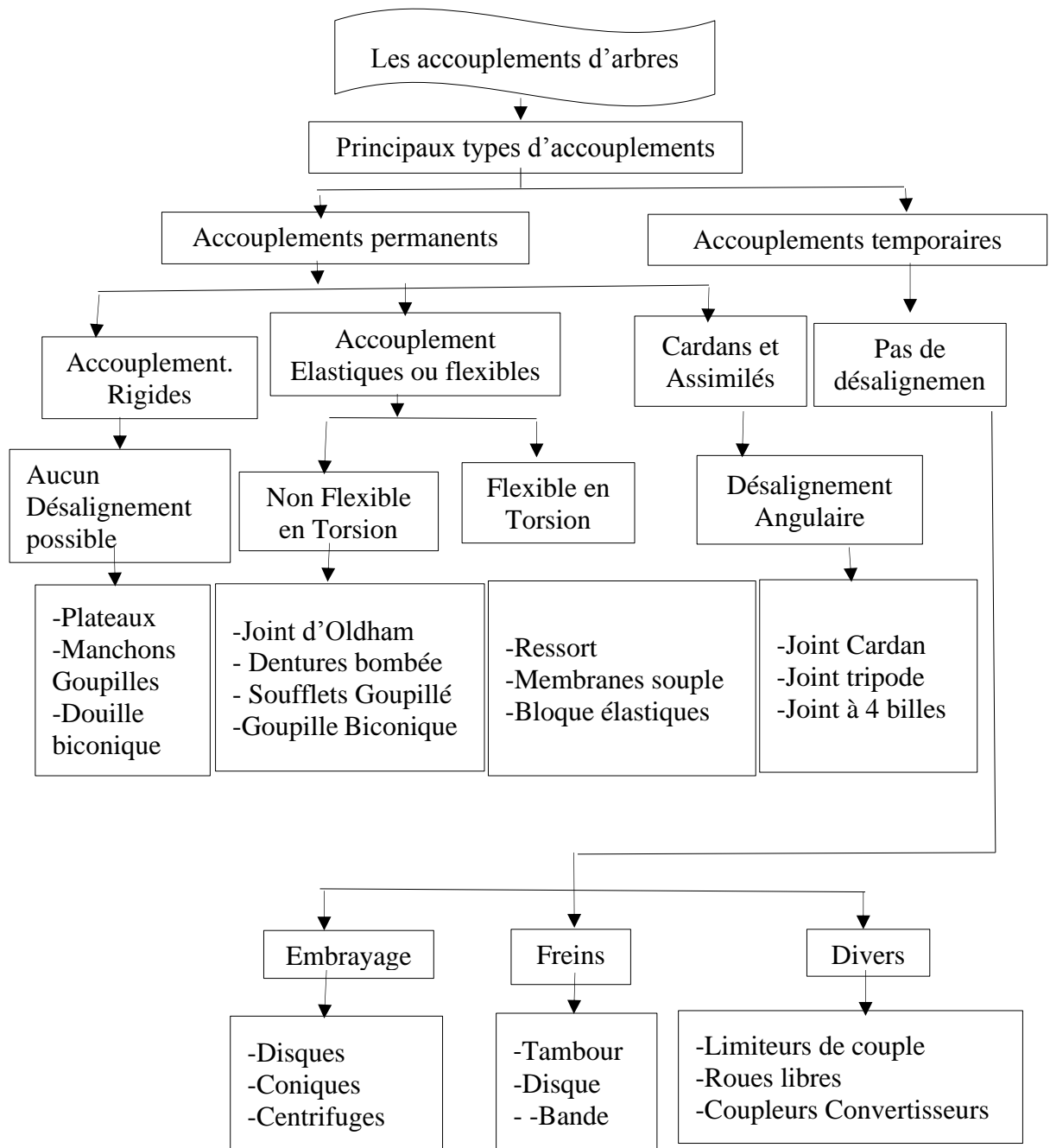


Fig. 5.1 : Les types d'accouplements

- **Accouplements permanent**

Il est dit permanent lorsque l'accouplement de deux arbres est permanent dans le temps. Le désaccouplement n'est possible que par démontage du dispositif

- **Accouplement temporaire**

Il est dit temporaire lorsque l'accouplement ou le désaccouplement peuvent être obtenus à

n'importe quel moment, sans démontage du dispositif, suite à une intervention extérieure (embrayages). Ces accouplements ne font pas partie de ce cours.

### .5.2.1.1 Accouplements Permanents

- **Accouplements rigides**

Ils doivent être utilisés lorsque les arbres sont correctement alignés (ou parfaitement coaxiaux). Leur emploi exige des précautions et une étude rigoureuse de l'ensemble monté.

- **Accouplement à plateaux**

Très utilisés, précis, résistants, assez légers, encombrants radialement, ils sont montés à la presse. La transmission du couple est obtenue par une série de boulons ajustés (figure 5.2). En cas de surcharge, le cisaillement des boulons offre une sécurité.

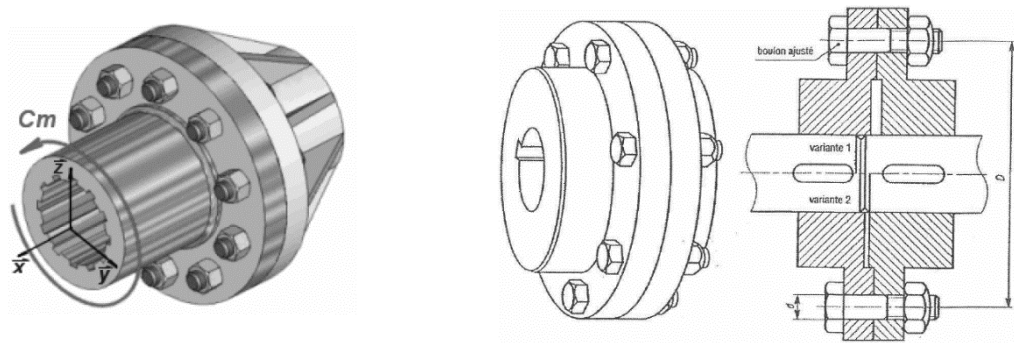


Fig.5.2 : Accouplement rigide à plateaux

Un exemple du principe d'accouplement entre une machine motrice (1) et une machine réceptrice (2) (par exemple Moulin de café, semoule ..... ) voir figure 5.3.

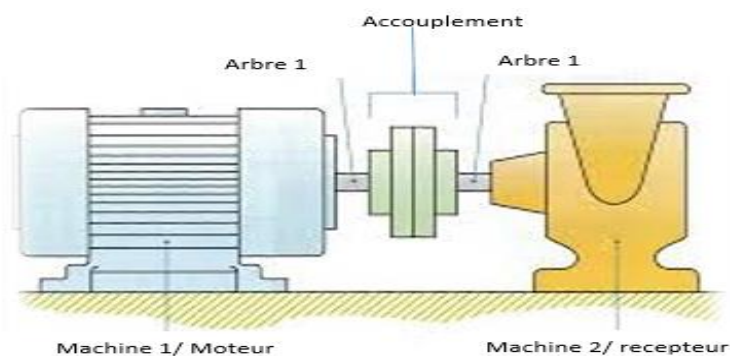


Fig. 5.3 : Principe d'accouplement des arbres de transmission

- **Manchons à goupilles**

Dans le cas des petits accouplements c'est le plus simple. Les deux goupilles travaillent au cisaillement et offrent une certaine sécurité en cas de surcharge. Le principe de calcul est le même que précédemment.

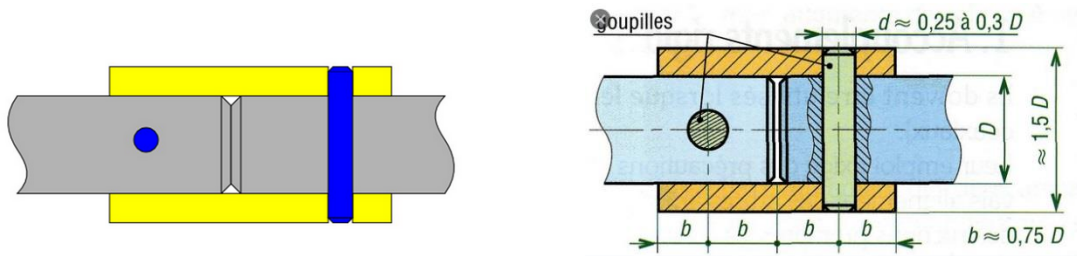


Fig. 5.4 : Manchon à goupilles

### 5.2.1.2 Accouplements élastiques ou flexibles

Pour transmettre le couple d'un arbre menant à un arbre mené, un accouplement élastique :

- Absorbe et amortit les irrégularités de couple ;
- Désalignements et décalages entre les arbres ;
- Autorise certaines déformations des châssis ;
- Supprime les contraintes parasites à craindre d'un accouplement rigide dans les mêmes conditions de fonctionnement ;
- Permet de construire plus léger, avec des tolérances plus larges ;
- Il est sans jeu, silencieux, sans frottement, sans graissage.

- **Accouplement d'Oldham**

Ce joint permet des déplacements radiaux importants. Il est composé de 2 moyeux à languette et d'un disque central à deux rainures orthogonales. Il ne transmet qu'un couple pur figure 5.5.

Un accouplement Oldham est constitué de 3 pièces :

- Deux bagues solidaires d'arbres ;
- Un patin lié aux bagues par deux liaisons prismatiques

La double liaison prismatique permet au patin de voyager dans un plan perpendiculaire aux arbres tout en transmettant les couples.

Il supporte uniquement des désalignements radiaux ( $d_R$ ) et permet la transmission entre deux arbres parallèles présentant un léger décalage.

- Désalignement radial :  $D_r = \pm 4$  mm
- Désalignement axial faible ;
- Désalignement angulaire nul ;
- Joint homocinétique.

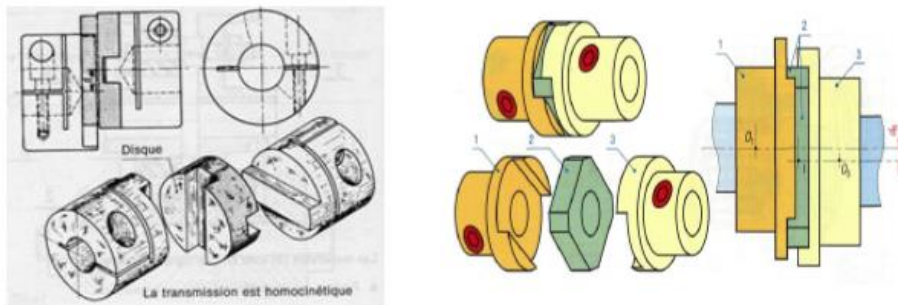


Fig. 5.5 : Joint d'Oldham

### 5.2.13 Cardan et assimilés

- **Joints de cardan**

Un joint de Cardan est constitué de fourchettes (en bleu) liées rigidement aux arbres et d'un croisillon (en rouge) lié en liaisons pivots avec les fourchettes. Ils assurent la transmission entre des arbres concourants voir figure 5.6.

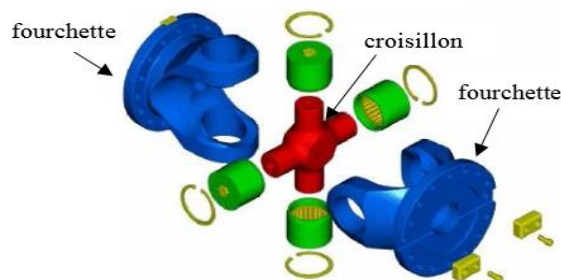


Fig. 5.6 : Joint de Cardan

Le joint de cardan permet des décalages angulaires importants entre les arbres à relier. Il présente cependant un inconvénient ; la vitesse de rotation de l'arbre de sortie est irrégulière. Pour que les vitesses des arbres de sortie et d'entrée soient égales, il est nécessaire de prévoir un double joint de cardan (joint homocinétique) figure 5.7.

Pour couvrir les besoins des industries (automobile) d'autres types de joints ont été développés et certains sont parfaitement homocinétiques par construction ( $N_2 = N_1$ ) à tout instant).

Un accouplement est dit homocinétique lorsque la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée est rigoureusement identique à celle de l'arbre de sortie à tout instant

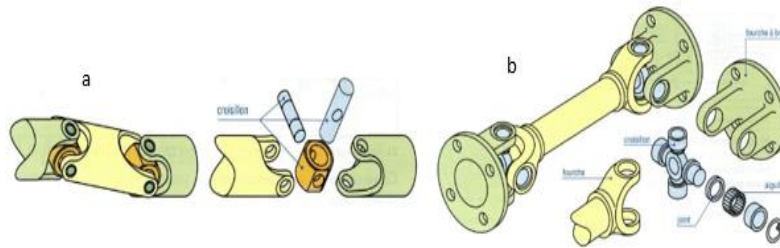


Fig. 5.7 : double joint de Cardan, a) pour faible couple, b) pour couples élevés

Ce genre de joints peuvent être appliqués par exemple au remorquage



Fig. 5.8 : double Joint à Cardan monté sur un remorque

- **Joints spécifiques (tel le joint tripode ou Rezpapa)**

Les joints universels sont utilisés pour corriger des désalignements plus grands que les accouplements flexibles. Ils peuvent transmettre des couples très élevés (machines agricoles ...)

- **Joint tripode**

Un joint tripode est un élément mécanique assurant la transmission d'un mouvement de rotation entre deux axes concourants. Il est basé sur trois sphères articulées à  $120^\circ$  pouvant coulisser dans

trois cylindres coaxiaux parallèles à l'un des arbres. Particularité : il permet une liberté en translation supplémentaire.

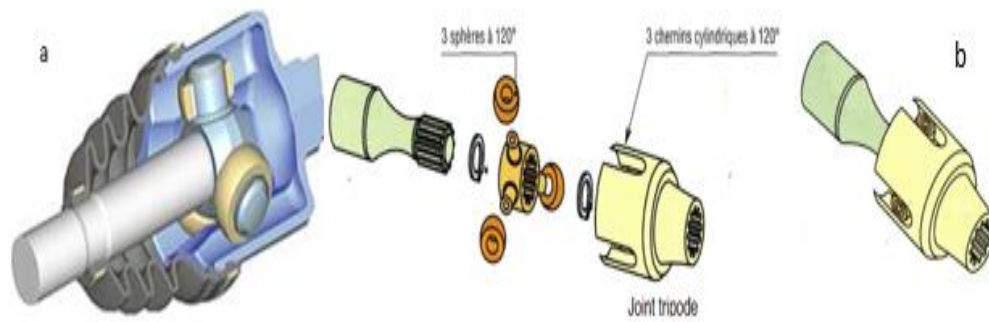


Fig. 5.9 : a) Joint tripode, b) vue éclatée.

### ➤ Joint à billes

Ces joints sont Fondés sur une conception d'Alfred H. Rzeppa en 1926, les joints homocinétiques Rzeppa sont particulièrement adaptés à la transmission de puissance aux grands débattements. Les joints à billes font partie des joints homocinétiques.

Ils sont basés sur 4 billes à  $90^\circ$  pouvant rouler dans des chemins (analogie avec les roulements) de forme torique, mais il y a d'autres à 6 billes.

Ils sont souvent utilisés dans les automobiles à traction avant, en complément des joints tripodes.

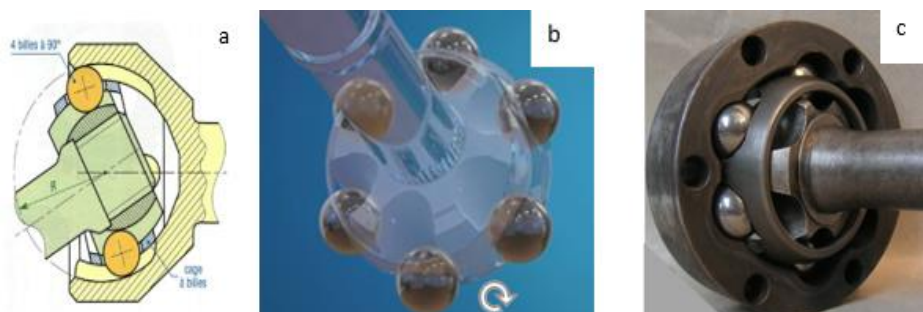


Fig. 5.10 : Joint à, a) 4 billes, b) 6 billes (Solidworks), c) 6 billes réel

Ils peuvent être appliqués dans les roues d'automobiles

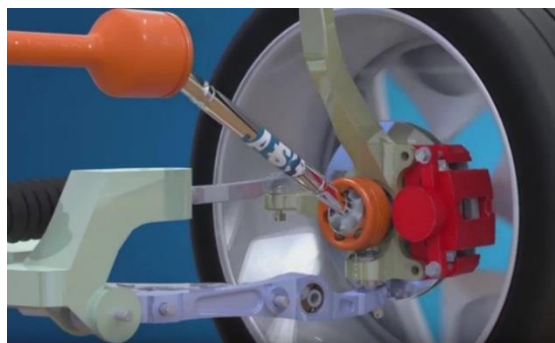


Fig. 5.11 : Joint Rzeppa monté sur une roue d'automobile



### 5.2.2 Calcul des accouplements

Dans le cas d'un accouplement permanent, le désaccouplement n'est possible qu'après démontage.

On distinguera :

- 1 Les accouplements rigides ; ils ne tolèrent pas de défaut d'alignement.
- 2 Les accouplements élastiques par joints d'accouplement ; ils tolèrent certains défauts d'alignement.

#### 5.2.2.1 Accouplement par Bride (rigide)

- *Détermination du diamètre et du couple de serrage des vis*

A la limite de glissement, d'après coulomb

$$dT = f dN \quad \text{avec} \quad P = \frac{N}{S}$$

$$dT = f P ds$$

T : effort tangentiel ; N : effort normal ;

f : coefficient de frottement, S : section ( $S = R^2 - r^2$ )

P : pression dans la zone de contact ;

$$ds = \rho d\theta d\rho \quad \text{Surface élémentaire}$$

$$dT = f P \rho d\theta d\rho$$

(5.1)

Le couple de serrage élémentaire

$$dC_t = f dT \rho$$

(5.2)

Remplaçons (5.1) dans (5.2) en tire

$$dC_t = f P \rho^2 d\theta d\rho$$

(5.3)

Le couple transmis

$$C_t = f P \int_r^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$C_t = \frac{2\pi f P (R^3 - r^3)}{3}$$

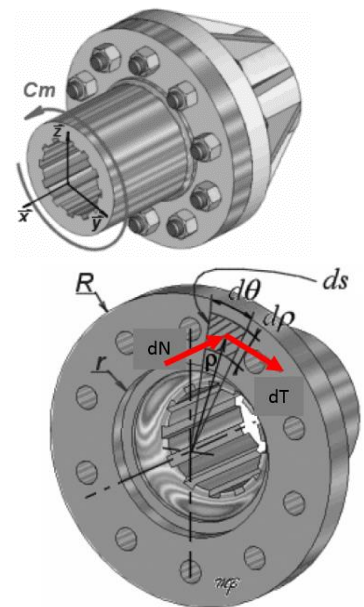
Si p est uniforme sur la zone de contact alors

$$C_t = \frac{2f N (R^3 - r^3)}{3(R^2 - r^2)}$$

(5.4)

On peut tirer l'effort normal

$$N = \frac{3 C_t (R^2 - r^2)}{2f(R^3 - r^3)}$$



- **Détermination du nombre de vis**

Le maintien d'une étanchéité correcte impose d'assurer une pression uniforme sur toute la couronne de la bride

$$n \cdot d \geq \pi D \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\pi D}{d} \quad (5.5)$$

$d$  : diamètre au niveau du plan du joint (diamètre intérieur)

$D$  : diamètre d'implantation des boulons (diamètre extérieur)

(le nombre de vis est donné aussi par cette valeur empirique  $n = 0,02 d + 3$ )

- **Calcul du diamètre des boulons au cisaillement**

Le couple transmis est

$$C_t = F_c \frac{D}{2} \quad (5.6)$$

$C_t$  : Couple à transmettre (N.m),  $D$  : Diamètre de répartition du boulon (mm),

$F_c$  : Force de cisaillement (N).

La condition de la résistance est :

$$R_{pg} = \frac{R_e}{2} \geq \frac{F_c}{S} \quad (5.7)$$

Avec  $S = \frac{\pi d_b^2}{4}$   $S$  : section cisailée du boulon (mm<sup>2</sup>)

$R_{pg}$  : Résistance pratique au cisaillement ( $\frac{N}{mm^2}$ )

$R_e$  ; Résistance élastique ( $\frac{N}{mm^2}$ )

$d_b$  : Diamètre du boulon (mm)

En remplaçant (5.6) dans (5.7), donc le diamètre du boulon sera :

$$\frac{R_e}{2} \geq \frac{2 \cdot C_t \cdot 4}{D \pi d_b^2 n_b} \quad \Rightarrow \quad d_b \geq 4 \sqrt{\frac{C_t}{D \pi R_e n_b}} \quad (5.8)$$

### 5.2.2.2 Accouplement rigide par manchon et clavettes

Il est nécessaire de dimensionner correctement une clavette afin qu'elle puisse transmettre le couple. Le critère adopté est un critère de résistance au matage.

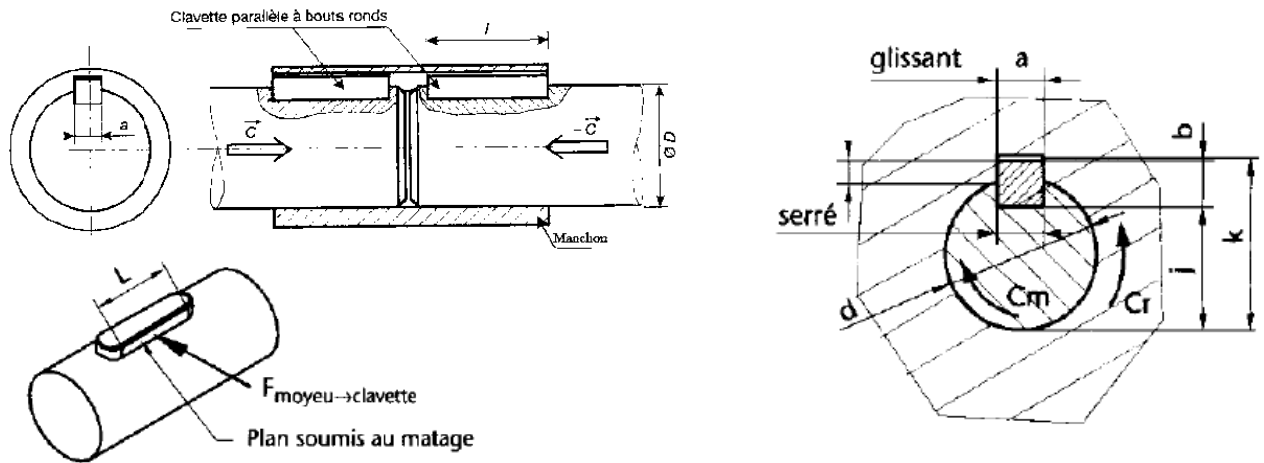


Fig. 5.12 : Accouplement par manchon et clavettes

L'effort exerce par le moyen sur la clavette est de la forme :

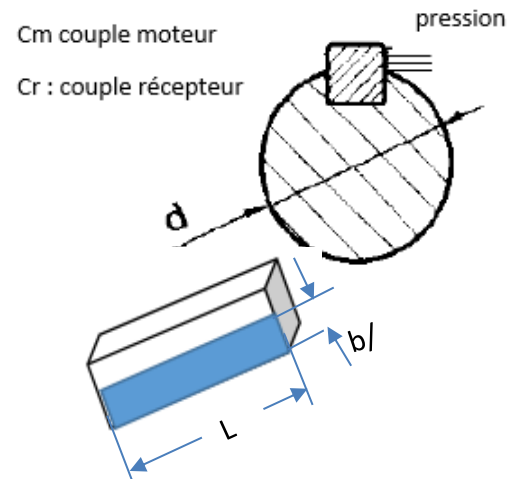
$$F = \frac{2 C_m}{d}$$

Cet effort engendre une pression de contact supposée

uniforme :  $P = \frac{F}{S}$  avec S surface du  $\frac{1}{2}$  flanc.

On fait souvent l'approximation  $S \approx L * b/2$

Remarque : P doit être inférieure à la pression de matage admissible par la clavette (de 30 à 100 MPa) :  $P \leq P_{adm}$



### 5.2.2.3 Accouplement rigide par manchon et goupilles

Il est nécessaire de dimensionner correctement une goupille afin qu'elle puisse transmettre un couple ou un effort axial. Le critère adopté est un critère de résistance au cisaillement.

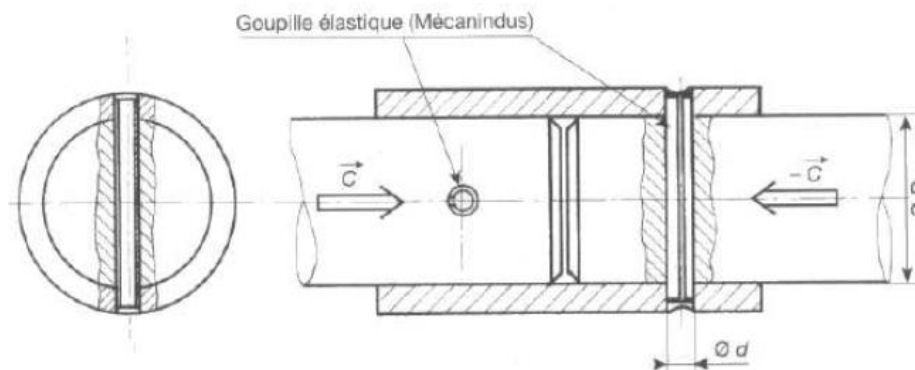


Fig. 5.13: Accouplement rigide par manchon et goupilles

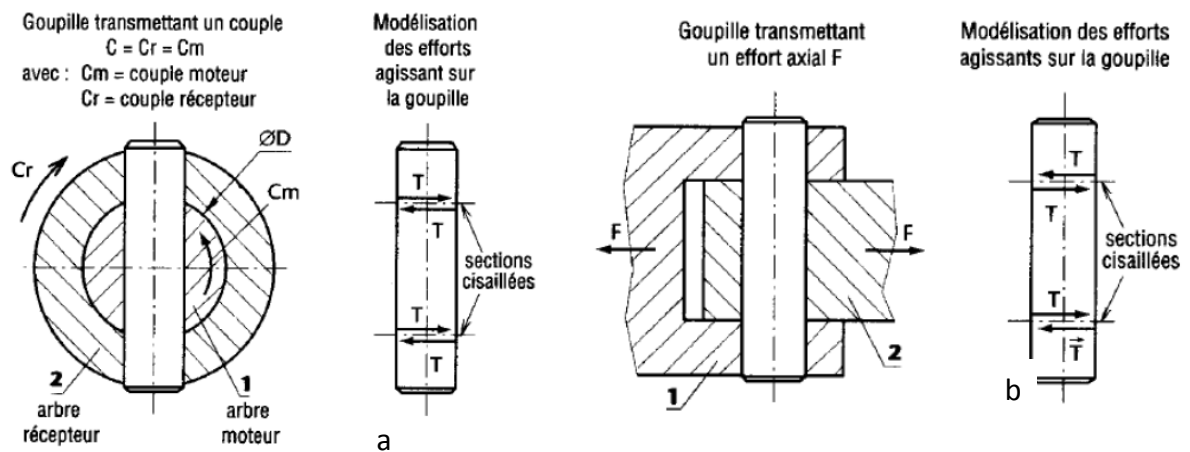


Fig. 5.14 : Types des efforts appliqués sur l'accouplement, a) Cisaillement, b) Axial

Soit  $T$  l'effort de cisaillement.

Dans le 1<sup>er</sup> cas (transmission d'un couple),

$$C_m = 2 T \cdot \frac{D}{2} \quad \text{D'où} \quad C_m = T \cdot D$$

( $2T$  : une du l'arbre moteur et l'autre du l'arbre récepteur)

Dans le 2<sup>ème</sup> cas (transmission d'un effort axial),  $T = \frac{F}{2}$

La contrainte tangentielle moyenne est :  $\tau = \frac{T}{A}$

avec  $A$  la section cisailée de la goupille.

Il est d'usage d'adopter un coefficient de sécurité  $S$  (2 ou 3 selon les applications classiques).

La contrainte tangentielle moyenne  $\tau$  doit alors être inférieure à la limite  $\tau_r$  ( $\tau \leq \tau_r$ )

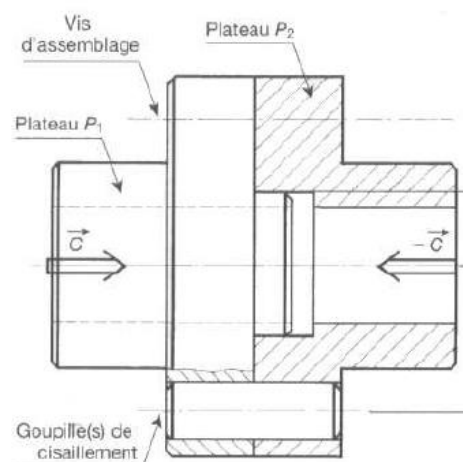
(de l'ordre de 150 MPa) du matériau constituant la clavette, divisée par le coefficient  $S$  :

$$\tau \leq \frac{\tau_r}{S}$$

**Remarque**

Les goupilles réalisent la transmission du couple.

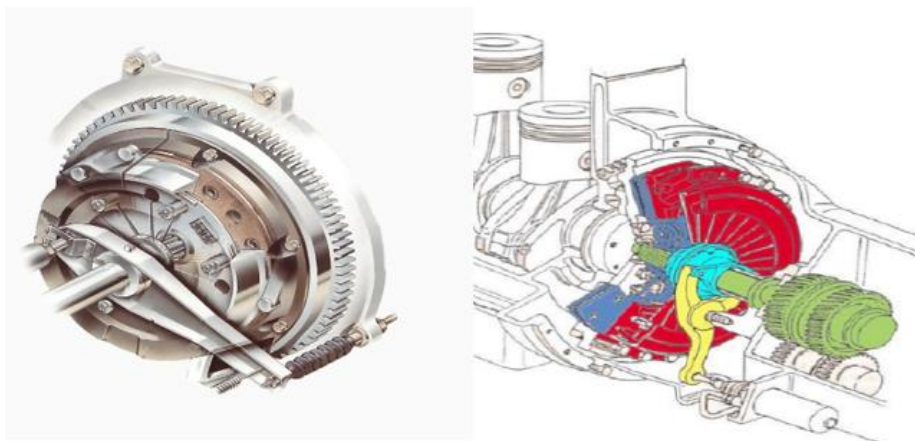
Les vis d'assemblage réalisent uniquement l'assemblage des deux plateaux et ne participent pas à la transmission du couple.



## 5.3 Les embrayages

### 5.3.1 Définition

L'embrayage est un élément constitutif de la chaîne de transmission de la puissance et du couple moteur. Il existe plusieurs systèmes d'embrayage, à diaphragme (mono disque ou multi disque), sur les boîtes automatiques l'embrayage est remplacé par un convertisseur de couple hydraulique. Nous traitons ici le système d'embrayage (mono disque) employé sur la plupart de nos véhicules automobiles qu'ils soient, à commande mécanique (par câble), à commande hydraulique ou piloté électroniquement. Quel que soit la disposition des organes de transmission, le système d'embrayage comprend l'ensemble des pièces situées entre le moteur et la boîte de vitesse.



*Fig.5.15 : L'embrayage*

### 5.3.2 Les embrayages spéciaux

- **L'embrayage électromagnétique**

Est constitué d'un tambour renfermant un disque spécial et de la limaille de fer. Des électro-aimants placés à l'extérieur immobilisent la limaille de fer lorsqu'ils sont sous tension, ce qui a pour effet de bloquer le disque qui est alors solidaire du tambour fixé sur le vilebrequin.

- **L'embrayage centrifuge**

Comporte un mécanisme très semblable à celui de l'embrayage mono disque classique, mais la pression est obtenue par des masselottes fixées aux leviers et qui sont écartées par la force centrifuge. Lorsque le régime du moteur augmente, les leviers basculent et appuient sur le plateau qui presse lui-même le disque.

- **L'embrayage à cônes**

Autrefois largement adopté et maintenant abandonné, fonctionnait sur le même principe, mais les surfaces de frottement étaient de forme conique au lieu d'être planes. Un cône femelle usiné dans le volant, reçoit un cône mâle garni de cuir et poussé par des ressorts.

- **L'embrayage multi-disques**

Fonctionne exactement selon le même principe, mais il comporte plusieurs disques à moyeu cannelé. Ces disques sont solidaires de l'arbre de boîte de vitesses et une plaque est intercalée entre chaque disque. Ainsi, la surface de friction est beaucoup plus importante l'usure est moindre et le couple transmis plus élevé. Ce type d'embrayage est utilisé sur les voitures de course et sur les camions.

### 5.3.3 Les Constitutions d'un embrayage :

L'embrayage est constitué de plusieurs pièces qui sont illustrées ci- contre, voir figure 5.16.

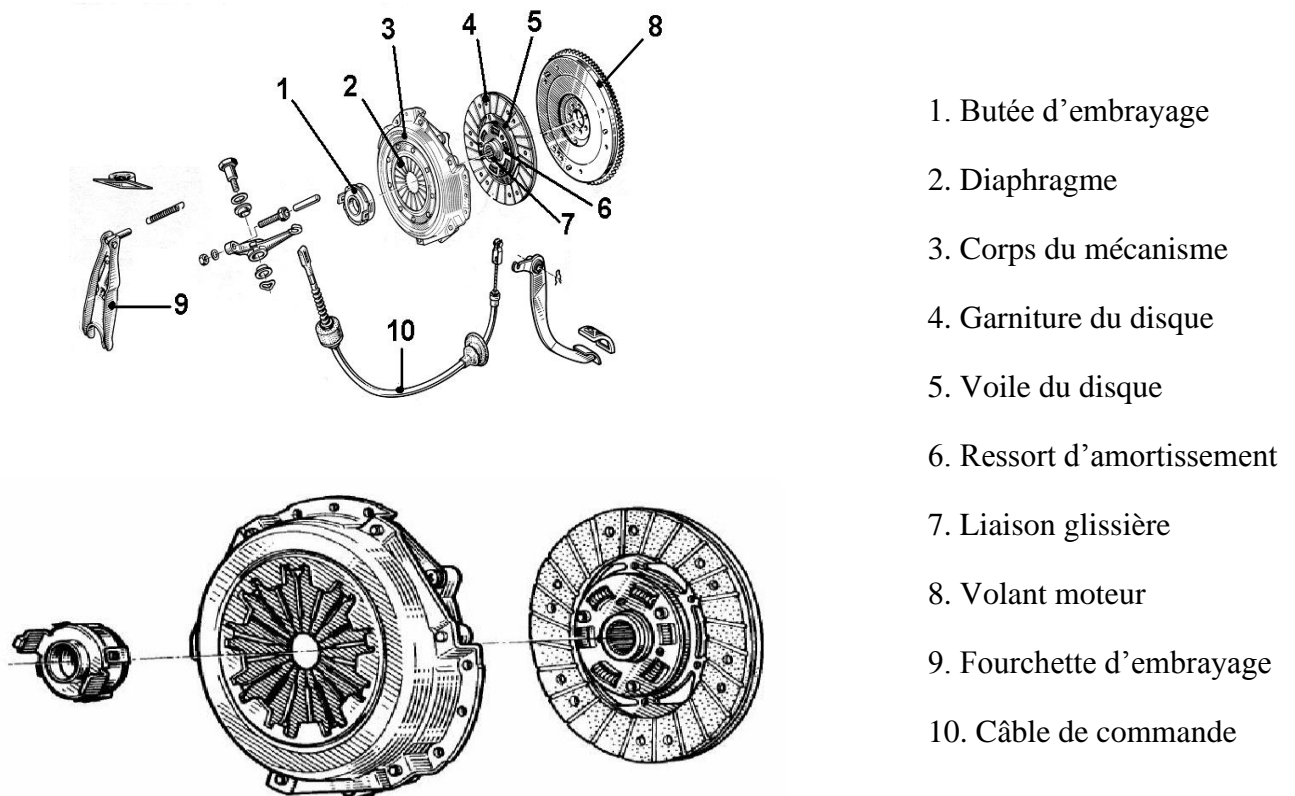
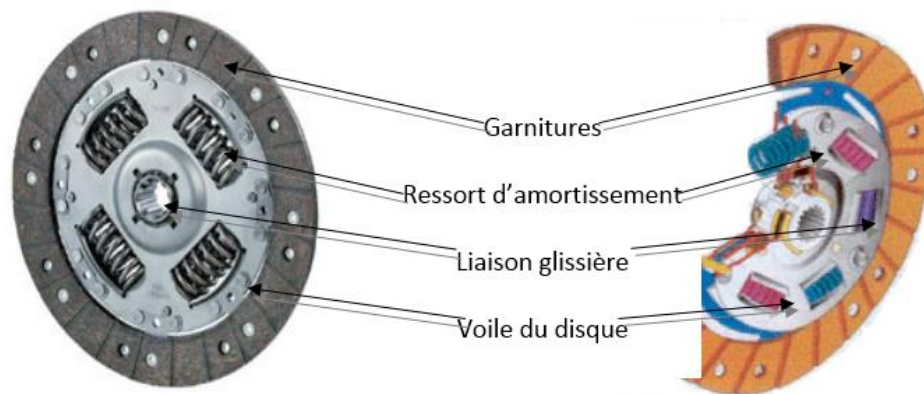


Fig.5.16 : Les Constitution d'un embrayage

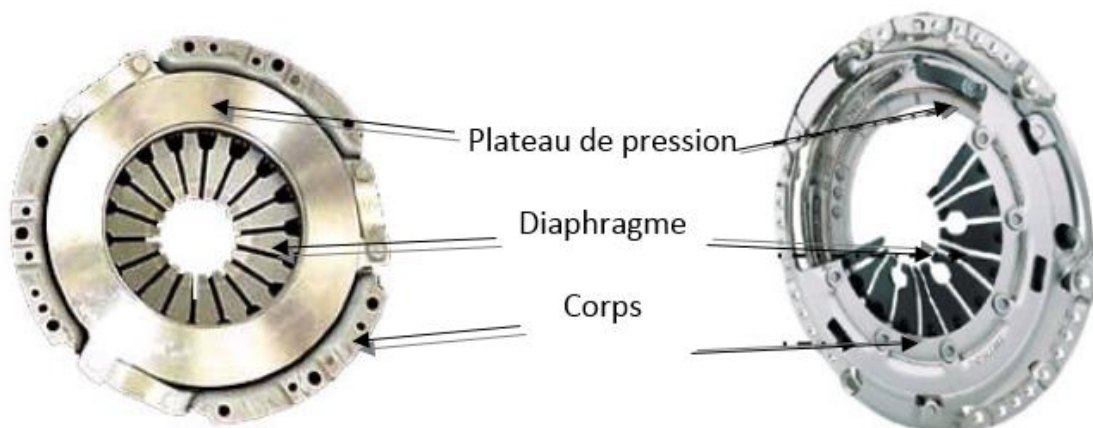
- **Le volant moteur** : Il sert de support au mécanisme d'embrayage et de plateau au disque.
- **Le disque** : C'est une pièce en tôle, sur laquelle viennent se fixer les garnitures. Une liaison glissière est solidaire de l'arbre primaire de la boîte de vitesse grâce aux cannelures internes, des ressorts, situés sur le moyeu, permettent d'éviter des coups et des torsions lors des phases d'embrayage trop rapides et violentes.



*Fig.5.17 : Le disque d'embrayage*

- **Le mécanisme à diaphragme**

Il est fixé sur le volant moteur et assure la liaison entre celui-ci et le disque d'embrayage. Il possède un plateau de pression qui plaque le disque contre le volant moteur et un diaphragme qui joue le rôle d'une multitude de ressorts et qui pour fonction de maintenir le plateau en pression contre le disque et le volant moteur.



*Fig.5.18 : Le mécanisme à diaphragme*

- **La butée de débrayage** : Son rôle consiste à commander le mécanisme de l'embrayage en transmettant une force sur le diaphragme, ce qui aura pour conséquence de libérer le disque et donc désaccoupler le moteur de la boîte de vitesse. On trouve généralement des butées à roulement ou graphité.



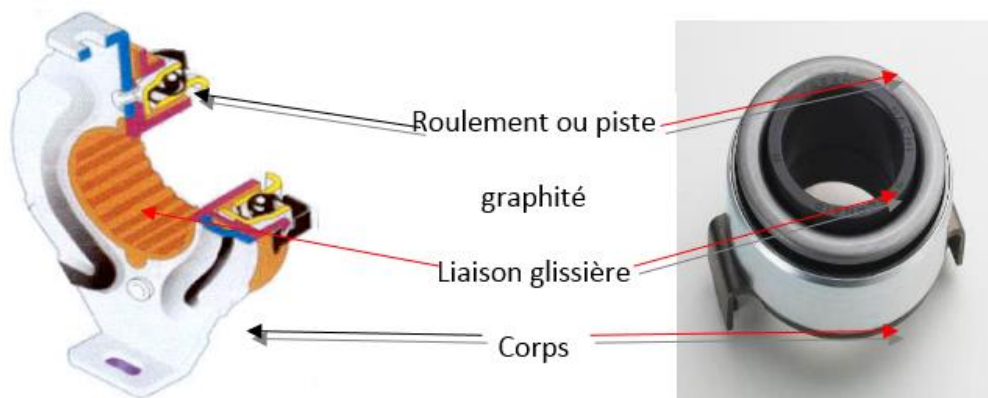


Fig. 5.19 : Buté de débrayage

#### 5.4. Calcul d'embrayage à disque

L'embrayage relie un moteur à une machine son rôle : permettre d'établir la communication entre un moteur qui tourne à une certaine vitesse et une machine qui initialement et au repos.

##### 5.4.1 Détermination des diamètres extérieur et intérieur du disque :

Soit le couple de frottement  $C = f \cdot F \cdot r$

$f$  : coefficient de frottement ( $f = 0.4$ )

avec  $P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \cdot S$

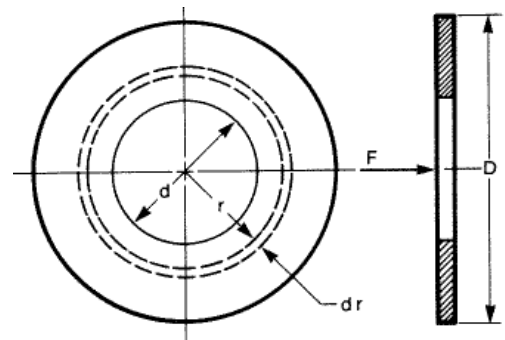


Fig..3.1 : Diamètre extérieur et intérieur du disque

Donc, le couple s'écrit :  $C = f \cdot P \cdot S \cdot r$  (5.9)

La section de friction est :

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 + d^2) = \pi (R_{ext}^2 - R_{int}^2) \quad \text{avec } R_{int} = 0.7 R_{ext}$$

En remplaçant la valeur de  $R_{ext}$  on trouve :

$$S = \pi \cdot 0,51 \cdot R_{ext}^2 \quad (5.10)$$

Remplaçons (5.10) dans l'équation (5.9) :

$$C = f \cdot P \cdot \pi \cdot 0,51 \cdot R_{ext}^2 \cdot r \quad (5.11)$$

Le rayon  $r$  égale à la moyenne du rayon extérieur et intérieur :

$$r = \frac{R_{ext} + R_{int}}{2} = \frac{R_{ext} + 0.7R_{ext}}{2} = \frac{1.7}{2} R_{ext}$$

En remplaçant la valeur de  $r$  dans l'équation (5.11), alors  $C$  s'écrit :

$$C = f \cdot P \cdot \pi \cdot 0,51 \cdot R_{ext}^2 \cdot \frac{1,7}{2} R_{ext}$$

$$R_{ext} = \sqrt[3]{\frac{2C}{f \cdot P \cdot \pi \cdot 0,51 \cdot 1,7}} \quad (5.12)$$

$$\text{A.N : } R_{ext} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 200 \cdot 10^{-2}}{0,4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 810^{-2} \cdot \pi \cdot 0,51 \cdot 1,7}} = 116 \text{ mm}$$

Le rayon extérieur est  $R_{ext} = 116 \text{ mm}$

Le rayon intérieur est  $R_{int} = 0,7 \cdot R_{ext} = 0,7 \cdot 116 = 81,2 \text{ mm}$

#### 5.4.2 Distribution de la pression

La distribution de pression sur le disque n'est pas fixe dans le temps, elle dépend de l'hypothèse qui est émise si le disque est neuf et suffisamment rigide, on peut supposer qu'au début la pression est uniforme après un certain temps, la distribution de pression va changer car l'usure est proportionnelle au travail. Le travail étant plus considérable à  $(D/2)$  le travail est proportionnel à  $(p \cdot v)$ . Une fois la distribution de pression devient stable, l'usure se fait uniformément.

##### 5.4.2.1. Cas d'une pression uniforme

###### a) La force totale axiale $F$

Soit un élément circulaire du disque situé à  $r$  et délimité par  $dr$ .

La force totale axiale s'exprime comme suit :

$$F = \int p dA \quad (5.13)$$

Pour un élément  $dA = r d\theta dr$

$$\text{D'où, } F \text{ s'écrit : } F = \int_{\frac{d}{2}}^{D/2} Pr dr \int_0^{2\pi} d\theta = \int_{\frac{d}{2}}^{D/2} 2\pi Pr dr$$

$$F = \frac{\pi p}{2} (D^2 - d^2)$$

b) **Le couple à transmettre C :**

Le couple que le disque peut transmettre est :

$$C = \int r \cdot f \cdot p \cdot dA \quad (5.14)$$

On a  $P = \frac{F}{A} \Rightarrow dF = PdA$

$$F = \int p \cdot dA \quad \text{Avec} \quad dA = rd\theta dr$$

Le couple C s'écrit :

$$C = \int r \cdot f \cdot p \cdot rd\theta dr \quad , \text{ le rayon } r \text{ varie entre } \frac{d}{2} \text{ et } \frac{D}{2}$$

$$C = \frac{\pi P a f}{12} (D^3 - d^3)$$

Pour un (n) paires de surfaces en contact et **p** prend la valeur maximale **Pa** on peut écrire :

- La force maximale axiale :  $F = \frac{\pi P a}{4} (D^2 - d^2)$  (5.15)

- Le couple à transmettre :  $C = \frac{\pi n P a f}{12} (D^3 - d^3)$  (5.16)

#### 5.4.2.2 Etude du cas à usure uniforme

Après un certain temps d'opération, la distribution de pression était devenue stable, le déplacement axial de tous les point du disque sera le meilleur pour que l'usure soit uniforme, il faut que le travail d'usure sur la face du disque soit le même alors,

$$\frac{P}{Pa} = \frac{d}{D} \Rightarrow P = Pa \frac{d}{D} \quad (5.17)$$

a) **La force axiale Fa**

On prend en considération l'équation (5.9), La force axiale F se calculé comme suit :

$$F_a = \int p dA = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} Pr dr = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} Pa \cdot \frac{d}{D} r dr \quad \text{avec} \quad (D = 2r)$$

$$F_a = \frac{\pi}{2} Pa \cdot d(D - d) \quad (5.18)$$

**b) Le couple à transmettre**

Avec le même raisonnement, le couple que le disque peut transmettre est

$$C = \frac{\pi P a d f}{8} (D^2 - d^2) \quad (5.19)$$

Pour (n) paires de surfaces contact

$$C = \frac{\pi P a d f n}{8} (D^2 - d^2) \quad (5.20)$$

D'où,

$P_a$  : pression maximale ( $P = 2,4 \text{ Kg/cm}^2$ ),  $d$  : diamètre intérieur du disque (mm)

$D$  : diamètre extérieur du disque (mm),  $f$  : coefficient de frottement ( $f = 0.4$ ),  $F_a$  : force axiale (N)

$C$  : couple à transmettre (N.m),  $n$  : nombre de faces de friction ( $n=2$ )

**5.5 Application numérique :****✚ La pression est uniforme**

- La force axiale ( $F_a$ )

$$F_a = \frac{\pi P a}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi \cdot 2.4}{4} \left( \frac{9,8}{100} \right) (232^2 - 16,4^2) = 5068 \text{ N} = 517 \text{ Kg}$$

- Le couple à transmettre  $C$

$$C = \frac{\pi n P a f}{12} (D^3 - d^3) = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 2.4 \cdot 9.810^{-2} \cdot 0,4}{12} (232^3 - 16.4^3)$$

$$C = 403928.99 \text{ N.mm} = 403.92 \text{ N m}$$

**✚ Le cas d'usure uniforme**

- La force axiale et donnée par la relation (5.18)

$$F_a = \frac{\pi}{2} P a \cdot d (D - d) = \frac{\pi}{2} \cdot 2.4 \cdot 10^{-2} \cdot 162.4 (332 - 162.4) = 425,89 \text{ N}$$

Le couple à transmettre est :

$$C = \frac{\pi P a d f}{8} (D^2 - d^2) = \frac{\pi \cdot 2.4 \cdot 9.8 \cdot 10^{-2} \cdot 0.4 \cdot 162.4 \cdot 2.2 (332^2 - 16.4^2)}{8} = 359,29 \text{ N.m}$$

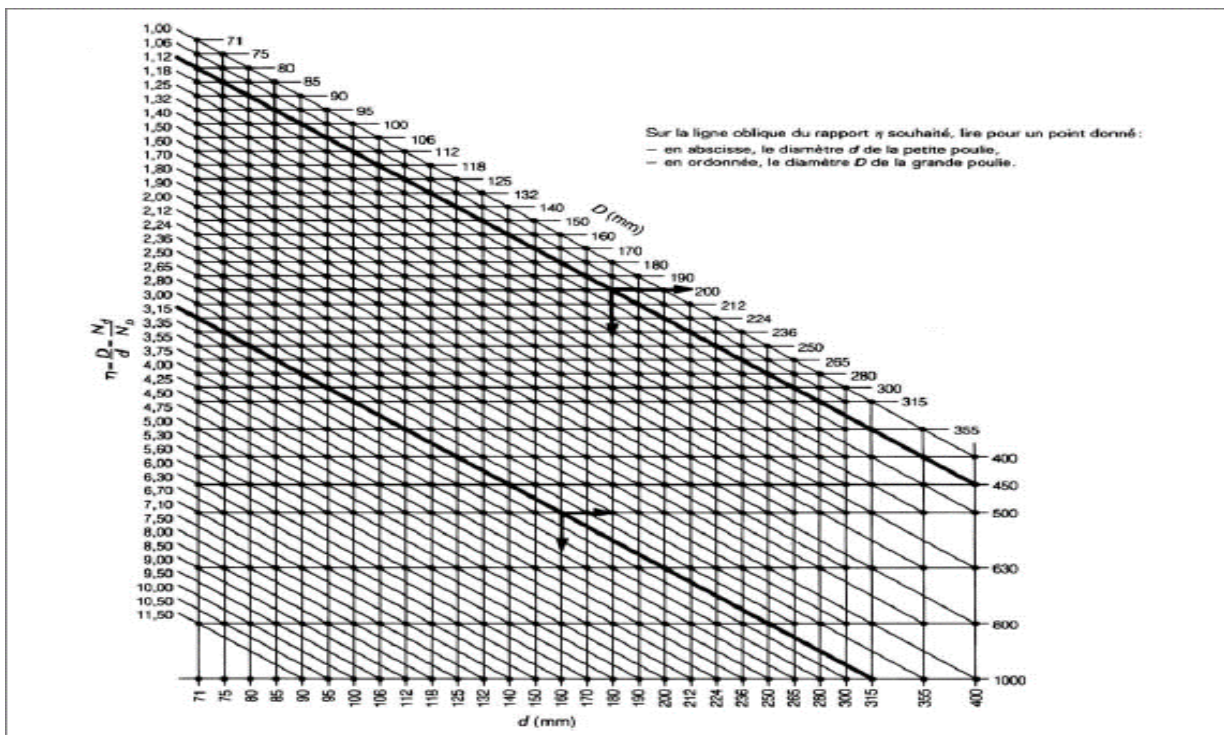
La pression :  $P = P_a \frac{D_{ext}}{D_{int}}$

## ANNEXES

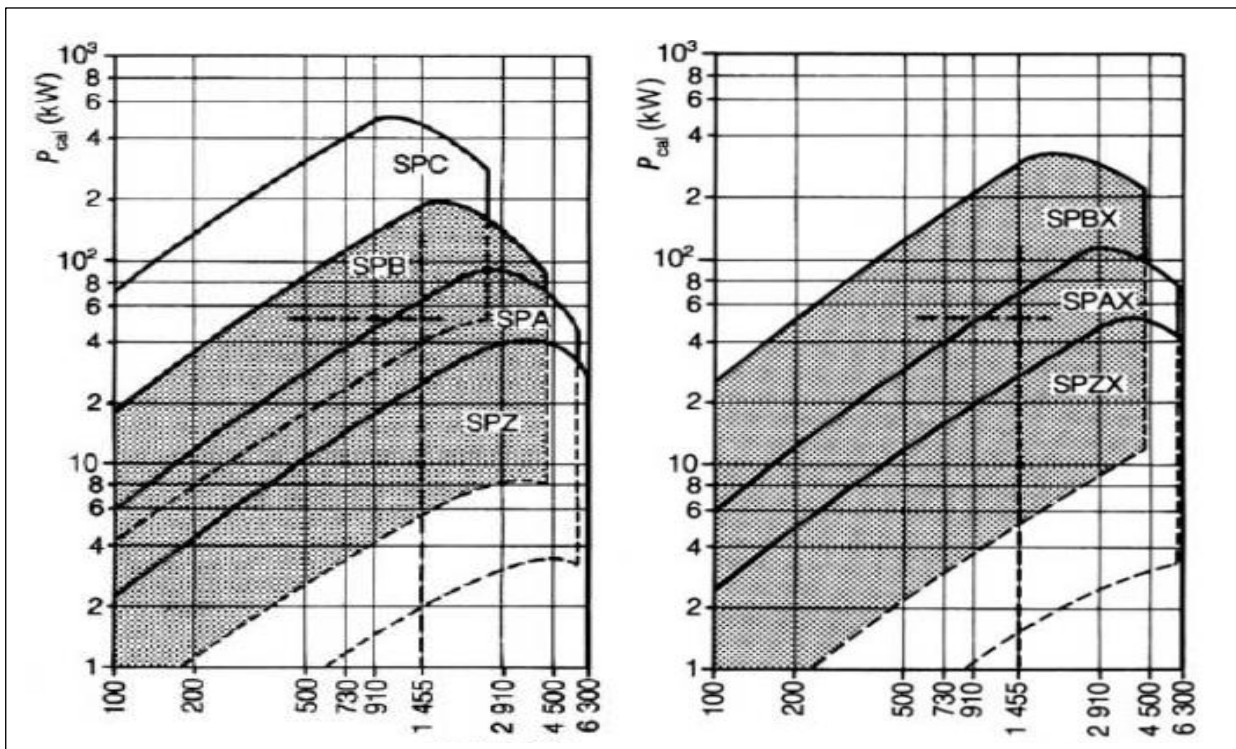
Tableau 1 – Valeurs du facteur de service $S_s$ d'après le comportement des machines motrices et les conditions de fonctionnement (d'après doc. Kléber-Industrie, courroies Texrope)									
Machines motrices	Conditions de fonctionnement (1)								
	8 h/jour			16 h/jour			24 h/jour		
	U	V	TV	U	V	TV	U	V	TV
Moteur électrique à couple de démarrage normal	1	1,12	1,25	1,12	1,25	1,40	1,18	1,32	1,50
Moteur électrique à démarrages fréquents ou inversions de sens fréquentes	1,12	1,25	1,40	1,25	1,40	1,60	1,32	1,40	1,70
Moteur électrique à couple de démarrage élevé ou moteur synchrone Moteur diesel à 1 ou 2 cylindres	1,18	1,32	1,50	1,32	1,50	1,70	1,40	1,60	1,80
Moteur électrique à couple de démarrage élevé et démarrages fréquents ou inversions de sens fréquentes	1,32	1,50	1,70	1,50	1,70	1,90	1,60	1,80	2

(1) U couple uniforme    V couple variable    TV couple très variable

## Abaque 1



Abaque2



**Tableau 2 Comportement dynamique des machines entraînées les plus courantes dans l'Industrie**  
(d'après doc. Kléber-Industrie, courroies Texrope)

Machines	Symboles (1)	Machines	Symboles (1)
<b>Agitateurs</b>		<b>Métallurgie et transformation des métaux</b>	
Liquide pur (densité constante)	U	Banc d'ébréage	TV
Liquide à densité variable	V	Bancs à trifler	V
Liquide en mélange avec des matières solides	V	Enrouleuses (couple variable)	U
<b>Alimentaires (industries)</b>		Trains de rouleaux : — non réversibles	V
Pâtis - Coupe-pâtis - Hachoirs à viande	V	— réversibles	TV
Emboîteuses	U	Machines à cintrer - Cisailles rotatives	V
Brasserie distillerie		<b>Papeterie</b>	
Service continu : broyeurs - cuiseurs - cuves	U	Déchiqueteurs	TV
Machines à embouteiller	U	Défileurs - Malaxeurs - Raffineurs coniques	V
Trémies (démarrages fréquents)	V	Piles raffineuses	U
<b>Brigaterie</b>		Presse-pâtes - Cylindres aspirants - Presses aspirantes	V
Presses à briques - mouleuses	TV	Calandres - Presses coucheuses - Cylindres sècheurs	V
Mélangeurs à argile - machines diverses	V	Enrouleuses	U
Broyeurs		<b>Pétrole (industrie du)</b>	
à boulets	V	Pompes de forage	TV
à galets - à marteaux	TV	Fours rotatifs - Filtres presses pour paraffine	V
Caoutchouc (industrie du)		<b>Pompes</b>	
Laminoirs - Boudineuses - Calandres - Coupeuses	V	centrifuges	U
Mélangeurs	TV	à engrenages et à palettes	U
<b>Cimenterie</b>		à pistons : — simple effet : 3 cylindres ou plus	V
Fours	TV	— double effet : 2 cylindres ou plus	V
Tambours - Sècheurs - Extracteurs	V	— simple effet : 1 ou 2 cylindres	TV
Compresseurs		— double effet : 1 cylindre	TV
centrifuges	U	<b>Scies</b>	
Soufflantes (genre Roots)	V	à mouvement continu	U
à pistons multi-cylindriques	V	à mouvement alternatif	TV
à pistons monocylindriques	TV	<b>Textile</b>	
Concasseurs	TV	Calandres, Cardes	V
Cribles		Machines à imprégner, enduire, imprimer	U
rotatifs (pierres, graviers)	V	Machines de blanchiment, apprêt et teinture	V
avec circulation d'eau	U	Tambours-Sècheurs	V
vibrants	TV	Sècheurs	U
<b>Dragage</b>		Tonneaux	
Excavatrices		Dessablage	TV
Tambours enrouleurs de câbles	V	Polissage, etc.	V
<b>Élévateurs</b>		Transmissions (Arbres de)	
à godets (charge uniforme et constante)	U	Principaux	V
à godets (grand débit, charge importante et variable)	V	Auxiliaires	U
à godets (de grande hauteur, charge importante et variable) - Ascenseurs	TV	<b>Transporteurs</b>	
Monte-charge	V	Service normal :	
Généralistes		à godets, à chaînes, à courroies, de four	U
à charge continue	U	à raclettes, à tablier	U
à charge variable	V	vis d'Archimède, chaînes de montage	U
<b>Imprimerie (Machines d')</b>		Service lourd :	
Lessiveuses		à chaînes, à courroies, de four	V
à mouvement continu	U	à godets, à raclettes	V
à mouvement réversible	V	à secousses, tapis vibrants	TV
<b>Machines-outils</b>		à tablier, vis d'Archimède	V
Cisailles - Machines à planer	TV	Chaînes de montage	V
Estampeuses (commande par courroie)	U	<b>Treillis</b>	
Poinçonneuses (commande directe)	TV	Treillis de skips, de halage	V
Autres machines-outils : — coupe	V	<b>Ventilateurs</b>	
— avance	U	Ventilateurs industriels - centrifuges	U
<b>Mélangeurs</b>		Grands ventilateurs (mines, etc.)	V
Densité constante	U	Tours de réfrigération	TV
Densité variable	V		

(1) U : couple uniforme V : couple variable TV : couple très variable

Tableau 3 : Le choix de la puissance brut transmissible  $P_0$  pour Section SPB

Tableau 3 – Section SPB : puissance brute transmissible $P_0$ (en kW) et facteur de longueur $C_L$ pour $L_0 = 3\,350$ mm, $\alpha = 180^\circ$ et $H_0 = 24\,000$ h (d'après doc. Kléber-Industrie, courroies Texrope)																			
$N_d$ (t/min)	$\eta = \frac{D}{d}$	$d$ (mm)																	
		140	150	160	170	180	190	200	212	224	236	250	265	280	300	315	335	355	400
200	$\eta < 1,06$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,1	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,9	5,5
	1,06 > 1,11	1,2	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	4,0	4,2	4,6	4,9	5,7
	1,12 > 1,24	1,2	1,4	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,4	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9	5,7
	1,25 > 1,50	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,2	3,4	3,7	4,1	4,3	4,7	5,0	5,8
	1,5 < $\eta$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,3	2,6	2,8	3,0	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7	5,1	5,8
400	$\eta < 1,06$	2,0	2,3	2,7	3,0	3,4	3,7	4,0	4,4	4,8	5,2	5,7	6,2	6,7	7,3	7,8	8,5	9,1	10,5
	1,06 > 1,11	2,1	2,4	2,8	3,1	3,4	3,8	4,1	4,5	4,9	5,3	5,8	6,3	6,8	7,4	7,9	8,6	9,2	10,6
	1,12 > 1,24	2,1	2,5	2,8	3,2	3,5	3,8	4,2	4,6	5,0	5,4	5,9	6,3	6,8	7,5	8,0	8,6	9,3	10,7
	1,25 > 1,50	2,2	2,5	2,9	3,2	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	5,9	6,4	6,9	7,6	8,1	8,7	9,4	10,8
	1,5 < $\eta$	2,2	2,5	2,9	3,3	3,6	4,0	4,3	4,7	5,2	5,6	6,0	6,5	7,0	7,7	8,2	8,9	9,5	11,0
730	$\eta < 1,06$	3,3	3,9	4,5	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,2	8,9	9,7	10,5	11,4	12,5	13,3	14,4	15,4	17,8
	1,06 > 1,11	3,4	4,0	4,6	5,2	5,8	6,4	7,0	7,7	8,3	9,0	9,8	10,7	11,5	12,6	13,4	14,5	15,5	18,0
	1,12 > 1,24	3,5	4,1	4,7	5,3	5,9	6,5	7,1	7,8	8,5	9,1	9,9	10,8	11,6	12,7	13,5	14,6	15,7	18,1
	1,25 > 1,50	3,5	4,2	4,8	5,4	6,0	6,6	7,2	7,9	8,6	9,3	10,1	11,0	11,8	12,9	13,7	14,8	15,9	18,3
	1,5 < $\eta$	3,7	4,3	4,9	5,5	6,1	6,7	7,3	8,1	8,8	9,5	10,3	11,1	12,0	13,1	14,0	15,1	16,2	18,5
970	$\eta < 1,06$	4,1	4,9	5,6	6,4	7,2	7,9	8,7	9,5	10,4	11,3	12,3	13,4	14,4	15,6	16,9	18,2	19,5	22,4
	1,06 > 1,11	4,3	5,1	5,8	6,6	7,4	8,1	8,9	9,7	10,6	11,5	12,5	13,6	14,6	15,8	17,1	18,4	19,7	22,5
	1,12 > 1,24	4,4	5,2	6,0	6,7	7,5	8,2	9,0	9,9	10,8	11,6	12,7	13,7	14,8	16,2	17,2	18,6	19,9	22,8
	1,25 > 1,50	4,5	5,3	6,1	6,9	7,7	8,4	9,2	10,1	11,0	11,9	12,9	14,0	15,0	16,4	17,8	19,1	20,2	23,1
	1,5 < $\eta$	4,6	5,4	6,2	7,0	7,8	8,6	9,4	10,3	11,2	12,1	13,1	14,2	15,3	16,7	17,8	19,1	20,5	23,4
1 155	$\eta < 1,06$	4,7	5,5	6,3	7,4	8,3	9,2	10,1	11,1	12,1	13,1	14,3	15,5	16,7	18,3	19,5	21,0	22,5	25,7
	1,06 > 1,11	4,9	5,9	6,8	7,7	8,5	9,4	10,3	11,3	12,4	13,4	14,5	15,8	17,0	18,6	19,7	21,3	22,8	26,0
	1,12 > 1,24	5,1	6,0	6,9	7,8	8,7	9,6	10,5	11,5	12,5	13,5	14,7	16,0	17,2	18,8	19,9	21,5	23,0	26,2
	1,25 > 1,50	5,2	6,2	7,1	8,0	8,9	9,8	10,7	11,7	12,8	13,8	15,0	16,2	17,5	19,1	20,2	21,8	23,3	26,5
	1,5 < $\eta$	5,4	6,3	7,2	8,2	9,1	10,0	10,9	12,0	13,0	14,1	15,3	16,5	17,8	19,4	20,5	22,2	23,7	26,9
1 455	$\eta < 1,06$	5,5	6,7	7,7	8,8	9,9	10,9	12,0	13,2	14,4	15,6	17,0	18,4	19,8	21,6	23,0	24,7	26,3	29,8
	1,06 > 1,11	5,8	6,9	8,0	9,1	10,2	11,2	12,3	13,5	14,7	15,9	17,3	18,7	20,1	21,9	23,3	25,0	26,6	30,1
	1,12 > 1,24	6,0	7,1	8,2	9,3	10,4	11,4	12,5	13,7	14,9	16,1	17,5	19,0	20,4	22,2	23,5	25,2	26,9	30,3
	1,25 > 1,50	6,2	7,3	8,5	9,6	10,6	11,7	12,8	14,0	15,2	16,5	17,8	19,3	20,7	22,5	23,9	25,6	27,3	30,7
	1,5 < $\eta$	6,4	7,5	8,6	9,8	10,9	12,0	13,0	14,3	15,6	16,8	18,2	19,7	21,1	23,0	24,3	26,1	27,8	31,3
1 745	$\eta < 1,06$	6,3	7,5	8,8	10,1	11,3	12,5	13,7	15,1	16,5	17,8	19,3	20,9	22,4	24,4	25,8	27,6	29,3	32,5
	1,06 > 1,11	6,5	7,9	9,2	10,4	11,7	12,9	14,1	15,5	16,8	18,2	19,7	21,3	22,8	24,8	26,2	28,0	29,6	33,0
	1,12 > 1,24	6,9	8,1	9,4	10,7	11,9	13,1	14,3	15,7	17,1	18,4	20,0	21,6	23,1	25,1	26,5	28,2	29,9	33,3
	1,25 > 1,50	7,1	8,4	9,7	11,0	12,2	13,4	14,6	16,1	17,5	18,8	20,4	22,0	23,5	25,5	26,9	28,7	30,4	33,7
	1,5 < $\eta$	7,3	8,6	9,9	11,2	12,5	13,7	15,0	16,4	17,8	19,2	20,8	22,4	24,0	26,0	27,5	29,3	31,0	34,4
2 400	$\eta < 1,06$	7,5	9,2	10,8	12,4	13,9	15,3	16,8	18,4	20,0	21,5	23,1	24,8	26,4	28,2	29,4			
	1,06 > 1,11	8,1	9,7	11,3	12,8	14,4	15,8	17,2	18,9	20,5	22,0	23,5	25,3	26,9	28,7	29,9			
	1,12 > 1,24	8,4	10,0	11,6	13,2	14,7	16,2	17,5	19,2	20,8	22,3	24,0	25,7	27,2	29,1	30,3			
	1,25 > 1,50	8,7	10,4	12,0	13,6	15,1	16,6	18,1	19,7	21,3	22,9	24,5	26,2	27,8	29,7	31,0			
	1,5 < $\eta$	8,9	10,5	12,3	13,9	15,5	17,0	18,5	20,2	21,8	23,4	25,2	26,9	28,5	30,4	31,7			
2 910	$\eta < 1,06$	8,3	10,1	11,9	13,6	15,2	16,7	18,2	19,9	21,5	22,9	24,4	26,0						
	1,06 > 1,11	8,9	10,7	12,4	14,1	15,8	17,3	18,8	20,5	22,1	23,5	25,0	26,5						
	1,12 > 1,24	9,2	11,1	12,8	14,5	16,2	17,7	19,2	20,9	22,5	24,0	25,5	26,9						
	1,25 > 1,50	9,5	11,5	13,3	15,0	16,7	18,3	19,8	21,5	23,1	24,5	26,1	27,6						
	1,5 < $\eta$	9,9	11,8	13,5	15,4	17,1	18,8	20,3	22,1	23,7	25,3	26,9	28,4						
3 600	$\eta < 1,06$	8,5	10,5	12,4	14,2	15,8	17,3	18,7	20,2										
	1,06 > 1,11	9,3	11,3	13,2	14,9	16,5	18,1	19,4	20,9										
	1,12 > 1,24	9,8	11,8	13,6	15,4	17,1	18,6	20,0	21,4										
	1,25 > 1,50	10,3	12,3	14,2	16,0	17,7	19,2	20,7	22,2										
	1,5 < $\eta$	10,5	12,7	14,7	16,5	18,2	19,8	21,3	22,9										
4 500	$\eta < 1,06$	7,9	9,8	11,6	13,1														
	1,06 > 1,11	8,8	10,7	12,5	14,0														
	1,12 > 1,24	9,3	11,3	13,1	14,6														
	1,25 > 1,50	10,0	12,0	13,8	15,4														
	1,5 < $\eta$	10,4	12,4	14,3	15,9														
$L$ (mm)	1 250	1 400	1 600	1 800	2 000	2 240	2 500	2 800	3 350	3 550	4 100	4 500	5 000	5 600	6 300	7 100	8 000		
$C_L$	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,92	0,94	0,97	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,13	1,15		

Tableau 5 – Valeurs du facteur d'arc $C_a$ en fonction de $\alpha$ et du rapport $(D - d)/E$ [relation (9)]					
$\frac{D-d}{E}$	$\alpha$ (degré)	$C_a$	$\frac{D-d}{E}$	$\alpha$ (degré)	$C_a$
0	180	1	0,92	125	0,84
0,09	175	0,99	1	120	0,82
0,17	170	0,98	1,07	115	0,80
0,26	165	0,96	1,15	110	0,78
0,35	160	0,95	1,22	105	0,76
0,43	155	0,94	1,29	100	0,74
0,52	150	0,92	1,35	95	0,72
0,60	145	0,91	1,41	90	0,69
0,68	140	0,89	1,47	85	0,67
0,77	135	0,88	1,53	80	0,64
0,85	130	0,86	1,59	75	0,61





# Références

- [1] Christian Eloy « Calcul en construction mécanique » collection aide-mémoire, Dunod 1981
- [2] Shigley's " Mechanical Engineering Design " , Eighth Edition Budynas–Nisbett 1976
- [3] Nicolet G.R. "Conception et calcul des éléments de machines " volume 2 , version 1, juin 2006.
- [4] Georges HENRIOT "Engrenages concourants et gauches" Étude géométrique, Engrenages. Conception. Fabrication. Dunod (1999).
- [5] Nicolet G.R. "Conception et calcul des éléments de machines " volume 3, version 1, juin 2006.
- [6] Eléments de machines, Gilbert Drouin, Michel Gou, Pière Thiry, Robert Vinet. Deuxième édition revue et augmentée, décembre 1986.
- [7] Francis ESNAULT. Construction mécanique, Transmission de puissance, Tome3, Transmission de puissance par liens flexibles, DUNOD, 1999
- [8] Drouin g et al., "Elément de machines" , Ed. Ecole polytechnique de montréal, 1986