



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Tébessi - TEBESSA -
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de mathématiques et informatique



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat LMD
En : MATHÉMATIQUES
Option : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Par : **CHETTOUH RAOUDA**

Intitulée :

Sur l'image numérique d'un opérateur borné

Devant le jury :

ZARAI Abderrahmane	Professeur	Université de Tébessa	Président
BOUZENADA Smail	MCA	Université de Tébessa	Rapporteur
MESSAOUDENE Hadia	MCA	Université de Tébessa	Co-Rapporteur
MANSOUR Abdelouahab	Professeur	Université d'El oued	Examineur
BELOUL Said	MCA	Université d'El oued	Examineur
MESLOUB Fatiha	MCA	Université de Tébessa	Examineur

Date de soutenance : 08 / 11 / 2020

Remerciements

*Je remercie **Allah** qui ma donnée la volonté et la force pour accomplir cette thèse.*

Une thèse est une expérience qui absorbe et impacte radicalement plusieurs années de la vie d'une personne et qui ne peut pas être menée à terme que grâce à l'aide de personnes généreuses par leurs efforts et disponibilités.

*En premier lieu je tiens à remercier mon directeur de thèse monsieur **BOUZENADA Smail** maître de conférence à l'université de Tébessa qui a encadré ce travail avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a été disponible à chaque étape de mon travail et m'a guidé tout au long de la réalisation de ma thèse.*

*Je remercie maître de conférence **MESSAOUDENE Hadia** pour ses précieux conseils qui m'ont beaucoup aidé.*

*J'exprime mes sincères remerciements au professeur **ZARAI Abderrahmane** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.*

*Je remercie vivement monsieur **MANSOUR Abdelouahab** professeur à l'université de El Oued, monsieur **BELOUL Said** maître de conférence à l'université de El Oued, madame **MESLOUB Fatiha** maître de conférence à l'université de Tébessa pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

Je remercie mes collègues du département de mathématiques de la faculté des sciences exactes.

Enfin mes remerciements vont à ma famille qui m'a encouragé et m'a soutenu par tous les moyens possible jusqu'à ce jour.

المخلص

في هذا العمل نهتم بدراسة الصورة الرقمية لمؤثر خطي محدود على فضاء هيلبرت. عممنا نتيجة كيبانها وأعطينا شرطا لازما وكافيا لتكون الصورة الرقمية لمؤثر قطعة مستقيمة، بصورة أدق أثبتنا أن الصورة الرقمية لمؤثر A تكون قطعة مستقيمة إذا وفقط إذا وجد عدنان مركبان λ و μ بحيث $A^* = \lambda A + \mu I$ ثم قدمنا طريقة لإيجاد معادلة حامل الصورة الرقمية بدلالة λ و μ .

إنطلاقاً من هذه النتائج، عرفنا صف جديد للمؤثرات الخطية المحدودة، هو صف المؤثرات التي صورها الرقمية قطعة مستقيمة، هذا الصف يحوي صف المؤثرات الهرميثية ومحتوى في صف المؤثرات الناظمية. وفق هذه الاحتواءات أطلقنا اسم "تحت هرميثي" على مؤثرات هذا الصف.

أثبتنا أن هذا الصف مغلق بانتظام، لا متغاير بواسطة التكافؤ الواحدي ولا متغاير بواسطة التحويل التآلفي.

في جزء آخر، عرفنا مجموعة صغيرة تحوي الصورة الرقمية ثم ناقشنا الحالة التي تكون فيها الصورة الرقمية قرصاً.

في الأخير، قدمنا خاصية احتواء بالنسبة للصورة الرقمية لقوة مؤثر هرميثي.

الكلمات المفتاحية: صورة رقمية، نصف قطر رقمي، مؤثر هرميثي، مؤثر ناظمي.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude de l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert.

On généralise un résultat de Kippenhahn, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'image numérique d'un opérateur soit un segment de droite, on montre exactement que l'image numérique d'un opérateur A est un segment de droite si et seulement s'il existe deux scalaires complexes λ et μ tels que $A^* = \lambda A + \mu I$, puis on détermine l'équation du support de cette image numérique en termes de λ et μ .

À partir de ces résultats, on introduit une nouvelle classe d'opérateurs, c'est la classe des opérateurs dont l'image numérique est un segment de droite, cette classe contient les opérateurs auto-adjoints, et contenu dans la classe des opérateurs normaux. Selon ces inclusions, on a donné le nom sous-auto-adjoint aux opérateurs de cette classe. On montre aussi que cette classe est uniformément fermée, invariante par équivalence unitaire et invariante par transformation affine.

Dans une autre partie, on détermine une petite région contenant l'image numérique, puis on discute le cas où l'image numérique est un disque.

Enfin, on donne une propriété d'inclusion de l'image numérique de la puissance positive d'un opérateur auto-adjoint.

Mots clés : Image numérique, rayon numérique, opérateur auto-adjoint, opérateur normal.

Abstract

In this work we are interested in the study of the numerical range of a bounded linear operator on a Hilbert space.

We generalize a result of Kippenhahn, we give a necessary and sufficient condition for the numerical range of an operator to be a line segment, we show exactly that the numerical range of an operator A is a line segment if and only if there are two scalars complexes λ and μ such that $A^* = \lambda A + \mu I$, then we determine the equation of the straight support of this numerical range in terms of λ and μ .

From these results, we introduce a new class of operators, it is the class of operators whose numerical range is a line segment, this class contains self-adjoint operators and contained in the class of normal operators. According to these inclusions, we called sub-self-adjoint the operator of this class. We also show that this class is uniformly closed, invariant under unitary equivalence and invariant under affine transformation.

In another part, we determine a small region containing the numerical range, then we discuss the case where the numerical range is a disk.

Finally, we give an inclusion property of the numerical range of the positive power of a self-adjoint operator.

Key words : Numerical range, numerical radius, self-adjoint operator, normal operator.

Table des matières

Symboles et Notations	3
Introduction générale	5
1 Préliminaires	8
1.1 Espace de Hilbert	8
1.2 Opérateurs linéaires bornés	10
1.3 Spectres d'opérateur	13
2 Image numérique d'un opérateur borné	16
2.1 Concepts généraux de l'image numérique	16
2.2 Théorème elliptique de l'image numérique	23
2.3 Image numérique et spectre	24
3 Image numérique de certains opérateurs	28
3.1 Opérateurs auto-adjoints	28
3.2 Opérateurs normaux et hyponormaux	29
3.3 Opérateurs normaloïdes, convexoïdes et spectraloïdes	33
4 Image numérique et opérateurs sous-auto-adjoints	37
4.1 Quand l'image numérique est un segment de droite	38
4.2 Opérateurs sous-auto-adjoints	42
4.3 Quelques positions de l'image numérique d'un opérateur sous-auto-adjoint	44

5	Régions d'inclusion de l'image numérique	46
5.1	Région minimale contenant l'image numérique	46
5.2	Puissance positive d'un opérateur	52
5.3	Puissance positive d'un opérateur auto-adjoint	54
	Conclusion générale	57
	Bibliographie	58

Symboles et Notations

\mathbb{R}	: Ensemble des nombres réels.
\mathbb{C}	: Ensemble des nombres complexes.
$\mathcal{L}(H)$: Espace des opérateurs linéaires bornés sur H .
\overline{M}	: Adhérence de M .
M^\perp	: Complément orthogonal de M .
P_M	: Projection orthogonale sur M .
$A _F$: Compression de A sur F .
$\text{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: Sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
$D(x, r)$: Disque ouvert de centre x et de rayon r .
$R(A)$: Image de A .
$\ker(A)$: Noyau de A .
$\text{Re}(z)$: Partie réelle de z .
$\text{Im}(z)$: Partie imaginaire de z .
dist	: Signe de distance.
$ A $: Module de A .
$\ A\ $: Norme de A .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Signe de produit scalaire.
\oplus	: Signe de somme directe.
I	: Opérateur identité.
A^*	: Adjoint de A .
$\sigma(A)$: Spectre de A .
$r(A)$: Rayon spectral de A .
$\partial\sigma(A)$: Frontière de $\sigma(A)$.
$\text{conv}(\sigma(A))$: L'enveloppe convexe de $\sigma(A)$.

- $\sigma_{ap}(A)$: Spectre approché de A .
 $\sigma_p(A)$: Spectre ponctuel de A .
 $\sigma_{ar}(A)$: Spectre approché réduisant de A .
 $\rho(A)$: Ensemble résolvant de A .
 $W(A)$: Image numérique de A .
 $w(A)$: Rayon numérique de A .

Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs, on s'intéresse à l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert. La notion de l'image numérique a été introduite par Otto Toeplitz [48] en 1918 pour les matrices complexes sous le nom "champ de valeurs" (field of values), en 1919 F. Hausdorff [26] a prouvé que l'image numérique d'une matrice complexe est convexe, et dans les années 1929 et 1932 A. Wintner [50] et M. H. Stone [46] ont étudié la relation entre l'image numérique et l'enveloppe convexe du spectre. Marshall Stone est le premier qui a utilisé le nom image numérique dans son livre : Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis (1932). Puis, ils apparurent les travaux de F. Riesz et B. Sz. Nagy [43], P. Halmos [24], R. A. Horne et C. R. Johnson [28], [29] et R. Bouldin [8], [9].

L'étude de l'image numérique donne des applications dans plusieurs branches des sciences pures et appliquées comme dans la théorie des opérateurs et l'analyse fonctionnelle, algèbres de Banach et C*-algèbres, inégalités des normes, théorie de perturbation, polynômes matriciels, analyse numérique, physique quantique ...etc.

Soit H un espace de Hilbert complexe, avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et notons $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H . L'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est définie par

$$W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1 \}.$$

Le rayon numérique $w(A)$ d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est défini par

$$w(A) = \sup \{ |z| : z \in W(A) \}.$$

L'image numérique $W(A)$ est un sous-ensemble convexe non-vidé de \mathbb{C} contenant l'ensemble des valeurs propres de A . En particulier, Pour les matrices normales $\overline{W(A)} = \text{conv}(\sigma(A))$, où $\text{conv}(\sigma(A))$ désigne l'enveloppe convexe du spectre de A . Les propriétés géométriques de $W(A)$ fournissent souvent des informations utiles sur les propriétés analytiques et algébriques de A . Par

exemple $W(A)$ est un point $\{\delta\}$ si et seulement si $A = \delta I$, $W(A)$ est réel si et seulement si A est auto-adjoint [23], et si $W(A)$ est un segment de droite, alors A est normal [23].

Vu l'importance de certaines propriétés utilisées tout au long de ce travail, nous avons pour cela jugé utile de préciser leurs principales propriétés en appendices.

Le premier chapitre de ce travail est consacré au rappel de principales définitions et résultats concernant l'espace de Hilbert, les opérateurs linéaires bornés, et les spectres.

Le deuxième chapitre est une introduction à la notion de l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert. Nous donnons une synthèse des définitions et propriétés principales, nous étudions l'image numérique en dimension deux, principalement le théorème elliptique de l'image numérique, puis nous présentons la relation entre l'image numérique et le spectre.

Au troisième chapitre, nous présentons les propriétés principales de l'image numérique des opérateurs auto-adjoints, normaux, hyponormaux, normaloïdes, convexoïdes et spectraloïdes.

Dans l'article de Kippenhahn [39] (voir sa traduction en anglais [40]), l'image numérique $W(A)$ d'une matrice A est un segment de droite si et seulement si A est équivalente par transformation affine à une matrice hermitienne.

Dans le quatrième chapitre, nous généralisons ce résultat, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que l'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est un segment de droite, et nous déterminons son support dans ce cas.

À partir de ces résultats, on introduit une nouvelle classe d'opérateurs, c'est la classe des opérateurs dont l'image numérique est un segment de droite, cette classe contient les opérateurs auto-adjoints et contenu dans la classe des opérateurs normaux. Selon ces inclusions, on a donné le nom sous-auto-adjoint aux opérateurs de cette classe. On montre aussi que cette classe est uniformément fermée, invariante par équivalence unitaire et invariante par transformation affine.

Parmi les propriétés spectrales d'un opérateur auto-adjoint, si $\overline{W(T)} = [m, M] \subset \mathbb{R}$ (identiquement, T est auto-adjoint), alors $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$, et $m, M \in \sigma(T)$ [19]. Nous généralisons ce résultat pour un opérateur sous-auto-adjoint. À la fin du chapitre on étudie quelques positions de l'image numérique des opérateurs sous-auto-adjoints.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude des régions d'inclusion de l'image numérique.

On détermine une petite région contenant l'image numérique, puis on discute le cas où l'image numérique est un disque, et étudier la relation entre le rayon numérique d'un opérateur A et la norme de $\operatorname{Re}(A)$ et de $\operatorname{Im}(A)$.

Enfin, on donne une propriété d'inclusion de l'image numérique de la puissance positive d'un opérateur auto-adjoint.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons tous les outils de base nécessaires pour notre thèse. On donne une synthèse des différentes propriétés sur l'espace de Hilbert, les opérateurs linéaires bornés et le spectre d'un opérateur.

1.1 Espace de Hilbert

H désigne un espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 1.1.1 *Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une norme sur H , tel que*

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} \quad \forall x \in H.$$

Théorème 1.1.1 (*Inégalité de Cauchy Schwarz*)

Pour tous $x, y \in H$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Proposition 1.1.2 *Si $x, y \in H$ tels que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, alors x et y sont colinéaires.*

Lemme 1.1.1 (*Identité de polarisation*)

Pour tous $x, y \in H$

$$4 \langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \langle x + i^k y, x + i^k y \rangle,$$

où i est l'unité imaginaire des nombres complexes ($i^2 = -1$).

Définition 1.1.1 On dit que deux vecteurs x, y de H sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Théorème 1.1.2 (Théorème de Pythagore)

Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Définition 1.1.2 Une famille de vecteurs $\{x_i, i \in J, x_i \in H\}$ est dite orthogonale si pour tous $i, j \in J$ tels que $i \neq j$ on a $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

Proposition 1.1.3 Une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace de Hilbert est libre.

Définition 1.1.3 Le complément orthogonal M^\perp d'un sous-ensemble M de H est défini par

$$M^\perp = \{x \in H; \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}.$$

Théorème 1.1.3 Si F est un sous-espace fermé de H , alors H est la somme directe orthogonale de F et F^\perp , notée par $H = F \oplus F^\perp$.

Définition 1.1.4 Une famille de vecteurs $\{x_i, i \in J, x_i \in H\}$ est dite orthonormée (orthonormale) si

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Définition 1.1.5 Une famille de vecteurs $\{x_i, i \in J, x_i \in H\}$ est dite totale (ou complète) dans H si le sous-espace engendré par cette famille est dense i.e $\{x_i, i \in J, x_i \in H\}^\perp = \{0\}$.

Définition 1.1.6 Une suite orthonormée totale d'un espace de Hilbert est appelée base orthonormée (ou base Hilbertienne).

Théorème 1.1.4 Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement s'il possède une base orthonormée.

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Soient H et K deux espaces de Hilbert.

Notation 1.2.1 $\mathcal{L}(H, K)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans K et si $H = K$, on note $\mathcal{L}(H, H) = \mathcal{L}(H)$.

Définition 1.2.1 Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, l'image de A est l'ensemble défini par

$$R(A) = \{Ax, x \in H\}$$

et le noyau de A est l'ensemble défini par

$$\text{Ker}(A) = \{x \in H, Ax = 0\}.$$

Définition 1.2.2 La norme d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est définie par

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\|; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Théorème 1.2.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors

$$\|A\| = \sup \{|\langle Ax, y \rangle|; \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Théorème 1.2.2 (Identité de polarisation généralisée)

Si $A \in \mathcal{L}(H)$, alors pour tous $x, y \in H$, on a

$$4\langle Ax, y \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \langle A(x + i^k y), x + i^k y \rangle.$$

Définition 1.2.3 Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est dit projecteur si $P^2 = P$.

Définition 1.2.4 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Un sous-espace fermé E de H est invariant par A lorsque $A(E) \subset E$.

(2) Si un sous-espace fermé E de H est invariant par A et admet un supplémentaire topologique qui est aussi invariant par A , on dit que E est réductible pour A . Ce qui est équivalent à l'existence d'un projecteur P sur H tel que $R(P) = E$ et $AP = PA$.

Définition 1.2.5 Une suite d'opérateurs (A_n) de $\mathcal{L}(H)$ converge uniformément (en norme) vers un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ si

$$\|A_n - A\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Définition 1.2.6 Si $H = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$ et $A \in \mathcal{L}(H, K)$, alors A prend la forme matricielle

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

où $A_{ij} \in \mathcal{L}(H_j, K_i)$.

Si $A_{12} = A_{21} = 0$, alors A est la somme directe de A_{11} et A_{22} , on écrit $A = A_{11} \oplus A_{22}$.

Définition 1.2.7 L'opérateur adjoint d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est l'unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Proposition 1.2.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors

- (i) $\text{Ker}(A^*) = (R(A))^\perp$.
- (ii) $\overline{R(A^*)} = (\text{Ker}(A))^\perp$.

Définition 1.2.8 Soit F un sous-espace fermé de H . La projection orthogonale de H sur F est l'opérateur noté P_F défini par

$$\forall x = x_1 + x_2, x_1 \in F \text{ et } x_2 \in F^\perp, P_F(x) = x_1.$$

Proposition 1.2.2 Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est une projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P = P^*$.

Définition 1.2.9 Pour un sous-espace fermé F de H , on appelle compression de A sur F et on note $A|_F$ la restriction de l'opérateur $P_F A$ sur F , (où P_F est la projection orthogonale sur F).

Proposition 1.2.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors $A = 0$ si et seulement si $\langle Ax, x \rangle = 0$ pour tout $x \in H$.

Définition 1.2.10 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé compact si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = 0$, pour toute suite orthonormée (x_n) de H .

Proposition 1.2.4 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Si (x_n) est une suite faiblement convergente vers $x \in H$, alors (Ax_n) est fortement convergente vers Ax .

Définition 1.2.11 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$.

Théorème 1.2.3 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si et seulement si $\langle Ax, x \rangle$ est réel pour tout $x \in H$.

Définition 1.2.12 Tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ peut s'écrire sous la forme $A = B + iC$, où

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

B et C sont auto-adjoints, et la forme $A = B + iC$ dite décomposition cartésienne de A .

B est dit partie réelle de A et noté $\operatorname{Re}(A)$ et C dit partie imaginaire de A et noté $\operatorname{Im}(A)$.

Définition 1.2.13 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé positif si $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, on note $A \geq 0$.

Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est positif tel que $\langle Ax, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$, on dit que A est strictement positif.

Notation 1.2.2 Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs auto-adjoints tels que $A - B \geq 0$, on note $A \geq B$.

Proposition 1.2.5 Tout opérateur strictement positif est inversible.

Théorème 1.2.4 Pour tout opérateur positif $A \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique opérateur positif B , tel que $B^2 = A$. De plus B commute avec tout opérateur commutant avec A . B est appelé racine carrée de A et est noté \sqrt{A} .

Proposition 1.2.6 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors A^*A est un opérateur positif.

Définition 1.2.14 Le module d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est la racine carrée de A^*A , on note $|A| = \sqrt{A^*A}$

Théorème 1.2.5 (Inégalité de Cauchy Schwartz Généralisée)

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif. Alors

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle \text{ pour tout } x, y \in H.$$

Définition 1.2.15 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé normal si $A^*A = AA^*$.

Proposition 1.2.7 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, A est normal si et seulement si $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $\forall x \in H$.

Définition 1.2.16 Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est unitairement diagonalisable s'il existe une base orthonormée $\{e_n\}$ de H constituée par les vecteurs propres de A , identiquement, A s'écrit selon cette base sous forme d'une matrice diagonale.

Proposition 1.2.8 Tout opérateur normal en dimension finie est unitairement diagonalisable, et plus général tout opérateur normal compact est unitairement diagonalisable.

Définition 1.2.17 Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est appelé unitaire si $U^*U = UU^* = I$.

Définition 1.2.18 Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A et B sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = U^*AU$.

Théorème 1.2.6 Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est unitaire si et seulement si $\|Ax\| = \|A^*x\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.

1.3 Spectres d'opérateur

Définition 1.3.1 Le spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est l'ensemble défini par

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Théorème 1.3.1 *Le spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est un sous ensemble compact du plan complexe.*

Définition 1.3.2 *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est le complémentaire du spectre, i.e*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ est inversible}\}.$$

Définition 1.3.3

(1) *Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $A \in \mathcal{L}(H)$ s'il existe un vecteur non nul $x \in H$ tel que $Ax = \lambda x$.*

(2) *Chaque vecteur non nul $x \in H$ qui satisfait $Ax = \lambda x$ s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .*

(3) *L'ensemble des valeurs propres de A est noté $\sigma_p(A)$ et s'appelle spectre ponctuel de A , i.e*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Proposition 1.3.1 *En dimension finie le spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ coïncide avec son spectre ponctuel.*

Proposition 1.3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si P est un polynôme à coefficients complexes, alors*

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)) = \{P(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proposition 1.3.3 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors $\sigma(A)$ est réel.*

Définition 1.3.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Le spectre approché de A est l'ensemble défini par*

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n)_n \subset H, \|x_n\| = 1 \forall n \geq 0 \text{ et } \|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0\}.$$

Définition 1.3.5 *Le spectre approché réduisant d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est l'ensemble défini par*

$$\sigma_{ar}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists (x_n)_n \subset H, \|x_n\| = 1 \forall n \geq 0 \text{ et } \|(A - \lambda I)x_n\| + \|(A - \lambda I)^* x_n\| \longrightarrow 0\}.$$

Proposition 1.3.4 *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, $\partial(\sigma(A)) \subset \sigma_{ap}(A)$, où $\partial(\sigma(A))$ la frontière de $\sigma(A)$.*

Définition 1.3.6 *Le rayon spectral d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est le réel positif défini par*

$$r(A) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Remarque 1.3.1 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Proposition 1.3.5 *Le spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est invariant par similitude, i.e pour tout opérateur inversible $S \in \mathcal{L}(H)$*

$$\sigma(S^{-1}AS) = \sigma(A).$$

Théorème 1.3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint et soient*

$$m = \inf \{ \langle Ax, x \rangle, \|x\| = 1 \} \text{ et } M = \sup \{ \langle Ax, x \rangle, \|x\| = 1 \}.$$

Alors

$$\sigma(A) \subset [m, M] \text{ et } m, M \in \sigma(A).$$

Proposition 1.3.6 *Les vecteurs propres d'un opérateur normal associées aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Chapitre 2

Image numérique d'un opérateur borné

Introduction

Le présent chapitre est une introduction à la notion de l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert. On s'intéresse essentiellement à présenter les propriétés algébriques, topologiques et géométriques de l'image numérique notamment, la convexité, la bornitude, l'invariance par équivalence unitaire, l'équivalence entre le rayon numérique et la norme d'opérateur, la forme elliptique en dimension deux, et les inclusions spectrales.

Dans la suite, H est un espace de Hilbert complexe.

2.1 Concepts généraux de l'image numérique

Définition 2.1.1 *L'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est le sous-ensemble des nombres complexes défini par*

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

Proposition 2.1.1 [23] *Pour tous $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tout sous-espace F de H , tout opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a*

- (1) $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.
- (2) $W(A|_F) \subset W(A)$, où $(A|_F)$ est la compression de A sur F .
- (3) $W(A^*) = \{\bar{\lambda}; \lambda \in W(A)\}$.

- (4) $W(\operatorname{Re}(A)) = \operatorname{Re}(W(A))$ et $W(\operatorname{Im}(A)) = \operatorname{Im}(W(A))$.
 (5) $W(A+B) \subseteq W(A) + W(B)$.

Preuve (1), (3), (4) et (5) sont évidentes.

(2) Si $x \in F$, alors

$$\langle (A|_F)x, x \rangle = \langle P_F Ax, x \rangle = \langle Ax, P_F^* x \rangle = \langle Ax, P_F x \rangle = \langle Ax, x \rangle \in W(A).$$

■

Théorème 2.1.1 [29] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, pour tout opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$*

$$W(U^*AU) = W(A).$$

Preuve Soit U un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(H)$ et $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. Alors

$$\langle U^*AUx, x \rangle = \langle AUx, Ux \rangle \in W(A).$$

On dit que l'image numérique est invariante par équivalence unitaire.

Réciproquement, comme U est surjectif, alors il existe $y \in H$ tel que $x = Uy$, identiquement $\|y\| = \|U^*x\| = \|x\| = 1$, et donc

$$\langle Ax, x \rangle = \langle AUy, Uy \rangle = \langle U^*AUy, y \rangle \in W(U^*AU).$$

■

Théorème 2.1.2 [42] *L'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est un ensemble non vide et borné.*

Preuve

- (1) Soit $x \in H$, tel que $x \neq 0$. Alors $\left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \in W(A)$, identiquement, $W(A) \neq \emptyset$.
 (2) Soit $\lambda \in W(A)$, alors il existe $x \in H$, $\|x\| = 1$, tel que $\lambda = \langle Ax, x \rangle$

$$|\lambda| = |\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|.$$

Donc pour tout $\lambda \in W(A)$, $|\lambda| \leq \|A\|$. ■

Théorème 2.1.3 [23] (*Toeplitz-Hausdorff*)

Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, $W(A)$ est un ensemble convexe de \mathbb{C} .

Preuve Soient $\langle Ax, x \rangle$ et $\langle Ay, y \rangle$ deux points distincts de $W(A)$, avec $\|x\| = \|y\| = 1$. Les deux vecteurs x et y ne sont pas colinéaires. Notons $F = \text{vect}\{x, y\}$, par application de la proposition (2.1.1) (la propriété (2)), on obtient $W(A|_F) \subset W(A)$. Comme $W(A|_F)$ est une surface elliptique (voir la partie suivante), elle contient alors le segment joignant $\langle Ax, x \rangle$ et $\langle Ay, y \rangle$, d'où $W(A)$ est convexe. ■

Théorème 2.1.4 [23] Si $A = A_1 \oplus A_2$ sur $H = H_1 \oplus H_2$, alors

$$W(A) = \text{conv}(W(A_1) \cup W(A_2)),$$

où $\text{conv}(W(A_1) \cup W(A_2))$ est l'enveloppe convexe de $(W(A_1) \cup W(A_2))$.

Preuve Soient $x \in H_1$ et $y \in H_2$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$. Montrons que le segment joignant les deux points $\langle A_1x, x \rangle$ de $W(A_1)$ et $\langle A_2y, y \rangle$ de $W(A_2)$ sont dans $W(A)$.

Soient $t, s \in [0, 1]$ tels que $t^2 + s^2 = 1$. On a

$$t^2 \langle A_1x, x \rangle + s^2 \langle A_2y, y \rangle = \langle A(tx + sy), (tx + sy) \rangle \in W(A).$$

Inversement, soit z un vecteur unitaire de H . Alors $z = x \oplus y$, où $x \in H_1$, $y \in H_2$, et $\|z\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2} = 1$. On a

$$\begin{aligned} \langle Az, z \rangle &= \langle A_1x, x \rangle + \langle A_2y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 \left\langle A_1 \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \|y\|^2 \left\langle A_2 \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\langle Az, z \rangle \in \text{conv}(W(A_1) \cup W(A_2)).$$

■

Théorème 2.1.5 [29] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si H est de dimension finie, alors $W(A)$ est un ensemble compact de \mathbb{C} .*

Preuve Soit Γ la sphère unité de H . L'application $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto \langle Ax, x \rangle$ est continue.

En effet : Pour tout $x, y \in \Gamma$ on a

$$\langle Ax, x \rangle - \langle Ay, y \rangle = \langle (Ax - Ay), x \rangle + \langle Ay, (x - y) \rangle.$$

Alors,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |\langle Ax, x \rangle - \langle Ay, y \rangle| \\ &\leq 2 \|A\| \|x - y\|. \end{aligned}$$

Ce qui exprime la continuité de g . Comme la sphère unité de H est compacte, alors $W(A)$ est compacte. ■

Théorème 2.1.6 [24] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Si $0 \in W(A)$, alors $W(A)$ est fermée.*

Preuve Si λ un point adhérent de $W(A)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires de H telle que $\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \lambda$.

Puisque la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ est faiblement compacte dans H (puisque l'espace de Hilbert est un espace réflexif), il existe une sous suite (x_{n_k}) de $\overline{B}(0, 1)$ qui converge faiblement vers x .

Comme A est compact, alors la suite (Ax_{n_k}) converge fortement vers Ax .

$$\begin{aligned} |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x \rangle| &\leq |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x_{n_k} \rangle| + |\langle Ax, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x \rangle| \\ &\leq \|x_{n_k}\| \|Ax_{n_k} - Ax\| + |\langle Ax, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x \rangle|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle)$ converge vers $\langle Ax, x \rangle$, identiquement $\lambda = \langle Ax, x \rangle$.

Si $\lambda = 0$, l'assertion est claire.

Si $\lambda \neq 0$, il est clair que $x \neq 0$, alors

$$\frac{\lambda}{\|x\|^2} = \left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \in W(A).$$

Car $\|x\| \leq 1$, alors λ est dans le segment joignant 0 et $\frac{\lambda}{\|x\|^2}$.

Si $0 \in W(A)$, alors par la convexité de $W(A)$, $\lambda \in W(A)$, identiquement, $W(A)$ est fermée.

■

Définition 2.1.2 *Le rayon numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est le réel positif défini par*

$$w(A) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in W(A)\}.$$

Exemple 2.1.1 *Soit $H = l^2$ l'espace de Hilbert des suites complexes de carée sommable et soit $A \in \mathcal{L}(H)$ défini par la matrice ci-dessous*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2^r} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^r} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

où $r \geq 1$.

Lorsque x est un vecteur unitaire dans H , alors

$$\|x\|^2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots) = 1.$$

Donc,

$$\langle Ax, x \rangle = (|x_1|^2 + \frac{1}{2^r}|x_2|^2 + \frac{1}{3^r}|x_3|^2 + \dots) \leq (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots) = 1.$$

D'où, $W(A) \subset]0, 1]$.

Pour le vecteur unitaire $x = (1, 0, 0, 0, \dots)$ dans H , on a $\langle Ax, x \rangle = 1$. Alors, $w(A) = 1$.

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir un entier positif n tel que $\frac{1}{n^r} < \varepsilon$, donc pour le

vecteur $x = (0, \dots, 0, 1, 0\dots)$, où 1 est la $n^{\text{ième}}$ composante, nous avons $\langle Ax, x \rangle = \frac{1}{n^r} < \varepsilon$. Par la convexité de l'image numérique, on obtient $W(A) =]0, 1]$.

Théorème 2.1.7 [23] *Le rayon numérique définit une norme sur $\mathcal{L}(H)$.*

Preuve

(1) Si $w(A) = 0$, alors $\langle Ax, x \rangle = 0 \forall x \in H$, ce qui implique par l'identité de polarisation généralisée que $A = 0$.

(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w(\alpha A) &= \sup \{|\lambda|; \lambda \in W(\alpha A)\} \\ &= \sup \{|\lambda|; \lambda \in \alpha W(A)\} \\ &= \sup \{|\alpha\mu|; \alpha\mu \in \alpha W(A)\} \\ &= |\alpha| \sup \{|\mu|; \mu \in W(A)\} \\ &= |\alpha| w(A) \end{aligned}$$

(3) Pour tous $A, B \in \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned} w(A + B) &= \sup \{|\lambda|; \lambda \in W(A + B)\} \\ &\leq \sup \{|\lambda|; \lambda \in (W(A) + W(B))\} \\ &= \sup \{|\mu + \delta|; \mu \in W(A) \text{ et } \delta \in W(B)\} \\ &\leq \sup \{|\mu| + |\delta|; \mu \in W(A) \text{ et } \delta \in W(B)\} \\ &= \sup \{|\mu|; \mu \in W(A)\} + \sup \{|\delta|; \delta \in W(B)\} \\ &= w(A) + w(B). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.8 [23] *(Norme Equivalente)*

Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$

$$w(A) \leq \|A\| \leq 2w(A).$$

Preuve Si $\lambda = \langle Ax, x \rangle$ avec $\|x\| = 1$, alors par l'inégalité de Cauchy Schwartz $|\lambda| \leq \|Ax\| \|x\|$, et donc $w(A) \leq \|A\|$.

D'autre part, d'après l'identité de polarisation généralisée, pour tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned} 4|\langle Ax, y \rangle| &\leq |\langle A(x+y), (x+y) \rangle| + |\langle A(x-y), (x-y) \rangle| + |\langle A(x+iy), (x+iy) \rangle| \\ &\quad + |\langle A(x-iy), (x-iy) \rangle| \\ &\leq w(A) (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2) \\ &= 4w(A) (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Comme $\|A\| = \sup \{|\langle Ax, y \rangle|, \|x\| = \|y\| = 1\}$, alors $\|A\| \leq 2w(A)$. ■

Théorème 2.1.9 [23] *Si $w(A) = \|A\|$, alors $r(A) = \|A\|$.*

Preuve Si $w(A) = \|A\| = 1$, alors il existe une suite des vecteurs unitaires (x_n) telle que

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \lambda \in W(A), \quad |\lambda| = 1,$$

et comme $|\langle Ax_n, x_n \rangle| \leq \|Ax_n\| \leq 1$, alors, on obtient $\|Ax_n\| \longrightarrow 1$. Donc

$$\|(A - \lambda I)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - \langle Ax_n, \lambda x_n \rangle - \langle \lambda x_n, Ax_n \rangle + \|x_n\|^2 \longrightarrow 0,$$

d'où $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ et donc $r(A) = 1$. ■

Théorème 2.1.10 [23] *Si $R(A) \perp R(A^*)$, alors $w(A) = \frac{1}{2} \|A\|$.*

Preuve Soit x un vecteur unitaire de H . On peut écrire $x = x_1 + x_2$, tel que $x_1 \in \ker(A)$, et $x_2 \in \overline{R(A^*)}$.

Comme $(\overline{R(A^*)})^\perp = (R(A^*))^\perp = \ker(A)$, alors

$$\langle Ax, x \rangle = \langle A(x_1 + x_2), (x_1 + x_2) \rangle = \langle Ax_2, x_1 \rangle,$$

car $Ax_1 = 0$, et $\langle Ax_2, x_2 \rangle = \langle x_2, A^*x_2 \rangle = 0$. Donc

$$\begin{aligned} |\langle Ax, x \rangle| &\leq \|A\| \|x_1\| \|x_2\| \\ &\leq \frac{\|A\|}{2} (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) \\ &= \frac{\|A\|}{2}, \end{aligned}$$

puisque x est arbitraire, nous avons

$$w(A) \leq \frac{1}{2} \|A\| \leq w(A).$$

■

2.2 Théorème elliptique de l'image numérique

Théorème 2.2.1 [23] *Soit A un opérateur borné sur un espace de Hilbert de dimension deux.*

Alors $W(A)$ est une ellipse dont les foyers sont les valeurs propres de A .

Preuve On peut choisir A comme une matrice triangulaire supérieure.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A .

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, nous avons

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } W(A - \lambda I) = \left\{ z : |z| \leq \frac{|a|}{2} \right\}.$$

Donc $W(A)$ est un cercle de centre λ , et de rayon $\frac{|a|}{2}$.

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $a = 0$, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On pose que $x = (f, g)$, alors $\langle Ax, x \rangle = \lambda_1 |f|^2 + \lambda_2 |g|^2 = t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2$, tels que $t = |f|^2$, et $|f|^2 + |g|^2 = 1$. Donc $W(A)$ est un ensemble convexe (combinaison de λ_1 et λ_2 est un segment qui joigne λ_1 et λ_2).

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $a \neq 0$, nous avons

$$A - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) I = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & a \\ 0 & -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \end{pmatrix},$$

$$e^{-i\theta} \left(A - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) I \right) = \begin{pmatrix} r & ae^{-i\theta} \\ 0 & -r \end{pmatrix} = B,$$

où $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = re^{i\theta}$. $W(B)$ est une ellipse de centre $(0, 0)$, et petit axe $|a|$, et les foyers sont $(r, 0)$ et $(-r, 0)$. Donc $W(A)$ est une ellipse dont les foyers sont λ_1, λ_2 , et grand axe a une inclination de θ avec l'axe réel. ■

2.3 Image numérique et spectre

Proposition 2.3.1 [27] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$\sigma_p(A) \subset W(A).$$

Preuve Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ et soit x un vecteur unitaire associé à λ . Alors

$$\lambda = \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle,$$

donc $\lambda \in W(A)$. ■

Théorème 2.3.1 [29] (*Inclusion spectrale*)

Le spectre d'un opérateur A est contenant dans la fermeture de son image numérique.

Preuve On sait que la frontière du spectre d'un opérateur A est contenue dans leur spectre approché $\sigma_{ap}(A)$ et que l'image numérique $W(A)$ est convexe. Il suffit donc de montrer que le spectre approché d'un opérateur est contenu dans la fermeture de son image numérique.

Soit $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ et soit (x_n) une suite de vecteurs unitaires, telle que

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0.$$

Par l'application de l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$|\langle (A - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0.$$

Alors $\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \lambda$. D'où $\lambda \in \overline{W(A)}$. ■

Théorème 2.3.2 [23] *Si $\overline{W(A)} = [m, M]$, alors $m, M \in \sigma(A)$.*

Preuve

$m \in \overline{W(A)}$ implique l'existence d'une suite de vecteurs unitaires $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow m$, donc

$$|\langle (A - mI)x_n, x_n \rangle| = \left\| (A - mI)^{1/2} x_n \right\|^2 \longrightarrow 0,$$

d'où $\|(A - mI)x_n\| \longrightarrow 0$ et $m \in \sigma(A)$.

Pour $M \in \overline{W(A)}$, on obtient $\|(MI - A)x_n\| \longrightarrow 0$. D'où $M \in \sigma(A)$. ■

Théorème 2.3.3 [23] *Si $\lambda \in W(A)$, avec $|\lambda| = \|A\|$, alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

Preuve Soit $\lambda = \langle Ax, x \rangle$, $\|x\| = 1$, alors

$$\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \leq \|A\|.$$

Identiquement, $|\langle Ax, x \rangle| = \|Ax\| \|x\|$, donc $\exists \mu \in \mathbb{C}$, $Ax = \mu x$.

D'où $\lambda = \langle Ax, x \rangle = \langle \mu x, x \rangle = \mu$. Ainsi, $Ax = \lambda x$, et par conséquent, $\lambda \in \sigma_p(A)$. ■

Théorème 2.3.4 [19] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$\frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))} \leq \| (A - \lambda I)^{-1} \| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \overline{W(A)})},$$

avec $\lambda \notin \sigma(A)$ pour la première inégalité et $\lambda \notin \overline{W(A)}$ pour la deuxième inégalité.

Théorème 2.3.5 [27] (*Hildebrandt*)

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors

$$\text{conv}(\sigma(A)) = \bigcap_{S \in \mathcal{G}} \overline{W(SAS^{-1})},$$

où \mathcal{G} est l'ensemble des opérateurs inversibles de $\mathcal{L}(H)$.

On a besoin d'utiliser le théorème suivant

Théorème 2.3.6 [43] (*Rota*)

Pour tout opérateur A de $\mathcal{L}(H)$

$$r(A) = \inf \{ \|SAS^{-1}\|, S \text{ inversible de } \mathcal{L}(H) \}.$$

Preuve (Théorème de Rota)

Comme $r(A) \leq \|A\|$, alors $r(SAS^{-1}) \leq \|SAS^{-1}\|$ pour tout S inversible de $\mathcal{L}(H)$ et comme le rayon spectral est invariant par similitude, on obtient

$$r(A) \leq \inf \{ \|SAS^{-1}\|, S \text{ inversible de } \mathcal{L}(H) \}.$$

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha > r(A)$. Construisons S_α inversible de $\mathcal{L}(H)$ tel que $\|S_\alpha AS_\alpha^{-1}\| < \alpha$.

Posons

$$T_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-2n} (A^*)^n A^n,$$

cette série est convergente, puisque

$$\lim_n \left\| \frac{(A^*)^n A^n}{\alpha^{2n}} \right\|^{1/n} \leq \lim_n \left(\frac{\|(A^*)^n\| \|A^n\|}{\alpha^{2n}} \right)^{1/n} = \frac{r^2(A)}{\alpha^2} < 1.$$

De plus

$$T_\alpha - I = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-2n} (A^*)^n A^n \geq 0,$$

alors T_α est strictement positif, et par conséquent T_α est inversible.

Notons que $A^*T_\alpha A = \alpha^2 (T_\alpha - I)$, choisissons S_α par $S_\alpha = (T_\alpha)^{1/2}$. Pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \|S_\alpha A S_\alpha^{-1} x\|^2 &= \langle S_\alpha A S_\alpha^{-1} x, S_\alpha A S_\alpha^{-1} x \rangle \\ &= \langle A^* T_\alpha A (S_\alpha^{-1} x), S_\alpha^{-1} x \rangle \\ &< \alpha^2 \langle T_\alpha (S_\alpha^{-1} x), S_\alpha^{-1} x \rangle \\ &= \alpha^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

D'où $\|S_\alpha A S_\alpha^{-1}\| < \alpha$. Cela complète la preuve. ■

Preuve (Théorème (2.3.5))

[C] On a $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$. Alors $\text{conv}(\sigma(A)) \subset \overline{W(A)}$, donc $\text{conv}(\sigma(SAS^{-1})) \subset \overline{W(SAS^{-1})}$ pour tout $S \in \mathcal{G}$, et comme le spectre est invariant par similitude on obtient $\text{conv}(\sigma(A)) \subset \bigcap_{S \in \mathcal{G}} \overline{W(SAS^{-1})}$.

[D] Soit $\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A))$. Montrons que $\lambda \notin \bigcap_{S \in \mathcal{G}} \overline{W(SAS^{-1})}$, identiquement, il existe un opérateur inversible T de $\mathcal{L}(H)$ tel que $\lambda \notin \overline{W(TAT^{-1})}$. Comme $\text{conv}(\sigma(A))$ est compacte, il existe un disque ouvert D contient $\text{conv}(\sigma(A))$, mais son adhérence ne contient pas λ . On peut supposer sans perdre les généralités, que D est le disque unité ouvert, ainsi en particulier $r(A) < 1$. D'après le théorème de Rota il existe opérateur inversible T de $\mathcal{L}(H)$ tel que $\|TAT^{-1}\| \leq \frac{(1+r(A))}{2} < 1$, d'où $\overline{W(TAT^{-1})} \subset D$ et par conséquent $\lambda \notin \overline{W(TAT^{-1})}$. ■

Chapitre 3

Image numérique de certains opérateurs

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner une synthèse des différentes propriétés sur l'image numérique des opérateurs auto-adjoints, normaux, hyponormaux, normaloïdes, convexoïdes et spectraloïdes.

3.1 Opérateurs auto-adjoints

Théorème 3.1.1 [23] *Un opérateurs $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si et seulement si $W(A)$ est un intervalle de \mathbb{R} .*

Preuve Si A est auto-adjoint, nous avons pour tout $x \in H$, $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$, donc $W(A) \subset \mathbb{R}$.

Inversement, si $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$, alors $\langle (A - A^*)x, x \rangle = 0, \forall x \in H$, donc l'identité de polarisation généralisée implique que $\langle (A - A^*)x, y \rangle = 0 \forall x, y \in H$, et par conséquent A est auto-adjoint. ■

Théorème 3.1.2 [23] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et $W(A)$ l'intervalle réel $[m, M]$. Alors*

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Preuve D'après les théorèmes (1.3.2) et (2.1.9), on a $\sigma(A) \subset [m, M]$, et $m, M \in \sigma(A)$, et donc

$$\|A\| = r(A) = \max\{|m|, |M|\}.$$

■

Remarque 3.1.1 [49] *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors*

$$r(A) = w(A) = \|A\|.$$

Théorème 3.1.3 [23] (*Théorème de Bondixson-Hirsch*)

Si $A = B + iC$ est la décomposition cartésienne de $A \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$W(A) \subseteq W(B) + iW(C).$$

Preuve La preuve est évidente. ■

3.2 Opérateurs normaux et hyponormaux

Théorème 3.2.1 [49] *En dimension deux, si A est normal, alors $W(A)$ est un segment de droite.*

Preuve Soient u et v deux vecteurs propres unitaires correspondant aux valeurs propres distinctes α et β respectivement.

Alors, la proposition (1.3.6) implique que les deux vecteurs propres sont orthogonaux, donc linéairement indépendants. Ainsi u et v forment une base de H .

Soit x vecteur unitaire dans H et $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $x = pu + qv$. Alors

$$\langle Ax, x \rangle = \langle p\alpha u + q\beta v, pu + qv \rangle = |p|^2 \alpha + \beta |q|^2.$$

D'autre part,

$$1 = \|x\|^2 = \|pu + qv\|^2 = \|pu\|^2 + \|qv\|^2 = |p|^2 + |q|^2.$$

Donc $W(A)$ est un segment de droite joignant α et β . ■

Théorème 3.2.2 [49] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $W(A)$ est un segment de droite, alors A un opérateur normal.*

Preuve Soit α un point sur le segment de droite ayant une pente θ . $W(e^{-i\theta}[A - \alpha I])$ est alors inclus dans l'axe des réels. Ainsi, le théorème (3.1.1) implique que $(e^{-i\theta}[A - \alpha I])$ est un opérateur auto-adjoint. On déduit donc, par un calcul simple, que A est un opérateur normal. ■

Remarque 3.2.1 [23] *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal, alors $r(A) = w(A) = \|A\|$.*

Théorème 3.2.3 [23] *La fermeture de l'image numérique d'un opérateur normal est l'enveloppe convexe de son spectre.*

Preuve Il suffit de prouver que tout demi-plan fermé de \mathbb{C} contenant $\sigma(A)$ et aussi contient $W(A)$. On peut supposer que $\sigma(A) \subset \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$ et que l'axe imaginaire est une ligne d'appui de $\operatorname{conv}(\sigma(A))$.

Supposons que $(a + ib) \in W(A)$ avec $a > 0$ et $\langle Ax, x \rangle = a + ib$, $\|x\| = 1$.

Soit $Ax = (a + ib)x + y$, où $\langle x, y \rangle = 0$. Soit $c \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $c \notin \sigma(A)$ et nous avons

$$\operatorname{dist}(c, \sigma(A)) \leq \|(A - cI)x\|,$$

identiquement,

$$c^2 \leq \|(a - c + ib)x + y\|^2 = (a - c)^2 + b^2 + \|y\|^2.$$

D'où $2ac \leq a^2 + b^2$ avec $a > 0$ et $c > 0$, ce qui est impossible, puisque c est arbitraire. ■

Théorème 3.2.4 *L'image numérique d'un opérateur unitairement diagonalisable est l'enveloppe convexe de leur spectre ponctuel.*

Preuve Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur unitairement diagonalisable, alors il existe une base orthonormée $\{e_n\}$ de H et une suite $\{\lambda_n\}$ des nombres complexes tels que $Ae_n = \lambda_n e_n$ pour tout

entier positif n , d'où

$$\begin{aligned}
 W(A) &= \{ \langle Ax, x \rangle, x \in H, \|x\| = 1 \} \\
 &= \left\{ \left\langle A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right), \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right\rangle, x \in H, \|x\| = 1 \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\langle x, e_n \rangle|^2, x \in H, \|x\| = 1 \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n, a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 \right\},
 \end{aligned}$$

donc $W(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des valeurs propres de A , identiquement, $W(A) = \text{conv}(\sigma_p(A))$. ■

Théorème 3.2.5 [23] *Les points extrêmes de la fermeture de l'image numérique $W(A)$ d'un opérateur normal A sont les valeurs propres de A si et seulement si $W(A)$ est fermée.*

Preuve Soit $W(A)$ est fermée. On peut supposer que $\lambda = 0$ est un point extrême et que $W(A) \subseteq \{\lambda; \text{Im } \lambda \geq 0\}$ et $\langle Ax_0, x_0 \rangle = 0 \in W(A)$, d'où $\langle (A - A^*)x_0, x_0 \rangle = 0$. Puisque l'opérateur $\frac{1}{i}(A - A^*) \geq 0$, donc $(A - A^*)x_0 = 0$.

Par conséquent, x_0 est un élément du sous-espace fermé $F = \{x; Ax = A^*x\}$. Puisque A est normal, alors $\forall x \in F$

$$A^*Ax = AA^*x = AAx,$$

et donc le sous-espace F est invariant par A , et $A|_F$ est auto-adjoint. Évidemment, $W(A|_F) \subset W(A)$ et $W(A|_F) \subset \mathbb{R}$ d'après le théorème (3.1.1). D'où

$$W(A|_F) \subset W(A) \cap \mathbb{R} = \{0\},$$

donc $A|_F = 0$ et $Ax_0 = 0$, identiquement $0 \in \sigma_p(A)$.

La réciproque est vrai pour tout opérateur A . L'ensemble convexe et compact $\overline{W(A)}$ est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes. Lorsque les derniers sont les valeurs propres de A ,

d'après la proposition (2.3.1), on obtient

$$\overline{W(A)} \subset \text{conv}(\sigma_p(A)) \subset \text{conv}(W(A)) = W(A).$$

■

Définition 3.2.1 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé hyponormal si $A^*A \geq AA^*$.*

Théorème 3.2.6 [19] *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est hyponormal si et seulement si*

$$\|A^*x\| \leq \|Ax\|, \quad \forall x \in H.$$

Théorème 3.2.7 [49] *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur hyponormal, alors les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes de A sont orthogonaux.*

Corollaire 3.2.1 [19] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur hyponormal. Alors*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq [\text{dist}(\lambda, \text{conv}\sigma(A))]^{-1},$$

pour tout $\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A))$.

Preuve Pour tout $\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A))$, on a

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| = \max_{\mu \in \sigma(A - \lambda)^{-1}} |\mu| = \frac{1}{\min_{\mu \in \sigma(A - \lambda)} |\mu|} = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))} \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \text{conv}\sigma(A))}.$$

■

Théorème 3.2.8 [49] *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur hyponormal et H est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors $W(A)$ est un polygone à n côtés.*

Preuve Si $\{u_k\}_{k=1}^n$ des vecteurs propres unitaires correspondant à des valeurs propres distinctes $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, alors chaque vecteur unitaire x de H a la représentation unique

$$x = \sum_{k=1}^n p_k u_k, \text{ tel que } \sum_{k=1}^n |p_k|^2 = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \langle Ax, x \rangle &= \left\langle A \left(\sum_{k=1}^n p_k u_k \right), \left(\sum_{k=1}^n p_k u_k \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^n p_k A(u_k), \sum_{k=1}^n p_k u_k \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^n p_k \alpha_k u_k, \sum_{k=1}^n p_k u_k \right\rangle \\
 &= \sum_{k=1}^n |p_k|^2 \alpha_k.
 \end{aligned}$$

■

3.3 Opérateurs normaloïdes, convexoïdes et spectraloïdes

Définition 3.3.1 [19] *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit*

- (1) **Normaloïde**, si $w(A) = \|A\|$, identiquement $r(A) = w(A) = \|A\|$.
- (2) **Convexoïde**, si $\overline{W(A)} = \text{conv}(\sigma(A))$.
- (3) **Spectraloïde**, si $w(A) = r(A)$.

Remarque 3.3.1 [19] *On peut conclure les inclusions suivantes*



En 1929 Wintner [50] a essayé de caractériser l'opérateur A de $\mathcal{L}(H)$ satisfaisant $\text{conv}(\sigma(A)) = \overline{W(A)}$, il a donné l'assertion suivante : $\text{conv}(\sigma(A)) = \overline{W(A)}$ si et seulement si A est normaloïde.

En 1967 P. Halmos [24] a montré que l'assertion de Wintner est fausse. Il a montré qu'il existe des opérateurs convexoïdes qui ne sont pas normaloïdes et vice versa, il a donné les contre-exemples suivants

(i) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit N un opérateur normal dont le spectre est le disque fermé \overline{D} de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.
Si

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

alors $\sigma(A) = \{0\} \cup \overline{D}$, et $\overline{W(A)} = \text{conv}(W(M) \cup W(N)) = \overline{D}$. Ce qui dit que A est convexoïde.

Comme $\|A\| = 1$ (car $\|M\| = 1$), A n'est pas normaloïde.

(ii) Soit

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\|A\| = 1$, $W(A) = \text{conv}(\overline{D} \cup \{1\})$ et $w(A) = 1$, alors A est normaloïde. Comme $\sigma(A) = \{0\} \cup \{1\}$, alors $\text{conv}(\sigma(A)) = [0, 1]$, ce qui résulte que A n'est pas convexoïde.

Proposition 3.3.1 [19] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors A est convexoïde si et seulement si

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq [\text{dist}(\lambda, \text{conv}(\sigma(A)))]^{-1},$$

pour tout $\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A))$.

Preuve

[\implies] Soit $\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A))$. Par la transformation $A \mapsto \alpha A + \beta$; $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ on peut supposer que le couple (λ, A) satisfait

$$[\lambda < 0, 0 \in \text{conv}(\sigma(A)) \text{ et } \text{conv}(\sigma(A)) \subset \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \geq 0\}],$$

alors pour tout $x \in H$

$$\|(A - \lambda)x\|^2 = \|Ax\|^2 - \lambda[(Ax, x) + (x, Ax)] + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2.$$

Comme $(A - \lambda)$ est inversible, alors pour tout $x \in H$

$$\|x\|^2 \geq \lambda^2 \|(A - \lambda)^{-1}x\|^2,$$

d'où

$$[\text{dist}(\lambda, \text{conv}(\sigma(A)))]^{-1} = |\lambda|^{-1} \geq \|(A - \lambda)^{-1}\|.$$

[\Leftarrow] Comme $\text{conv}(\sigma(A)) \subset \overline{W(A)}$, on montre que si $\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A))$ alors $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Par application de la transformation $A \mapsto \alpha A + \beta$ on peut supposer que

$$[\lambda < 0, 0 \in \text{conv}(\sigma(A)) \text{ et } \text{conv}(\sigma(A)) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 0\}],$$

alors,

$$\lambda \notin \text{conv}(\sigma(A)) \text{ et } \text{dist}(\lambda, \text{conv}(\sigma(A))) = |\lambda|,$$

c.à.d $\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}$.

D'où

$$\lambda^2 \|x\|^2 \leq \|(A - \lambda)x\|^2,$$

pour tout $x \in H$. Par passage a la limite quand λ tend vers $(-\infty)$ on obtient que pour tout $x \in H$.

$$\langle Ax, x \rangle + \langle x, Ax \rangle = 2 \text{Re}\langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

D'où $\overline{W(A)} \subset \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \geq 0\}$, donc $\lambda \notin \overline{W(A)}$. ■

Lemme 3.3.1 [22] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

- (1) *A est spectraloïde si et seulement s'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| = w(A)$.*
- (2) *A est normaloïde si et seulement s'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$.*

Remarque 3.3.2 *Nous remarquons après ces deux conditions que $\lambda \in \partial W(A) \cap \sigma(A)$ dans les deux cas.*

Proposition 3.3.2 [22] *$A \in \mathcal{L}(H)$ est normaloïde si et seulement s'il existe $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$ tel que*

$$|\lambda| = \|A\|.$$

Preuve

[\Leftarrow] Clair (car $\sigma_{ar}(A) \subset \sigma(A)$)

[\implies] On a : $\partial\sigma(A) \subset \sigma_{ap}(A)$ et comme A est normaloïde alors il existe $\lambda \in (\partial W(A) \cap \sigma(A))$ tel que $|\lambda| = \|A\|$

Donc, il existe $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$ (i.e) il existe une suite (x_n) de vecteurs unitaires vérifiant $\|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0$. Reste à vérifier que $\|(A - \lambda I)^* x_n\| \longrightarrow 0$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \langle Ax_n, x_n \rangle$. Alors

$$|\langle Ax_n, x_n \rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0.$$

Donc $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. D'autre part

$$\|(A - \lambda I)^* x_n\|^2 = \|A^* x_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} \lambda_n + |\lambda|^2 \leq 2(\|A\|^2 - \operatorname{Re} \bar{\lambda} \lambda_n) \longrightarrow 0,$$

identiquement $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$. ■

Lemme 3.3.2 [22] *Soit $\lambda \in W(A)$ et $|\lambda| = \|A\|$. Alors $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$.*

Preuve Soit $\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax, x \rangle|$ avec $\|x\| = 1$. Alors

$$\|A\| = |\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|.$$

On obtient une égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc $Ax = \lambda x$. De la même façon on obtient $A^*x = \bar{\lambda}x$. ■

Chapitre 4

Image numérique et opérateurs sous-auto-adjoints

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des opérateurs bornés dont l'image numérique est un segment de droite. Nous généralisons des résultats obtenus depuis les années cinquante. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que l'image numérique d'un opérateur est un segment de droite, nous montrons exactement que l'image numérique d'un opérateur borné $A \in \mathcal{L}(H)$ est un segment de droite si et seulement s'il existe deux scalaires complexes λ et μ tels que $A^* = \lambda A + \mu I$, puis nous déterminons l'équation du support de cette image numérique en termes de λ et μ .

À partir de ces résultats, nous introduit une nouvelle classe d'opérateurs, c'est la classe des opérateurs dont l'image numérique est un segment de droite, cette classe contient les opérateurs auto-adjoints et contenu dans la classe des opérateurs normaux. Selon ces inclusions, on a donné le nom sous-auto-adjoint d'un opérateur de cette classe, et on la notée $\mathbb{S}(H)$.

Enfin nous donnons quelques propriétés de ces nouveaux opérateurs.

4.1 Quand l'image numérique est un segment de droite

Théorème 4.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors $W(A)$ est un segment de droite si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que $(\alpha A + \beta I)$ est auto-adjoint.*

Preuve Supposons que $W(A)$ est un segment de droite. Soit θ la pente de $W(A)$ et soit γ un point de $W(A)$. Alors $W(e^{i\theta}(A - \gamma I))$ est inclus dans l'axe des réels. Donc, pour $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = -e^{i\theta}\gamma$, l'opérateur $(\alpha A + \beta I)$ est auto-adjoint.

Inversement, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que $(\alpha A + \beta I)$ est auto-adjoint. Il est clair que $W(\alpha A + \beta I)$ est un segment de droite de l'axe des réels. Puisque la transformation affine conserve les segments de droite, alors $W(A) = \frac{1}{\alpha}W(\alpha A + \beta I) - \frac{\beta}{\alpha}$ est un segment de droite de \mathbb{C} . ■

Théorème 4.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors $W(A)$ est un segment de droite si et seulement s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $A^* = \lambda A + \mu I$.*

Preuve Selon le théorème (4.1.1), il suffit de montrer que l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que $(\alpha A + \beta I)$ est auto-adjoint est équivalent à l'existence de $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, tels que $A^* = \lambda A + \mu I$.

Si $(\alpha A + \beta I)^* = \alpha A + \beta I$, alors

$$A^* = \lambda A + \mu I, \text{ avec } \lambda = \frac{\alpha}{\alpha}, \text{ et } \mu = \frac{2i \operatorname{Im} \beta}{\alpha}.$$

Inversement, si $A^* = \lambda A + \mu I$, alors

$$A = (A^*)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}I = |\lambda|^2 A + (\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu}) I.$$

Nous avons deux cas :

(1) $|\lambda| \neq 1$. Dans ce cas $A = \delta I$, où

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu}}{1 - |\lambda|^2}.$$

Alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que $(\alpha\delta + \beta) \in \mathbb{R}$, l'opérateur $(\alpha A + \beta I)$ est auto-adjoint.

(2) $|\lambda| = 1$. Dans ce cas $A = A + (\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu})I$, alors $\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu} = 0$, identiquement, $\mu = 0$ ou $(\mu/\bar{\mu}) = -\lambda$.

Il est clair que s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que

$$\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \lambda, \text{ et } \frac{2i \operatorname{Im}(\beta)}{\bar{\alpha}} = \mu.$$

Alors $(\alpha A + \beta I)$ est auto-adjoint.

Pour $\lambda = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$, le système

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \lambda \\ \frac{2i \operatorname{Im}(\beta)}{\bar{\alpha}} = \mu \end{cases}$$

admet les solutions

$$\begin{cases} \alpha = \rho e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)} \\ \beta = \eta + \frac{1}{2}\rho\mu e^{-i(\frac{\theta}{2} + k\pi)} \end{cases}$$

pour tous $\rho > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. ■

Théorème 4.1.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ dont l'image numérique est un segment de droite, tel que $A^* = \lambda A + \mu I$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors*

(1) *Si $|\lambda| \neq 1$, alors $W(A)$ est le point $\{\delta\}$, où*

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu}}{1 - |\lambda|^2}.$$

(2) *Si $\lambda = 1$, alors $W(A)$ est un segment de droite horizontal dont l'équation de leur support est*

$$Y = \frac{\mu}{2}i, \text{ avec } \operatorname{Re} \mu = 0.$$

(3) *Si $\lambda = -1$, alors $W(A)$ est un segment de droite vertical dont l'équation de leur support est*

$$X = \frac{\mu}{2}, \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

(4) Si non, $W(A)$ est un segment de droite incliné dont l'équation de leur support est

$$Y = \left(\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \right) X + \frac{\operatorname{Re} \mu}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

Preuve

(1) Il est évident d'après le théorème (4.1.2).

(2) Si $\lambda = 1$, alors $A = A + (\mu + \bar{\mu})I$, identiquement $\operatorname{Re} \mu = 0$. Puisque $A^* = A + \mu I$, alors pour tout vecteur unitaire $x \in H$, on a

$$\langle A^*x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \mu,$$

donc

$$\operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle = \mu i / 2.$$

Ainsi, l'équation du support est

$$Y = \frac{\mu}{2}i.$$

(3) Si $\lambda = -1$, alors $A = A + (-\mu + \bar{\mu})I$, identiquement $\mu \in \mathbb{R}$.

Puisque $A^* = -A + \mu I$, alors pour tout vecteur unitaire $x \in H$, nous avons

$$\langle A^*x, x \rangle = -\langle Ax, x \rangle + \mu.$$

Donc

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle = \mu / 2.$$

Ainsi, l'équation du support est

$$X = \frac{\mu}{2}.$$

(4) Nous avons pour tout vecteur unitaire $x \in H$

$$\langle A^*x, x \rangle = \lambda \langle Ax, x \rangle + \mu.$$

Alors

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle &= (\operatorname{Re} \lambda) (\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle) - (\operatorname{Im} \lambda) (\operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle) + \operatorname{Re} \mu, \\ -\operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle &= (\operatorname{Re} \lambda) (\operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle) + (\operatorname{Im} \lambda) (\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle) + \operatorname{Im} \mu, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle = \left(\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \right) (\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle) + \frac{\operatorname{Re} \mu}{\operatorname{Im} \lambda}, \\ \operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle = \left(\frac{-\operatorname{Im} \lambda}{1 + \operatorname{Re} \lambda} \right) (\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle) - \frac{\operatorname{Im} \mu}{1 + \operatorname{Re} \lambda}. \end{cases}$$

Puisque $|\lambda| = 1$, il est facile de vérifier que

$$\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} = \frac{-\operatorname{Im} \lambda}{1 + \operatorname{Re} \lambda}.$$

Si $\mu \neq 0$, alors $\lambda = -(\mu/\bar{\mu}) = -(\mu^2/|\mu|^2)$.

Ainsi,

$$1 + \operatorname{Re} \lambda = \frac{2(\operatorname{Im} \mu)^2}{|\mu|^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \lambda = -\frac{2(\operatorname{Re} \mu)(\operatorname{Im} \mu)}{|\mu|^2}.$$

D'où

$$\frac{\operatorname{Re} \mu}{\operatorname{Im} \lambda} = -\frac{\operatorname{Im} \mu}{1 + \operatorname{Re} \lambda}.$$

Alors, nous avons pour tout vecteur unitaire $x \in H$

$$\operatorname{Im} \langle Ax, x \rangle = \left(\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \right) (\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle) + \frac{\operatorname{Re} \mu}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

Par conséquent, l'équation du support est

$$Y = \left(\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \right) X + \frac{\operatorname{Re} \mu}{\operatorname{Im} \lambda}.$$

■

Exemple 4.1.1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1+i & 1 \end{pmatrix} = iA + (1-i)I.$$

Donc, d'après le théorème précédent $W(A)$ est un segment de droite dont l'équation de leur support est $Y = -X + 1$.

D'autre part, A est normal avec des valeurs propres $1, i$ et $(2-i)$. Alors $W(A)$ est l'enveloppe convexe de ces valeurs propres, identiquement $W(A)$ est le segment de droite reliant les deux points (i) et $(2-i)$ qui appartient à la droite de l'équation $Y = -X + 1$.

4.2 Opérateurs sous-auto-adjoints

Définition 4.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. L'opérateur A est dit sous-auto-adjoint si son image numérique est un segment de droite, i.e s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $A^* = \lambda A + \mu I$. On note l'ensemble des opérateurs sous-auto-adjoints par $\mathbb{S}(H)$.*

Remarque 4.2.1 *Nous donnons dans le corollaire suivant une courte preuve pour que dans un espace de dimensions deux, un opérateur A est normal si et seulement si leur image numérique est un segment de droite, identiquement $A \in \mathbb{S}(H)$.*

Corollaire 4.2.1 *Si H est de dimension deux, alors $A \in \mathcal{L}(H)$ est normal si et seulement si $A \in \mathbb{S}(H)$.*

Preuve Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et λ_1, λ_2 leurs valeurs propres. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $W(A) = \{\lambda_1\}$ et $A \in \mathbb{S}(H)$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors l'opérateur $S = \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)(A - \lambda_1 I)$ est normal dont les valeurs propres 0 et 1. Donc, $W(S) = [0, 1]$, d'où S est auto-adjoint, et par le théorème (4.1.1), $W(A)$ est un segment de droite, identiquement, $A \in \mathbb{S}(H)$. ■

Théorème 4.2.1 *La classe $\mathbb{S}(H)$ des opérateurs sous-auto-adjoints est uniformément fermée.*

Preuve Soit (A_n) une suite d'opérateurs dans $\mathbb{S}(H)$ converge uniformément vers un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$.

Si A est un opérateur scalaire, alors il est sous-auto-adjoint. Sinon, l'ensemble des indices k où A_k est un opérateur scalaire est fini. En éliminant les opérateurs scalaires de la suite (A_n) , on obtient une sous-suite (A'_n) converge vers même opérateur A . Soient (λ_n) et (μ_n) deux suites de scalaires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A'_n)^* = \lambda_n A'_n + \mu_n I$.

Selon le théorème (4.1.3) cas (1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| = 1$, car A'_n n'est pas un opérateur scalaire. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\lambda_n A + \mu_n I - A^*\| &= \|\lambda_n (A - A'_n) + (\lambda_n A'_n + \mu_n I) - A^*\| \\ &= \|\lambda_n (A - A'_n) + (A'_n)^* - A^*\| \\ &\leq \|A - A'_n\| + \|(A'_n)^* - A^*\|. \end{aligned}$$

Donc, $(\lambda_n A + \mu_n I)$ converge uniformément vers A^* . Ainsi (λ_n) et (μ_n) sont convergent et

$$A^* = (\lim \lambda_n) A + (\lim \mu_n) I.$$

■

Remarque 4.2.2 *Par décomposition cartésienne, chaque opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est la somme de deux opérateurs sous-auto-adjoints.*

Théorème 4.2.2 *Soit $A \in \mathbb{S}(H)$. Si δ et γ sont les points extrêmes de $W(A)$, alors*

$$\|A\| = \max\{|\delta|, |\gamma|\} \text{ et } \delta, \gamma \in \sigma(A).$$

Preuve Puisque $w(A) = \max\{|\delta|, |\gamma|\}$ et A est normal, alors $\|A\| = w(A) = \max\{|\delta|, |\gamma|\}$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0$ tels que $\alpha A + \beta I$ est auto-adjoint. Alors $(\alpha\delta + \beta), (\alpha\gamma + \beta) \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha\delta + \beta \leq \alpha\gamma + \beta$, alors $\alpha(A - \delta I)$ et $\alpha(\gamma I - A)$ sont des opérateurs positifs. Puisque

$\delta \in \overline{W(A)}$, il y a une suite de vecteurs unitaires (x_n) telle que $\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \delta$. Alors

$$\left\| [\alpha(A - \delta I)]^{\frac{1}{2}} x_n \right\|^2 = \langle \alpha(A - \delta I) x_n, x_n \rangle \longrightarrow 0.$$

Également $\|(A - \delta I)x_n\| \longrightarrow 0$, et donc $\delta \in \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$. De même raisonnement $\gamma \in \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$. ■

Proposition 4.2.1 *La classe $\mathbb{S}(H)$ est invariante par équivalence unitaire et invariante par transformation affine.*

Preuve Soient $A \in \mathbb{S}(H)$ et U est un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(H)$, $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $A^* = \lambda A + \mu I$.

(i) On a

$$(U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*(\lambda A + \mu I)U = \lambda(U^*AU) + \mu I.$$

Alors $U^*AU \in \mathbb{S}(H)$.

(ii) Il est facile à vérifier que

$$(aA + bI)^* = \frac{\lambda \bar{a}}{a} (aA + bI) + \left(\frac{|a|^2 \mu + a\bar{b} - \lambda \bar{a}b}{a} \right) I.$$

Alors $(aA + bI) \in \mathbb{S}(H)$. ■

4.3 Quelques positions de l'image numérique d'un opérateur sous-auto-adjoint

Proposition 4.3.1 *Soient $A, A' \in \mathbb{S}(H)$, avec $A^* = \lambda A + \mu I$ et $(A')^* = \lambda' A' + \mu' I$. Alors*

(i) *Le support de $W(A')$ est parallèle au support de $W(A)$ si et seulement si $\lambda' = \lambda$.*

(ii) *Le support de $W(A')$ est orthogonale au support de $W(A)$ si et seulement si $\lambda' = -\lambda$.*

Preuve Si $W(A)$ est un segment horizontal où vertical, alors les deux équivalences sont clairs d'après le théorème (4.1.3).

Si $\lambda, \lambda' \notin \{1, -1\}$, alors les vecteurs de direction de $W(A)$ et $W(A')$ sont

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda'}{\operatorname{Im} \lambda'} \end{pmatrix}$$

respectivement. Donc

$$\vec{V} \parallel \vec{V}' \iff \frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} = \frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda'}{\operatorname{Im} \lambda'} \iff \lambda' = \lambda.$$

Et

$$\vec{V} \perp \vec{V}' \iff \left(\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \right) \left(\frac{-1 + \operatorname{Re} \lambda'}{\operatorname{Im} \lambda'} \right) = -1 \iff \lambda' = -\lambda.$$

■

Corollaire 4.3.1 Soient $A, B \in \mathbb{S}(H)$ tels que $A^* = \lambda_A A + \mu_A$ et $B^* = \lambda_B B + \mu_B$. Si $\lambda_A = \lambda_B$, alors $(A + B) \in \mathbb{S}(H)$ et $(A - B) \in \mathbb{S}(H)$.

Ainsi, les supports de $W(A)$, $W(B)$, $W(A + B)$ et $W(A - B)$ sont parallèles.

Preuve Si $\lambda_A = \lambda_B$, alors $(A \pm B)^* = \lambda_A (A \pm B) + (\mu_A \pm \mu_B) I$.

Donc $(A + B), (A - B) \in \mathbb{S}(H)$. Ainsi, d'après la proposition précédente, les supports de $W(A)$, $W(B)$, $W(A + B)$ et $W(A - B)$ sont parallèles. ■

Proposition 4.3.2 Le commutateur de deux opérateurs sous-auto-adjoints A et B est aussi un opérateur sous-auto-adjoint, dont le support de leur image numérique passe par l'origine.

Preuve Soient $A, B \in \mathbb{S}(H)$ avec $A^* = \lambda A + \mu I$ et $B^* = \delta B + \theta I$. Alors

$$\begin{aligned} (AB - BA)^* &= B^* A^* - A^* B^* \\ &= (\delta B + \theta I)(\lambda A + \mu I) - (\lambda A + \mu I)(\delta B + \theta I) \\ &= -\lambda \delta (AB - BA). \end{aligned}$$

■

Chapitre 5

Régions d'inclusion de l'image numérique

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des régions d'inclusion de l'image numérique. On donne au départ une région minimale contenant l'image numérique d'un opérateur linéaire borné et on discute le cas où l'image numérique est un disque. On étudie la relation entre le rayon numérique d'un opérateur A et la norme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Ainsi, nous étudions des régions contenant l'image numérique de la puissance positive d'un opérateur. A la fin du chapitre, on donne une propriété d'inclusion de l'image numérique de la puissance positive d'un opérateur auto-adjoint.

5.1 Région minimale contenant l'image numérique

Théorème 5.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors $W(A)$ est inclus dans l'intersection du disque $D = \overline{D}(0, w(A))$ et du rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$, tels que*

$$a = \min_{\lambda \in \sigma(\operatorname{Re} A)} (\lambda), \quad b = \max_{\lambda \in \sigma(\operatorname{Re} A)} (\lambda), \quad c = \min_{\lambda \in \sigma(\operatorname{Im} A)} (\lambda) \quad \text{et} \quad d = \max_{\lambda \in \sigma(\operatorname{Im} A)} (\lambda).$$

De plus

(i) *Le rectangle R est contenu dans le disque D si et seulement si*

$$\sqrt{\|\operatorname{Re}(A)\|^2 + \|\operatorname{Im}(A)\|^2} = w(A).$$

(ii) *Le disque D est contenu dans le rectangle R si et seulement si*

$$w(A) = b = d = -a = -c.$$

Preuve La décomposition cartésienne d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est donnée par

$$A = \operatorname{Re}(A) + i \operatorname{Im}(A), \text{ tels que } \operatorname{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(A) = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Comme $\operatorname{Re}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$ sont auto-adjoints, alors $\overline{W(\operatorname{Re}(A))}$ et $\overline{W(\operatorname{Im}(A))}$ sont les segments de droite $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement.

Ainsi nous avons

$$W(A) \subseteq W(\operatorname{Re}(A)) + iW(\operatorname{Im}(A)).$$

Donc, le rectangle R contenant $W(A)$, d'où $W(A)$ est contenu dans l'intersection du disque $D = \overline{D}(0, w(A))$ et du rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$.

(i) R est contenu dans le disque $D = \overline{D}(0, w(A))$ si et seulement si

$$\sqrt{\|\operatorname{Re}(A)\|^2 + \|\operatorname{Im}(A)\|^2} = \sup_{\alpha \in R} |\alpha| \leq w(A)$$

et comme $W(A) \subset R$, alors

$$w(A) \leq \sqrt{\|\operatorname{Re}(A)\|^2 + \|\operatorname{Im}(A)\|^2}.$$

Donc, R est contenu dans D si et seulement si

$$\sqrt{\|\operatorname{Re}(A)\|^2 + \|\operatorname{Im}(A)\|^2} = w(A).$$

(ii) On a

$$\|\operatorname{Re}(A)\| = \max\{|a|, |b|\} \text{ et } \|\operatorname{Im}(A)\| = \max\{|c|, |d|\}.$$

D'autre part,

$$\|\operatorname{Re}(A)\| = w(\operatorname{Re}(A)) \leq \frac{1}{2}(w(A) + w(A^*)) = w(A)$$

et

$$\|\operatorname{Im}(A)\| = w(\operatorname{Im}(A)) \leq \frac{1}{2}(w(A) + w(A^*)) = w(A).$$

Alors,

$$w(A) \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \{a, b, c, d\}.$$

Il est clair que si $D = \overline{D}(0, w(A)) \subset R$, alors

$$a \leq 0, c \leq 0, b \geq 0, d \geq 0 \text{ et } w(A) \leq \min\{-a, b, -c, d\}.$$

Par conséquent,

$$D \subset R \text{ si et seulement si } w(A) = b = d = -a = -c.$$

■

Remarque 5.1.1 *Les trois cas : $D \subset R$, $R \subset D$ et $R \neq D \cap R \neq D$ sont possibles selon les exemples suivants.*

Exemple 5.1.1 *Soit A l'opérateur de décalage à gauche sur \mathbb{C}^2 dont la matrice par rapport à la base standard est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, d'après le théorème elliptique de l'image numérique (2.2.1), $W(A)$ est le disque fermé de rayon $1/2$, centré à l'origine.

Donc $w(A) = 1/2$, avec les valeurs propres de $\operatorname{Re}(A)$ sont $a = -1/2$, $b = 1/2$, et les valeurs propres de $\operatorname{Im}(A)$ sont $c = -1/2$, $d = 1/2$.

D'où

$$W(A) = D \subset R = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

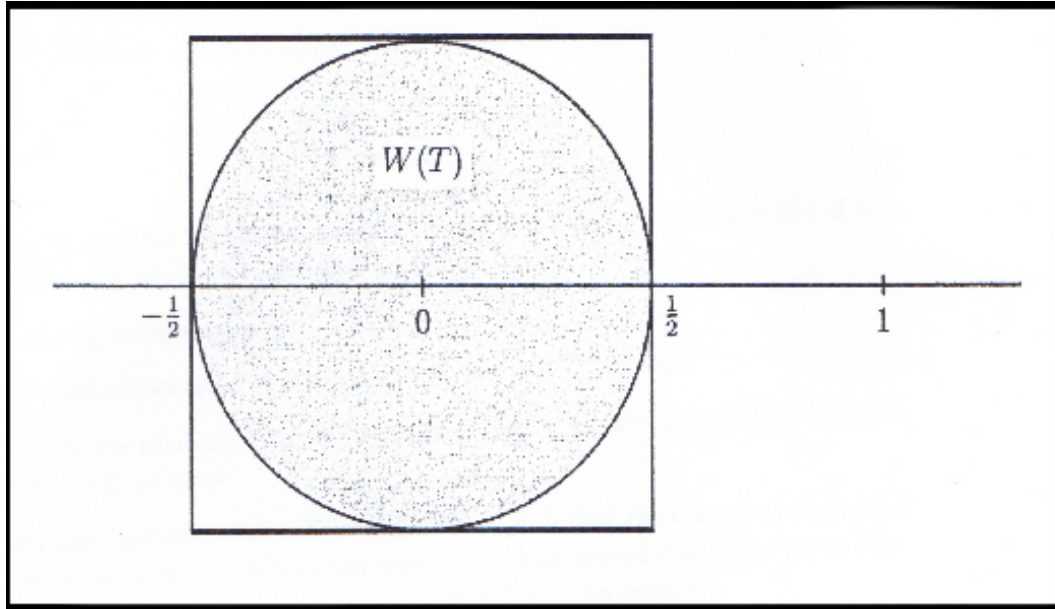


Figure 1. Le disque D est contenu dans le rectangle R .

Exemple 5.1.2 Soit $A = \text{diag}(0, 1, i, 1 + i)$. Comme A est normal, alors $\overline{W(A)}$ est l'enveloppe convexe de ces valeurs propres, donc $\overline{W(A)}$ est le carré dont les sommets $0, 1, i$ et $(i + 1)$, identiquement $\overline{W(A)} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Alors $w(A) = \sqrt{2}$, donc D est le disque fermé de rayon $\sqrt{2}$ et centré à l'origine.

D'autre part, les valeurs propres de $\text{Re}(A)$ sont $a = 0, b = 1$, et les valeurs propres de $\text{Im}(A)$ sont $c = 0, d = 1$. Identiquement $\overline{W(A)} = R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Donc, on conclut que $R \subset D$.

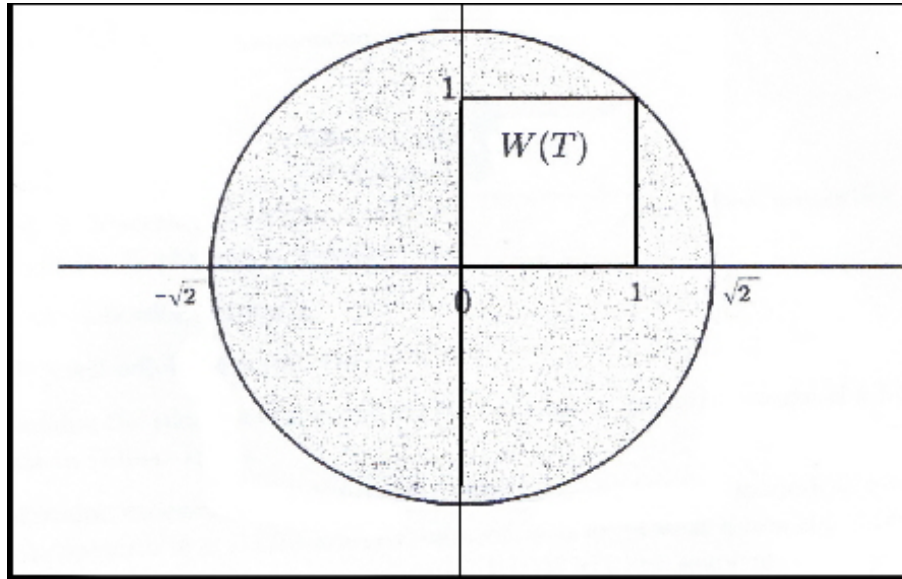


Figure 2. Le rectangle R est contenu dans le disque D .

Exemple 5.1.3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = A_1 \oplus A_2$, où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'opérateur de décalage à gauche sur \mathbb{C}^2 et $A_2 = 1$ l'opérateur d'identité sur \mathbb{C} . Donc

$$W(A) = \text{conv}(W(A_1) \cup W(A_2)) = \text{conv}(\overline{D}(0, 1/2) \cup \{1\}).$$

D'où

$$w(A) = 1 \text{ et } D = \overline{D}(0, w(A)) = \overline{D}(0, 1).$$

Le minimum et le maximum des valeurs propres de $\text{Re}(A)$ sont $a = -1/2$, $b = 1$, respectivement. Ainsi le minimum et le maximum des valeurs propres de $\text{Im}(A)$ sont $c = -1/2$, $d = 1/2$,

respectivement. Alors

$$R = \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Ainsi

$$D \neq D \cap R \neq R.$$

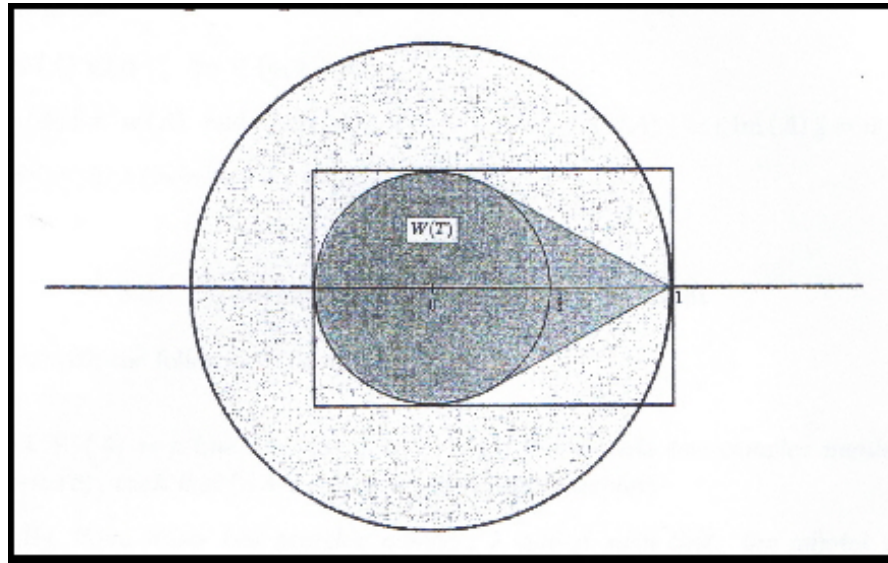


Figure 3. L'intersection $D \neq (D \cap R) \neq R$.

Corollaire 5.1.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $W(A)$ est le disque $D(0, w(A))$ (ouvert ou fermé), alors

$$w(A) = \|\operatorname{Re}(A)\| = \|\operatorname{Im}(A)\|.$$

Preuve À partir du théorème (5.1.1), si $W(A)$ est le disque $D(0, w(A))$ alors ce disque est contenu dans le rectangle R . Donc

$$w(A) \leq \alpha, \quad \forall \alpha \in \{-a, b, -c, d\}.$$

On a aussi

$$\|\operatorname{Re}(A)\| \leq w(A) \quad \text{et} \quad \|\operatorname{Im}(A)\| \leq w(A).$$

Donc

$$w(A) = \|\operatorname{Re}(A)\| = \|\operatorname{Im}(A)\|.$$

■

5.2 Puissance positive d'un opérateur

Soient k un entier positif et $A \in \mathcal{L}(H)$. Notons par $C^k = \{\eta^k : \eta \in C\}$ pour tout sous ensemble C de \mathbb{C} . L'inclusion $W(A^k) \subset W(A)^k$ n'est pas vraie en général. Mais il existe des situations dans lesquelles l'inclusion est valide. Voici un schéma pour que $W(A)$ sera utile pour estimer $W(A^k)$.

Soit $\mu = e^{i2\pi/k}$ et $\tilde{A} = A \oplus \mu A \oplus \dots \oplus \mu^{k-1} A$. Alors $W(\tilde{A}^k) = W(A^k)$. On utilise $W(\tilde{A})$ pour déterminer une région d'inclusion de $W(A^k)$.

Proposition 5.2.1 [15] *Soit C un sous ensemble convexe de \mathbb{C} satisfait $C = \mu C$ avec $\mu = e^{i2\pi/k}$. Alors l'ensemble $C^k = \{v^k : v \in C\}$ est convexe.*

Lemme 5.2.1 [15] *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, $a \in \mathbb{C}$ et $\mu = e^{i2\pi/k}$ pour un entier positif $k > 1$. Si*

$$g_j(z) = (a^k - z^k) / (a - \mu^j z) \text{ pour } j = 1, \dots, k,$$

alors,

$$ka^{-k-1} (a^k I - T^k) = \sum_{j=1}^k g_j(T)^* (aI - \mu^j T) g_j(T).$$

Théorème 5.2.1 [15] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\mu = e^{i2\pi/k}$ pour un entier positif $k > 1$.*

Soit $\tilde{A} = A \oplus \mu A \oplus \dots \oplus \mu^{k-1} A$. Alors

$$W(\tilde{A})^k = \left\{ \operatorname{conv} \left[\bigcup_{j=1}^k \mu^j W(A) \right] \right\}^k$$

est un ensemble convexe satisfaisant l'inclusion suivante

$$W(A^k) = W(\tilde{A}^k) \subset W(\tilde{A})^k.$$

Preuve Si $\tilde{A} = A \oplus \mu A \oplus \dots \oplus \mu^{k-1} A$, alors $W(A^k) = W(\tilde{A}^k)$ et $W(\tilde{A})^k = \left\{ \text{conv} \left[\bigcup_{j=1}^k \mu^j W(A) \right] \right\}^k$.

Appliquons la proposition (5.2.1) à $C = W(A)$, on voit que $W(A)^k = W(\tilde{A})^k$ est convexe.

Il reste à montrer que $W(\tilde{A}^k) \subset W(\tilde{A})^k$. D'après le lemme (5.2.1), si $g_j(z) = (a^k - z^k) / (a - \mu^j z)$ pour $j = 1, \dots, k$, alors

$$ka^{-k-1} (a^k I - \tilde{A}^k) = \sum_{j=1}^k g_j(\tilde{A})^* (aI - \mu^j \tilde{A}) g_j(\tilde{A}). \quad (1)$$

Maintenant, supposons que $b = a^k \in W(A^k) = W(\tilde{A}^k)$. Alors il existe un vecteur unitaire $v \in H$ tel que

$$\langle (a^k I - \tilde{A}^k) v, v \rangle = 0.$$

Nous considérons deux cas

Cas 1 :

Supposons que $(g_j(\tilde{A}) v)$ différente de zéro pour chaque $j = 1, \dots, k$, dans l'égalité (1).

Soit $K = W(aI - \mu \tilde{A}) = \dots = W(aI - \mu^{k-1} \tilde{A}) = W(aI - \tilde{A})$.

D'après l'égalité (1), si

$$\eta_j = \frac{\langle (aI - \mu^j \tilde{A}) g_j(\tilde{A}) v, g_j(\tilde{A}) v \rangle}{\|g_j(\tilde{A}) v\|^2} \in W(aI - \mu^j \tilde{A}) \text{ pour } j = 1, \dots, k,$$

donc pour $\gamma = \sum_{j=1}^k \|g_j(\tilde{A}) v\|^2$, on a

$$0 = \gamma^{-1} \langle (a^k I - \tilde{A}^k) v, v \rangle = \gamma^{-1} \sum_{j=1}^k \|g_j(\tilde{A}) v\|^2 \eta_j$$

est une combinaison convexe de k éléments dans l'ensemble convexe $K = W(aI - \mu \tilde{A})$.

Ainsi,

$$a \in W(\tilde{A}) \text{ et } a^k \in W(\tilde{A})^k.$$

Cas 2 :

Supposons que si $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que

$$0 = g_j(\tilde{A})v = \prod_{1 \leq q \leq k, q \neq j} (aI - \mu^q \tilde{A})v.$$

Alors, il existe $k \in \{1, \dots, k\}$ et un vecteur non nul y tel que $(a - \mu^q \tilde{A})y = 0$ avec $a \in W(\mu^q \tilde{A}) = W(\tilde{A})$, donc $a^k \in W(\tilde{A})^k$. ■

Théorème 5.2.2 [15] *Soit $k > 1$ un entier positif. Supposons que $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $W(A) \subseteq \Gamma$, où Γ est un sous-ensemble convexe de \mathbb{C} satisfaisant $e^{i2\pi/k}\Gamma = \Gamma$. Alors,*

$$W(A^k) \subset \text{conv} \{z^k; z \in \Gamma\}.$$

Maintenant, si on considère Γ comme un ensemble des polygones de k côtés si $k \geq 3$ contenant $W(A)$, alors l'intersection de tous ces Γ égale à $W(\tilde{A})$ dans le théorème (5.2.1). Donc

$$W(A^k) \subset \left\{ \mu^k : \mu \in W(\tilde{A}) \right\} \subset \bigcap_{\Gamma} \{ \mu^k : \mu \in \Gamma \}.$$

5.3 Puissance positive d'un opérateur auto-adjoint

Lemme 5.3.1 [3] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors,*

$$\langle Ax, x \rangle = \langle |A|x, x \rangle, \quad \forall x \in H^+,$$

où H^+ est le sous-espace fermé de H défini par

$$H^+ = \{x \in H, \langle Ax, x \rangle \geq 0\}.$$

Théorème 5.3.1 [8] *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Si A est positif et $AB = BA$, alors*

$$W(AB) \subset W(A)W(B).$$

Preuve On a $\sqrt{AB} = B\sqrt{A}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle ABx, x \rangle &= \langle \sqrt{AB}\sqrt{Ax}, x \rangle = \langle B\sqrt{Ax}, \sqrt{Ax} \rangle \\ &= \langle By, y \rangle \|\sqrt{Ax}\|^2 = \langle By, y \rangle \langle Ax, x \rangle,\end{aligned}$$

avec $y = (\sqrt{Ax}) / \|\sqrt{Ax}\|$ pour $\sqrt{Ax} \neq 0$.

Si $\sqrt{Ax} = 0$, alors $Ax = 0$ et $\langle ABx, x \rangle = \langle By, y \rangle \langle Ax, x \rangle$ pour n'importe quel choix de y . ■

Théorème 5.3.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors

$$W(|A|) \subset W(A).$$

Preuve D'après le lemme précédent, et puisque $|A|$ est positif, on obtient

$$\begin{aligned}W(|A|) &= \{\langle |A|x, x \rangle, x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle |A|x, x \rangle, x \in H^+, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle Ax, x \rangle, x \in H^+, \|x\| = 1\} \subset W(A).\end{aligned}$$

■

Théorème 5.3.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si A un opérateur auto-adjoint, alors

$$W(A^2) \subset [W(A)]^2.$$

Preuve D'après les théorèmes (5.3.1) et (5.3.2), on obtient

$$\begin{aligned}W(A^2) &= W(A^*A) = W(|A|^2) \\ &\subset [W(|A|)]^2 \subset [W(A)]^2\end{aligned}$$

■

Théorème 5.3.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, W(A^n) \subset [W(A)]^n.$$

Preuve Il est clair que si A est positif, alors $W(A^n) \subset [W(A)]^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

D'autre part, si A est auto-adjoint alors A^2 est positif. Par conséquent, si n est un nombre pair ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$), alors d'après le théorème précédent et le théorème (5.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} W(A^n) &= W(A^{2k}) \subset [W(A^2)]^k \\ &\subset [W(A)]^{2k} = [W(A)]^n. \end{aligned}$$

Et si n est un nombre impair ($n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$), alors, on obtient

$$\begin{aligned} W(A^n) &= W(AA^{2k}) \subset W(A)W(A^{2k}) \\ &\subset W(A)[W(A)]^{2k} = [W(A)]^{2k+1} \\ &= [W(A)]^n. \end{aligned}$$

■

Conclusion générale

L'étude de l'image numérique, ces propriétés géométriques, algébriques et analytiques et sa relation avec le spectre a engendré de nombreux travaux depuis une cinquantaine d'années.

Depuis l'introduction de cette notion par Otto Toeplitz en 1918 et les travaux de F. Hausdorff, A. Wintner, M. H. Stone, F. Riesz et B. Sz. Nagy, P. Halmos, R. A. Horne et C. R. Johnson et R. Bouldin et J. H. Anderson, et récemment le grand nombre des travaux de Chi-Kwong Li et plusieurs autres auteurs, cette notion nécessite d'être étudié plus profondément.

Dans notre travail on a obtenu des nouveaux résultats et on a généralisé des résultats établis par différents auteurs dans des articles depuis les années cinquante, nos contributions dans cette thèse sont

On généralise un résultat de Kippenhahn, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'image numérique d'un opérateur soit un segment de droite. À partir de ces résultats, nous introduit une nouvelle classe d'opérateurs, c'est la classe des opérateurs dont l'image numérique est un segment de droite, cette classe contient les opérateurs auto-adjoints et contenu dans la classe des opérateurs normaux. Selon ces inclusions, on a donné le nom sous-auto-adjoint d'un opérateur de cette classe, et on la notée $\mathbb{S}(H)$. On donne aussi quelques propriétés de ces nouveaux opérateurs.

Dans une autre partie, on détermine une petite région contenant l'image numérique, puis on discute le cas où l'image numérique est un disque.

Enfin, on donne une propriété d'inclusion de l'image numérique de la puissance d'un opérateur auto-adjoint.

Pourtant la réalisation de notre travail me semble est achevée, mais il reste encore quelques questions ouvertes et suggestions pour des prochains travaux, on cite à titre d'exemple :

- 1) Pour quel opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, $W(A)$ est un disque?
- 2) Pour quel opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, $W(A)$ est symétrique au axe des réels, identiquement, $W(A^*) = W(A)$?
- 3) Conjecture. Si l'image numérique est un segment de droite, alors elle est l'un des deux diagonales du rectangle R défini dans la première partie du chapitre 5.

Bibliographie

- [1] C. Alabiso and I. Weiss, *A Primer On Hilbert Space Theory*, Springer International Publishing Switzerland (2015).
- [2] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, Universitext, New York, Springer-Verlag (1991).
- [3] A. Bachir and A. Segres, *On the Φ Class operators*, Int. J. Open Problems Comp. Math., 2(2009), 48-57.
- [4] M. Barraa and M. Boumazgour, *Numerical Range Submultiplicity*, Linear Algebra and its Applications (2015).
- [5] N. Bebiano, R. Lemos, J. da Providencia, and G. Soares, *On Generalized Numerical Range of Operators On an Indefinite Inner Product Space*, Linear and Multilinear Algebra, 52, (2004), 203-234.
- [6] S. K. Berberian, *A Note on Hyponormal Operators*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 12, No. 4, (1962).
- [7] C. A. Berger and J. G. Stampfli, *Mapping Theorem for the Numerical Range*, Amer. J. Math, 89, (1967), 1047-1055.
- [8] R. Bouldin, *The Numerical Range of Product I*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 32, (1970), 459-467.
- [9] R. Bouldin, *The Numerical Range of Product II*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 33, (1971), 212-219.
- [10] S. Bouzenada, *Etude des Opérateurs Finis et leurs Caractérisations*, Thèse de Doctorat, Université de Annaba (2008).
- [11] R. Chettouh and S. Bouzenada, *Numerical Range and Sub-Self-Adjoint Operators*, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. Vol. 10, No. 2, (2020), 492-498.
- [12] M. T. Chien, *Boundedness of the Numerical Range*, Linear Algebra and its Applications, 134, (1990), 25-30.

- [13] M. T. Chien and B. S. Tam, *Circularity of the Numerical Range*, Linear Algebra and its Applications, 201, (1994), 113–133.
- [14] M. T. Chien and L. Yeh, *On the Boundary of the Numerical Range of Matrix*, Applied Mathematics Letters, 23, (2010) 725-727.
- [15] M. D. Choi and C. K. Li, *Numerical Range of the Powers of an Operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 365, (2010) 458-466.
- [16] W. F. Donoghue, *On the Numerical Range of a Bounded Operator*, Michigan J. Math, 4, (1957), 261-263.
- [17] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York, San Francisco, London (1972).
- [18] S. S. Dragomir , *Power Inequalities for Numerical Radius of a Product of Two Operators in Hilber Space*, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 18, (2009), 269-278.
- [19] T. Furuta , *Invitation to Linear Operators*, Taylor and Francis, London and New York (2001).
- [20] T. Furuta and Z. Takeda , *A Characterization of Spectraloid Operators and its Generalization*, Proc. Japan Acad, Vol. 43, No. 7, (1967), 599-604.
- [21] H. L. Gau and P. Y. Wu , *Numerical Range of Nilpotent Operators*, Linear Algebra and its Applications, 429, (2008), 716-726.
- [22] L. Z. Gevorgyan, *Characterization of Spectraloid and Normaloid Operators*, National academy of sciences of Armenia, Vol. 113, No. 3, (2013).
- [23] K. E. Gustafson and D. K. M. Rao, *Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer, New York (1997).
- [24] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, Second edition (1982).
- [25] P. R. Halmos, *Ten Problem in Hilbert Space*, Bull. Amer. Math. Soc, 76, (1982), 314-316.
- [26] F. Hausdorff, *Der Wertvorrat Einer Bilinearformen*, Math. Z, 3, (1919), 228-282
- [27] S. Hildebrandt, *Über den Numerischen Wertebereich eines Operators*, Math. Ann.163(1966), 230-247.

- [28] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York (1985).
- [29] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York (1991).
- [30] V. Istratescu and I. Istratescu, *On a Class of Normaloid Operators*, Math. Zeitschr, 124, (1972), 199-202.
- [31] V. Istratescu and I. Istratescu, *On Normaloid Operators*, Math. Zeitschr, 105, (1968), 153-156.
- [32] C. R. Johnson, *Computation of the Field of Values of 2×2 Matrix*, J. Res. NBS, 78B, (1974), 105-108.
- [33] C. R. Johnson, *Normality and the Numerical Range*, Linear Algebra and its Applications, 15, (1976), 89-94.
- [34] C. R. Johnson, *Numerical Range of Principal Submatrices*, Linear Algebra and its Applications, 37, (1981), 23-24.
- [35] M. T. Karaev, *The Numerical Range of a Nilpotent Operator on a Hilbert Space*, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol. 132, No. 8, (2004), 2321-2326.
- [36] M. T. Karaev, N. Sh. Iskenderov, *Numerical Range and Numerical Radius for Some Operators*, Linear Algebra and its Applications, 432, (2010), 3149-3158.
- [37] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, New York, Berlin (1966).
- [38] D. S. Keeler, L. Rodman and I. M. Spitkovsky, *The Numerical Range of 3×3 Matrices*, Linear Algebra and its Applications, 252, (1997), 115-139.
- [39] R. Kippenhahn, *A Über den Wertevorrat einer Matrix*, Math, Nachr, 6, (1951), 193-228.
- [40] R. Kippenhahn, *On the Numerical Range of the Matrix*, Linear and Multilinear Algebra 56, No. 1-2, (2008), 185-225, Translated. From the German by Paul F. Zachlin and Michiel E. Hochstenbach [MR0059242].
- [41] C. K. Li, *A Simple Proof of the Elliptical Range Theorem*, Proc. of Amer. Math. Soc, 124, (1996), 1985-1986.

- [42] J. Muscat, *Functional Analysis*, Springer International Publishing Switzerland (2014).
- [43] F. Riesz, B. SZ. Nagy, *Functional Analysis*, Blackie and Son Limited, London and Glasgow (1956).
- [44] I. H. Sheth, *On Normaloid Operators*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 28, No. 3, (1969).
- [45] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real Analysis*, Published by Princeton University Press, (2005).
- [46] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*, American Mathematical Society, New York, Vol. 15, (1932).
- [47] V. S. Sunder, *Operators On Hilbert Space*, Springer Science, Business Media Singapore and Hindustan Book Agency (2015).
- [48] O. Toeplitz, *Das Algebraische Analogon Zu Einem Satz Von Fejér*, Math. Z. 2, (1918), 187-197.
- [49] A. W. Wafula, *On Invariance of the Numerical Range and Some Classes of Operators in Hilbert Space*, Thèse de Doctorat, Université de Nairobi (2013).
- [50] A. Wintner, *Zur Theorie Der Beschränkten Bilinearformen*, Math. Z 30, (1929), 228-282.