



Republique Algérienne Democratique Et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil

N° d'ordre: .....

Série: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
du diplôme de

**Doctorat LMD en Génie Civil**

Option : Matériaux, structures et géotechnique

Sujet

---

## **Analyse expérimentale et modélisation du comportement dynamique des structures sandwichs en nid d'abeilles**

---

Présentée par :  
**Daoudi Nour el houda**

Soutenue publiquement le 31/01 /2019

**Devant le jury composé de :**

Tarek Ninouh	Prof.	Président	Université de Tébessa
El haddi Harkati	Prof.	Directeur de thèse	Université de Tébessa
Mouloud Merzoud	Prof.	Examineur	Université de Annaba
Djamel Boutagouga	MCA	Examineur	Université de Tébessa
Ali Messabhia	MCA	Examineur	Université de Tébessa
Djamel Ben meddour	MCA	Examineur	Université de Biskra
Mohamed Rédha Soltani	MCB	Invité	Université de Tébessa

**Année Universitaire 2018-2019**

## Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant, pour le courage et la patience qui m'a donné pour arriver à terminer ce travail.

Je tiens à remercier **PR, Harkati El haddi**, mon directeur de thèse pour avoir dirigé ce travail de thèse avec un grand sens de rigueur scientifique et pédagogique, pour la confiance placée en ma personne en me confiant ce sujet de thèse. Ses qualités humaines et son esprit d'initiative, sa patience ont toujours contribué à l'avancement de mon travail. Soyez assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude.

Je suis très honoré à remercier de la présence à mon jury de thèse et je tiens à remercier :

Monsieur **Tarek Ninouh**, professeur à l'université de Tébessa, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury. Je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

Monsieur **Mouloud Merzoud**, professeur à l'université de Annaba, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre de mon jury de thèse.

Monsieur **Djamel Boutagouga**, maître conférence à l'université de Tébessa, d'avoir accepté de faire parti du jury de cette thèse.

Monsieur **Ali Messabhia**, maître de conférence HDR à l'université de Tébessa, pour l'honneur qu'il m'a fait pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.

Monsieur **Djamel Ben meddour**, maître conférence à l'université de Biskra, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examineur de mon travail.

Monsieur **Mohamed Rédha Soltani**, maître de conférence à l'université de Tébessa, pour l'intérêt qu'il a manifesté en participant en qualité de membre invité à ce jury.

Finalement, Je remercie l'ensemble du personnel du laboratoire LMS université Guelma où j'ai fait les essais expérimentaux. J'exprime toute ma reconnaissance à **PR Ouelaa .N** de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, pour ses nombreux conseils et suggestions. Je souhaite aussi remercier **Mr Ramdane .Y** pour son aide.

## *Dédicace*

*Je dédie cette thèse à ... ✍*

### *A ma très chère mère*

*De toutes les mères, tu es la meilleure. Tu as été et tu serais toujours un exemple pour moi par tes qualités humaines, ta persévérance et perfectionnisme. En témoignage de tout d'années de sacrifices, de sollicitudes, d'encouragement et de prières. Pourriez vous trouver dans ce travail le fruit de toutes vos peines et tous de vos efforts. En ce jour, j'espère réaliser l'un de tes rêves. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes respects, ma reconnaissance et mon profond amour. Puisse dieu vous préserver et vous procurer santé et bonheur.*

### *A la mémoire de mon Père*

*Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Je prie le Tout Puissant **ALLAH** pour le repos de son âme, amine !*

### *A mes très chers frères*

*Qui ont rempli ma vie de joie et de bonheur. je les souhaite une belle vie et une grande réussite, que dieu les protège.*

### *A ma tante, son mari et leur enfant Ramzi*

*A une famille au sein de laquelle je me suis toujours senti chez moi et qui m'ont toujours considéré comme une des leurs. Qu'il me soit permis de vous exprimer à travers ce travail, mon respect et ma vive reconnaissance.*

### *Ma très chère grand mère.*

*Qui n'a jamais cessé d'implorer **ALLAH** pour moi.*

### *A mes chères oncles, tantes, leurs époux et épouses*

### *A mes chères cousins et cousines*

*Qui m'ont apportés d'une façon ou d'une autre leur soutien. Qu'ils s'assurent que je partagerai cette réussite avec eux.*

### *A tous qui me connaissent et m'ont aidé du pré ou du loin.*

# Productions scientifiques

Ce travail de thèse a fait l'objet de plusieurs publications et communications:

## ❖ Publications internationales

**1-** Harkati.E, **Daoudi. N**, Bezazi. A, Haddad. A , Scarpa. F,(2017) "*In-plane elasticity of a multi re-entrant auxetic honeycomb*", composite structures, vol. 180, pp.130-139.

**2-Daoudi.N**, Harkati.E, Boutagouga.D, Louafi.M, (2017) "*A refined analytical model for studying the effect of the relative density on the homogenised elastic constants of a honeycomb cell structure*", Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, Vol. 14 Issue 1, pp.16-39,

## ❖ Communications dans des colloques nationaux et internationaux

**1- Daoudi.N**, Harkati.E , "*The effect of the relative density of the homogenized elastic constants in terms of a new cell structure*", Conférence internationale sur les Matériaux polymères et leurs composites, 25 au 27 avril 2017 ,Tlemcen -Algérie.

**2-Daoudi.N**, Harkati.E, Louafi.M, Bezazi. A, Scarpa. F, "*Approche analytique utilisant la technique d'homogénéisation pour la détermination des constantes élastiques d'une structure sandwich cellulaire en nid d'abeille*", 6<sup>ème</sup> Séminaire National sur les Matériaux, Procèdes et environnement, 07-08 Novembre 2016, Boumerdes –Algérie.

**3-Harkati.E**, **Daoudi.N**, "*Un Modèle Raffiné de l'effet de la densité sur le comportement d'une nouvelle structure cellulaire*", 1<sup>er</sup> Congrès International sur les Ingénieries Civile, Mécanique et Electrique pour l'Energie, 16-18 Novembre 2015, Marrakech –Maroc.

**4-Daoudi.N**, Harkati.E, "*Raffinement de modèle d'homogénéisation des modules élastiques d'une nouvelle cellule en nid d'abeille auxétique*", 2<sup>nd</sup> international symposium on materials and sustainable development, 09-10 Novembre 2015, Boumerdes - Algérie.

# Résumé

L'objectif visé par ce travail de thèse est en deux volets, le premier traite l'analyse des propriétés élastiques d'une nouvelle structure cellulaire, ce genre de matériaux est proposé comme noyau pour les panneaux sandwichs. La variation des propriétés élastiques en fonction de la densité relative et les paramètres géométriques sont déterminés, en utilisant des approches à la fois analytiques et numériques sous Abaqus. Le modèle analytique a été développé à la base de théorèmes énergétiques avec la prise en compte de l'effet de cisaillement et de membrane, c'est une extension des travaux antérieurs basés sur la flexion seule. Le second volet est réservé à une analyse modale expérimentale et numérique comparative de plaque et poutre sandwich en configuration encastree-libre de topologie hexagonale et avec différentes matériaux de cœur. La très bonne concordance entre les résultats montre que le modèle numérique est adéquat. La méthode analytique utilisant l'approche du modèle équivalent a été utilisée pour vérifier la faisabilité et la précision des modèles éléments finis proposés. Ensuite, une analyse paramétrique a été faite afin d'étudier la sensibilité des fréquences naturelles, des formes de mode par rapport à la taille des cellules, l'épaisseur des peaux, la topologie de cellule et le matériau constitutif des plaques. Enfin, nous étudions la vibration forcée et le calcul du facteur de perte pour deux topologies de cellule.

## **Mots clés:**

Sandwichs, Homogénéisation, Auxétique, Dynamique, Amortissement, Facteur de perte.

# Abstract

The aim of this thesis work is divided into two parts, the first deals with the analysis of the elastic properties of a new cell structure; this kind of materials is proposed as a core for sandwich panels. The variations of elastic properties as a function of relative density and geometric parameters are determined by the use of both analytical and numerical approaches under Abaqus. The analytical model was developed on the basis of energetic theorems with the consideration of the shear and membrane effect, it is an extension of previous work based only on the flexion. The second part is reserved for a comparative experimental and numerical modal analysis of plate and beam sandwich in clamped-free configuration of hexagonal topology with different core materials. The very good agreement between the results shows that the numerical model is adequate. The analytical method using the equivalent model approach was performed to verify the feasibility and precision of the proposed finite element models. After that, a parametric analysis was done to study the sensitivity of natural frequencies, mode shapes with respect to cell size, skin thickness, cell topology and plate material. Finally, we study the forced vibration and the loss factor calculation for two cell topologies.

**Keywords:**

Sandwichs, Homogenization, Auxetic, Dynamics, Damping, Loss Factor.

# ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو نو شقين , الأول يتناول تحليل الخصائص المرنة لهيكل الخلية الجديدة , و هذا النوع من المواد يقترح كنواة الألواح الساندويتش , يتم تحديد تباين الخصائص المرنة كدالة للكثافة النسبية و المعالم الهندسية , باستخدام كل من المقاربات التحليلية و العددية تحت إسم ABAQUS .

تم تطوير النموذج التحليلي على أساس نظريات حيوية مع النظر في تأثير القص و الغشاء , وهو امتداد للعمل السابق القائم على الانثناء أما الجزء الثاني , محجوز لإجراء تحليل مقارن تجريبي ومعددي للحرمة الشعاعية و الشريحة في تكوين التدفق الحر لطبولوجيا سداسية ومع مواد أساسية مختلفة , وتبين الاتفاقية الجيدة جدا بين النتائج أن النموذج العددي مناسب , ثم تنفيذ الطريقة التحليلية باستخدام نهج النموذج المكافئ للتحقق من جدوى و دقة نماذج العناصر المحدودة المقترحة , بعد ذلك ثم إجراء تحليل حدودي لدراسة حساسية الترددات الطبيعية , و أشكال الوضع فيما يتعلق بحجم الخلية , سمك الجلد , طبولوجيا الخلية ومواد اللوحة , و أخيرا , ندرس الاهتزاز القسري وحساب عامل الفقد لطبقتين من الخلايا .

## الكلمات المفتاحية :

السندويشات , التجانس , اوكرينيك , الديناميكيات , التخميد , عامل الخسارة.

## Table des matières

Remerciements .....	II
Dédicaces .....	III
Résumé .....	V
Abstract .....	VI
ملخص .....	VII
Listes des figures .....	XII
Listes des tableaux .....	XVII
Listes des symboles et abréviations .....	XVIII
Introduction générale .....	1

### Chapitre 1: Généralités sur les structures sandwichs

1.1 Introduction .....	5
1.2 Les composants d'un matériau sandwich .....	5
1.2.1 Définition .....	5
1.2.2 Âmes .....	6
1.2.3 Peaux .....	9
1.2.4 Adhésifs .....	10
1.3 Historique des domaines d'utilisation des structures sandwichs .....	11
1.4 Matériaux sandwichs à cœur nid d'abeille .....	13
1.4.1 Définition .....	13
1.4.2 Technique d'élaboration du nid d'abeille .....	13
1.5 Brève revue dans la littérature sur la dynamique des structures sandwichs .....	17
1.6 Conclusion .....	18

### Chapitre 2: Calcul des constantes élastiques effectives pour les structures sandwichs en nid d'abeille

2.1 Introduction .....	20
2.2 Méthode d'homogénéisation .....	20
2.3 Modèle de Gibson .....	21
2.3.1 Géométrie et notations .....	22
2.3.2 Propriétés dans le plan (X,Y) .....	22
2.3.3 Propriétés hors du plan .....	26
2.4 Modèle de Grédiac .....	29

2.5	Conclusion .....	31
-----	------------------	----

### **Chapitre 3: Modèle raffiné pour l'homogénéisation de nouvelle cellule en nid d'abeille**

3.1	Introduction .....	33
3.2	Géométrie de cellule .....	34
3.3	Étude analytique .....	35
3.3.1	Les propriétés dans le plan de la nouvelle cellule nid d'abeille .....	35
3.3.1.1	Module d'élasticité $E_1$ .....	36
3.3.1.2	Coefficient de Poisson $\nu_{12}$ .....	38
3.3.1.3	Module d'élasticité $E_2$ .....	39
3.3.1.4	Coefficient de Poisson $\nu_{21}$ .....	40
3.3.1.5	Module de cisaillement $G_{12}$ .....	40
3.3.2	Les propriétés hors plan de la nouvelle cellule nid d'abeille .....	43
3.3.2.1	Module d'élasticité $E_3$ .....	43
3.3.2.2	Module de cisaillement $G_{13}$ et $G_{23}$ .....	43
3.4	Principe de la méthode des élément finis .....	47
3.4.1	Discrétisation spatiale .....	48
3.4.2	Formulation élémentaire .....	48
3.4.3	Formulation globale .....	49
3.4.4	Formulation d'un élément poutre dans le plan .....	50
3.5	Validation de la solution analytique par un calcul formel utilisant la matrice de rigidité .....	52
3.5.1	Module d'élasticité $E_1$ .....	57
3.5.2	Module d'élasticité $E_2$ .....	59
3.5.3	Module de cisaillement $G_{12}$ .....	61
3.5	Conclusion .....	62

### **Chapitre 4: Influence des paramètres géométriques sur les constantes élastiques homogénéisés d'une structure sandwich cellulaire**

4.1	Introduction .....	64
4.2	Résultats paramétriques .....	66
4.2.1	Effet de M,N et T .....	66
4.2.2	Effet du rapport d'épaisseur sur la paroi verticale incliné " $\gamma$ " .....	69

4.2.3	Effet du rapport de paroi de base par la paroi verticale incliné " $\beta$ " .....	72
4.2.4	Effet du rapport d'aspect de la cellule " $\alpha$ " .....	75
4.2.5	Propriétés du cisaillement hors plan .....	77
4.3	Densité relative .....	81
4.3.1	Effet de divers types des mécanismes de déformation .....	82
4.3.2	Effet des différents paramètres géométriques sur la densité relative .....	85
4.3.2.1	Module d'élasticité $E_1$ .....	85
4.3.2.2	Module d'élasticité $E_2$ .....	87
4.3.2.3	Module d'élasticité $G_{12}$ .....	89
4.3.2.4	Coefficient de Poisson $\nu_{12}$ .....	91
4.4	Validation numérique .....	93
4.5	Conclusion .....	99

## **Chapitre 5: Comportement dynamique des structures sandwichs en nid d'abeille: analytique et expérimental**

5.1	Introduction .....	101
5.2	Théorie des plaques en flexion .....	102
5.2.1	Définition d'une plaque.....	102
5.2.2	Théorie classique des stratifiés dans les plaques.....	102
5.2.2.1	Champ des contraintes .....	104
5.2.2.2	Expression des résultantes et moments .....	105
5.2.3	Equation du comportement mécanique d'un stratifié .....	107
5.2.4	Vibrations en flexion d'un stratifié orthotrope .....	108
5.2.4.1	Equation des vibrations transverses d'une plaque orthotrope..	108
5.2.4.2	Vibrations de plaques orthotropes rectangulaires en appuis simples .....	108
5.3	Théorie du modèle équivalent .....	109
5.4	Techniques expérimentales .....	110
5.4.1	Détails des échantillons .....	110
5.4.2	Dispositif expérimental .....	111
5.4.3	Résultats expérimentaux .....	112
5.5	Modélisation par élément fin .....	114
5.5.1	Modèle équivalent .....	114
5.6	Etude paramétrique de l'analyse des vibrations libres .....	119
5.6.1	Effet de topologie de cellule .....	119

5.6.2	Effet de la taille de cellule .....	120
5.6.3	Effet de la hauteur du cœur .....	121
5.6.4	Effet d'épaisseur des peaux .....	122
5.6.5	Effet de type du matériau .....	122
5.7	Discussion sur le modèle 2D par rapport au modèle 3D .....	123
5.7.1	Modèle dans le plan .....	123
5.7.2	Modèle hors plan .....	126
5.8	Réponse harmonique et calcul du facteur de perte .....	126
5.8.1	Analyse temporelle .....	126
5.8.2	Analyse fréquentielle .....	128
5.8.3	Facteur de perte .....	130
5.8.3.1	Méthode de largeur de bande .....	131
5.9	Conclusion .....	132
	<b>Conclusion générale</b> .....	134
	<b>Référence bibliographiques</b> .....	138

# Listes des figures

## Chapitre1 Généralités sur les structures sandwichs

<b>Figure 1.1:</b>	Matériau sandwich .....	6
<b>Figure 1.2:</b>	Âmes en mousses .....	7
<b>Figure 1.3:</b>	Âmes en bois de balsa .....	7
<b>Figure 1.4:</b>	Matériaux pour l'âme .....	8
<b>Figure 1.5:</b>	Matériaux pour les peaux .....	10
<b>Figure 1.6:</b>	L'avion militaire Britannique: Le Mosquito, en structure sandwich ..	11
<b>Figure 1.7:</b>	Panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille .....	13
<b>Figure 1.8:</b>	Etapes d'élaboration du nid d'abeille .....	14
<b>Figure 1.9:</b>	Nid d'abeille en aluminium .....	15
<b>Figure 1.10:</b>	Nid d'abeille Nomex .....	16
<b>Figure 1.11:</b>	Géométrie de la cellule du balsa .....	16

## Chapitre2

### Calcul des constantes élastiques effectives pour les structures sandwichs en nid d'abeilles

<b>Figure 2.1:</b>	Représentation schématique de la coupe dans le plan d'une structure en nid d'abeille hexagonale .....	20
<b>Figure 2.2:</b>	Vue en perspective d'une structure en nid d'abeilles .....	21
<b>Figure 2.3:</b>	Géométrie d'un nid d'abeille .....	22
<b>Figure 2.4:</b>	Déformation des cellules sous une charge dirigée suivant $X_1$ (b) et $X_2$ (c) .....	23
<b>Figure 2.5:</b>	Déformation en flexion et en la rotation des parois des cellules .....	25

## Chapitre3

### Modèle raffiné pour l'homogénéisation de nouvelle cellule en nid d'abeille

<b>Figure 3.1:</b>	Cellule en nid d'abeilles auxétique. (a) configuration classique réentrante. (b) Nouvelle conception de la cellule réentrante .....	34
--------------------	---	----

<b>Figure 3.2:</b>	Modèle de cellule en nid d'abeille et charges utilisées dans le développement du modèle raffiné: Répartition globale des contraintes pour l'évaluation de $E_1, E_2$ .....	35
<b>Figure 3.3:</b>	Les sollicitations en cisaillement de la cellule unitaire .....	40
<b>Figure 3.4:</b>	Déformée d'une demi-cellule soumise à un effort de cisaillement pour caractériser le $G_{13}$ .....	44
<b>Figure 3.5:</b>	Modèle utilisé dans l'évaluation des modules hors plan: Définition des modules .....	45
<b>Figure 3.6:</b>	(a) Élément de poutre simple et son d.d.l nodal. (b-e): les formes déviées et les fonctions d'interpolation associées à l'activation de chaque d.d.l. Les charges nodales sont étiquetées en fonction de leur position dans $K$ .....	51
<b>Figure 3.7:</b>	Cas de charge pour calculer $E_1$ .....	54
<b>Figure 3.8:</b>	Cas de charge pour calculer $E_2$ .....	60
<b>Figure 3.9:</b>	Cas de charge pour calculer $G_{12}$ .....	61

## Chapitre4

### Influence des paramètres géométriques sur les constantes élastiques homogénéisés d'une structure sandwich cellulaire

<b>Figure 4.1:</b>	Illustration de la microstructure hexagonale .....	64
<b>Figure 4.2:</b>	Paramètres géométriques de la nouvelle cellule nid d'abeille .....	65
<b>Figure 4.3.a:</b>	L'effet de la contribution du MNT sur le module d'élasticité $E_1/E_s$ pour $(\alpha=1, \beta=0.2, \phi=45^\circ, \gamma=0.04)$ .....	66
<b>Figure 4.3.b:</b>	L'effet de la contribution du MNT sur le module d'élasticité $E_1/E_s$ pour $(\alpha=1, \beta=0.2, \phi=45^\circ, \gamma=0.4)$ .....	67
<b>Figure 4.4:</b>	Effet de la contribution du MNT sur le coefficient de Poisson $\nu_{12}$ , pour $(\alpha=1, \beta=0.3, \phi=45^\circ)$ .....	68
<b>Figure 4.5:</b>	Effet de l'angle de cellule sur le module de cisaillement relatif $G_{12}/E_s$ , pour différentes configurations et des mécanismes de déformations $(\alpha=1, \gamma=0.2, \phi=20^\circ)$ .....	69
<b>Figure 4.6:</b>	Variation du module de Young adimensionnel $E_1/E_s$ en fonction du rapport $t/l$ pour $(\alpha=1, \phi=45^\circ, \beta=0.2)$ .....	70
<b>Figure 4.7:</b>	Variation du module de Young $E_2/E_s$ en fonction de $\theta$ et $\gamma = t/l$ , pour $(\alpha=1, \phi=45^\circ, \beta=0.2)$ .....	70
<b>Figure 4.8:</b>	Variation du coefficient de Poisson $\nu_{12}$ en fonction de $\theta$ pour différentes valeurs de $\gamma$ , pour $(\alpha=1, \phi=45^\circ, \beta=0.2)$ .....	71
<b>Figure 4.9:</b>	Variation du module d'élasticité transversal dans le plan $G_{12}/E_s$ en fonction du rapport $t/l$ , pour $(\alpha=1, \phi=45^\circ, \beta=0.2)$ .....	72
<b>Figure 4.10:</b>	Variation du module de Young adimensionnel $E_1/E_s$ en fonction du rapport $a/l$ , pour $(\alpha=1, \phi=45^\circ, \gamma=0)$ .....	73

<b>Figure 4.11:</b>	Variation du module de Young adimensionnel $E_2/E_s$ en fonction du rapport $a/l$ , pour ( $\alpha=1, \varphi=45^\circ, \gamma=0.3$ ) .....	73
<b>Figure 4.12:</b>	Effet de l'angle de cellule sur le module de cisaillement relatif $G_{12}/E_s$ pour différentes valeurs du talon $\beta$ ( $\alpha=1, \gamma=0.2, \varphi=20^\circ$ ) .....	74
<b>Figure 4.13:</b>	Variation du coefficient de Poisson $\nu_{12}$ en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du $\beta$ ( $\alpha=1, \gamma=0.3, \varphi=45^\circ$ ) .....	74
<b>Figure 4.14:</b>	Géométrie de la cellule a diverses valeurs de $\alpha$ .....	75
<b>Figure 4.15:</b>	Variation du module d'élasticité adimensionnel $E_1/E_s$ en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du $\alpha$ ( $\beta=0.2, \gamma=0.3, \varphi=45^\circ$ ) .....	75
<b>Figure 4.16:</b>	Variation du coefficient de Poisson $\nu_{12}$ en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du $\alpha$ ( $\beta=0.2, \gamma=0.3, \varphi=45^\circ$ ) .....	76
<b>Figure 4.17:</b>	Variation du module de cisaillement adimensionnel $G_{12}/E_s$ en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du $\alpha$ ( $\beta=0.2, \gamma=0.3, \varphi=45^\circ$ ) .....	76
<b>Figure 4.18:</b>	Variation du module d'élasticité adimensionnel $E_2/E_s$ en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du $\alpha$ ( $\beta=0.2, \gamma=0.3, \varphi=45^\circ$ ) .....	77
<b>Figure 4.19:</b>	Résultats du modèle analytique $G_{13}/G_s$ pour les deux bornes en fonction de $\theta$ . ( $\alpha=1, \gamma=0.1, \beta=0.2$ ), $\varphi=-10^\circ, \varphi=45^\circ$ .....	78
<b>Figure 4.20:</b>	Résultats du modèle analytique $G_{13}/G_s$ pour les deux bornes en fonction de $\theta$ . ( $\gamma=0.1, \beta=0.3, \varphi=45^\circ$ ), $\alpha=1.5, 3$ .....	78
<b>Figure 4.21:</b>	Variation de $G_{13}/G_s$ en fonction de $\theta$ pour ( $\alpha=1, \gamma=0.1, \varphi=50^\circ$ ), $\beta=0.1, 0.3$ .....	79
<b>Figure 4.22:</b>	Borne supérieure et inférieure du module de cisaillement $G_{23}/G_s$ en fonction de $\theta, \varphi$ pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \gamma=0.1$ ) .....	80
<b>Figure 4.23:</b>	Borne supérieure et inférieure du module de cisaillement $G_{23}/G_s$ en fonction de $\theta, \alpha$ pour ( $\varphi=50^\circ, \beta=0.2, \gamma=0.1$ ) .....	80
<b>Figure 4.24:</b>	Borne supérieure et inférieure du module de cisaillement $G_{23}/G_s$ en fonction de $\theta$ et $\beta$ pour ( $\varphi=20^\circ, \alpha=1, \gamma=0.1$ ) .....	81
<b>Figure 4.25:</b>	Module d'élasticité $E_1/E_s$ en fonction de la densité relative pour diverses combinaisons de déformation, pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ) .....	82
<b>Figure 4.26:</b>	Coefficient de Poisson $\nu_{12}$ en fonction de la densité pour diverses combinaisons de déformation .....	83
<b>Figure 4.27:</b>	Variation du module de cisaillement $G_{12}/E_s$ en fonction de la densité relative .....	84
<b>Figure 4.28:</b>	Variation du module de Young adimensionnel $E_1/E_s$ en fonction de la densité relative.(a) $E_1/E_s$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ );(b) $E_1/E_s$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ );(c) $E_1/E_s$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \theta=-25^\circ$ ) .....	86
<b>Figure 4.29:</b>	Variation du module de Young adimensionnel $E_2/E_s$ en fonction de la densité relative.(a) $E_2/E_s$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ). (b) $E_2/E_s$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ). (c) $E_2/E_s$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \theta=-25^\circ$ ) .....	88

<b>Figure 4.30:</b>	Variation du module de cisaillement $G_{12}/E_S$ en fonction de la densité relative. (a) $G_{12}/E_S$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ). (b) $G_{12}/E_S$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ). (c) $G_{12}/E_S$ en fonction de $\rho/\rho_s$ pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \theta=-20^\circ$ ) .....	90
<b>Figure 4.31:</b>	Variation de coefficient de Poisson $\nu_{12}$ en fonction de la densité relative. (a) $\nu_{12}$ en fonction de $\rho/\rho_s$ et $\alpha$ pour ( $\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ), (b) $\nu_{12}$ en fonction de $\rho/\rho_s$ et $\beta$ pour ( $\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ), (c) $\nu_{12}$ en fonction de $\rho/\rho_s$ et $\varphi$ pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \theta=-20^\circ$ ).....	92
<b>Figure 4.32:</b>	Volume élémentaire représentatif pour les simulations numériques...	93
<b>Figure 4.33:</b>	Dépendance du coefficient de Poisson $\nu_{12}$ et le module d'élasticité adimensionnel $E_1/E_S$ sur le calcul de nombre des cellules .....	94
<b>Figure 4.34:</b>	Description du modèle numérique. (a) et (b) Les conditions aux limites prises dans la simulation de la traction suivant les directions 1 et 2 respectivement. (c) Conditions aux limites prises pour déterminer $G_{12}$ .....	96

## Chapitre 5

### Comportement dynamique des structures sandwichs en nid d'abeilles : analytique et expérimental

<b>Figure 5.1:</b>	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés .....	103
<b>Figure 5.2:</b>	Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié .....	105
<b>Figure 5.3:</b>	Schématisation des moments de flexion et de torsion .....	106
<b>Figure 5.4:</b>	Équivalence de la structure sandwich en nid d'abeilles .....	109
<b>Figure 5.5:</b>	Photos des poutres sandwichs testées. (a) cœur Aluminium, (b) Aramide .....	111
<b>Figure 5.6:</b>	Dispositif expérimental .....	112
<b>Figure 5.7:</b>	Exemple de fonction de réponse en fréquence d'une poutre Aluminium encastree libre enregistrée par le système d'acquisition ..	113
<b>Figure 5.8:</b>	Vue en coupe d'une plaque conventionnelle et auxétique .....	116
<b>Figure 5.9:</b>	Déformées obtenues par éléments finis pour les trois premiers modes de vibration d'une plaque sandwich a) modèle équivalent orthotrope. b) modèle réel .....	118
<b>Figure 5.10:</b>	Cellule unitaire de nids d'abeilles hexagonale, hexagonale avec talon et auxétique .....	119
<b>Figure 5.11:</b>	Variation de fréquence en fonction de la topologie de cellule .....	120
<b>Figure 5.12:</b>	Variation de fréquence en fonction de la taille de cellule .....	120
<b>Figure 5.13:</b>	Variation de fréquence en fonction de la hauteur du cœur .....	121
<b>Figure 5.14:</b>	Variation de fréquence en fonction d'épaisseur des peaux .....	122

<b>Figure 5.15:</b>	Variation de fréquence en fonction du changement de matériaux .....	122
<b>Figure 5.16:</b>	Cellule en nid d'abeille auxétique sans peaux. a)modèle 2D, b)modèle 3D .....	123
<b>Figure 5.17:</b>	Dimensions générale des modèles conventionnels et auxétiques dans le plan .....	124
<b>Figure 5.18:</b>	Les six premières formes de mode du modèle dans le plan avec un noyau en nid d'abeille auxétique .....	125
<b>Figure 5.19:</b>	Comparaison de la réponse sous chargement harmonique des deux configurations de cellule dans le plan pour le 1 <sup>er</sup> mode .....	127
<b>Figure 5.20:</b>	Comparaison de la réponse sous chargement harmonique des deux configurations de cellule hors plan pour le 1 <sup>er</sup> mode .....	127
<b>Figure 5.21:</b>	Réponse en fréquence des deux configurations de cellule dans le plan .....	128
<b>Figure 5.22:</b>	Réponse en fréquence des deux configurations de cellule hors plan.....	129
<b>Figure 5.23:</b>	Énergie de déformation dans le cœur pour les deux configurations de cellule.(a) dans le plan (b) hors plan .....	130
<b>Figure 5.24:</b>	Méthode de la largeur de bande -3dB .....	131

# Listes des tableaux

## Chapitre1 Généralités sur les structures sandwichs

<b>Tableau 1.1:</b> Caractéristique mécaniques et géométriques de différents nids d'abeilles .....	17
--	----

## Chapitre2 Calcul des constantes élastiques effectives pour les structures sandwichs en nid d'abeilles

<b>Tableau 2.1:</b> Propriétés élastiques de Gibson du nid d'abeille hexagonale .....	28
---	----

## Chapitre4 Influence des paramètres géométriques sur les constantes élastiques homogénéisé d'une structure sandwich cellulaire

<b>Tableau 4.1:</b> Comparaison entre le modèle analytique et numérique .....	98
---	----

## Chapitre 5 Comportement dynamique des structures sandwichs en nid d'abeilles : analytique et expérimental

<b>Tableau 5.1:</b> Caractéristiques géométriques des échantillons testées .....	110
<b>Tableau 5.2:</b> Propriétés mécaniques des échantillons .....	110
<b>Tableau 5.3:</b> Comparaison entre le résultat expérimental et numérique dans les deux cas .....	114
<b>Tableau 5.4:</b> Propriétés des noyaux en nid d'abeilles .....	115
<b>Tableau 5.5:</b> Comparaison des trois premières fréquences modales pour deux topologies de cellule et différente méthode .....	117
<b>Tableau 5.6:</b> Six premières fréquences modales des modèles dans le plan .....	125
<b>Tableau 5.7:</b> Six premières fréquences modales des modèles hors plan .....	126
<b>Tableau 5.8:</b> Facteurs de perte pour deux configurations de cellule nids d'abeilles .....	131

# Listes des symboles et abréviations

## Abréviations:

VER: Volume élémentaire représentatif

d.d.l: Degré de liberté

MEF: Méthode des éléments finis

FRFs: Fonctions de Réponses en Fréquences

## Symboles:

[K] : matrice de rigidité globale.

[N] : matrice des fonctions de forme.

[K<sup>e</sup>] : matrice de rigidité élémentaire.

{u<sup>e</sup>} : vecteur des déplacements nodaux d'un élément.

{F} : Vecteur des forces équivalentes.

A\* : Section réduite de cisaillement

h : Longueur de la paroi centrale.

l : Longueur de la paroi inclinée.

θ : Angle interne de la cellule.

a : Paroi de base

φ : Inclinaison de la paroi de base.

t : Épaisseur de la paroi de cellule.

b : Hauteur du nid d'abeilles.

M : Moment de flexion.

N : Force normale.

T : Force de cisaillement.

P : Direction 1 de la charge concentrée.

W : Direction 2 de la charge concentrée.

$U$  : Énergie de déformation élastique.

$u_1, u_2$  : Déplacement dans les directions 1 et 2.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  : Déformation dans le plan.

$E_1, E_2$ : Modules de Young dans les directions 1 et 2.

$E_s$ : Modules de Young du matériau de base.

$G_{12}$ : Module de cisaillement dans le plan

$\nu_{12}, \nu_{21}$ : Coefficient de Poisson dans le plan

$\nu_s$ : Coefficient de Poisson du matériau de base.

$G_{13}$  : Module de cisaillement agissant sur la face normale à 3 dans la 1 direction

$G_{23}$  : Module de cisaillement agissant sur la face normale à 3 dans les 2 directions

$\rho/\rho_s$  : Density relative.

$\alpha$  : Rapport d'aspect de cellule,  $\alpha = \frac{h}{l}$

$\beta$  : Rapport d'aspect de la paroi de base,  $\beta = \frac{a}{l}$

$\gamma$  : Rapport d'épaisseur de la paroi,  $\gamma = \frac{t}{l}$

$\omega_{mn}$  : Fréquence naturelle de vibration

$\eta$  : Facteur de perte

# **Introduction générale**

# Introduction générale

Les technologies avancées dans les matériaux structuraux tels que les composites stratifiés et la construction sandwich en nid d'abeille ont complètement révolutionné l'industrie des matériaux. La structure sandwich nid d'abeille possède la rigidité spécifique élevée et elle peut réduire des vibrations, isoler le bruit en plus de posséder la densité extrêmement basse. Par conséquent, son application est importante dans les industries aéronautiques, l'automobile, la marine et le génie civil. Une structure en nid d'abeille se constitue d'une âme, souvent épaisse et de faible densité volumique, enserrée entre deux peaux à la fois rigides et minces. Le noyau porte toute la charge de cisaillement transversale tandis que les peaux portent toute la charge de traction ou de compression dans le plan. Le nid d'abeille est le plus populaire en raison de sa production plus simple et de son efficacité supérieure.

Les panneaux sandwichs sont légers et rigides. Pour cela, ce sont d'excellents transmetteurs de vibrations mécaniques pouvant nuire à l'intégrité du système. Les vibrations en flexion apparaissant en plus basses fréquences, elles peuvent atteindre des amplitudes plus grandes que d'autres modes vibratoires comme la torsion. Si elles ne sont pas amorties, ces vibrations peuvent mener à des défaillances mécaniques. La maîtrise de ces vibrations est devenue une préoccupation majeure, et l'amortissement de ces structures devient un critère essentiel pour de nombreuses applications.

Afin de comprendre la réponse statique et dynamique des panneaux sandwich, il est essentiel d'avoir une connaissance précise des propriétés élastiques du noyau quelle que soit la configuration de cellule en forme nid d'abeille. La géométrie résultante de l'âme en nid d'abeille crée un matériau hautement orthotrope avec des caractéristiques significativement différentes de celles du matériau de base isotrope. Les neuf propriétés du matériau de noyau requises sont les modules de Young dans le plan et hors plan, les modules de cisaillement dans et hors plan, et les trois coefficients de Poisson. L'objectif principal de cette thèse était d'analyser l'amortissement des matériaux composites sandwichs constitués d'une âme en nid d'abeille multi réentrante et de peaux en aluminium, considérant l'influence de la topologie et les dimensions de cellules constituant la structure. Ce travail se plaçait dans la continuité

---

## Introduction générale

---

des travaux déjà réalisés au sein du laboratoire, sur l'analyse statique et l'homogénéisation de ce type de sandwich.

### **Organisation de la thèse**

Le travail de cette thèse est organisé de la manière suivante :

Le chapitre 1 constitue une revue bibliographique sur les matériaux composites en construction sandwich. Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale de la structure sandwich : les différents constituants, l'intérêt de son utilisation ainsi que les différents domaines d'application. Enfin, nous présentons quelques travaux existants sur la dynamique des structures sandwichs.

Le chapitre 2 est consacré à un rappel théorique de modèle de Gibson et Ashby pour le calcul des constantes élastiques d'une cellule de forme hexagonale du nid d'abeille qui sera comparé par la suite avec celle que nous allons développer. Par la suite, les travaux de recherche sur l'homogénéisation des structures en nid d'abeille hexagonale.

Le chapitre 3 est dédié à l'estimation des modules effectifs d'une configuration de cellule en forme nid d'abeille multi réentrante utilisant une approche analytique et par élément fini. Le modèle analytique raffiné a été développé et les constantes élastiques sont déterminées en utilisant une approche basée sur le théorème énergétique avec la prise en compte de l'effet de cisaillement et de membrane.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'influence des paramètres géométriques et de la densité relative de la cellule multi réentrante sur le comportement général du sandwich. Afin de vérifier que les résultats des expressions analytiques obtenus à partir du troisième chapitre ont réussi à prédire le comportement d'une nouvelle conception de nid d'abeille, des études de validation ont été réalisées en comparant les résultats analytiques aux simulations numériques exécutées sur le code Abaqus.

Le chapitre 5 porte des généralités sur la théorie des plaques stratifiées et leur comportement vibratoire et en deuxième lieu une analyse modale expérimentale et numérique comparative de plaque et poutre sandwich en configuration encastree-libre de topologie hexagonale et avec différents matériaux de cœur, puis la méthode analytique utilisant l'approche du modèle équivalent a été réalisée pour vérifier la faisabilité et la précision des modèles éléments finis proposés. Ensuite, une analyse paramétrique a été faite afin d'étudier la sensibilité des fréquences naturelles, des

## Introduction générale

---

formes de mode par rapport à la taille des cellules, l'épaisseur des peaux, la topologie de cellule et le matériau constitutif des plaques. Enfin, les facteurs de perte sont calculés par une analyse de réponse en vibration forcée utilisant une méthode de largeur de bande passante pour deux configurations de cellules (auxétiques et conventionnelles).

Finalement, une conclusion générale résumera les principaux résultats mis en évidence par la présente étude.

# **CHAPITRE I**

## **Généralités sur les structures sandwichs**

### 1.1 Introduction

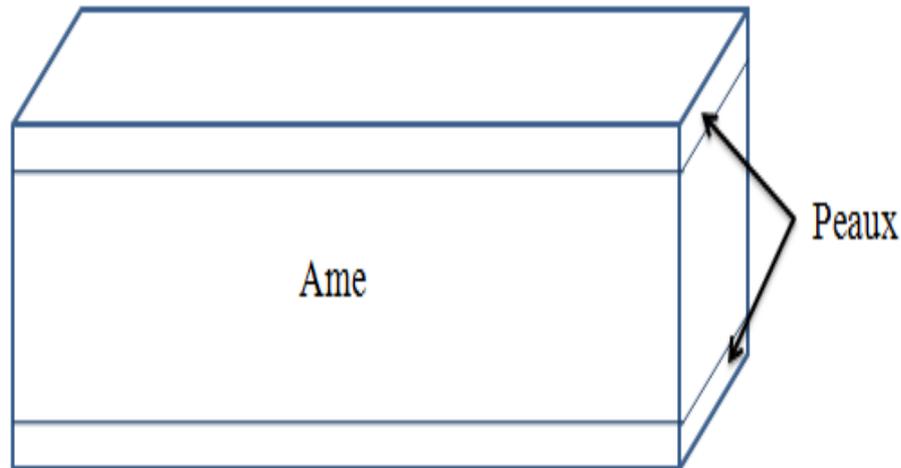
Les structures sandwichs en nid d'abeille sont utilisées dans de nombreuses applications d'ingénierie en raison de leurs rapports rigidité/poids élevés et sont largement utilisées dans divers d'application d'ingénierie, telle que l'industrie aérospatiale, automobile et civil. Il existe de nombreux types, mais le principe est toujours le même: placer un matériau léger et très rigide en compression et cisaillement, l'âme, entre deux peaux supportant de grands efforts dans leur plan. De cette manière, le panneau sandwich obtenu constitue un matériau structural à la fois léger et très raide en flexion/torsion du fait de l'utilisation optimisée de la matière. Les matériaux constitutifs disponibles sont extrêmement variés offrant ainsi de nombreux champs d'applications aux panneaux sandwichs: panneaux de structure, d'isolation acoustique, thermique, d'absorption d'énergie (amortisseurs de chocs). Avec le développement des matériaux composites et de la technologie de fabrication, l'application de cette structure, efficace, a été introduite dans chaque champ possible. Les sandwichs en nid d'abeille peuvent être optimisés (géométrie, matériaux) globalement et localement, un choix important d'âmes en nid d'abeille est disponible: la taille, la forme, l'épaisseur, la topologie, et le type de matériaux peuvent être optimisés. Ces matériaux ont connu un grand essor au cours des cinquante dernières années et ont attiré l'attention de beaucoup de travaux de recherches. Une revue bibliographique sur les matériaux composites en construction sandwich est développée dans ce chapitre, qui débutera avec une exposition plutôt générale de la structure sandwich : les différents constituants, l'intérêt de son utilisation ainsi que les différents domaines d'application. Enfin, nous présentons quelques travaux existants sur la dynamique des structures sandwichs.

### 1.2 Les composants d'un matériau sandwich

#### 1.2.1 Définition

Le principe de technique sandwich typique en nid d'abeille consiste à appliquer sur une **âme** (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux feuilles ou **peaux** possédant de bonnes caractéristiques en traction (fig.1.1). L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité [1]. La colle ou l'adhésif est le troisième composant du matériau sandwich. C'est ce dernier qui permet un bon

assemblage de la structure et une bonne transmission des contraintes d'un milieu à un autre.



**Figure 1.1** Matériau sandwich.

Les structures en sandwich ont généralement trois formes structurales: les poutres sandwichs, les plaques et les coques avec les différents noyaux.

### 1.2.2 Âmes

Le noyau c'est l'élément central d'une structure sandwich à plusieurs fonctions vitales, elle se caractérise par une faible masse [2]. Il doit être assez rigide pour résister aux charges agissant, dans la direction perpendiculaire aux panneaux, de sorte que la distance entre la feuille de face supérieure et inférieure reste fixe. En outre, il doit être assez rigide en cisaillement pour empêcher le glissement des feuilles les unes sur les autres. Le rôle principal de l'âme dans le matériau sandwich est de résister aux efforts de cisaillement. En outre, l'âme doit pouvoir supporter des charges localisées de poinçonnement. Parmi les âmes les plus utilisées, citons celles en mousse, en nid d'abeilles et en bois de balsa (fig.1.4):

- Les mousses: ce sont les plus fréquemment utilisées, elles sont produites à partir de Polychlorure de vinyle, polystyrène, polyuréthane ou d'autres polymères synthétiques. Elles sont thermo formables et permettent donc de réaliser des pièces de formes complexes. Leurs propriétés mécaniques sont bonnes, elles adhèrent bien à la résine et absorbent peu d'eau. Néanmoins, leur point faible réside dans une faible résistance à l'impact.



**Figure 1.2** Âmes en mousses.

- Le bois: il est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression notamment pour les supports d'accastillage. Le bois le plus utilisé comme matériau d'âme est le balsa. Les âmes en balsa ont été utilisées pour la première fois dans les années 1940 sur des hydravions. Le bois de balsa est aussi un isolant thermique, mais pour conserver cette propriété, il doit être traité avec un produit hydrofuge puisqu'il est très hygroscopique.



**Figure 1.3** Âmes en bois de balsa.

- Le nid d'abeille: l'âme en nid d'abeille, connue sous le nom «Nida », est un matériau structural souple constitué de mailles hexagonales. Elle est réalisée à partir de différents matériaux par exemple le papier ou l'aluminium. Le Nida étant une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal ou longitudinal des alvéoles (taille de maille). De plus, la taille de celles-ci, l'épaisseur des parois du Nida et la méthode de mise en œuvre sont des paramètres qui influencent la résistance au cisaillement transversal et longitudinal du Nida. Les variétés les plus courantes sont le Nomex et le Korex et sont fabriquées à partir du Kevlar.

Parmi les âmes Nida les plus utilisées, nous retrouvons:

- **L'âme en nid d'abeille métallique :**

L'aluminium et les alliages ultralégers sont les matériaux les plus utilisés pour fabriquer les nids d'abeilles métalliques. Par exemple, le nid d'abeille est constitué de maille hexagonale en aluminium. Étant donné la faible densité et les performances physiques et mécaniques élevées, il est utilisé principalement comme âme destinée à prendre les efforts de cisaillement dans des constructions sandwichs collées légères.

- **L'âme en nid d'abeille plastique :**

C'est un nid d'abeille extrudé en polypropylène utilisé comme âme de structure sandwich (panneaux). La nature thermoplastique de ces nids d'abeilles facilite leur mise en forme. Ils sont thermiquement isolants grâce à l'air emprisonné dans les alvéoles. Les sandwichs en Nida polypropylène sont moins rigides que ceux en aluminium, mais demeurent plus légers et moins dispendieux.

- **L'âme en nid d'abeille aramide :**

Le nid d'abeille aramide est un matériau léger, très stable et non métallique construit à partir de fibres aramides. Le papier aramide est imprégné de résine phénolique. Rapport idéal stabilité/poids, résistance à la corrosion et une bonne isolation thermique. Il est utilisé dans la construction navale.

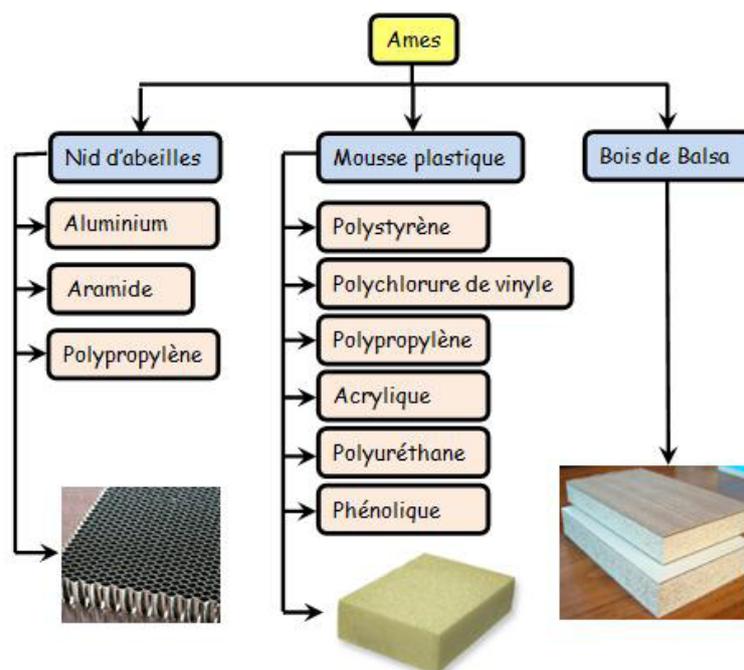


Figure 1.4 Matériaux pour l'âme.

### 1.2.3 Peaux

Généralement de faible épaisseur, les peaux sont réalisées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Les peaux des sandwichs sont généralement constituées de fibres (mat ou tissu) enrobées d'une matrice à base de résine. Il existe plusieurs types de fibres parmi lesquelles on trouve:

- Les fibres de verre: qui sont produites à partir du verre en fusion passant à travers des filières de 3 à 25  $\mu\text{m}$  où il est refroidi. Les propriétés des fibres de verre dépendent de la nature du verre (pourcentage d'oxydes métalliques) et peu de leur technique de fabrication.

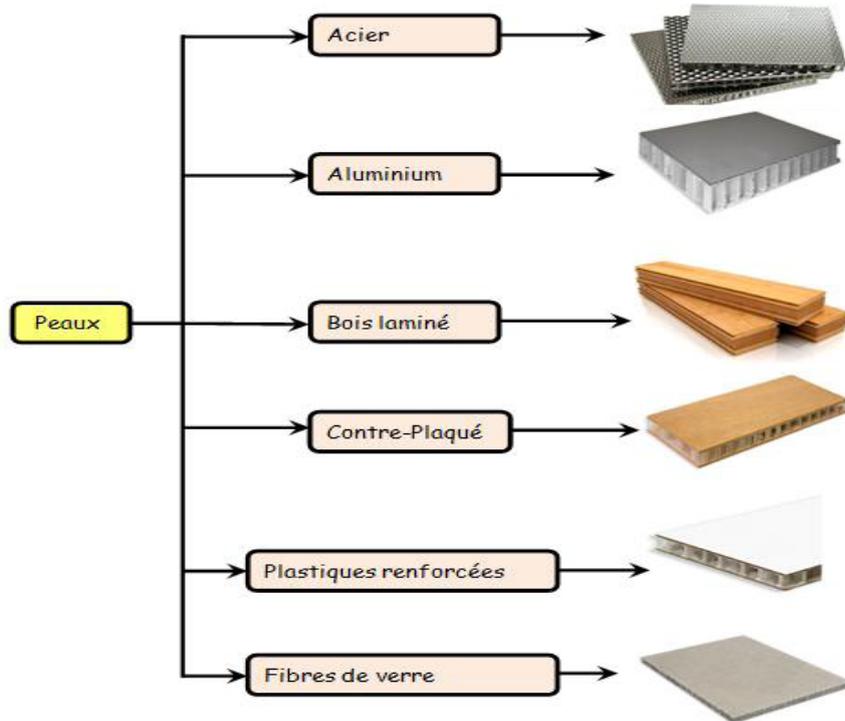
- Les fibres de Kevlar ou aramide: qui sont produites par polymérisation de polyamides, ayant des modules allant de 60 à 180 GPa et une masse volumique d'environ  $1400 \text{ kg/m}^3$ . Ces fibres ont deux avantages particuliers, elles sont les moins denses et les plus résistantes à l'impact.

- Les fibres de carbone: qui sont fabriquées à partir d'un précurseur (polyacrylonitrile) qui est oxydé, carbonisé et graphité. Les fibres de carbone ont des modules qui varient de 150 à 800 GPa et une masse volumique en général inférieure à  $2000 \text{ kg/m}^3$ .

Sa résistance à l'impact est mauvaise, d'autre part il est inflammable et conduit l'électricité.

Le choix de la nature et la séquence des couches dépendront de l'usage auquel est destinée la structure sandwich. Considérées sans rigidité propre en cisaillement, les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression).

La figure.1.5 illustre les différents matériaux de fabrication des peaux.



**Figure 1.5** Matériaux pour les peaux.

### 1.2.4 Adhésifs

Cet élément est d'une importance cruciale, il solidarise l'âme et les peaux. Il doit permettre un bon assemblage de la structure en formant une liaison continue, non poreuse et d'épaisseur constante. Par ailleurs, et une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre est nécessaire, pour cela, la principale caractéristique de l'adhésif doit être une bonne résistance au cisaillement [3].

Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

Les matériaux sandwichs sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint-Pierre (45mètres de portée) et de 2600 Kg/m<sup>2</sup> (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/mousse de polyuréthane est de 33 Kg/m<sup>2</sup> [4].
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermique. En revanche, les matériaux sandwichs leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

### 1.3 Historique des domaines d'utilisation des structures sandwichs

La structure sandwich est un concept qui a été inventé dans les années 1820. Cependant, il a fallu un siècle pour que l'utilisation en masse commence, précisément dans le **domaine militaire**. En effet, l'une des premières applications de la construction en sandwich est la fabrication d'un avion militaire britannique de la seconde guerre mondiale, le Mosquito (voir fig.1.6). Contrairement aux structures métalliques, sa structure en panneaux sandwichs avec des peaux de placage en bois et une âme en balsa, lui confère une grande légèreté et par voie de conséquence une vitesse plus élevée. Cette structure permettra également de le rendre plus difficilement détectable par les radars [5].



**Figure 1.6** L'avion militaire Britannique; le Mosquito, en structure sandwich [5].

Au cours des années 1940, l'apparition de nouveaux matériaux d'âme a encouragé les principaux constructeurs d'avions militaires à utiliser davantage les composites sandwichs [5]. En effet, en 1943, la base aérienne américaine Wright-Patterson (WPAFB) a commencé à utiliser des structures sandwich avec des peaux stratifiées en résine polyester renforcée de fibres de verre liées entre elles par une âme de faible densité (balsa ou nid d'abeille en fibres de verre) pour fabriquer le fuselage de leur VULTEE BT-15. Ces dernières années, la plupart des avions civils ont également

adopté cette construction pour de nombreux composants. Par exemple, les planchers de l'avion Boeing 747 sont fabriqués à partir d'un panneau sandwich de balsa et de feuille d'aluminium.

Ce n'est qu'en 1945 que le premier panneau sandwich tout en aluminium a été produit. La véritable percée est venue avec le développement de meilleurs adhésifs pour la fixation des revêtements aux âmes. Certains adhésifs ont été mis au point pour avoir de bonnes propriétés rhéologiques pour l'utilisation sur les nids d'abeilles.

Le domaine de la **construction navale**, les caractéristiques de légèreté et surtout d'absence de corrosion des structures sandwich, lorsque les divers constituants ne sont pas métalliques, commencent à susciter de l'intérêt. De nos jours, pratiquement tous les bateaux de plaisance américains de moins de 43 mètres sont construits en sandwichs composites en fibres de verre.

Les structures sandwichs sont également utilisées dans la **construction des articles de sports et de loisirs**, tels que les skis acrobatiques, les kayaks, les planches de surf, les tables de billard, et les raquettes de tennis. À titre d'exemple, l'utilisation d'une structure sandwich en nid d'abeille Nomex avec peaux époxy/fibre de carbone pour la construction de la carrosserie d'une formule 1 comporte l'avantage de réduire le poids de la voiture et manifeste de plus une très bonne résistance à la fatigue.

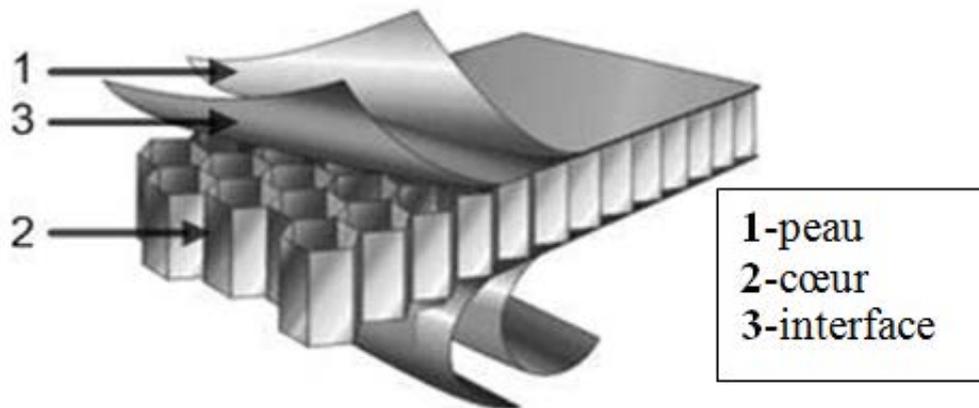
Dans le domaine de **secteur ferroviaire**, la technique de construction en sandwich a été sélectionnée pour la fabrication des cabines de trains à grande vitesse (TGV). De plus, la bonne résistance au feu et la grande résistance à des températures très élevées de certaines mousses thermoplastiques, ont permis par exemple la conception du train allemand « Transrapid ». Grâce à une structure en matériaux sandwichs, ce dernier peut atteindre des vitesses supérieures à 550 km/h.

Le **génie civil** utilise aussi des sandwichs pour réaliser des voûtes de grandes portées. Le gain en densité surfacique est spectaculaire: de 2600 kg/m<sup>2</sup> pour une voûte en pierre à 33 kg/m<sup>2</sup> pour une solution sandwich acier/mousse [4]. Plus récemment, la construction sandwich est de plus en plus utilisée dans les projets de réhabilitation des infrastructures routières telles que la fabrication des tabliers de ponts où la légèreté, la durabilité et la résistance à la corrosion sont indispensables [6].

## 1.4 Matériaux sandwichs à cœur nid d'abeille

### 1.4.1 Définition

Un panneau sandwich typique en nid d'abeille se compose de deux couches minces et rigides, formants les « peaux », collées sur un noyau épais et léger, est un matériau structural souple constitué de mailles hexagonales, réalisées à partir de différents matériaux par exemple le papier ou l'aluminium, d'où l'appellation de « nid d'abeille » (fig.1.7) ou encore « nida » en abrégé [7], on utilise ce mot dans un sens plus large pour désigner toutes les matrices de cellules prismatiques identiques qui s'emboîtent pour remplir l'espace entre les deux peaux. Les cellules sont généralement de section hexagonale, mais elle peut aussi être de section triangulaire ou carrée ou en losange.

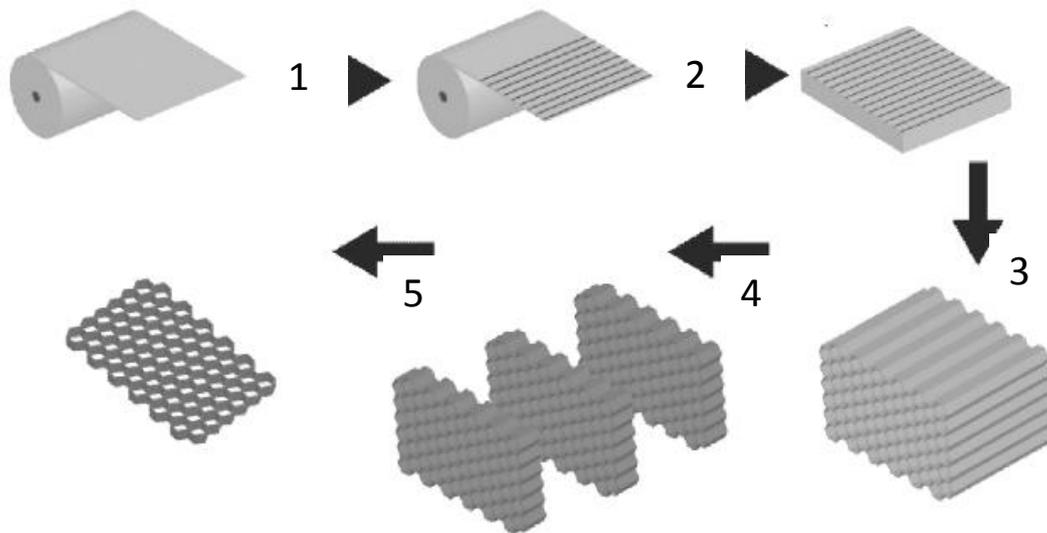


**Figure 1.7** Panneaux sandwichs à âme en nid d'abeille [7].

### 1.4.2 Technique d'élaboration du nid d'abeille

Le nid d'abeille est élaboré à partir de feuilles en aluminium d'une épaisseur de quelques dizaines de micromètres, le feuillard (1) (fig. 1.8) en aluminium est imprimé avec de la colle (2), coupé en feuilles et empilé (3), cette pile est mise sous pression et sous température, puis elle est coupée en tranches suivant l'épaisseur désirée (4), elle est ensuite étirée jusqu'à obtention d'une structure à cellules hexagonales (5), les paramètres principaux du nid d'abeille sont la taille de la cellule, l'épaisseur de la paroi et l'angle entre les parois adjacentes, qui peut être facilement contrôlé par le déplacement de la machine dans le processus d'étirage [7]. Les nids d'abeilles peuvent également être coulés dans un moule (nid d'abeille en silicone), ou par

extrusion (nid d'abeille en céramique utilisé pour supporter des catalyseurs de gaz d'échappement automobiles)[4](fig.1.8).



**Figure 1.8** Étapes d'élaboration du nid d'abeille [7].

Le nid d'abeille peut-être réalisé avec tout matériau plat et mince, ainsi plus de 500 types différents de nid d'abeilles ont été fabriqués. Les matériaux en nid d'abeilles les plus couramment utilisés sont [4]:

### 1.4.2.1 Nid d'abeille aluminium

Bien que les nids d'abeilles métalliques soient fabriqués à partir de métaux très différents (acier, titane, alliage de nickel...), l'aluminium et ses alliages restent le matériau le plus utilisé à cette fin. Les nids d'abeilles en aluminium présentent les ratios résistance/poids (résistances spécifiques) les plus élevés parmi les matériaux de structure. Il existe différentes configurations de collage des feuilles d'aluminium qui peuvent conduire à une grande variété de géométries de cellules (en général hexagonales). Les propriétés peuvent également être ajustées en faisant varier l'épaisseur de la feuille d'aluminium et la taille des cellules. Le nid d'abeille est généralement livré sous sa forme non étirée, en bloc, et mis en forme (étiré) sur site. En dépit de ses propriétés mécaniques intéressantes et de son coût relativement modéré, le nid d'abeille en aluminium doit être utilisé avec précaution dans certaines applications, telles que des pièces structurales de grandes dimensions destinées à la marine, du fait de problèmes de corrosion potentiels en milieu aqueux salé. Il convient

également de veiller à l'absence de contact direct avec des peaux stratifiées renforcées de carbone, dont la conductivité peut aggraver la corrosion galvanique.

Le nid d'abeille en aluminium a également l'inconvénient de ne pas présenter de mémoire mécanique. En cas de choc, le nid d'abeille se déforme de manière irréversible, tandis que les peaux composites reviennent à leur position d'origine. Il en résulte l'apparition d'une zone de décollement peau/âme avec affaiblissement de propriétés mécaniques [8].



**Figure 1.9** Nid d'abeille en aluminium.

### 1.4.2.2 Nid d'abeille papier kraft ou Nomex

Les nids d'abeilles peuvent aussi être réalisés à partir de différents types de papier (papier kraft, papier Nomex). Largement utilisé, le papier Nomex est obtenu à partir de fibres d'aramide plutôt qu'à partir de fibres de cellulose. Le papier nid d'abeille initial est généralement trempé dans une résine phénolique ou polyamide, voire polyester insaturé (d'autres systèmes de résine pouvant aussi être utilisés), de manière à obtenir une âme nid d'abeille à haute résistance et bonne tenue au feu. Le taux volumique de résine idéal est de l'ordre de 50 %. En conséquence, il convient d'avoir recours à des feuilles de papier d'épaisseurs différentes pour produire des âmes de densités variables, en maintenant le taux de résine à 50 %.

Ce type d'âme est largement utilisé dans des panneaux intérieurs légers d'avions, en association avec des peaux à base de résines phénoliques. Des grades spéciaux ignifugés (pour habillage intérieur des transports publics) peuvent aussi être fabriqués en remplissant les cellules du nid d'abeille avec une mousse phénolique pour améliorer l'isolation et augmenter la surface de collage. Le nid d'abeille Nomex est de plus en plus utilisé dans les applications non aéronautiques hautes performances en

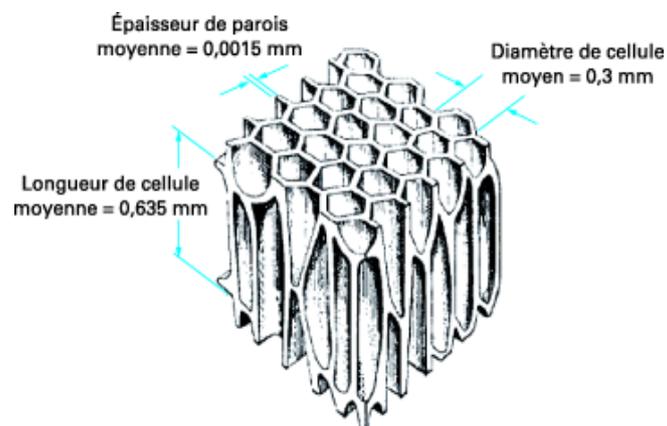
raison de ses propriétés mécaniques élevées, sa faible densité, et sa bonne stabilité à long terme. Cependant, il est plus cher que les autres matériaux d'âme, comme la montre la fig.1.10. [8].



**Figure 1.10** Nid d'abeille Nomex.

### 1.4.2.3 Nids d'abeilles en voiles de renforts (verre, carbone, aramide)

De fins tissus de verre, carbone ou aramide imprégnés de résines polyester insaturé, phénolique... peuvent également être utilisés pour former des nids d'abeilles. Leur mode de fabrication est analogue à celui du nid d'abeille en papier. La variante la plus répandue est à base de tissu de verre, orienté, soit à  $0^\circ/90^\circ$ , soit à  $\pm 45^\circ$  (propriétés en cisaillement améliorées) par rapport à la direction de l'épaisseur de l'âme. Les variantes à base de carbone ou d'aramide, plus récentes, moins répandues et plus chères, sont réservées à des applications spécifiques, aérospatiales par exemple où des coefficients de dilatation thermique extrêmement faible sont nécessaires [8].



**Figure 1.11** Géométrie de la cellule du balsa [8].

Le tableau 1.1 résume les caractéristiques géométriques et mécaniques de quelques nids d'abeilles couramment utilisés [4].

**Tableau 1.1.**Caractéristiques mécaniques et géométriques de différents nids d'abeilles.

Paramètres	Alliage léger AG3	Alliage léger AU4 GI (2024)
Ø cercle inscrit (mm)	4	6
Epaisseur e (mm)	0.05	0.04
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	80	46
Résistance à la rupture en cisaillement $\tau_{xz \text{ rup}}$ (MPa)	3.2	1.5
Module de glissement $G_{xz}$ (MPa)	520	280
Résistance à la rupture en cisaillement $\tau_{yz \text{ rup}}$ (MPa)	2	0.9
Module de glissement $G_{yz}$ (MPa)	250	140
Résistance à la rupture en compression $\sigma_{z \text{ rup}}$ (MPa)	4.4	2

### 1.5 Revue de la littérature sur la dynamique des structures sandwichs

Au cours des deux dernières décennies, la littérature concernant l'analyse vibratoire des panneaux sandwichs a été publiée à la fois en termes d'éléments finis (Chakrabarti et Sheikh[9], Kepeng Qiu, et.al [10], Chalak et al.,[11], Long et al.,[12]) et analytiques (Yongqiang et Zhiqiang [13], Yu et Cleghorn [14], Rao et al., [15], Lee et al., [16], Chenini et al., [17]). Jafar Eskandari et al. [18] ont développé des théories pour la réponse dynamique des panneaux sandwichs. Liu et Zhao [19] ont étudié la vibration d'un panneau sandwich avec deux peaux isotropes identiques et un noyau orthotrope utilisant une théorie de cisaillement linéaire.

L'étude des caractéristiques vibratoires des poutres à structure sandwich par approche analytique et expérimentale constitue elle-même un grand domaine de recherche depuis de nombreuses années. Maheri et Adams [20] ont étudié l'amortissement d'une poutre sandwich sous vibration en flexion en régime permanent par approche analytique et expérimentale. Assarar et al [21-22] ont mené une analyse approfondie de l'amortissement et du comportement en vibration des matériaux stratifiés et sandwichs dans le cas de la flexion des poutres. Sakar G. et Bolat F.C. [23] ont effectué une analyse vibratoire libre des structures sandwichs alvéolaires en aluminium expérimentalement et numériquement. Vlach et Pomp [24] ont analysé le comportement des échantillons de sandwich en aluminium utilisant l'analyse modale et la détermination expérimentale des propriétés d'amortissement des échantillons.

Le comportement dynamique des plaques auxétiques présente également d'intérêt, Scarpa et Tomlinson ont été parmi les premiers à étudier les caractéristiques vibratoires des nids d'abeilles auxétiques [25]. Lim [26] et Maruszewski et al. [27] ont étudié la vibration des plaques auxétiques circulaires et rectangulaires. D'autre part, la littérature recense beaucoup de travaux portant sur les propriétés vibratoires des poutres sandwichs à cœur viscoélastique tel que l'étude présentée pour la première fois vers les années 50 par Kerwin [28].

### **1.6 Conclusion**

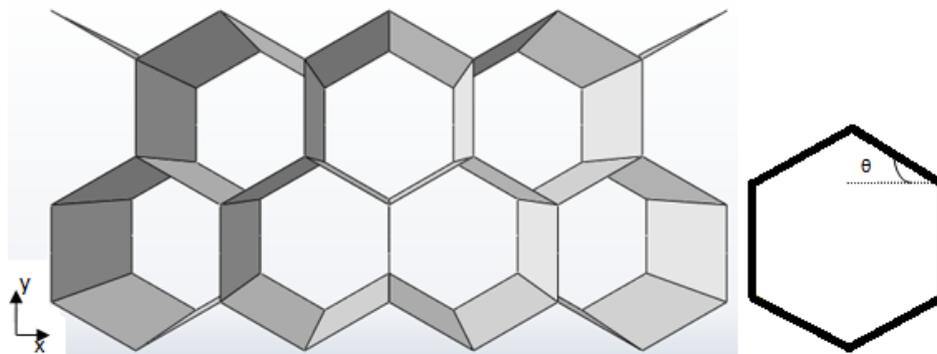
À travers ce présent chapitre, nous avons pu élargir nos connaissances concernant les matériaux sandwichs, les notions de base sur les différents constituants, domaine d'application et l'intérêt de son utilisation. Ensuite, nous avons présenté une brève revue dans la littérature sur la dynamique des panneaux sandwichs. Le chapitre suivant ouvrira le volet sur le modèle d'homogénéisation analytique pour calculer les propriétés macroscopiques des structures sandwichs d'âme périodique hexagonale.

## **CHAPITRE II**

**Calcul des constantes élastiques  
effectives pour les structures  
sandwichs en nid d'abeille**

## 2.1 Introduction

Les structures sandwichs en nid d'abeille, inspirées des nids d'abeilles, ont été utilisées dans divers domaines, notamment l'architecture, le transport, l'aérospatiale et l'automobile. Le terme "nid d'abeille" est utilisé dans un sens plus large pour décrire les matériaux cellulaires, selon la référence [29] le matériau cellulaire est un assemblage des cellules avec arêtes et faces solides, emballés ensemble pour remplir l'espace. Les cellules sont typiquement hexagonales, mais elles peuvent aussi être de forme variée. Le nid d'abeille, avec sa rangée régulière de cellules hexagonales ou prismatiques, représente un solide cellulaire dans deux dimensions [30]. De nombreux auteurs ont tenté de déterminer les modules élastiques effectifs en prenant une seule cellule représentative pour l'ensemble de la structure nid d'abeille (fig.2.1), puisque chaque cellule élémentaire du noyau hexagonal se répète périodiquement dans la direction du plan. Les propriétés du noyau équivalent sont les modules d'élasticités dans le plan ( $E_1$ ,  $E_2$ ) et hors plan ( $E_3$ ), les modules de cisaillement dans le plan ( $G_{12}$ ) et hors plan ( $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ), et les coefficients de Poisson ( $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$ ). Dans ce chapitre, nous passerons en revue la solution analytique du Gibson.



**Figure 2.1** Représentation schématique de la coupe dans le plan d'une structure en nid d'abeille hexagonale .

## 2.2 Méthode d'homogénéisation

L'homogénéisation analytique des nids d'abeilles s'avère très utile et efficace. L'homogénéisation, aussi appelée changement d'échelles ou passage micro-macro, désigne la procédure qui consiste à déterminer la modélisation homogène d'un milieu finement hétérogène. Pour que l'homogénéisation soit possible, il faut pouvoir définir un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) du matériau. Le résultat de l'homogénéisation, sur ce volume, sera le comportement du matériau homogène

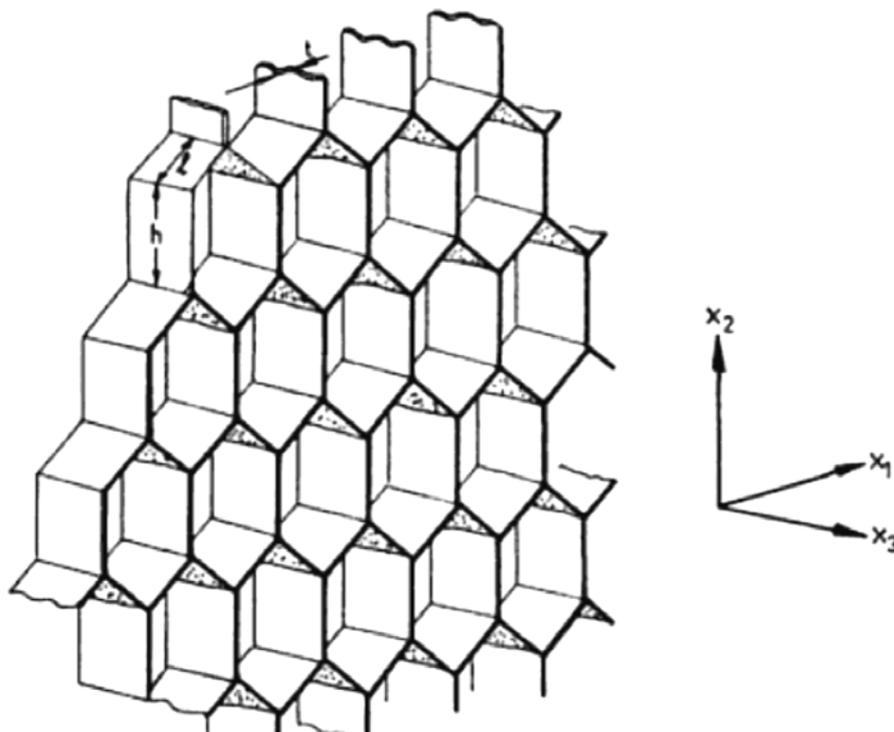
équivalent. De nombreuses références existent sur l'homogénéisation des sandwichs en nid d'abeilles dans la littérature [31-35].

Le livre de Gibson et Ashby [30] est la première littérature systématique sur le terrain qui présente les propriétés élastiques équivalentes dans le plan et hors plan des noyaux en nid d'abeille pour des formes hexagonales où le nid d'abeilles se déforme indépendamment sans tenir compte de l'effet des peaux. Dans ses recherches sur les matériaux cellulaires [30] a utilisé la théorie des poutres pour prédire les modules d'élasticité (figure 2.4 et 2.5). Plus tard, Masters et Evans [36] ont proposé d'autres améliorations pour prédire les propriétés élastiques effectives de nid d'abeille dans le plan en tenant compte des trois mécanismes de déformation notamment la flexion, l'articulation et l'étirement.

Xu et Qiao [37] ont proposé une autre approche pour homogénéiser une cellule de nid d'abeille avec l'effet des peaux.

### 2.3 Modèle de Gibson [30]

Le modèle de Gibson s'appuie sur les équations de l'élasticité pour déterminer les principaux modules et coefficients du nida en fonction de leurs paramètres géométriques. Les propriétés sont définies dans le plan (X, Y) et hors plan (Fig. 2.2).



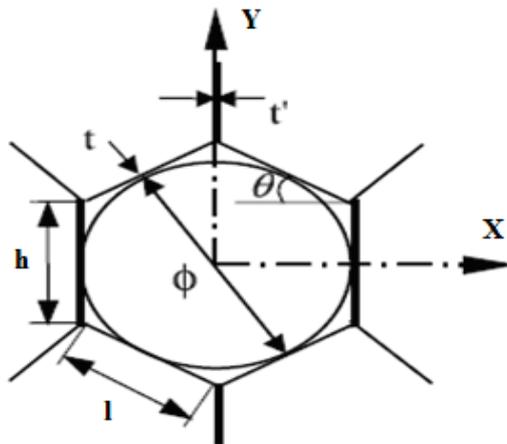
**Figure 2.2** Vue en perspective d'une structure en nid d'abeilles [30].

### 2.3.1 Géométrie et notations :

Il est à noter que la géométrie ainsi que les notations utilisées par la suite sont détaillées ci-après.

- Les modules d'élasticité :  $E_X$  où X est la direction de traction.
- Les coefficients de Poisson :  $\nu_{XY}$  où X est la direction de traction et Y la direction de contraction.
- Les modules de cisaillement :  $G_{XY}$  module de cisaillement dans le plan (X, Y).

Les modules sont calculés dans le repère (X, Y, Z), (Figure 2.3).



**Figure 2.3** Géométrie d'un nid d'abeille.

Un nid d'abeille est décrit par les paramètres géométriques suivants :

$\theta$  : Angle de la cellule.

$\phi$  : Diamètre de la cellule.

h : Longueur de la paroi centrale.

l : Longueur de la paroi inclinée.

t : Épaisseur de la paroi inclinée.

$h_c$  : Hauteur du nid d'abeilles.

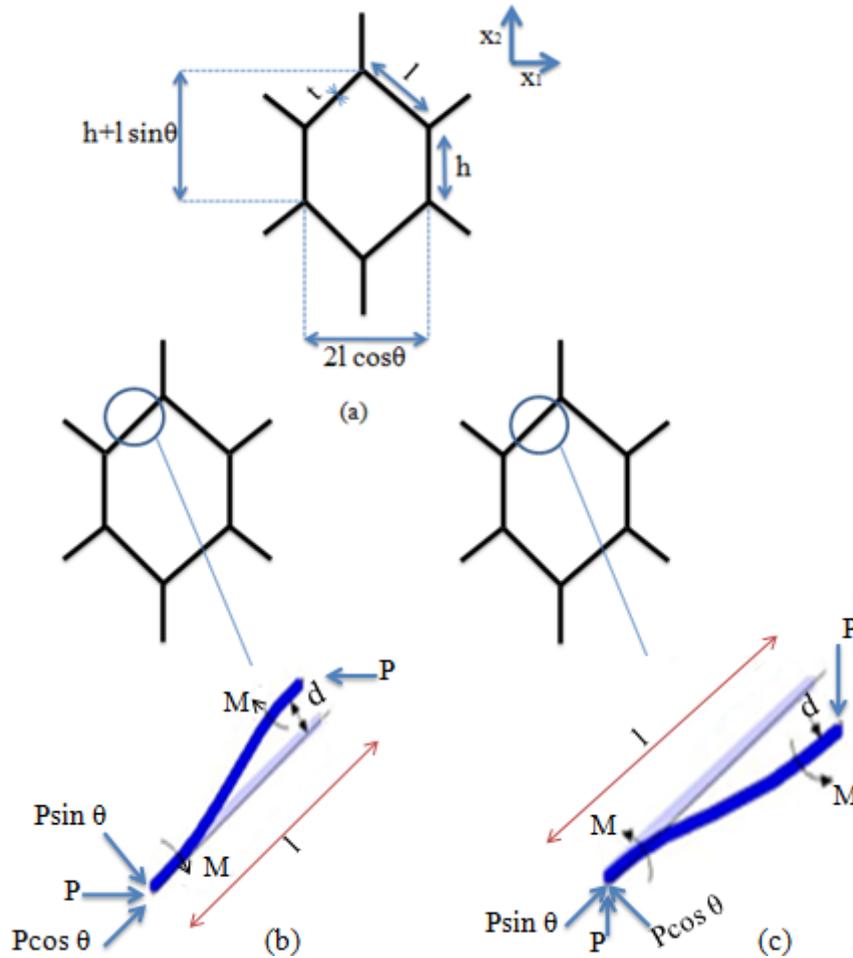
### 2.3.2 Propriétés dans le plan (X, Y)

L'hypothèse introduite par Gibson est que les déplacements sont uniquement dus à la flexion élastique des parois des cellules. Les effets de compression et de traction sont négligeables. Les caractéristiques qui entrent en jeu dans le plan sont :

- Les modules  $E_1$  et  $E_2$ ,
- Le module de cisaillement  $G_{12}$ ,
- Les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$ .

➤ **Modules  $E_1$  et  $E_2$**

Les modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  sont calculés en exerçant respectivement une pression suivant X et sur Y. On induit ainsi un effort P suivant les axes X et Y et donc des moments de flexion M. On considère le clinquant comme une poutre de longueur l, d'épaisseur t, de profondeur h et de module d'Young  $E_s$  [30]. L'étude de la poutre (Figure 2.4) permet d'obtenir l'équation du moment de flexion:



**Figure 2.4** Déformation des cellules sous une charge dirigée suivant  $X_1$  (b) et  $X_2$  (c)[38].

$$M = \frac{Pl \sin \theta}{2} \quad (2.1)$$

et

$$P = \sigma_1 (h + l \sin \theta) b \quad (2.2)$$

Le module d'Young  $E_1$  est défini en utilisant les relations suivantes:

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad (2.3)$$

avec:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\delta \sin \theta}{l \cos \theta}, \quad \delta = \frac{Pl^3 \sin \theta}{12E_s I} \quad (2.4)$$

La déformation  $\varepsilon_{11}$  s'écrit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{Pl^2 \sin^2 \theta}{12E_s I \cos \theta}, \quad I = \frac{bt^3}{12} \quad (2.5)$$

Le module d'Young  $E_1$  s'écrit alors:

$$E_1 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta} \quad (2.6)$$

On obtient le module d'Young  $E_2$  de la même manière que précédemment:

$$E_2 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^3 \theta} \quad (2.7)$$

Les coefficients de Poisson sont calculés de la manière suivante :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \quad \nu_{12} = \frac{\cos^2 \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta} \quad (2.8)$$

et

$$\nu_{21} = \frac{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta \cos^2 \theta} \quad (2.9)$$

### ➤ Module de cisaillement dans le plan $G_{12}$

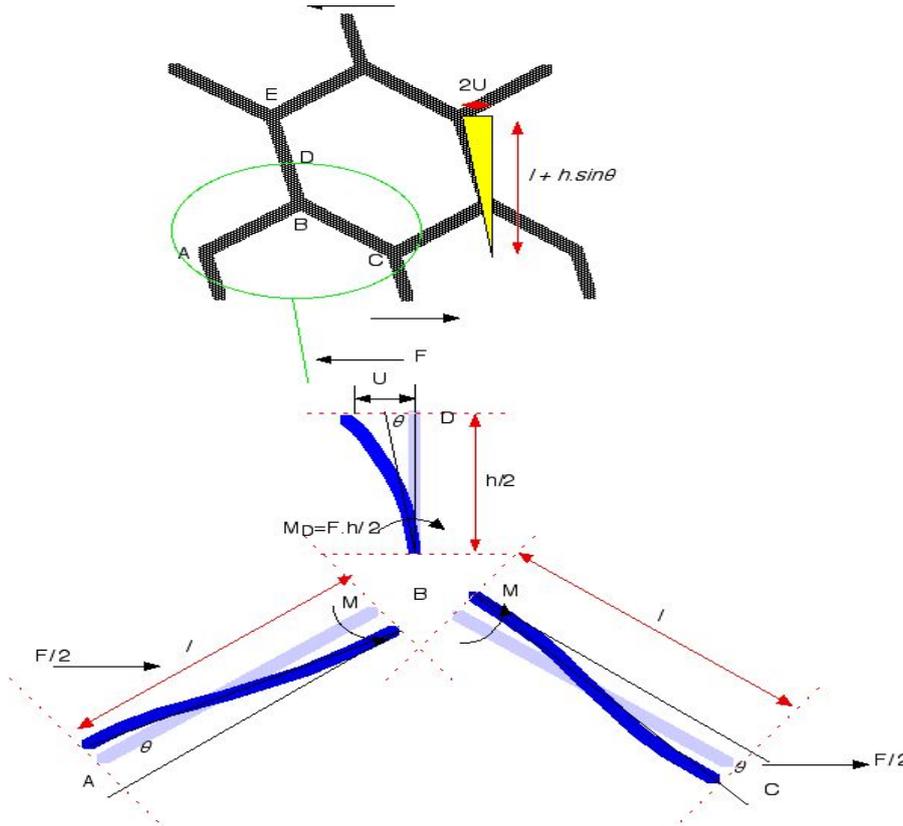
Le module de cisaillement dans le plan est calculé à partir du schéma de la figure 2.5. Les points A, B, C n'ont aucun mouvement relatif quand on exerce un état de cisaillement sur le nid d'abeille. Vu la symétrie, la déviation  $us$  est uniquement due à la flexion et à la rotation de la paroi (rotation d'angle  $\varphi$ ) autour de B [30]. La déviation  $U$  est de la forme:

$$U = \frac{1}{2} \varphi h + \frac{F \left( \frac{h}{2} \right)^3}{3E_s I} \quad (2.10)$$

La somme des moments au point B est nulle, on en déduit le moment au niveau d'AB et BC.

$$M = \frac{Fh}{4} \quad (2.11)$$

Ensuite on peut en déduire l'angle  $\varphi$  :  $\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\delta}{l}$  avec :  $\delta = \frac{Ml^2}{6E_s I}$



**Figure 2.5** Déformation en flexion et la rotation des parois des cellules [38].

En introduisant l'expression de l'angle  $\varphi$  dans l'expression de U, on obtient:

$$U = \frac{Fh^2}{48E_s I} (1 + 2h) \quad (2.12)$$

La relation de comportement en cisaillement s'écrit:

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (2.13)$$

avec :

$$\tau = \frac{F}{2bl \cos \theta} \quad (2.14)$$

et : 
$$\gamma = \frac{2U}{h + l \sin \theta} \quad (2.15)$$

Ceci nous donne pour  $G_{12}$ :

$$G_{12} = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{(h + l \sin \theta)}{\left( \frac{h}{l} \right)^2 + \left( 1 + \frac{2h}{l} \right) \cos \theta} \quad (2.16)$$

Les propriétés dans le plan jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des plaques sandwichs en nids d'abeilles.

### 2.3.3 Propriétés hors du plan

Ces propriétés sont intéressantes et jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des panneaux sandwichs, les propriétés concernées sont ( $E_3$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$ ). Les cinq constantes sont nécessaires pour décrire les déformations hors du plan.

#### ➤ Module d'élasticité $E_3$

Le module  $E_3$  est calculé en multipliant le module  $E_s$  du clinquant par le rapport «section de la cellule sur la surface totale de l'hexagone».

$$E_3 = E_s \frac{\text{Section de la cellule}}{2 \text{ Surface de l'hexagone}}$$

$$E_3 = E_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\left( \frac{h}{l} + 2 \right)}{2 \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (2.17)$$

Les deux coefficients de Poisson  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  sont supposés égaux au coefficient du matériau constituant le nida.

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_s \quad (2.18)$$

On déduit les deux autres coefficients de Poisson à partir de la relation de réciprocité:

$$\nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31} \quad (2.19)$$

$$v_{23} = \frac{E_2}{E_3} v_{32} \quad (2.20)$$

➤ **Module de cisaillement transverse  $G_{23}$ :**

La tâche pour déterminer les modules de cisaillement est difficile, car la distribution des contraintes est complexe. Les faces sur lesquelles on applique un cisaillement ne sont plus planes après déformation. On peut cependant utiliser des méthodes énergétiques pour borner ces modules, cette approche a été initiée par Kelsey [11].

Rappelons dans ce qui suit, les théorèmes des bornes qui sont basés sur le concept de l'énergie minimale.

**Borne supérieure :** Pour déterminer la borne supérieure, on utilise le principe du travail maximal. Il indique que l'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de déplacement virtuel compatible avec les conditions aux limites est supérieure à l'énergie utilisée par le champ de déplacement réel.

**Borne inférieure :** L'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de contrainte statiquement admissible (continu et vérifiant les conditions de bords) est inférieure à l'énergie de déformation obtenue par un champ de contraintes réelles.

***Théorème de la borne supérieure :***

$$\frac{1}{2} G_{j3} \gamma_{j3} V \leq \frac{1}{2} \sum_i G_s \gamma_i^2 V_i \quad (2.21)$$

avec :  $j=1,2$  et  $i=$  nombre des parois.

$G_j$  : Le module de cisaillement du matériau constituant les parois.

$V$  : Le volume de l'hexagone.

Dans le cas de nid d'abeille, on peut écrire:

$$\frac{1}{2} G_{j3} \gamma_{j3} S h \leq \frac{1}{2} \sum_i G_s \gamma_i^2 S_i h \quad (2.22)$$

$S$  : Projection dans le plan (X, Y) de l'hexagone.

$S_i$  : Projection dans le plan (X, Y) de la paroi  $i$ .

***Théorème de la borne inférieure :***

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{j3}^2}{G_{j3}} V \leq \left[ \frac{\tau_i^2}{G_s} V_i \right] \quad j = 1,2 \quad (2.23)$$

Dans le cas du nid d'abeille, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{j3}^2}{G_{j3}} S h \leq \left[ \frac{\tau_i^2}{G_s} S_i h \right] \quad j = 1,2 \quad (2.24)$$

Après simplification, les formules analytiques des différents modules de cisaillement transverses sont données par les équations (2.25) et (2.26) :

$$G_{23} = G_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\cos \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)} \quad (2.25)$$

$$G_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\frac{h}{l} + \sin \theta}{\cos \theta \left( \frac{h}{l} + 1 \right)} \leq G_{13} \leq G_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\frac{h}{l} + \sin^2 \theta}{\cos \theta \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)} \quad (2.26)$$

$G_s$  : le module de cisaillement du matériau constituant les parois.

Le tableau 2.1 résume les formules analytiques de Gibson avancées pour déterminer les propriétés élastiques du nid d'abeille qui tient en compte les effets des déformations membranaires et de la déformation de cisaillement des parois cellulaires [30].

**Tableau 2.1** Propriétés élastiques de Gibson du nid d'abeille hexagonale.

Modules	Formules analytiques de Gibson avancé
Module d'Young suivant X	$E_1 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta} \frac{1}{1 + (2.4 + 1.5\nu_s + \cot^2 \theta) \left( \frac{t}{l} \right)^2}$
Module d'Young suivant Y	$E_2 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^3 \theta} \frac{1}{\left[ 1 + \left( 2.4 + 1.5\nu_s + \tan^2 \theta + \frac{2 \left( \frac{h}{l} \right)}{\cos^2 \theta} \right) \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right]}$
Coefficient de Poisson $\nu_{12}$	$\nu_{12} = \frac{\cos^2 \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta} \frac{1 + (1.4 + 1.5\nu_s) \left( \frac{t}{l} \right)^2}{1 + (2.4 + 1.5\nu_s + \cot^2 \theta) \left( \frac{t}{l} \right)^2}$

Coefficient de Poisson $\nu_{21}$	$\nu_{21} = \frac{\sin \theta \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^2 \theta} \frac{1 + (1.4 + 1.5\nu_s) \left( \frac{t}{l} \right)^2}{1 + \left( 2.4 + 1.5\nu_s + \tan^2 \theta + \frac{2 \left( \frac{h}{l} \right)}{\cos^2 \theta} \right) \left( \frac{t}{l} \right)^2}$
Module de cisaillement dans le plan XY	$G_{12} = \frac{E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}{\left( \frac{h}{l} \right)^2 \cos \theta} \frac{1}{F}$ <p>Avec:</p> $F = \left[ 1 + 2 \left( \frac{h}{l} \right) + \left( \frac{t}{l} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\frac{h}{l}} (2.4 + 1.5\nu_s) \left( 2 + \frac{h}{l} + \sin \theta \right) + \frac{\frac{h}{l} + \sin \theta}{\left( \frac{h}{l} \right)^2} \left[ \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \tan^2 \theta + \sin \theta \right] \right\} \right]$

## 2.4 Modèle de Grédiac [40]

L'estimation des propriétés effectives des structures sandwichs à l'aide de l'approche éléments finis a d'abord été faite par Grédiac [40] qui a tenté d'évaluer numériquement l'influence de la hauteur du noyau sur le module de cisaillement hors plan de nid d'abeille.

Grédiac a caractérisé la cellule nid d'abeille par quatre grandeurs adimensionnelles avec la prise en compte également la double épaisseur des clinquants centraux.

$$R_1 = \frac{t}{b}, R_2 = \frac{a}{b}, R_3 = \frac{h}{a}, R_4 = \frac{t}{t}$$

Deux cas sont différenciés :

1<sup>er</sup> cas:  $R_4 = 2$

Le module de cisaillement dans les directions x et y est:

$$\frac{1 + R_2 \sin \theta}{R_2 (1 + R_2) \cos \theta} R_1 G \leq G_{xz} \leq \frac{1 + R_2 \sin^2 \theta}{(1 + R_2 \sin \theta) R_2 \cos \theta} R_1 G \quad (2.27)$$

$$G_{yz} = \frac{\cos \theta}{1 + R_2 \sin \theta} R_1 G \quad (2.28)$$

2<sup>ème</sup> cas:  $R_4 = 1$

Dans ce cas l'épaisseur du nid d'abeille est la même dans toutes les parois. Le module de cisaillement dans les directions x et y est :

$$\frac{1 + R_2 \sin \theta}{R_2 (2 + R_2) \cos \theta} R_1 G \leq G_{xz} \leq \frac{1 + 2R_2 \sin^2 \theta}{2R_2 (1 + R_2 \sin \theta) \cos \theta} R_1 G \quad (2.29)$$

$$G_{yz} = \frac{\cos \theta}{1 + R_2 \sin \theta} R_1 G$$

Grédiac a utilisé une technique de moindre carré sur 30 modules calculés différemment, pour identifier une valeur unique pour le module de cisaillement transverse  $G_{xz}$ . Le module de cisaillement transverse  $G_{xz}$  est estimé en fonction du rapport d'aspect  $R_3$  :

$$G_{xz} = G_{xz}^{\text{Min}} + \frac{0.787}{R_3} (G_{xz}^{\text{Max}} - G_{xz}^{\text{Min}}) \quad (2.30)$$

L'équation 2.30 représente une approximation du module de cisaillement transversal pour des angles de cellule internes positifs. Scarpa et al [41] ont montré que cette formule ne représente pas nécessairement une approximation satisfaisante dans le cas des nids d'abeilles auxétiques. Pour corriger l'approximation numérique, une analyse linéaire des moindres carrés sur 2600 valeurs du module de cisaillement transversal en nid d'abeille à coefficient de Poisson négatif a été effectuée, dont les angles de cellules varie de  $-5^\circ$  à  $-60^\circ$  et le rapport d'aspect de la cellule  $\alpha$  compris entre 0.5 et 4. Le module de cisaillement transverse s'exprime :

$$G_{xz} = G_{xz}^{\text{Min}} + \frac{1.342}{\left(\frac{b}{l}\right)} (G_{xz}^{\text{Max}} - G_{xz}^{\text{Min}}) \quad (2.31)$$

avec:

b:Hauteur de nid d'abeille

l: Largeur de la paroi inclinée

## **2.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le modèle de Gibson et Ashby pour le calcul des constantes élastiques et les travaux de recherche sur l'homogénéisation des structures en nid d'abeille hexagonale.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude analytique d'une nouvelle structure cellulaire nid d'abeille.

## **CHAPITRE III**

**Modèle raffiné pour  
l'homogénéisation de nouvelle cellule  
en nid d'abeille**

### 3.1 Introduction

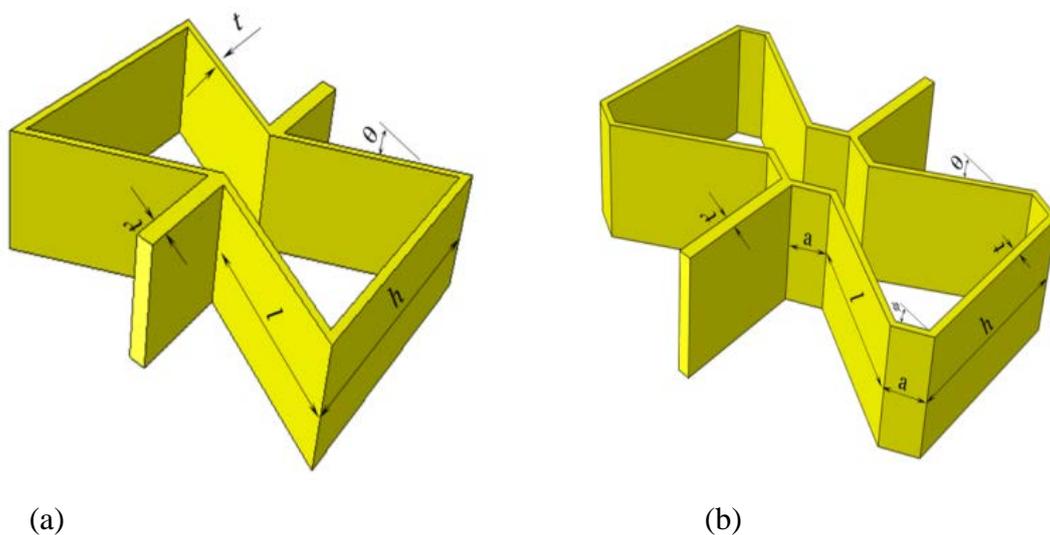
Les matériaux cellulaires, dits également matériaux alvéolaires, sont des matériaux qui ont connu un grand essor au cours des cinquante dernières années. Ces matériaux de faible densité, aussi bien naturels que synthétiques, sont raisonnablement utilisés dans l'industrie aérospatiale, principalement à cause de leur rapport rigidité/poids assez élevé. Les matériaux avec structure cellulaire sont largement présents dans la nature et ont de nombreuses applications d'ingénierie potentielle. L'homme a fait de nombreuses structures cellulaires artificielles, telles que matériaux en nid d'abeille utilisés pour des composants aérospatiaux légers. Un certain nombre d'études ont été publiées au cours des dernières années sur tel système, en particulier sur les nids d'abeilles à deux dimensions [30, 42-46]. El-Sayed et al. [47] ont publié les premiers travaux analytiques sur les propriétés mécaniques planes des nids d'abeilles. Les différents modèles analytiques s'appuient sur la théorie d'élasticité avec des hypothèses sur les mécanismes de déformation des parois des cellules. Lorsqu'ils sont chargés dans le plan, les nids peuvent se déformer par flexion et étirement des parois des cellules et aussi par pivotement des parois à leurs jonctions. Plusieurs chercheurs ont formulé des modèles mathématiques basés sur ces mécanismes. Ils ont utilisé [30-48] une modélisation dans le plan en supposant que les parois de cellule fléchissent comme des poutres. Certains chercheurs [49] ont montré que les modèles basés uniquement sur la flexion surestimaient les valeurs des modules élastiques par rapport à celles prévues par la modélisation moléculaire. Pour améliorer les modèles de [48-36] ont intégré dans leurs études les effets d'étirement et de pivotement des parois de cellules. Plusieurs géométries en nid d'abeille telles que carré, triangulaire, hexagonale, diamant et mixte ont été étudiées analytiquement en utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli [50]. Certains travaux ont proposé les microstructures de géométrie en forme d'étoile telle que [51]. D'autres ont proposé [52] et [53] des conceptions structurelles formées par des extensions de la forme de base triangulaire qui fournit un plus grand module d'élasticité. Les références [54-55] ont également proposé des cellules de formes variées. Cependant, la plupart de ces géométries des cellules proposées ont des limites de fabrication, de sorte qu'elles ne peuvent pas être pleinement utilisées dans la pratique voir [56].

L'analyse présentée dans cette partie met en évidence la possibilité d'augmenter la précession sur les modules effectifs d'une nouvelle configuration de cellule en forme

nid d'abeille représentée sur la fig.1.3.b. Un modèle analytique raffiné a été développé et les constantes élastiques sont déterminées en utilisant une approche basée sur le théorème énergétique avec la prise en compte de l'effet de cisaillement et de membrane. C'est une extension d'une étude antérieure basée uniquement sur la flexion. Par la suite, une présentation de formulation d'éléments finis permet de faire la comparaison avec la solution analytique.

### 3.2 Géométrie de cellule

La nouvelle cellule est présentée par la figure 3.1.b. La géométrie de la cellule étudiée peut être exprimée par trois parois définissant avec des longueurs  $h$ ,  $l$  et  $a$ , l'épaisseur  $t$ , et deux angles de cellules internes ( $\theta$  et  $\varphi$ ). Comme d'autres notations utilisées dans la théorie de la matière cellulaire [30-57], la géométrie de la cellule unitaire est également définie par des paramètres non dimensionnels  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  ( $\alpha = h/L$ ,  $\beta = a/L$ ,  $\gamma = t/L$ ). La cellule présente une forme générale, en quelque sorte, qu'elle peut représenter une cellule en nid d'abeille conventionnelle pour  $a = 0$  et un angle positif  $\theta > 0$ , ou une cellule auxétique pour un angle négatif  $\theta < 0$ . Cette cellule est proposée et étudiée pour aider à expliquer l'effet de chacun des paramètres géométriques ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ ) sur le comportement élastique dans le plan et sur les valeurs du module d'élasticité homogénéisé dans le plan.



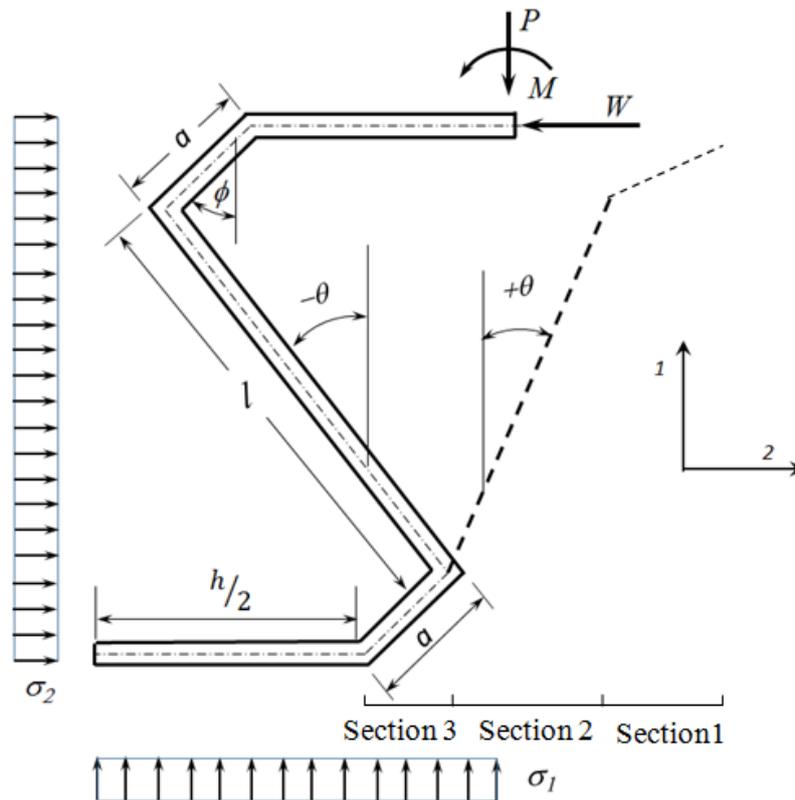
**Figure 3.1** Cellule en nid d'abeille auxétique.

(a) Configuration classique réentrante.

(b) Nouvelle conception de la cellule réentrante.

### 3.3 Étude analytique

Le modèle analytique développé dans cette partie a été étudié par [43] et la solution du problème donnée ne tient pas compte de l'énergie de déformation associée à l'effort tranchant et l'effort normal, dans cette partie une étude raffinée sera exposée et nous considérons les deux cas de chargement, l'un dans le sens horizontal, l'autre dans le plan vertical (Fig.3.2)[58].



**Figure 3.2** Modèle de cellule en nid d'abeille et charges utilisées dans le développement du modèle raffiné: Répartition globale des contraintes pour l'évaluation de  $E_1$ ,  $E_2$ .

#### 3.3.1 Les propriétés dans le plan de la nouvelle cellule nid d'abeille

Dans le présent modèle analytique raffiné, les cellules périodiques sont modélisées par un réseau de poutre [59-36-60-61]. Le modèle prend en compte un quart de la cellule. Les propriétés mécaniques du nid d'abeilles sont évaluées en tenant compte des différents types des mécanismes de déformation dans le plan (flexion, membrane et cisaillement) tout en considérant les parois cellulaires comme des éléments de poutre fixés à une extrémité et sollicités par ( $W$ ,  $P$ ,  $M$ ) à l'autre extrémité. Selon la théorie de la poutre élastique, l'énergie de déformation élastique s'exprime :

$$U = U_N + U_M + U_T = \int_0^l \left( \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GA^*} \right) dx \quad (3.1)$$

Avec: N: est la force axiale, T: effort tranchant et M le moment de flexion interne. Es le module d'Young du matériau, G est le module de cisaillement, A est la section transversale, A\* est la section réduite par cisaillement, I le moment d'inertie de la surface et L la longueur du faisceau.

Selon le théorème de Castigliano, le déplacement d'un point sous l'effet de la force P pour une poutre s'exprime :

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \quad (3.2)$$

### 3.3.1.1 Module d'élasticité E<sub>1</sub>

La distribution des efforts sous chargement dans la direction verticale, pour différentes sections et pour le quart de la cellule donnée par :

#### -Flexion (voir fig.3.2)

$$\text{Section 1: } M(x) = M - Px \sin(\varphi)$$

$$\text{Section 2: } M(x) = M - Pa \sin(\varphi) - Px \sin(\theta) \quad (3.3)$$

$$\text{Section 3: } M(x) = M - Pl \sin(\theta) - P(a+x) \sin(\varphi)$$

Le moment de flexion M en fonction de la charge concentrée, P s'exprime par:

$$M = \frac{P}{2} [L \sin(\theta) + 2a \sin(\varphi)] \quad \text{Pour assurer l'équilibre}$$

Le déplacement du système de poutre sous la charge concentrée P s'exprimé dans le cas de la flexion comme suit:

$$u_1^M = \frac{\partial U_M}{\partial P} \quad (3.4)$$

$$u_1^M = \frac{1}{2} \frac{P}{E_s b} \left( \frac{L}{t} \right)^3 \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\theta - 8\beta^3 \cos 2\varphi + 6\beta + 8\beta^3 - 6\beta \cos 2\theta \\ -12\beta^2 \cos(\theta + \varphi) + 12\beta^2 \cos(\theta - \varphi) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

#### -Membrane (voir fig.3.2)

$$\text{Section 1: } N(x) = P \cos(\varphi)$$

$$\text{Section 2: } N(x) = P \cos(\theta) \quad (3.6)$$

$$\text{Section 3: } N(x) = P \cos(\varphi)$$

Le déplacement le long de la direction verticale est donné par :

$$u_1^N = \frac{\partial U_N}{\partial P} \quad (3.7)$$

$$u_1^N = \frac{1}{2} \frac{P}{E_s b} \left( \frac{L}{t} \right) (1 + 2\beta + \cos 2\theta + 2\beta \cos 2\varphi) \quad (3.8)$$

**-Cisaillement (voir fig.3.2)**

Section 1:  $T(x) = P \sin(\varphi)$

Section 2:  $T(x) = P \sin(\theta)$  (3.9)

Section 3:  $T(x) = P \sin(\varphi)$

Le déplacement le long de la direction verticale est donné par :

$$u_1^T = \frac{\partial U_T}{\partial P} \quad (3.10)$$

$$u_1^T = \frac{6(1+\nu_s)}{5} \frac{P}{E_s b} \left( \frac{L}{t} \right) (1 + 2\beta - \cos 2\theta - 2\beta \cos 2\varphi) \quad (3.11)$$

Le déplacement total pour toutes les contributions le long de la direction verticale est donnée par :

$$u_{1-1} = u_1^M + u_1^N + u_1^T$$

$$u_{1-1} = \frac{P}{E_s b} u_{1-1} = \frac{P}{E_s b} \left[ \frac{1}{2\gamma^3} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\theta - 8\beta^3 \cos 2\varphi \\ +6\beta + 8\beta^3 - 6\beta \cos 2\theta + \\ +12\beta^2 \cos(\theta - \varphi) \\ -12\beta^2 \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\gamma} \begin{pmatrix} 2\beta + 2\beta \cos 2\varphi + 1 \\ + \cos 2\theta \end{pmatrix} \right] + \frac{6(1+\nu_s)}{5\gamma} (2\beta - 2\beta \cos 2\varphi + 1 - \cos 2\theta) \quad (3.12)$$

Pour une section transversale de paroi rectangulaire, la contrainte et la déformation correspondante selon la direction verticale sont données par :

$$\sigma_1 = \frac{P}{b(h + l \sin \theta + 2a \sin \varphi)}; \varepsilon_1 = \frac{u_1}{(l \cos \theta + 2a \cos \varphi)} \quad (3.13)$$

Le module de Young homogénéisé sera donc calculé comme le rapport entre la contrainte de traction  $\sigma_1$  et la déformation  $\varepsilon_1$  données par les formules (3.13).

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le rapport du module de Young homogénéisée  $E_1$  du nid-d'abeille par rapport au matériau de base  $E_s$ .

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{\cos \theta + 2\beta \cos \varphi}{\alpha + \sin \theta + 2\beta \sin \varphi} \left( \frac{1}{\bar{u}_{1-1}} \right) \quad (3.14)$$

On pourrait revenir à la configuration classique en nid d'abeille proposé par Gibson, en substituant  $\varphi=0^\circ$ ,  $\beta=0$ . Il faut noter que les résultats obtenus coïncident avec ceux donnés par [30] :

$$\frac{E_1}{E_s} = \gamma^3 \frac{\cos \theta}{(\alpha + \sin \theta) \sin^2 \theta} \left( \frac{1}{1 + \gamma^2 \left( \cot^2 \theta + \frac{12}{5} (\nu_s + 1) \right)} \right) \quad (3.15)$$

### 3.3.1.2 Coefficient de Poisson $\nu_{12}$

Le coefficient de Poisson est défini comme le rapport négatif de la déformation transversale à la déformation longitudinale dans la direction de la force. Nous avons:

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1}{l \cos(\theta) + 2a \cos(\varphi)} \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u_2}{h + l \sin(\theta) + 2a \sin(\varphi)} \quad (3.17)$$

Le déplacement dans le sens (2) dû à une force appliquée dans le sens (1) est donné par:

$$u_{2-1} = \frac{P}{E_s b} u_{2-1} = \frac{P}{E_s b} \left[ \frac{1}{2\gamma^3} \left( \frac{12\beta \cos^2 \theta + 16\beta^3 \cos^2 \varphi + 1}{+24\beta^2 \cos \theta \cos \varphi + \cos 2\theta} \right) + \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{2\beta - 2\beta \cos 2\varphi}{+1 - \cos 2\theta + 2\alpha} \right) + \frac{6(1 + \nu_s)}{5\gamma} (2\beta + 2\beta \cos 2\varphi + 1 + \cos 2\theta) \right] \quad (3.18)$$

Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  sera calculé suivant la définition ci-dessous en introduisant l'équation (3.12) et (3.18) :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{L \cos \theta + 2\alpha \cos \varphi}{h + L \sin \theta + 2\alpha \sin \varphi} \left( \frac{\bar{u}_{2-1}}{\bar{u}_{1-1}} \right) \quad (3.19)$$

Si la paroi de base  $a=0$ , et l'inclinaison  $\varphi=0$ , on obtient l'expression donnée par [1] :

$$\nu_{12} = -\frac{\cos^2 \theta}{(\alpha + \sin \theta) \sin \theta} \frac{\left[ 1 + \left( \left( \frac{7}{5} \right) + \left( \frac{12}{5} \right) \nu_s \right) \gamma^2 \right]}{\left[ 1 + \gamma^2 \left( \cot^2 \theta + \left( \left( \frac{12}{5} \right) + \left( \frac{12}{5} \right) \nu_s \right) \right) \right]} \quad (3.20)$$

### 3.3.1.3 Module d'élasticité $E_2$

Le système comportant trois éléments de poutre constituant le quart de cellule en nid d'abeille est simultanément soumis à trois sollicitations représentées par la flexion, la membrane et le cisaillement (voir la fig.3.2). Le moment de flexion  $M$  en fonction de la charge concentrée,  $W$  s'exprime par:

$$M = \frac{W}{2} [L \cos(\theta) + 2a \cos(\varphi)]$$

Le module de Young  $E_2$  est calculé d'une façon similaire que le précédent module  $E_1$ . Par conséquent, la contrainte et la déformation correspondante dans la direction 2 sont:

$$\sigma_2 = \frac{W}{b [l \cos(\theta) + 2a \cos(\varphi)]} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u_2}{b [h + l \sin(\theta) + 2a \sin(\varphi)]} \quad (3.22)$$

alors:

$$\frac{E_2}{E_s} = \frac{(\alpha + \sin \theta + 2\beta \sin \varphi)}{(\cos \theta + 2\beta \cos \varphi)} \left[ \frac{1}{\bar{u}_{2-2}} \right] \quad (3.23)$$

avec:

$$\bar{u}_{2-2} = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta + 16\beta^3 \cos^2 \varphi + 12\beta \cos^2 \theta + 24\beta^2 \cos \theta \cos \varphi) \\ + \gamma^2 (2\alpha + 2\beta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta) \\ + \frac{12(1+\nu_s)}{5} \gamma^2 (\cos^2 \theta + 2\beta \cos^2 \varphi) \end{array} \right) \quad (3.24)$$

Pour confirmer et valider le résultat obtenu, on impose  $\varphi=0^\circ$ ,  $\beta=0$ , on revient à la cellule classique proposée par [30] :

$$\frac{E_2}{E_s} = \gamma^3 \frac{(\alpha + \sin \theta)}{(\cos \theta)^3} \frac{1}{1 + \left( \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \nu_s + \tan^2 \theta + \frac{2\alpha}{\cos^2 \theta} \right) \gamma^2} \quad (3.25)$$

### 3.3.1.4 Coefficient de Poisson $\nu_{21}$

Le coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  est calculé comme suit:

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\alpha + \sin \theta + 2\beta \sin \varphi}{\cos \theta + 2\beta \cos \varphi} \left( \frac{\bar{u}_{1-2}}{\bar{u}_{2-2}} \right) \quad (3.26)$$

avec:

$$\bar{u}_{1-2} = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin 2\theta + 3\beta \sin 2\theta + 6\beta^2 \sin(\theta + \varphi) + 4\beta^3 \sin 2\varphi \\ -\gamma^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \beta \sin 2\varphi \right) + \frac{12}{5} (1 + \nu_s) \gamma^2 \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \beta \sin 2\varphi \right) \end{array} \right) \quad (3.27)$$

### 3.3.1.5 Module de cisaillement $G_{12}$

Le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  est évalué en introduisant les effets des déformations axiales et de cisaillement de la paroi verticale  $h/2$  et oblique de longueur  $(a, L)$ . La flexion dans les éléments se traduit par une rotation du nœud joignant les éléments, et le moment linéaire qui s'annule au mi-portée du tronçon  $(a+L/2)$  (Figure 3.3) [62].

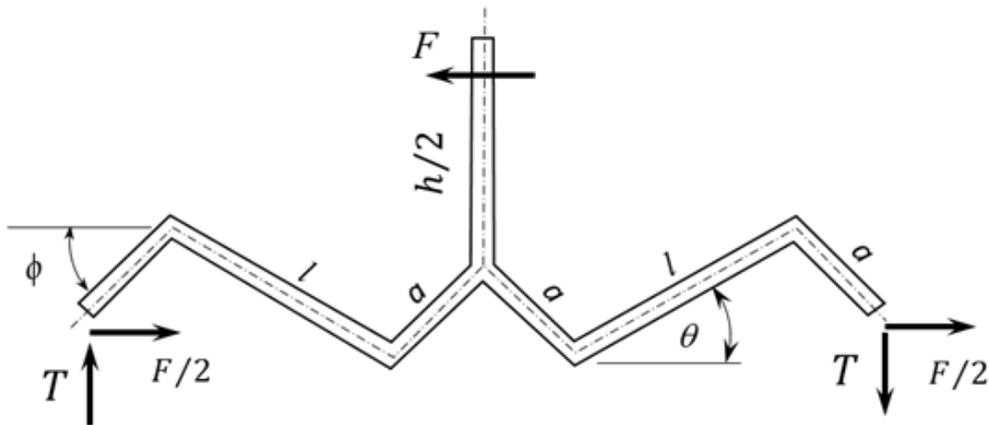


Figure 3.3 Les sollicitations en cisaillement de la cellule unitaire.

La déflexion horizontale de paroi verticale h, incluant des déformations de cisaillement :

$$u_h = \frac{Fh^2}{48E_s I} \left[ 1 + 2a + 2h + \frac{24}{5}h(1+\nu_s) \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right] \quad (3.28)$$

La déformation de cisaillement du coté "h" est exprimée par :

$$\gamma_h = \frac{Fh^2}{24E_s I} \left[ 1 + \frac{2}{l}(a+h) + \frac{2}{\left(\frac{h}{l}\right)} \left( \frac{12}{5} + \frac{12}{5}\nu_s \right) \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right] \frac{1}{\left( \frac{h}{l} + 2\frac{a}{l}\sin\varphi + \sin\theta \right)} \quad (3.29)$$

La déformation dans l'élément oblique du coté "L" donnée par :

$$\gamma_L = 2 \frac{u_{mem} + u_{shear}}{l \cos\theta + 2a \cos\varphi} \quad (3.30)$$

avec:

$$u_{mem} = \frac{Ft^2}{48E_s I} \left[ (L \cos\theta + 2a \cos\varphi) + (h + L \sin\theta + 2a \sin\varphi) \left( \frac{L \sin\theta + 2a \sin\varphi}{L \cos\theta + 2a \cos\varphi} \right) \right] \sin\theta \quad (3.31)$$

$$u_{shear} = \frac{Ft^2}{48E_s I} h \frac{12}{5} (1+\nu) \cos\theta \quad (3.32)$$

alors:

$$\gamma_L = \frac{Ft^2}{24E_s I} \left[ \left( 1 + (\alpha + \sin\theta + 2\beta \sin\varphi) \left( \frac{\sin\theta + 2\beta \sin\varphi}{(\cos\theta + 2\beta \cos\varphi)^2} \right) \right) \sin\theta + \frac{12}{5} (1+\nu_s) \left( \frac{\alpha}{\cos\theta + 2\beta \cos\varphi} \right) \cos\theta \right] \quad (3.33)$$

La déformation totale:

$$\gamma = \gamma_L + \gamma_h = \frac{F}{2E_s bt} \left[ \left( 1 + (\sin\theta + 2\beta \sin\varphi) \left( \frac{\alpha + \sin\theta + 2\beta \sin\varphi}{(\cos\theta + 2\beta \cos\varphi)^2} \right) \right) \sin\theta + \left( \frac{1+2(\beta+\alpha)}{\gamma^2} \right) \frac{\alpha^2}{\alpha + 2\beta \sin\varphi + \sin\theta} + \alpha \frac{12}{5} (1+\nu_s) \left( \frac{\cos\theta}{\cos\theta + 2\beta \cos\varphi} + \frac{2}{\alpha + 2\beta \sin\varphi + \sin\theta} \right) \right] \quad (3.34)$$

Le module de cisaillement :  $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F}{2b(L \cos \theta + 2a \cos \varphi)\gamma}$

$$\frac{G_{12}}{E_s} = \gamma^3 \left( \frac{\alpha + 2\beta \sin \varphi + \sin \theta}{\cos \theta + 2\beta \cos \varphi} \right) \frac{1}{S'} \quad (3.35)$$

avec :

$$S' = (1 + 2(\beta + \alpha))\alpha^2 + \gamma^2 \left[ \begin{aligned} & \alpha \frac{12}{5}(1 + \nu_s) \left( 2 + \frac{(\alpha + 2\beta \sin \varphi + \sin \theta)}{(\cos \theta + 2\beta \cos \varphi)} \cos \theta \right) + \\ & \left( (\alpha + 2\beta \sin \varphi + \sin \theta) + \frac{(\alpha + 2\beta \sin \varphi + \sin \theta)^2}{(\cos \theta + 2\beta \cos \varphi)^2} (\sin \theta + 2\beta \sin \varphi) \right) \sin \theta \end{aligned} \right]$$

Si on pose a=0, on revient au module de cisaillement d'une cellule hexagonale avec la prise des effets axiaux et de cisaillement [30].

$$G_{12} = E_s \gamma^3 \frac{\alpha + \sin \theta}{\alpha^2 \cos \theta} \frac{1}{(1 + 2\alpha) + \gamma^2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{\alpha} \right) \frac{12}{5}(1 + \nu_s) (2 + (\alpha + \sin \theta)) + \\ & \frac{1}{a^2} (\alpha + \sin \theta) (\sin \theta + (\alpha + \sin \theta) \tan^2 \theta) \end{aligned} \right]} \quad (3.36)$$

Notez que dans nos expressions analytiques données par les équations (3.15), (3.20), (3.25) et (3.36), le facteur de correction de cisaillement K est pris égal à 5/6. Ce facteur est modifié par Gibson et Ashby sur la base des résultats d'Olsson [63]. Ce dernier incorpore l'effet du coefficient de Poisson  $\nu$  sur le facteur de correction de cisaillement K. Dans les équations avancées de Gibson et Ashby, le facteur de correction de cisaillement K est exprimé comme suit:

$$K = \frac{5}{6} \frac{(1 + \nu)}{(1 + \alpha \nu)}$$

avec:  $\alpha=5/8$ .

Ce qui conduit à la rigidité de cisaillement suivante:

$$GA^* = \frac{EA}{2.4 + 1.5\nu}$$

Dans notre étude la rigidité de cisaillement s'exprime par :

$$GA^* = \frac{EA}{\frac{12}{5}(1+\nu)}$$

### 3.3.2 Les propriétés hors plan de la nouvelle cellule nid d'abeille

Les matériaux cellulaires sont connus par leur faible densité, ou plus exactement leur faible densité relative définie comme le rapport de la densité du matériau cellulaire à celle du matériau constitutif du squelette, généralement considéré comme un paramètre important pour déterminer le comportement mécanique des matériaux cellulaires [30]. Les modes de déformation dominants dans ces matériaux sont donc la flexion et le cisaillement et les effets axiaux de compression ou traction des clinquants constituants les cellules. Pour caractériser un matériau cellulaire tel que les nids d'abeilles (Fig.1.3.b), le paramètre le plus fréquemment utilisé est la densité relative généralement notée  $\rho/\rho_s$ , peut donc être écrit comme :

$$\frac{\rho}{\rho_s} = \gamma \frac{2 + 4\beta + \alpha}{2(2\beta \cos \varphi + \cos \theta)(\alpha + \sin \theta + 2)} \quad (3.37)$$

#### 3.3.2.1 Module d'élasticité $E_3$

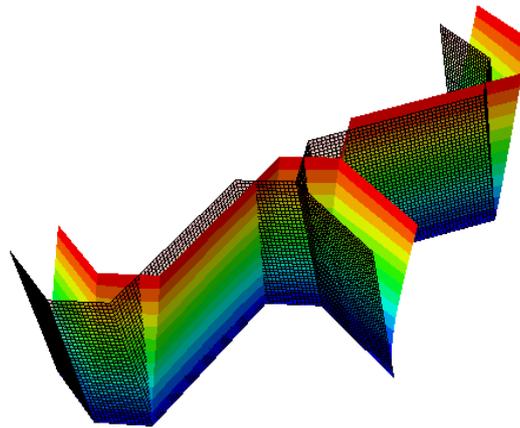
Les nids d'abeilles sont souvent utilisés comme noyaux dans les panneaux sandwich, tous aujourd'hui exploitent ce type de structure. Ici, nous notons que la fonction du noyau en nid d'abeille est de transmettre les charges normales et de cisaillement selon des plans contenant l'axe du prisme hexagonal de la direction  $X_3$ . Lorsqu'il est chargé dans cette direction les parois des cellules sont étendues ou compressées (plutôt que courbé) et les modules pour les nids d'abeilles, sont beaucoup plus grandes que celles dans le plan de chargement.

Tout au long, on suppose une faible densité, de sorte que  $(t/l) \ll 1$ , et que toutes les parois ont la même épaisseur  $t$ . Cinq modules supplémentaires sont nécessaires pour décrire la déformation hors plan, donnant un total de neuf pour une description complète de la nouvelle cellule. Le module d'élasticité  $E_3$  pour un chargement normal dans la direction  $x_3$  reflète simplement le module du solide  $E_s$ , redimensionnée par la superficie de la section :

$$\frac{E_3}{E_s} = \frac{t}{l} \left\{ \frac{2 + 4\frac{a}{l} + \frac{h}{l}}{2\left(\frac{h}{l} + \sin(\theta) + 2\frac{a}{l}\sin(\varphi)\right)\left(2\frac{a}{l}\cos(\varphi) + \cos\right)} \right\} \quad (3.38)$$

### 3.3.2.2 Module de cisaillement $G_{13}$ et $G_{23}$

La répartition des contraintes dans les rayons cisailés est complexe [1], chaque face de la cellule étant soumise à une déformation non uniforme en raison des contraintes imposées à ses limites par des voisins proches, tandis que le plan en nid d'abeille ne peut pas resté plane, pendant le chargement. Des calculs exacts sont possibles uniquement en utilisant des méthodes numériques [41-40-64-65]. Cependant, les deux bornes supérieures (Voigt) et inférieures (Reuss) pour la rigidité de cisaillement peuvent être formulées en utilisant une simplification de la méthode utilisée par Kelsey et al. [39-30], ce qui implique le calcul de l'énergie de déformation associée à la distribution de contrainte permettant des déformations et compatibles avec la répartition des contraintes d'équilibre satisfaisant. Si les deux limites coïncident, alors la solution est unique, sinon la vraie solution se trouve entre elles [41].



**Figure 3.4** Déformée d'une demi-cellule soumise à un effort de cisaillement pour caractériser le  $G_{13}$ .

Les bornes du module de cisaillement  $G_{13}$  sont calculées d'après la méthode exposée dans la référence [57]. Considérons une déformation uniforme de cisaillement  $\gamma_{13}$ , provoquée par la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  agissant sur la face normale à 3 selon la direction 1, comme dans la fig.3.5. Le théorème de l'énergie potentielle minimale est évalué par la somme des énergies partielles de chaque paroi, sous la forme:

$$\frac{1}{2} G_{13} \gamma_{13}^2 V \leq \frac{1}{2} \sum_i G_c \gamma_i^2 V_i \quad (3.39)$$

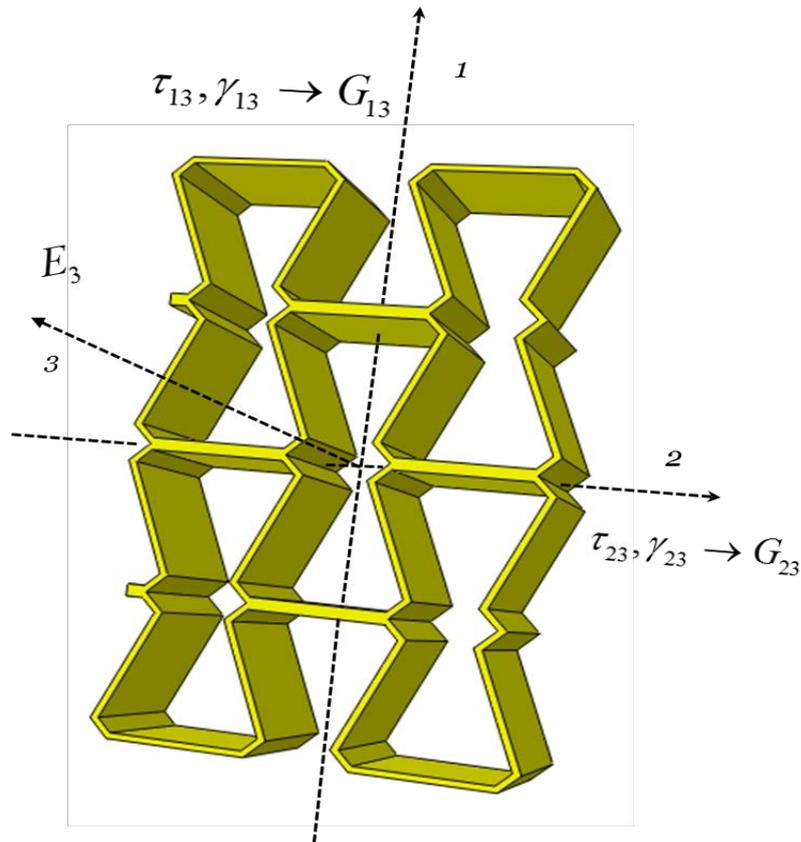
Avec :  $G_s$  est le module de cisaillement du matériau de la paroi cellulaire,  $\gamma_i$  sont les

déformations de cisaillement dans les parois. La sommation est effectuée sur les trois parois cellulaires a, h et L, du volume  $V_a$ ,  $V_h$  et  $V_l$ . Les déformations de cisaillement dans les parois sont les suivants:

$$\begin{cases} \gamma_h = 0 \\ \gamma_a = \gamma_{13} \cos \varphi \\ \gamma_l = \gamma_{13} \cos \theta \end{cases} \quad (3.40)$$

Les volumes sont les suivants:

$$\begin{cases} V_h = h.t \\ V_a = a.t \\ V_l = l.t \end{cases} \quad (3.41)$$



**Figure 3.5** Modèle utilisé dans l'évaluation des modules hors plan: Définition des modules.

$$V = (2h + 4a \sin \varphi + 2l \sin \theta)(2l \cos \theta + 4a \cos \varphi)$$

Cela peut être reformulé, en utilisant les paramètres adimensionnels:

$$S = (2\alpha + 4\beta \sin \varphi + 2 \sin \theta)(2 \cos \theta + 4\beta \cos \varphi) \quad (3.42)$$

L'évaluation de l'équation (3.39) donne:

$$\frac{G_{13}}{G_s} \leq \frac{8\beta \cos^2 \varphi + 4 \cos^2 \theta}{S} \gamma = \frac{4\beta \cos^2 \varphi + 2 \cos^2 \theta}{4\beta + 2 + \alpha} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (3.43)$$

Le théorème de l'énergie potentielle minimale fournit la borne Voigt, et le théorème de l'énergie complémentaire minimum donne la borne Reuss liée pour le module de cisaillement. Pour l'utilisation de ce théorème, il est supposé que la contrainte externe  $\tau_{13}$  peut induire des contraintes de cisaillement  $\tau_h$ ,  $\tau_a$  et  $\tau_l$  dans les trois parois cellulaires. Le théorème peut alors être exprimé comme une inégalité entre deux valeurs d'énergie et pour chaque sens d'action.

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{13}^2}{G_s} V \leq \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\tau_i^2}{G_c} V_i \right) \quad (3.44)$$

La paroi h ne transmette aucune charge de cisaillement donc :

$$\tau_h = 0$$

Équilibre des nœuds dans la direction 3 :

$$\tau_a = \tau_l$$

En équilibre avec la contrainte externe, on obtient:

$$\tau_{13} V = 4\tau_l t l \cos \theta + 8\tau_a t a \cos \varphi \quad (3.45)$$

Donc :

$$\frac{G_{13}}{G_s} \geq \frac{(8\beta \cos \varphi + 4 \cos \theta)^2}{S(8\beta + 4)} \gamma = \frac{2(2\beta \cos \varphi + 2 \cos \theta)^2}{(2\beta + 1)(4\beta + 2 + \alpha)} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (3.46)$$

En suivant la même démarche que le module de cisaillement  $G_{13}$  en utilisant le théorème de l'énergie potentielle minimale. On peut équilibrer le  $\gamma_{23}$  pour chaque paroi et au niveau des nœuds on trouve :

$$\begin{cases} \gamma_h = \gamma_{23} \\ \gamma_a = \gamma_{23} \sin \varphi \\ \gamma_l = \gamma_{23} \sin \theta \end{cases} \quad (3.47)$$

En utilisant la formulation :

$$\frac{1}{2} G_{23} \gamma_{23}^2 V \leq \frac{1}{2} \sum_i (G_c \gamma_i^2 V_i) \quad (3.48)$$

$$\frac{G_{23}}{G_s} \leq 2 \frac{\alpha + 4\beta \sin^2 \varphi + 2 \sin^2 \theta}{S} \gamma = \frac{\alpha + 4\beta \sin^2 \varphi + 2 \sin^2 \theta}{(4\beta + 2 + \alpha)} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (3.49)$$

Appliquons le théorème de l'énergie complémentaire minimum, on peut calculer les contraintes de cisaillement induites dans les trois parois ( $\tau_a$ ,  $\tau_l$  et  $\tau_h$ ). En équilibre, on obtient:

$$\tau_a = \tau_l$$

$$\tau_h = \tau_a + \tau_a = 2\tau_a = 2\tau_l$$

L'équilibre avec la contrainte externe assure:

$$\frac{G_{23}}{G_s} \geq \frac{(4\alpha + 8\beta \sin \varphi + 4 \sin \theta)^2}{S(8\beta + 4 + 8\alpha)} \gamma = \frac{(2\alpha + 4\beta \sin \varphi + 2 \sin \theta)^2}{(4\beta + 2 + 4\alpha)(4\beta + 2 + \alpha)} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (3.50)$$

Si  $a$  tend vers zéro et  $h = 30^\circ$ , les équations (3.43), (3.46), (3.49) et (3.50) devient à celle d'une cellule hexagonale régulière en nid d'abeille [30]:

$$\frac{G_{13}}{G_c} = \frac{G_{23}}{G_c} = 0.557\gamma \quad (3.51)$$

De la même façon que les nids d'abeilles hexagonales [40,41], le module de cisaillement transverse calculé avec une interpolation numérique. L'équation (3.52) représente une approximation de la méthode des moindres carrés du module de cisaillement transverse pour des cellules multi-réentrantes effectuées sur 37485 valeurs de  $G_{23}$ .

$$G_{23} = G_{23}^{\text{Min}} + \frac{1.204}{\left(\frac{b}{1}\right)} (G_{23}^{\text{Max}} - G_{23}^{\text{Min}}) \quad (3.52)$$

Les deux coefficients de Poisson  $\nu_{31}$  et  $\nu_{32}$  sont égaux à ceux du même solide.

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_s \quad (3.53)$$

### 3.4 Principe de la méthode des éléments finis

Depuis une cinquantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barre et poutre. Le comportement de chaque élément de barre ou de

poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux. À partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou nœuds. La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure. L'approche de rigidité est utilisée dans la solution analytique en raison de la simplicité et de la capacité de cette dernière en modifiant la matrice de rigidité avec des considérations différentes. Les principales étapes de construction d'un modèle élément fini sont les suivantes :

- La discrétisation du domaine en éléments finis.
- La formulation au niveau de l'élément.
- La formulation globale après assemblage.

### 3.4.1 Discrétisation spatiale

La phase de discrétisation, consiste à découper la structure (domaine continu  $V$ ), en sous-domaines  $V^e$ , de forme géométrique simple que l'on appelle « éléments finis », interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des déplacements aux nœuds, soit :

$$\{u(x, y, z)\}^e = [N(x, y, z)]^e \{q\}^e \quad (3.54)$$

Avec :

$\{u\}^e$  : Vecteur des déplacements en un point  $M$  de l'élément  $e$ .

$[N(x, y, z)]^e$  : Matrice d'interpolation pour l'élément  $e$ .

$\{q\}^e$  : Vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément  $e$ .

### 3.4.2 Formulation élémentaire

La formulation au niveau de l'élément, consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles d'énergie de déformation et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements aux nœuds. Ceci nécessite le calcul des matrices de rigidité et le vecteur des forces équivalentes.

L'expression de l'énergie potentielle totale en fonction des déplacements aux nœuds de l'élément est :

$$V^e = U^e - W^e = \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [K]^e \{q\}^e - \frac{1}{2} \{q\}^{eT} \{F\}^e \quad (3.55)$$

Avec:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [C] [B] dV \quad (3.56)$$

$$\{F\}^e = \int_{V^e} [N]^T \{f_V\} dV + \int_{S^e} [N]^T \{f_S\} dS \quad (3.57)$$

On rappelle que l'on a :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (3.58)$$

La déformation est définie comme la dérivée du déplacement, en notation matricielle

$$\{\varepsilon\} = [D] \{U\} = [B] \{q\} \quad (3.59)$$

Et:  $\{f_V\}, \{f_S\}$  sont respectivement les vecteurs des forces de volume et de surface.

$[D]$ : Matrice d'opérateurs différentiels.

$[B]$ : Matrice d'interpolation des déformations.

### 3.4.3 Formulation globale

La formulation globale du problème, consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle d'énergie de déformation, et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements en tous les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires: matrice de rigidité, vecteurs forces équivalents, pour tous les éléments. L'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$V = \sum_{\text{éléments}} V^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [K]^e \{q\}^e - \frac{1}{2} \{q\}^{eT} \{F\}^e \right\} \quad (3.60)$$

Soit  $\{q\}^{eT}$  le vecteur ligne des déplacements aux nœuds de la structure, soit pour une structure à m nœuds:

$$\{q\}^T = \{q^T \dots q_i^T \dots q_m^T\} \quad (3.61)$$

Avec:

$\{q_i\}$  : Sous vecteur des déplacements au nœud  $i$ .

On peut définir pour chaque élément une relation matricielle permettant d'établir une correspondance entre les déplacements aux nœuds de l'élément  $\{q\}^e$  et les déplacements aux nœuds de la structure  $\{q\}$ , soit:

$$\{q\}^e = [B]^e \{q\} \quad (3.62)$$

La relation (3.62) permet de repérer ou de localiser les d.d.l. de chaque élément dans l'ensemble des d.d.l. de la structure.

En utilisant les relations (3.60) et (3.62) on peut écrire:

$$V = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^T [B]^{eT} [K]^e [B]^e \{q\} - \frac{1}{2} \{q\}^T [B]^e \{F\}^e \right\} \quad (3.63)$$

D'où:

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \frac{1}{2} \{q\}^T \{F\} \quad (3.64)$$

Avec:

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [B]^{eT} [K]^e [B]^e \quad (3.65)$$

$$\{F\} = \sum_{\text{éléments}} [B]^{eT} \{F\}^e \quad (3.66)$$

$[K]$  : Matrice de rigidité de la structure.

$\{F\}$  : Vecteur des forces équivalentes.

Ces expressions permettent d'obtenir par application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des nœuds. En effet, on a:

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta W \\ \delta \{q\}^T [K] \{q\} &= \delta \{q\}^T \{F\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

D'où:

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (3.68)$$

#### 3.4.4 Formulation d'un élément poutre dans le plan

La figure 3.6 illustre un élément poutre dans le plan (x-y). L'élément est prismatique de longueur  $L$ , avec un module d'élasticité  $E$  et un moment d'inertie  $I$ . La ligne

centrale de la poutre à un déplacement latéral  $v=v(x)$ . Dans cette formulation, nous supposons aucune charge latérale n'a été supportée par l'élément de poutre et que son énergie de déformation est entièrement dérivée de la tension axiale et de la compression. On utilise une approximation polynomiale cubique pour représenter de façon exacte le comportement d'une structure chargée au niveau de ses nœuds. Pour pouvoir identifier les coefficients de notre polynôme de degré 3, il nous faut donc un élément ayant 4 variables nodales  $(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)$  :

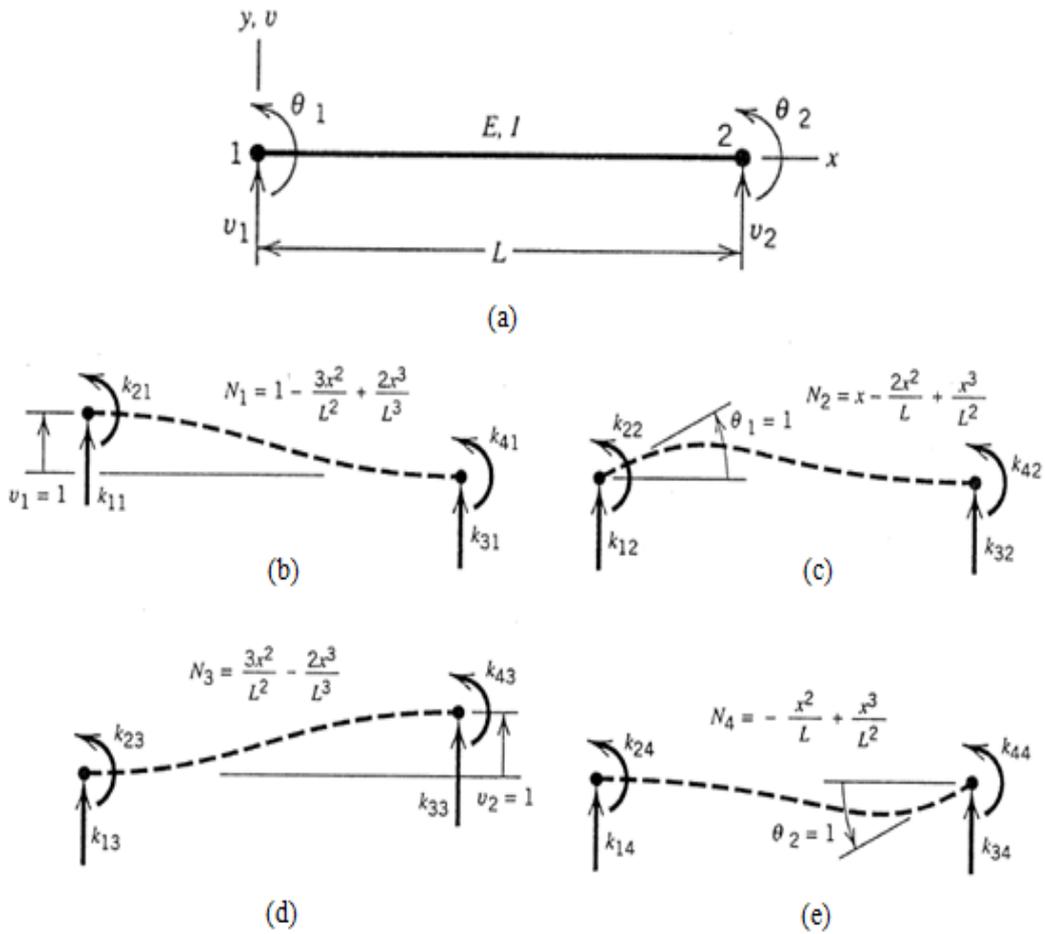
$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (3.69)$$

La rotation  $\theta(x)$  est liée au déplacement  $v$  par la relation:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (3.70)$$

Les constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  sont obtenues en rapportant l'expression  $v$  et  $\theta$  au nœud 1 ( $x=0$ ) et au nœud 2 ( $x=L$ ) ; on déduit :

$$\begin{cases} a_1 = v_1 \\ a_2 = \theta_1 \\ a_3 = -\frac{3}{L^2}v_1 - \frac{2}{L}\theta_1 + \frac{3}{L^3}v_2 - \frac{1}{L}\theta_2 \\ a_4 = \frac{2}{L^3}v_1 + \frac{1}{L^2}\theta_1 - \frac{2}{L^3}v_2 + \frac{1}{L^2}\theta_2 \end{cases} \quad (3.71)$$



**Figure 3.6** (a) Élément de poutre simple et son d.d.l nodal. (b-e): les formes déviées et les fonctions d'interpolation associées à l'activation de chaque d.d.l. Les charges nodales sont étiquetées en fonction de leur position dans K.[66].

$$\text{Soit: } v(x) = \langle N_1 N_2 N_3 N_4 \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Avec:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Nous venons de construire les fonctions d'interpolation de l'élément poutre donné dans l'équation (3.54).

La matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux équation (3.58) devient:

$$[B] = \left[ -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}, -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L}, -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}, -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \right] \quad (3.74)$$

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre en flexion donnée par l'expression:

$$[K^e] = \int_0^l [B]^T EI [B] dx \quad (3.75)$$

Il ne reste donc plus qu'à intégrer le terme précédent pour obtenir l'expression de la matrice de rigidité élémentaire:

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

### 3.5 Validation de la solution analytique par un calcul formel utilisant la matrice de rigidité

Cette approche basée sur la formulation de la matrice de rigidité et à l'intermédiaire d'un calcul formel utilisant le principe MEF exécuté par Scientific WorkPlace 5.5, nous obtenons les modules d'élasticité dans le plan. La méthode de la rigidité issue de la méthode de déplacement liée au procédé EF. Cette démarche sert à valider le modèle analytique développé dans la section précédente. La matrice de rigidité d'un élément de poutre de type Timoshenko associée à un élément de barre (Eq.3.77) peut être utilisée pour modéliser un réseau de poutre composé de huit éléments et neuf nœuds (3 d.d.l par nœud  $u, v, \theta$ ).

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\alpha)} & \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\alpha)} & \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} \\
 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & \frac{(2-\alpha)EI}{L(1+\alpha)} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\alpha)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\alpha)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} \\
 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & \frac{(2-\alpha)EI}{L(1+\alpha)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\alpha)} & \frac{6EI}{L^2(1+\alpha)}
 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

avec:  $\alpha = \frac{12EI}{GA_r L^2}$

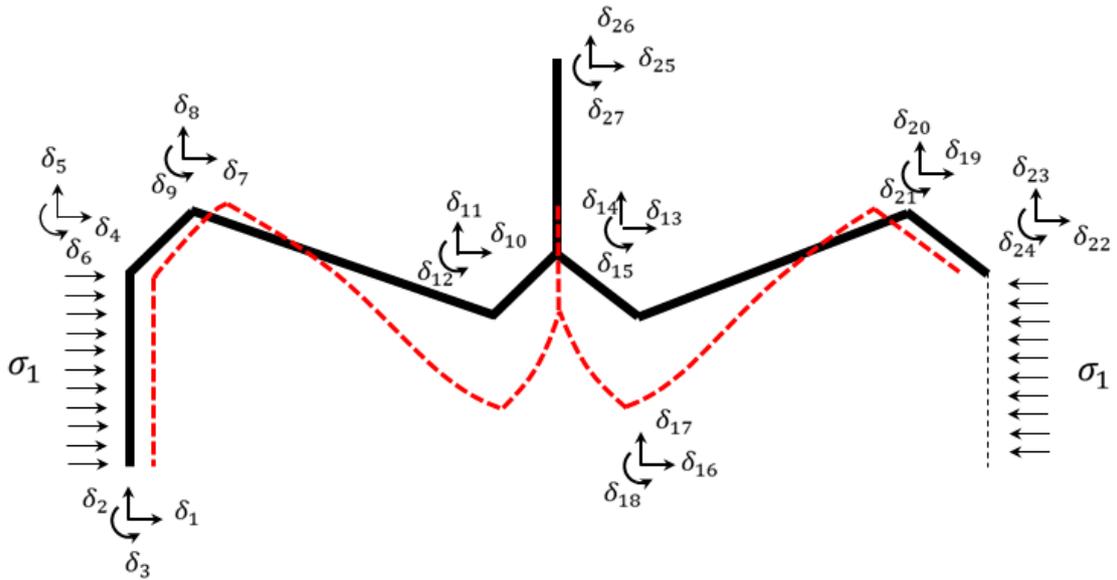
G: Module de cisaillement.

$A_r$ : Section réduite de cisaillement.

Pour chaque module et après assemblage des éléments, des conditions aux limites de type déplacement et charge sont imposées selon le mode de déformation et la direction capable d'évaluer chaque module.

### 3.5.1 Module d'élasticité $E_1$

Afin de calculer le module d'élasticité  $E_1$ , une contrainte  $\sigma_1$  est imposée dans la direction 1, en empêchant quelques déplacements est en respectant la symétrie de la structure ( voir fig.3.7).



**Figure 3.7** Cas de charge pour calculer  $E_1$ .

Tout d'abord, en définissant la matrice de rigidité élémentaire de chaque élément puis en passe à l'assemblage des matrices élémentaires ensuite la résolution. Le processus d'assemblage de la matrice de rigidité des éléments résultants dans une matrice de rigidité globale de 27 par 27 ddl. Afin de réduire cette dernière, nous appliquons les conditions d'appuis et de symétries suivants:

$$\delta_2=0, \delta_3=0, \delta_6=0, \delta_{13}=0, \delta_{15}=0, \delta_{24}=0, \delta_{25}=0, \delta_{27}=0,$$

$$\delta_1= \delta_4, \delta_4= - \delta_{22}, \delta_5= \delta_{23}, \delta_7= - \delta_{19}, \delta_8= \delta_{20}, \delta_{11}= \delta_{17}.$$

Après l'application des conditions aux limites, la matrice de rigidité globale réduit à 13\*13 ddl.(Eq.3.78).

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ D_{11} & E_{11} & F_{11} \\ G_{11} & H_{11} & I_{11} \\ J_{11} & K_{11} & L_{11} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Avec:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} k + 2k \sin^2 \varphi + \frac{24EI \cos^2 \varphi}{a^3 \alpha + 1} & -2k \sin^2 \varphi - \frac{24EI \cos^2 \varphi}{a^3 \alpha + 1} & \frac{6EI \cos \varphi}{a^2 \alpha + 1} & 0 \\ -2k \sin^2 \varphi - \frac{24EI \cos^2 \varphi}{a^3 \alpha + 1} & 2k \sin^2 \theta + 2k \sin^2 \varphi + \frac{24EI \cos^2 \varphi}{\alpha^3 (\alpha + 1)} + \frac{24EI \cos^2 \theta}{l^3 (\alpha + 1)} & \frac{6EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} - \frac{6EI \cos \varphi}{a^2 \alpha + 1} & k \cos \theta \sin \theta - \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3 \alpha + 1} \\ \frac{36EI \cos \varphi}{a^2 \alpha + 1} & \frac{6EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} - \frac{6EI \cos \varphi}{a^2 \alpha + 1} & \frac{EI (\alpha + 4)}{\alpha (\alpha + 1)} + \frac{EI (\alpha + 4)}{l (\alpha + 1)} & -\frac{36EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} & 0 & \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3 \alpha + 1} - k \cos \theta \sin \theta & -2k \sin^2 \theta - \frac{24EI \cos^2 \theta}{l^3} \\ -\frac{EI (\alpha - 2)}{l (\alpha + 1)} & 0 & 0 & -\frac{36EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{24EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} - 2k \cos \varphi \sin \varphi & -\frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} & \frac{24EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} - 2k \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ -\frac{6EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} & 2k \cos \varphi \sin \varphi - 2k \cos \theta \sin \theta - \frac{24EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} + \frac{24EI \cos \theta \sin \theta}{l^3 \alpha + 1} & \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} - \frac{6EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} & 2k \cos \varphi \sin \varphi - \frac{24EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} & 0 \\ 0 & \frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} + \frac{6EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & 0 & \frac{36EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & k \cos \theta \sin \theta - \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{6EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & k \cos^2 \theta + k \cos^2 \varphi + \frac{12EI \cos \theta \sin^2 \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{12EI \sin^2 \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & \frac{36EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{EI (\alpha-2)}{l} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} - k \cos \varphi \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$E_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & -k \cos \varphi \sin \varphi + \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & k \cos \varphi \sin \varphi - k \cos \theta \sin \theta - \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} \\ \frac{EI (\alpha+4)}{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{EI (\alpha+4)}{l} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{36EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} \\ -\frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} & k + 2k \sin^2 \varphi + \frac{24EI \cos^2 \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} & k \cos \varphi \sin \varphi - \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{24EI \cos^2 \varphi}{\alpha^3} \frac{1}{\alpha+1} - 2k \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -k \cos^2 \theta - \frac{12EI \sin^2 \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

$$G_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -k \cos \theta \sin \theta + \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 \\ 0 & -2k \sin^2 \theta - \frac{24EI \cos^2 \theta}{l^3 (\alpha+1)} & -\frac{6EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & k \cos \varphi \sin \varphi - \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{a^3} \frac{1}{\alpha+1} - k \cos \theta \sin \theta + \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & -\frac{36EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 0 & k \cos \varphi \sin \varphi - \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{a^3} \frac{1}{\alpha+1} & k \cos^2 \theta + k \cos^2 \varphi + \frac{12EI \sin^2 \varphi}{a^3} \frac{1}{\alpha+1} + \frac{12EI \sin^2 \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & k \cos \theta \sin \theta - k \cos \varphi \sin \varphi + \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{a^3} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} \\ \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & -2k \sin^2 \varphi - \frac{24EI \cos^2 \varphi}{\alpha^3 (\alpha+1)} & k \cos \theta \sin \theta - k \cos \varphi \sin \varphi + \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{a^3} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{12EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & 2k \sin^2 \theta + 2k \sin^2 \varphi + \frac{24EI \cos^2 \varphi}{\alpha+1} + \frac{24EI \cos^2 \theta}{l^3} \\ 0 & \frac{36EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{6EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & k \cos^2 \theta + \frac{12EI \sin^2 \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{6EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 \\ \frac{6EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} - \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha+1} & 2k \cos \theta \sin \theta - \frac{24EI \cos \theta \sin \theta}{l^3} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{6EI \cos \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 \\ \frac{EI (\alpha+4)}{\alpha (\alpha+1)} & -\frac{36EI \sin \theta}{l^2} \frac{1}{\alpha+1} & -\frac{EI (\alpha-2)}{l (\alpha+1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} -2k \cos \varphi \sin \varphi + \frac{24EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} & 2k \cos \varphi \sin \varphi - \frac{24EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} - 2k \cos \theta \sin \theta + \frac{24EI \cos \theta \sin \theta}{l^3 \alpha + 1} & \frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} + \frac{6EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & -k \cos^2 \theta - \frac{12EI \sin^2 \theta}{l^3 \alpha + 1} \\ -\frac{36EI \cos \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} & \frac{6EI \cos \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} - \frac{6EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} & 0 & 0 \\ -2k \cos \varphi \sin \varphi + \frac{12EI \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} & k \cos \varphi \sin \varphi & 0 & \frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{6EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & 0 & k \cos^2 \theta + \frac{12EI \sin^2 \theta}{l^3 \alpha + 1} & 2k \cos \theta \sin \theta - \frac{24EI \cos \theta \sin \theta}{l^3 \alpha + 1} \\ 0 & 0 & -\frac{36EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & \frac{36EI \cos \theta}{l^2 \alpha + 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & 2k \cos^2 \theta + \frac{24EI \sin^2 \varphi}{\alpha^3 (\alpha + 1)} + \frac{24EI \sin^2 \theta}{l^3 (\alpha + 1)} & -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} - \frac{6EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & 2k \cos^2 \varphi + \frac{24EI \sin^2 \varphi}{\alpha^3 (\alpha + 1)} & 0 \\ -\frac{EI (\alpha - 2)}{l (\alpha + 1)} & -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} - \frac{6EI \sin \theta}{l^2 \alpha + 1} & \frac{EI (\alpha + 4)}{\alpha (\alpha + 1)} + \frac{EI (\alpha + 4)}{l (\alpha + 1)} & -\frac{36EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} & 0 \\ 0 & 2k \cos^2 \varphi + \frac{12EI \sin^2 \varphi}{\alpha^3 (\alpha + 1)} & -\frac{6EI \sin \varphi}{\alpha^2 \alpha + 1} & \frac{12EI \sin^2 \varphi}{\alpha^3 \alpha + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Afin de calculer les déplacements qui sont les inconnues du problème, la résolution du système linéaire est effectuée par le logiciel du calcul formel Scientific WorkPlace 5.5. Après quelques opérations et en négligeant les termes supérieurs à l'ordre trois en "t" l'équation de  $E_1$  se réduit à:

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{\cos \theta + 2 \frac{a}{l} \cos \varphi}{\frac{h}{l} + \sin \theta + 2 \frac{a}{l} \sin \varphi} \left( \frac{1}{u_{1-1}} \right) \quad (3.79)$$

$$\text{et: } \bar{u}_{1-1} = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2\gamma^3} \left( \begin{array}{l} 1 - \cos 2\theta - 8\beta^3 \cos 2\varphi \\ +6\beta + 8\beta^3 - 6\beta \cos 2\theta + \\ +12\beta^2 \cos(\theta - \varphi) \\ -12\beta^2 \cos(\theta + \varphi) \end{array} \right) + \frac{1}{2\gamma} \left( \begin{array}{l} 2\beta + 2\beta \cos 2\varphi + 1 \\ + \cos 2\theta \end{array} \right) \\ + \frac{6(1 + \nu_s)}{5\gamma} (2\beta - 2\beta \cos 2\varphi + 1 - \cos 2\theta) \end{array} \right]$$

L'équation (3.79) trouvée par EF coïncide avec celle donnée par le modèle analytique (eq.3.14).

### 3.5.2 Module d'élasticité $E_2$

Pour obtenir le module d'élasticité  $E_2$ , on procède de la même façon du cas précédent et nous redéfinissons la charge sur le modèle voir figure 3.8.

On tient compte du:

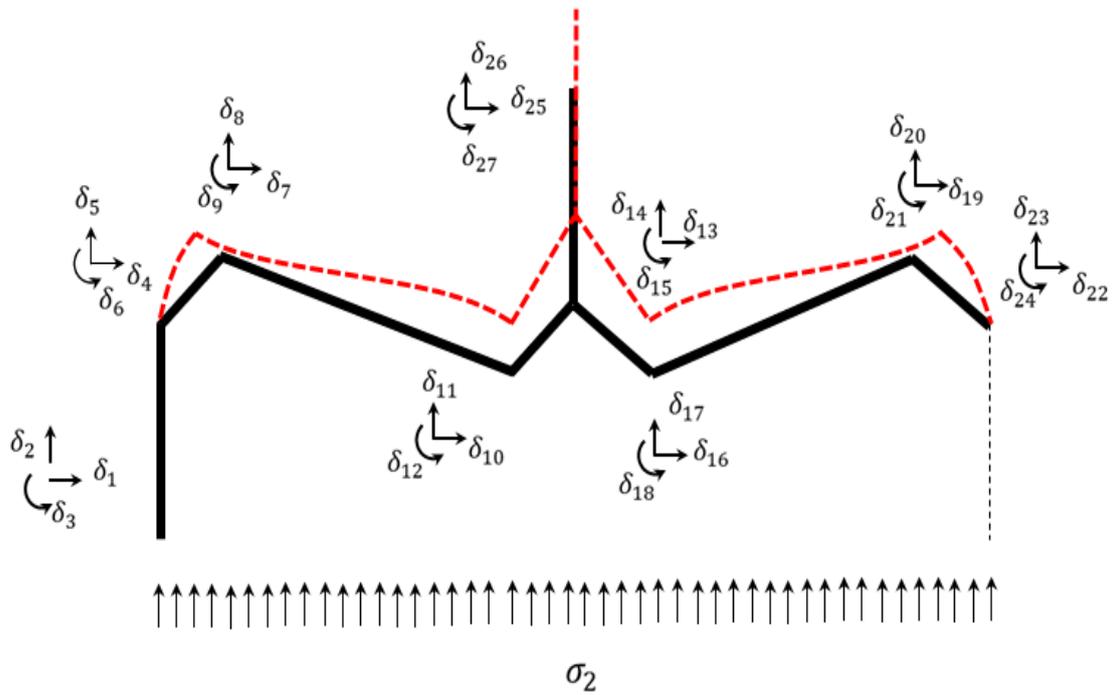
1- ddl bloqué.

2-Couplage des ddl

3- symétrie (géométrique, cinématique)

$$\delta_1 = \delta_3 = 0, \quad \delta_{13} = \delta_{15} = 0, \quad \delta_{25} = \delta_{27} = 0, \quad \delta_2 = \delta_5 = \delta_{23}, \quad \delta_4 = -\delta_{22}, \quad \delta_6 = -\delta_{24},$$

$$\delta_{11} = \delta_{17}, \quad \delta_7 = -\delta_{19}.$$



**Figure 3.8** Cas de charge pour calculer  $E_2$ .

Le vecteur de la force extérieure exprimé par:

$$[f] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sigma b(4a \cos \varphi + 2l \cos \theta) \end{bmatrix}$$

Après l'élimination des paramètres d'ordre élevé tel que le rapport d'épaisseur, on obtient la même formule donnée par l'équation (3.23).

$$\frac{E_2}{E_s} = \frac{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta + 2 \frac{a}{l} \sin \varphi \right)}{\left( \cos \theta + 2 \frac{a}{l} \cos \varphi \right)} \left[ \frac{1}{\bar{u}_{2-2}} \right] \quad (3.80)$$

avec:

$$\bar{u}_{2-2} = \left( \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\theta + 16 \left( \frac{a}{l} \right)^3 \cos^2 \varphi + 12 \left( \frac{a}{l} \right) \cos^2 \theta + 24 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \cos \theta \cos \varphi \right) \\ & + \left( \frac{t}{l} \right)^2 \left( 2 \left( \frac{h}{l} \right) + 2 \left( \frac{a}{l} \right) \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \right) \\ & + \frac{12(1+\nu_s)}{5} \left( \frac{t}{l} \right)^2 \left( \cos^2 \theta + 2 \left( \frac{a}{l} \right) \cos^2 \varphi \right) \end{aligned} \right)$$

### 3.5.3 Module de cisaillement $G_{12}$

Une charge horizontale est appliquée suivant la direction du ddl 25 pour simuler le module de cisaillement  $G_{12}$  (voir fig.3.9).

Conditions aux limites:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \delta_{26} = 0, \quad \delta_3 = \delta_4 = \delta_{27}, \quad \delta_6 = \delta_{24} = \delta_{15}, \quad \delta_7 = \delta_{19}, \quad \delta_9 = \delta_{21}, \quad \delta_{11} = -\delta_{17}, \quad \delta_{12} = \delta_{18},$$

et  $\delta_{22} = -\delta_5$ .

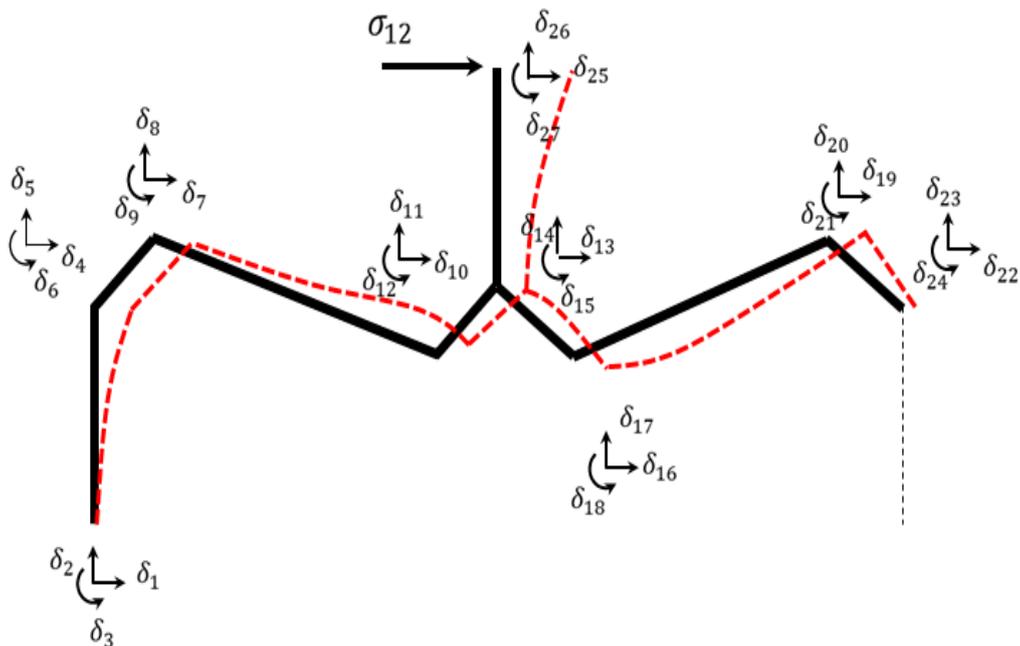


Figure 3.9 Cas de charge pour calculer  $G_{12}$ .

En négligeant les termes d'ordre élevé de l'épaisseur, la formule obtenue coïncide avec celle trouvée par la méthode analytique [62].

$$\frac{G_{12}}{E_s} = \left(\frac{t}{l}\right)^3 \left( \frac{\frac{h}{l} + 2\frac{a}{l} \sin \varphi + \sin \theta}{\cos \theta + 2\frac{a}{l} \cos \varphi} \right) \frac{1}{S'} \quad (3.81)$$

avec :

$$S' = \left(1 + 2\left(\frac{a}{l} + \frac{h}{l}\right)\right) \left(\frac{h}{l}\right)^2 + \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{h}{l} \frac{12}{5} (1 + \nu_s) \left( 2 + \frac{\left(\frac{h}{l} + 2\frac{a}{l} \sin \varphi + \sin \theta\right)}{\left(\cos \theta + 2\frac{a}{l} \cos \varphi\right)} \cos \theta \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{\left(\frac{h}{l} + 2\frac{a}{l} \sin \varphi + \sin \theta\right)}{\left(\cos \theta + 2\frac{a}{l} \cos \varphi\right)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\left(\frac{h}{l} + 2\frac{a}{l} \sin \varphi + \sin \theta\right)^2}{\left(\cos \theta + 2\frac{a}{l} \cos \varphi\right)^2} \left(\sin \theta + 2\frac{a}{l} \sin \varphi\right) \right) \right] \sin \theta \end{aligned} \right]$$

Si on pose "a" et "φ" égale zéro ceci conduit aux équations données par [30].

### 3.5 Conclusion

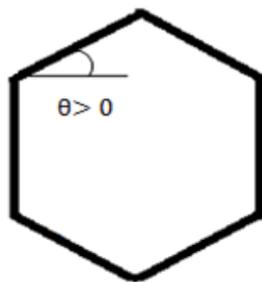
Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement élastique d'une nouvelle structure cellulaire en utilisant une approche analytique et par élément fini. Cette dernière valide comme méthode appropriée pour modéliser les modèles de cellules nid d'abeille. L'estimation des propriétés mécaniques module de Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement avec la méthode énergétique est effectuée par une comparaison par rapport aux formules analytiques disponibles dans la littérature (cellule de base hexagonale). Ces équations peuvent être utilisées pour optimiser les paramètres géométriques des nids d'abeilles ainsi que la densité relative qui permet de fournir des nouvelles connaissances sur la compréhension et la conception de nouveaux types des matériaux cellulaires qui sera l'objectif du prochain chapitre.

## **CHAPITRE IV**

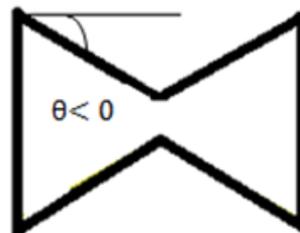
**Influence des paramètres  
géométriques sur les constantes  
élastiques homogénéisés d'une  
structure sandwich cellulaire**

#### 4.1 Introduction

Dans la plupart des cas, le coefficient de Poisson des structures cellulaires est positif, c'est-à-dire que le matériau subit une contraction le long de la direction perpendiculaire à celle de l'application de la charge. Certains matériaux cellulaires ont un coefficient de Poisson négatif ce qui signifie que le matériau se dilaterait latéralement lorsqu'il serait étiré, ce qui entraînerait une augmentation de son volume [67] [68] [69]. La microstructure réentrante a été proposée pour la première fois en 1982 par [70] dans un modèle bidimensionnel en inversant l'orientation des bords de la géométrie hexagonale d'une structure en nid d'abeille conventionnelle (fig.4.1). Cela implique que le matériau est "auxétique", un terme utilisé dans la littérature pour décrire un matériau avec un coefficient de Poisson négatif [71]. Une variété des matériaux auxétiques et leurs avantages par rapport aux matériaux conventionnels ont été étudiés les deux dernières décennies. Ces études ont démontré que les matériaux auxétiques peuvent améliorer les propriétés mécaniques par rapport aux matériaux conventionnels, comme la résistance au cisaillement [72-73-25], résistance à l'indentation [74], ténacité [75-76], l'absorption d'énergie [77-78-79], et offrent également une très bonne absorption acoustique et vibratoire [80]. Le comportement d'une nouvelle conception du nid d'abeille est analysé à travers plusieurs paramètres géométriques et mécaniques. Ce chapitre a permis la mise en évidence de l'influence des paramètres géométriques et de la densité relative des cellules conventionnelles et auxétiques sur le comportement général du sandwich. Afin de vérifier que les résultats des expressions analytiques obtenus à partir du chapitre précédent ont réussi à prédire le comportement d'une nouvelle conception de nid d'abeille, des études de validation ont été réalisées en comparant les résultats analytiques à ceux obtenus par les simulations numériques exécutées sur le code Abaqus.



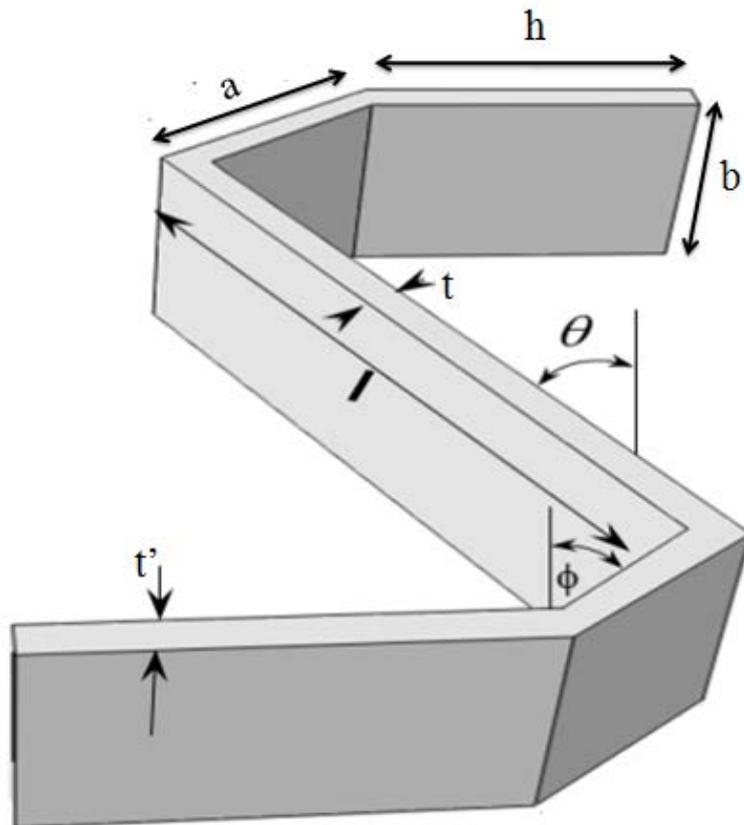
(a)  $\theta > 0$  Hexagone conventionnel



(b)  $\theta < 0$  Hexagone « ré-entrante »

**Figure 4.1** Illustration de la microstructure hexagonale.

Les cellules en nid d'abeilles disponibles dans le commerce ont généralement une géométrie hexagonale régulière, où l'angle de la cellule est de  $30^\circ$  et les parois cellulaires ont des longueurs égales. Des études antérieures ont déjà montré que la géométrie des cellules a un effet très important sur les propriétés mécaniques des nids d'abeilles [81]. La géométrie de nid d'abeille considérée dans cette étude a été présentée par [43-41] avec des paramètres géométriques de cellule variables.



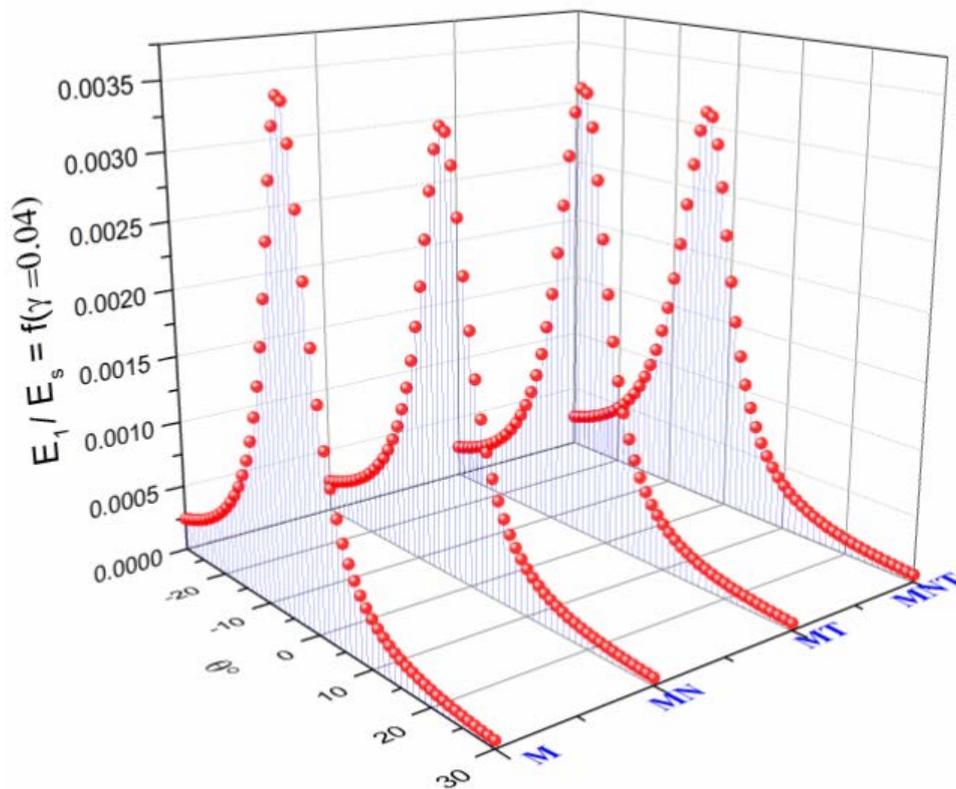
**Figure 4.2** Paramètres géométriques de la nouvelle cellule nid d'abeille.

Les paramètres de conception qui déterminent la géométrie sont : la longueur de la paroi verticale ( $h$ ), la longueur de la paroi inclinée ( $l$ ), l'épaisseur de la paroi cellulaire ( $t$ ), la paroi de base ( $a$ ), l'angle interne de la cellule ( $\theta$ ), l'inclinaison de la paroi de base ( $\phi$ ) et la profondeur de la cellule ( $b$ ). Les propriétés sont souvent décrites en utilisant un ensemble des paramètres non dimensionnel.  $\alpha=h/l$  : rapport d'aspect de la cellule,  $\beta=a/l$  : rapport d'aspect de la paroi de base,  $\gamma=t/l$  : rapport d'épaisseur de la paroi. Les paramètres géométriques de la nouvelle cellule on peut le voir sur la fig.4.2.[58].

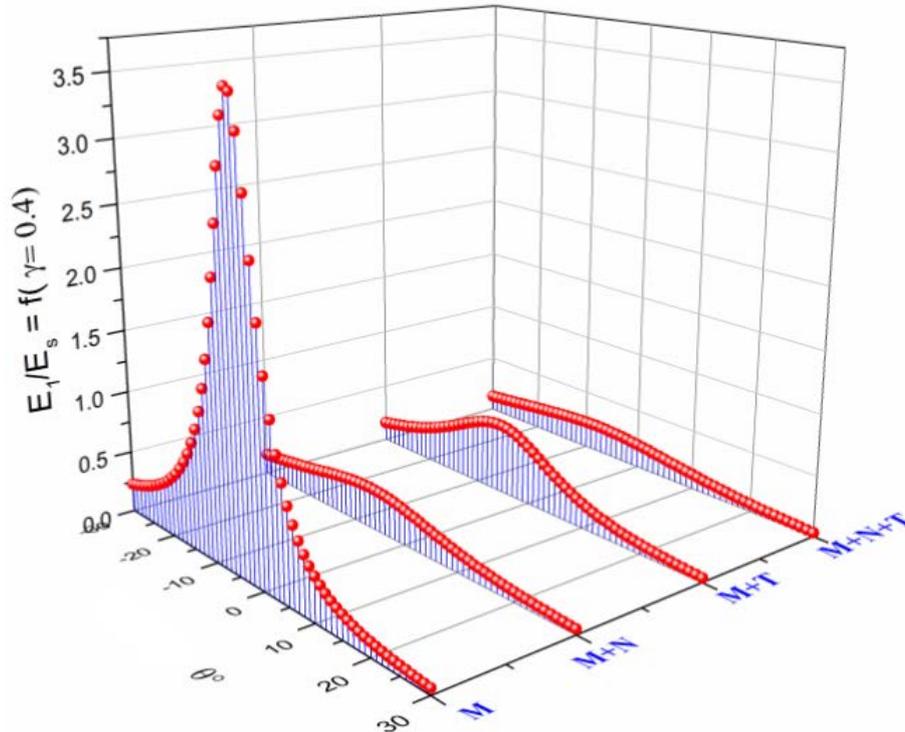
## 4.2. Analyses paramétriques

### 4.2.1 Effet de M, N et T

L'intérêt de cette partie est d'inclure l'effet de divers mécanismes de déformation dans le modèle analytique développé précédemment. Les déplacements, déformations, et les contraintes, sont calculés en introduisant l'effet du moment fléchissant (M), l'effort tranchant (T) et l'effort normal (N). Le principal paramètre qui influe sur ces grandeurs est la section transversale représentée par l'épaisseur du clinquant et définie par le rapport adimensionnel  $\gamma=t/l$ . Afin de montrer l'influence des diverses contributions de MNT, les figures 4.3.a,4.3.b montrent la variation du module d'élasticité effectif  $E_1$  en fonction des différentes sollicitations MNT pour les deux valeurs de  $\gamma$ : mince ( $\gamma= 0.04$ ), épaisse ( $\gamma= 0.4$ ). Pour le cas d'une paroi mince, une légère différence entre les divers mécanismes de déformation avec un maximum au voisinage du  $\theta=0^\circ$ , et des faibles valeurs pour des angles dépassant les  $10^\circ$ .



**Figure 4.3.a** L'effet de la contribution du MNT sur le module d'élasticité  $E_1/E_s$  pour  $(\alpha=1, \beta=0.2, \phi=45^\circ, \gamma=0.04)$ .

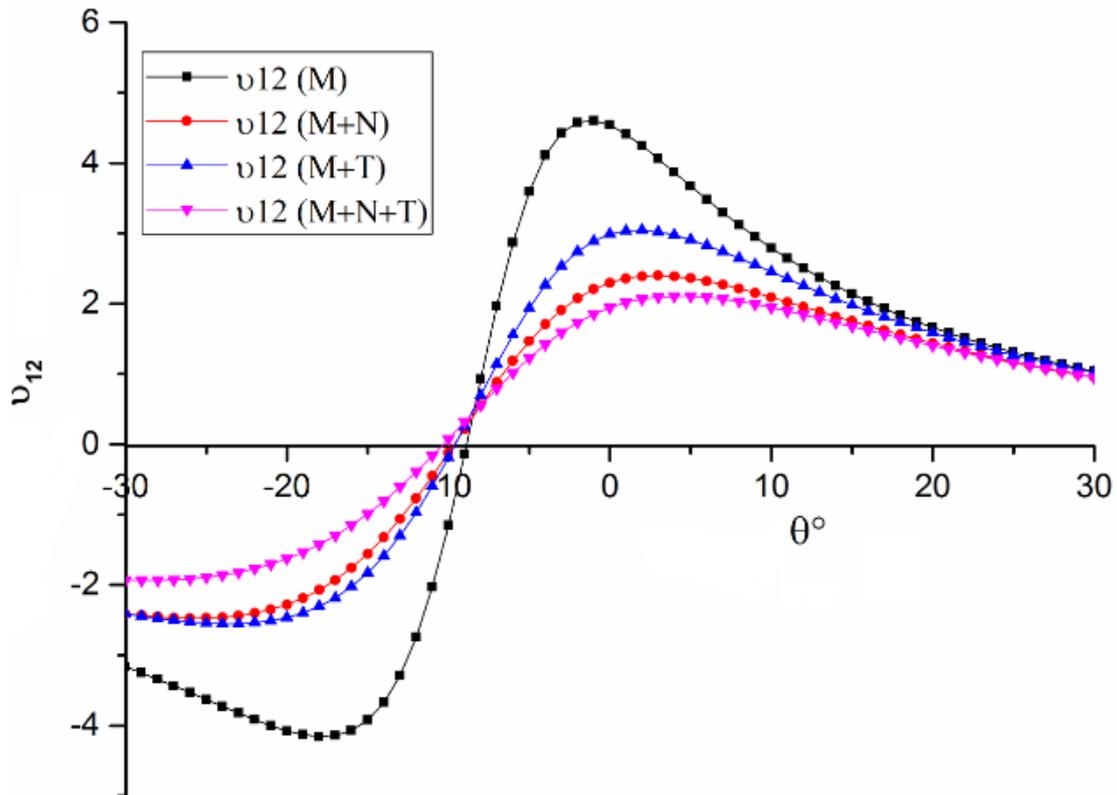


**Figure 4.3.b** L'effet de la contribution du MNT sur le module d'élasticité  $E_1/E_s$  pour  $(\alpha=1, \beta=0.2, \phi=45^\circ, \gamma=0.4)$ .

Une forte contribution de l'effet de M est observée pour le deuxième cas fig.4.3.b (7 fois plus supérieure) que les autres effets et pour de faibles angles de cellule  $\theta$ . La prise en compte de l'effet des déformations de cisaillement et axiales (N, T) est généralement négligée par de nombreux travaux précédents [43,82] à cause de leurs faibles contributions dans l'évaluation des modules de la cellule. Les résultats trouvés montrent que l'effet de N et T devient significatif si le paramètre d'épaisseur  $\gamma = t/l$  dépasse 0.2, en fixant les autres paramètres géométriques adimensionnels ( $\alpha=1, \beta=0.2, \phi=45^\circ$ ). Enfin, et pour les différentes épaisseurs de paroi (t), l'impact de N et T sur le module d'élasticité selon la direction 2 ( $E_2$ , voir équation 3.21) se révèle relativement insignifiant par rapport à celui du moment fléchissant.

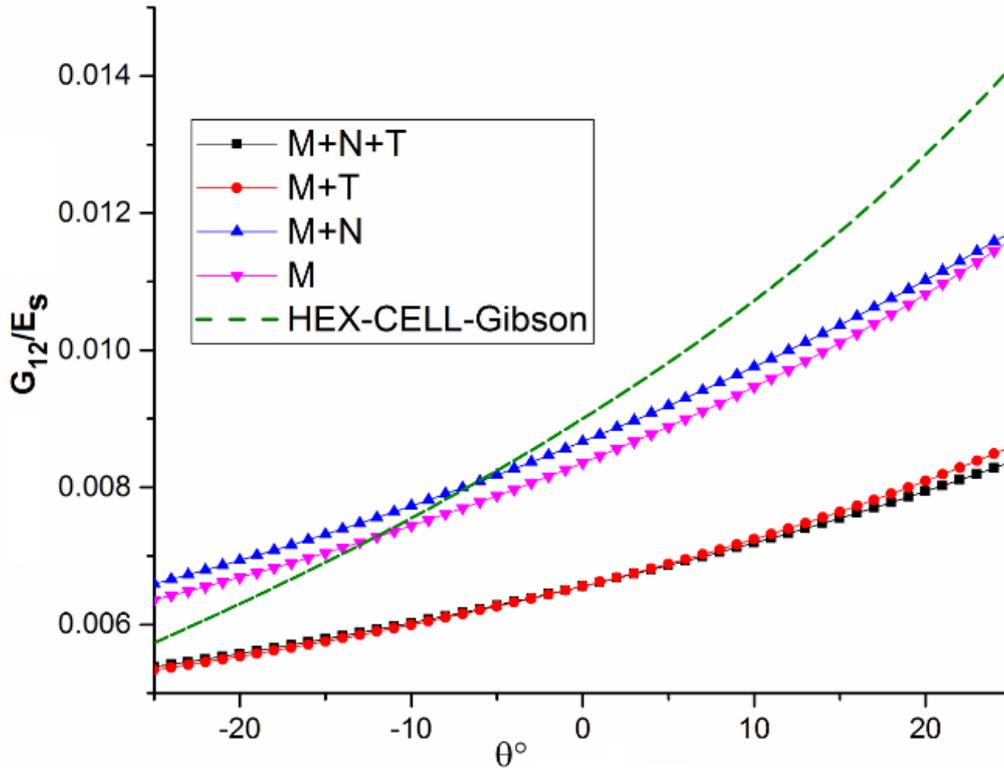
La variation du coefficient de Poisson avec l'angle interne de la cellule est représentée par la figure 4.4. Le graphe est divisé en deux intervalles qui traduisent deux comportements complètement différents de la cellule. Un comportement conventionnel où le coefficient de Poisson positif a été obtenu pour des angles internes positifs, cas des cellules ouvertes.

Des valeurs assez élevées ( $\nu_{12} > 4$ ) au voisinage de  $\theta=0^\circ$  pour une cellule a paroi mince  $\gamma=0.01$  et pour la contribution de M seul, puis il décroît d'une façon significative sous l'effet des autres contributions (N, T). Signalons aussi que l'effet de l'augmentation de l'épaisseur relative  $t/l$  diminue d'une façon notable les valeurs de coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  (fig.4.8).



**Figure 4.4** Effet de la contribution du MNT sur le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ , pour  $(\alpha=1, \beta=0.3, \phi=45^\circ)$ .

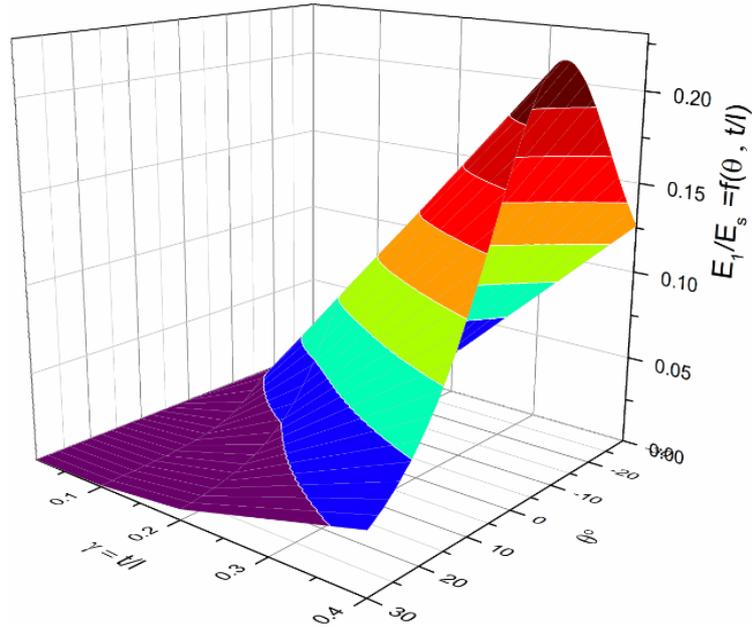
L'effet des déformations de cisaillement et axiales est généralement négligé à cause de leurs faibles contributions dans l'évaluation du module de cisaillement dans le plan de la cellule. On note qu'une dégradation assez importante dans l'évaluation du module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  si on considère les effets secondaires dus aux déformations axiales et de cisaillement et pour les épaisseurs relatives dépassant 0.1. Notons aussi que les cellules hexagonales présentent une rigidité au cisaillement bien plus supérieur que les autres configurations des cellules étudiées.



**Figure 4.5** Effet de l'angle de cellule sur le module de cisaillement relatif  $G_{12}/E_s$ , pour différentes configurations et des mécanismes de déformations ( $\alpha=1, \gamma=0.2, \phi=20^\circ$ ).

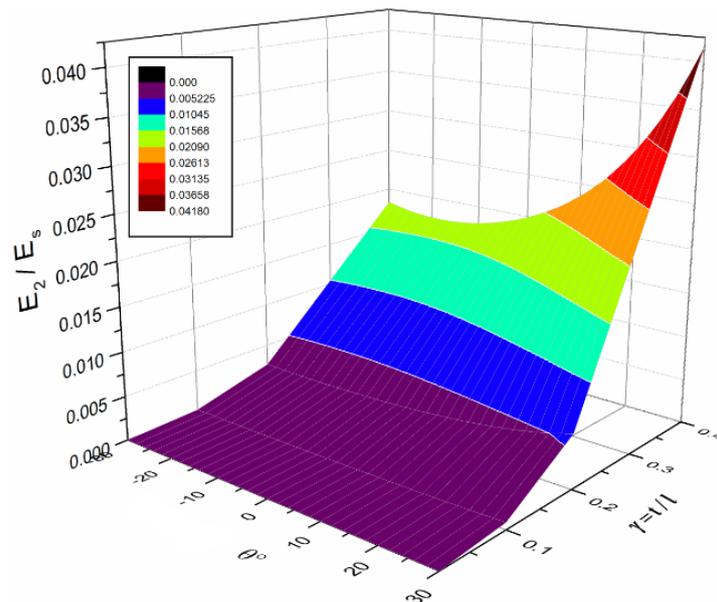
#### 4.2.2 Effet du rapport d'épaisseur sur la paroi verticale incliné " $\gamma$ "

L'effet des paramètres géométriques sur le comportement mécanique de la nouvelle cellule nid d'abeille est fondamental. L'effet de l'épaisseur relative est représenté sur les figures (4.6, 4.7 et 4.8) respectivement pour les modules d'élasticité dans les deux sens  $E_1, E_2$  et le coefficient de Poisson. La figure 4.6 représente l'évolution du module d'élasticité relatif  $E_1/E_s$  en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs de  $\gamma$  allant de 0.01 à 0.4. On garde les paramètres adimensionnels  $\alpha=1, \phi=45^\circ$  et  $\beta=0.2$  fixes. Pour une épaisseur relative  $\gamma$  égale 0.4 on constate que le module d'élasticité  $E_1$  est 5000 fois plus grand comparativement au  $\gamma = 0.01$  et 2.5 fois plus grands par rapport à  $\gamma = 0.2$  cette valeur présente une limite séparant une paroi mince et épaisse. Remarquant également que les maximums se trouvant toujours au voisinage d'un angle de cellule  $\theta=0^\circ$  décentré par la valeur du rapport adimensionnel  $\beta$ .

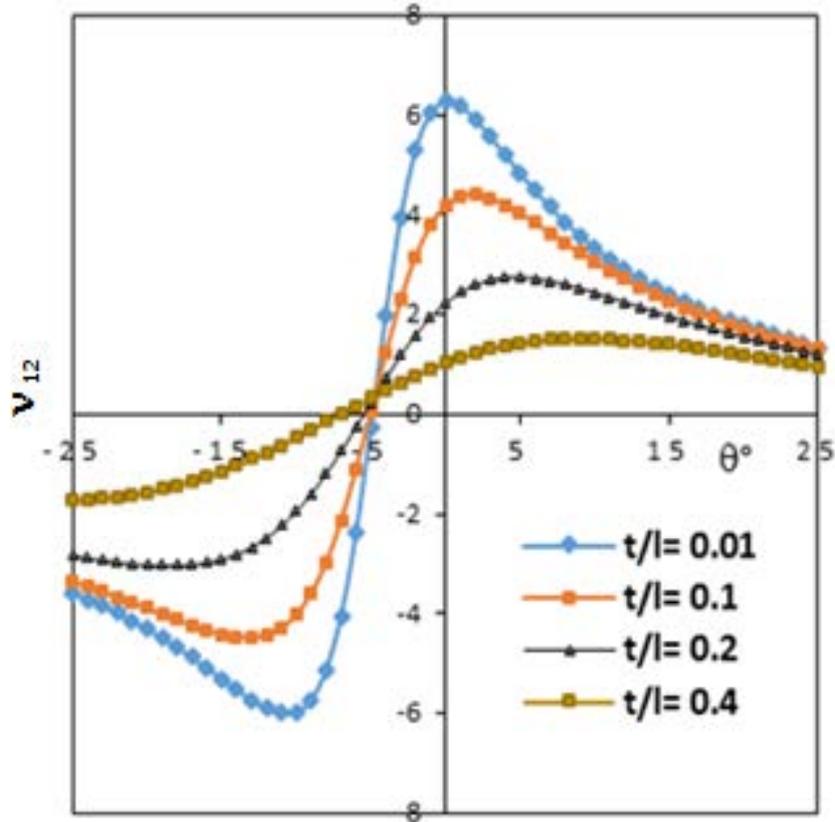


**Figure 4.6** Variation du module de Young adimensionnel  $E_1/E_S$  en fonction du rapport  $t/l$  pour ( $\alpha=1, \varphi=45^\circ, \beta=0.2$ ).

La variation du module d'élasticité  $E_2$  (fig.4.7) avec le rapport  $t/l$  est quasi parabolique et proportionnelle a ce rapport surtout pour des angles positifs, en gardant les paramètres  $\alpha=1, \varphi=45^\circ$  et  $\beta=0.2$  constant,  $E_2$  prend un maximum absolu pour un angle de ( $\theta=+30^\circ$ ) et  $t/l =0.4$  correspond à une paroi épaisse, ceci présente correctement la configuration d'une cellule conventionnelle [30].



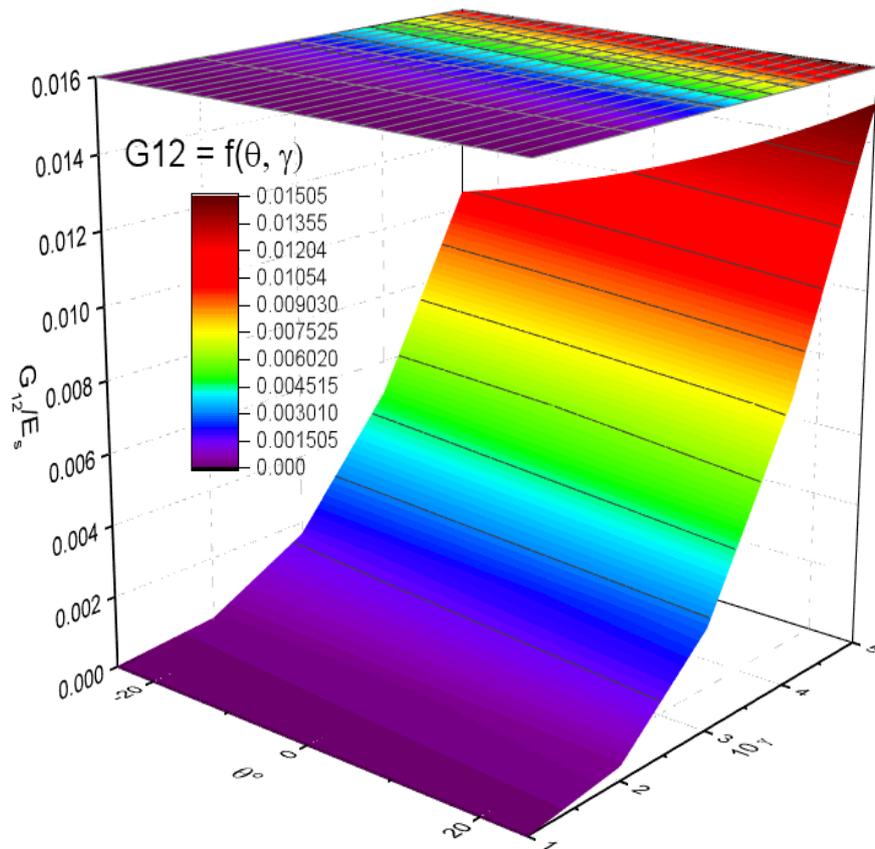
**Figure 4.7** Variation du module de Young  $E_2/E_S$  en fonction de  $\theta$  et  $\gamma = t/l$ , pour ( $\alpha=1, \varphi=45^\circ, \beta=0.2$ ).



**Figure 4.8** Variation du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $\gamma$ , pour  $(\alpha=1, \varphi=45^\circ, \beta=0.2)$ .

Le coefficient de Poisson augmente avec la diminution de l'épaisseur relative des parois (fig.4.8). Un comportement auxétique est observé pour des angles négatifs ou le coefficient de Poisson dépassant  $\nu_{12}=-5$  pour des cellules à parois minces réentrantes ( $\gamma=0.01$ ) est inhabituelle dans la mécanique des structures. Cela est dû à la géométrie de la cellule et la disposition des parois, de sorte qu'une traction positive engendre une réaction perpendiculaire et positive. Les courbes prennent la même valeur  $\nu_{12}=0$  à  $\theta = -5^\circ$  et présentant un point de symétrie et d'intersection des différentes courbes, avec un faible décalage dû à la présence du paramètre adimensionnel  $\beta=0.2$  et de l'angle d'inclinaison de la paroi de base  $\varphi$ .

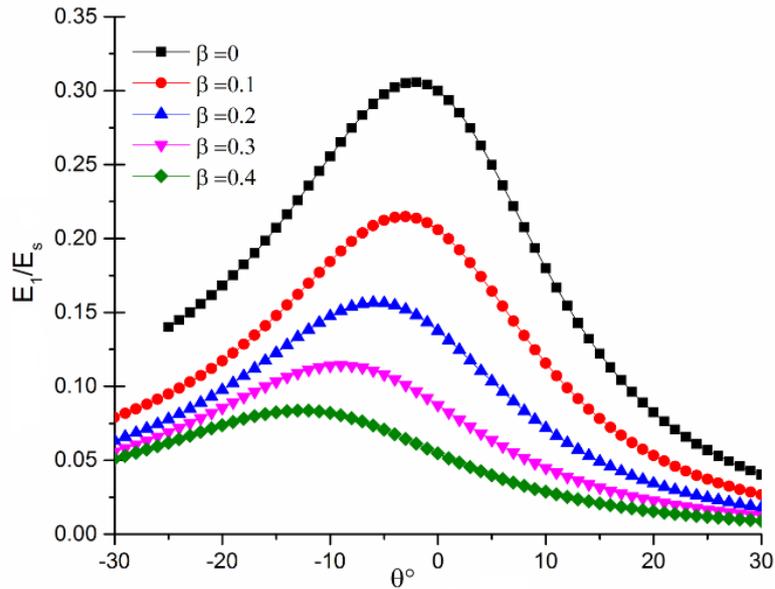
La variation du module de cisaillement relatif  $G_{12}/E_s$  avec le rapport  $(t/l)$  est quasi parabolique et proportionnelle au rapport  $\gamma$  (figure 4.9). Le module de cisaillement  $G_{12}$  prend un maximum pour un rapport de  $t/l=0.5$  qui correspond à une paroi épaisse.



**Figure 4.9** Variation du module d'élasticité transversal dans le plan  $G_{12}/E_s$  en fonction du rapport  $t/l$ , pour  $(\alpha=1, \varphi=45^\circ, \beta=0.2)$ .

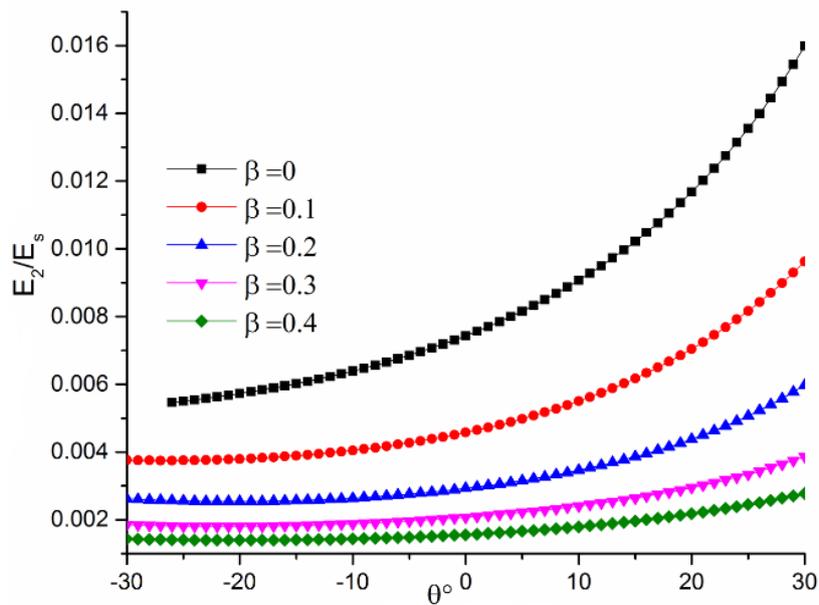
#### 4.2.3. Effet du rapport de paroi de base par la paroi verticale incliné " $\beta$ "

La figure 4.10 représente la variation du module d'élasticité  $E_1$  normalisé en fonction de l'angle de la cellule pour des différentes valeurs de base  $\beta=a/l$  (0, 0.1, 0.2, 0.3 et 0.4), en fixant la valeur de  $\gamma=t/l=0.3$  et de  $\alpha=h/l=1$ . On constate que le module d'élasticité  $E_1$  augmente avec la diminution de  $\beta$  et atteint leur valeur maximale pour toutes ces différentes séries entre les valeurs de l'angle de cellule de  $-13^\circ$  à  $-3^\circ$ . Ce qui explique l'effet de la grandeur de paroi de base sur la rigidité de la cellule sous la contribution de l'effet de membrane et de cisaillement. Notons que dans le cas d'une paroi de base nulle  $\beta=0$ , les valeurs du module d'élasticité relative  $E_1/E_s$  concordent avec celles d'une cellule hexagonale classique en tenant compte de l'effet des différents mécanismes de déformation (Eq.3.15).

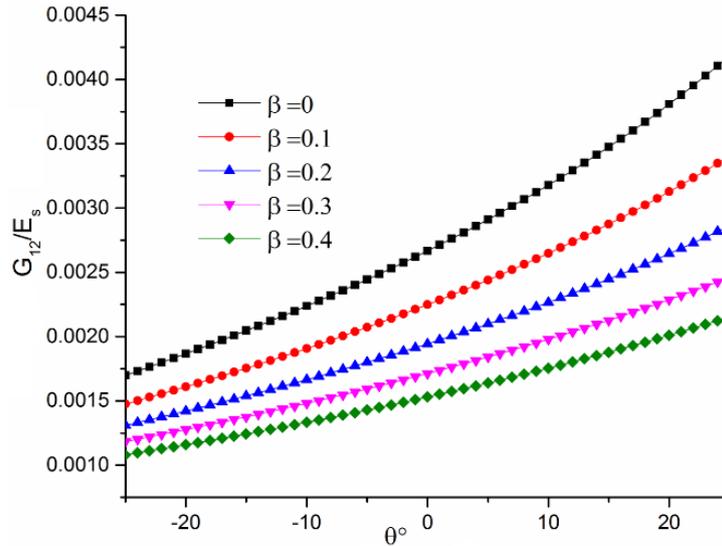


**Figure 4.10** Variation du module de Young adimensionnel  $E_1/E_S$  en fonction du rapport  $a/l$ , pour ( $\alpha=1$ ,  $\varphi=45^\circ$ ,  $\gamma=0.3$ ).

Sous l'effet des trois mécanismes de déformation, le Module  $E_2$  (Eq.3.23) décroît avec l'accroissance de la paroi de base relative surtout dans le domaine positif de l'angle de cellule. Notons que pour une paroi de base  $\beta = 0.4$  le module  $E_2$  est inférieur de huit fois que pour une paroi de base nulle (cellule hexagonale), et  $E_2$  présente un minimum pour des angles de cellule négative (configuration auxétique).

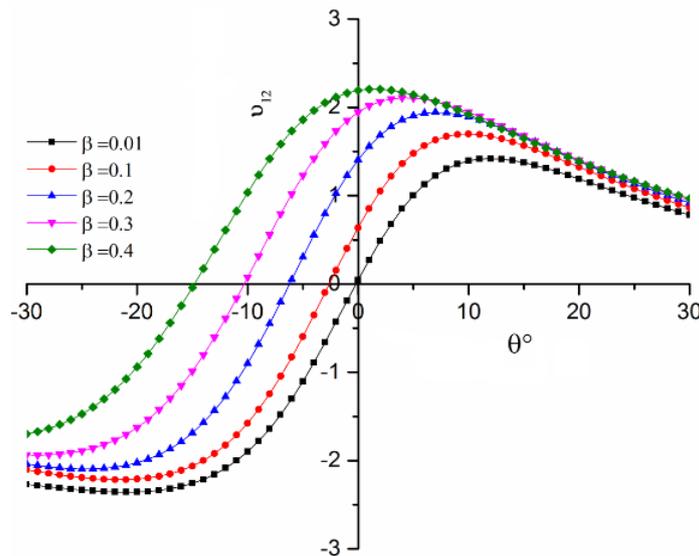


**Figure 4.11** Variation du module de Young adimensionnel  $E_2/E_S$  en fonction du rapport  $a/l$ , pour ( $\alpha=1$ ,  $\varphi=45^\circ$ ,  $\gamma=0.3$ ).



**Figure 4.12** Effet de l'angle de cellule sur le module de cisaillement relatif  $G_{12}/E_s$  pour différentes valeurs du talon  $\beta$  ( $\alpha=1, \gamma=0.2, \varphi=20^\circ$ ).

La figure 4.12 montre que le module de cisaillement  $G_{12}$  diminue significativement avec la paroi de base "a". Il est presque 1,8 fois plus faible quand  $a = 0,31$ , ce qui conduit la cellule à être moins résistante au cisaillement. La variation du coefficient de Poisson avec la paroi de base et les angles internes des cellules est représentée sur la figure 4.13. On trouve que le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  est proportionnel à la dimension de la paroi de base, quels que soient les mécanismes de déformation, le comportement auxétique est effectivement réduit lorsque  $\beta$  augmente.



**Figure 4.13** Variation du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du  $\beta$  ( $\alpha=1, \gamma=0.3, \varphi=45^\circ$ ).

#### 4.2.4 Effet du rapport d'aspect de la cellule " $\alpha$ "

L'effet de la longueur de la paroi cellulaire sur les constantes élastiques homogénéisées a été étudié dans cette sous section, en simulant la cellule avec différentes valeurs de l'angle interne  $\theta$ . Dans une cellule nid d'abeille régulière  $\alpha=1$  puisque les longueurs de paroi verticale et inclinée sont égaux. Pour  $\alpha=2$ , la longueur de la paroi verticale est deux fois à celle de la paroi inclinée comme montre la figure 4.14. Ou les valeurs de  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$  ne sont pas variées pour ces simulations.

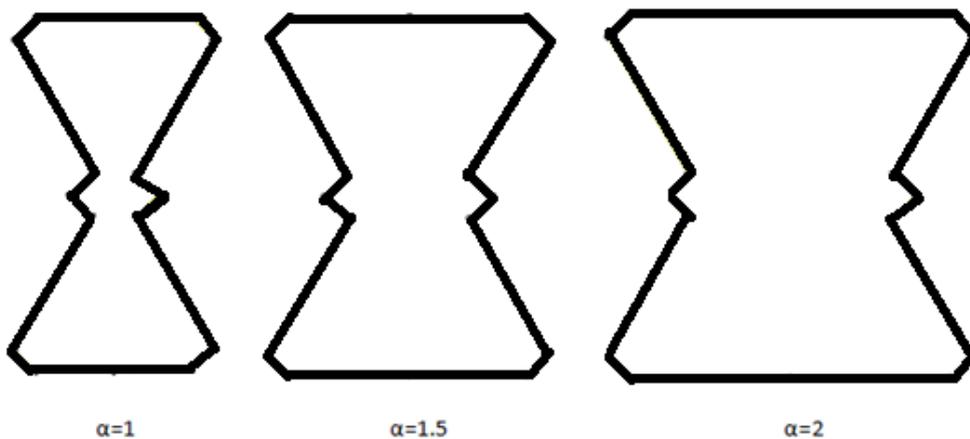


Figure 4.14 Géométrie de la cellule à diverses valeurs de  $\alpha$ .

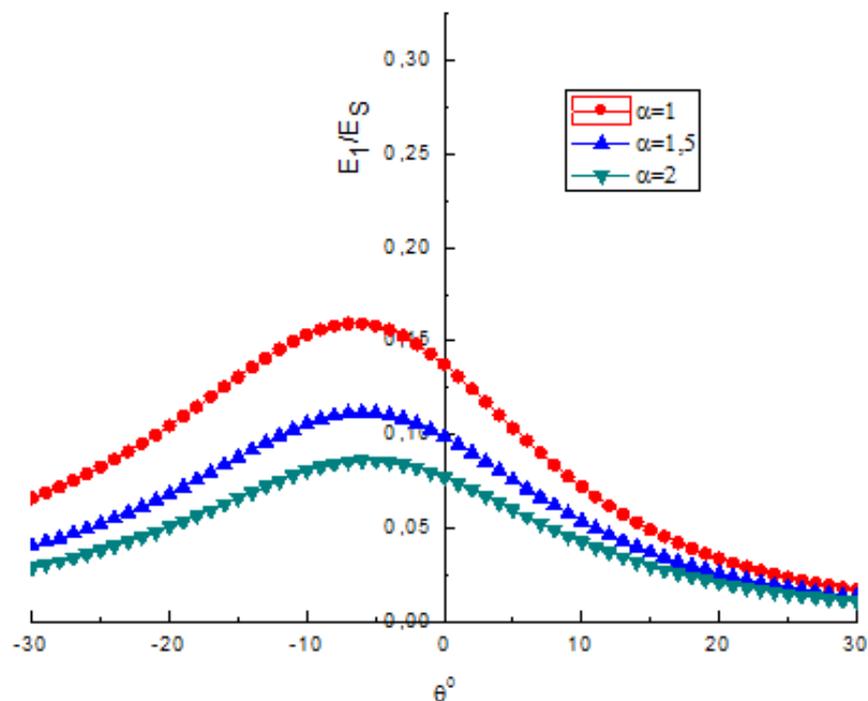
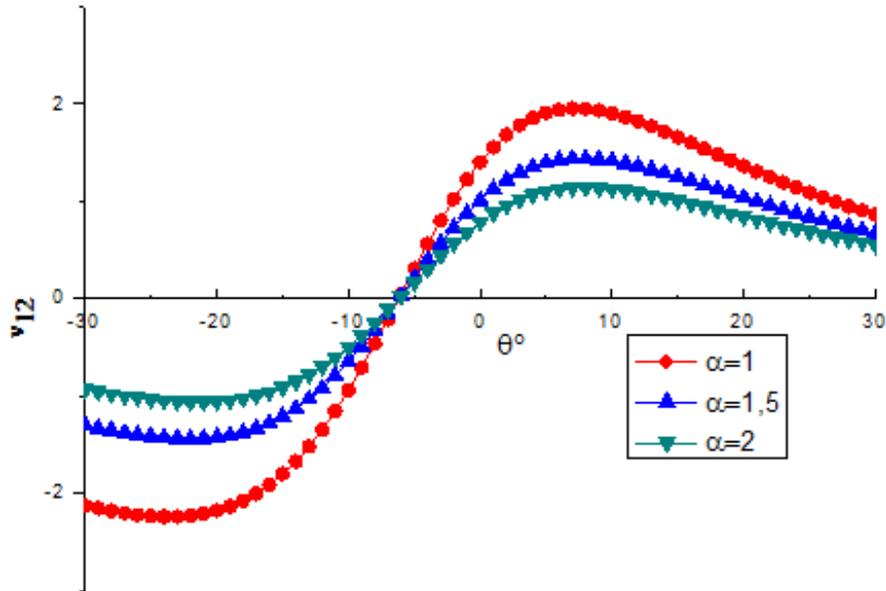
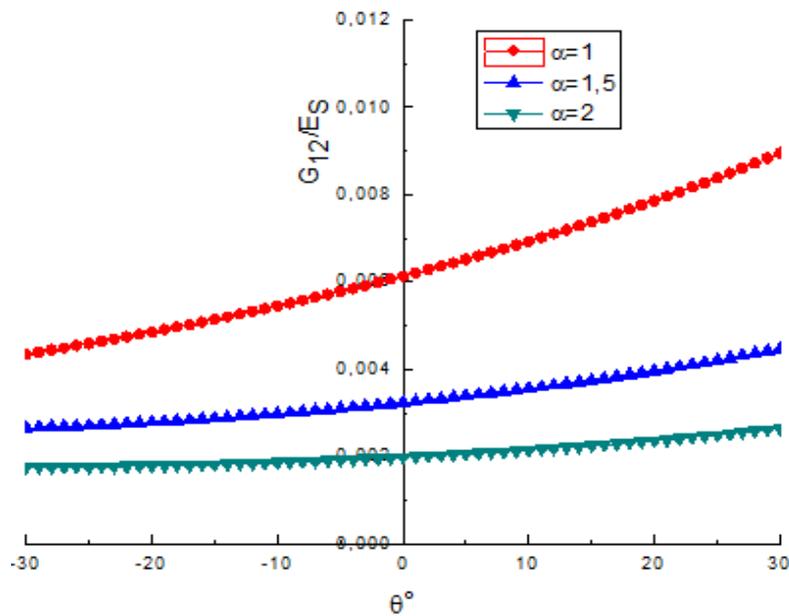


Figure 4.15 Variation du module d'élasticité adimensionnel  $E_1/E_S$  en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du  $\alpha$  ( $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $\varphi=45^\circ$ ).



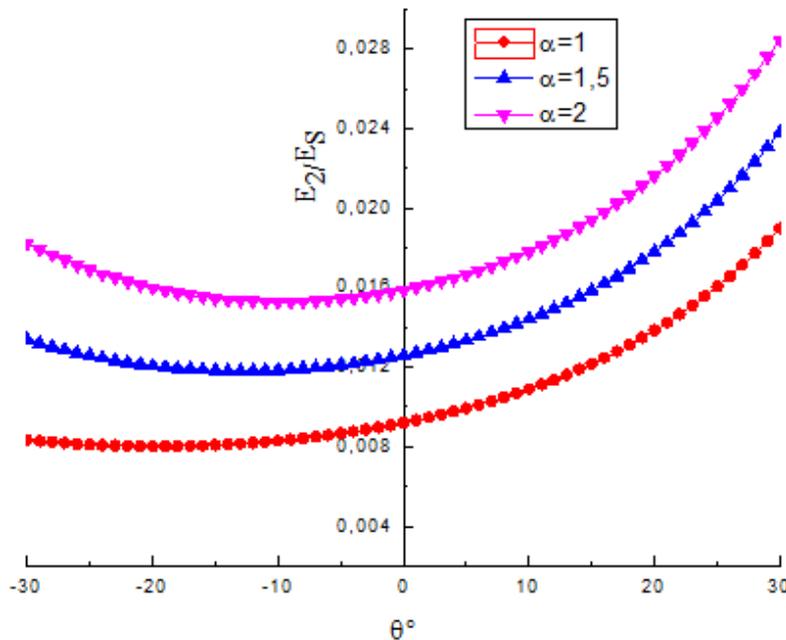
**Figure 4.16** Variation du coefficient de Poisson en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du  $\alpha$  ( $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $\varphi=45^\circ$ ).



**Figure 4.17** Variation du module de cisaillement adimensionnel  $G_{12}/E_s$  en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du  $\alpha$  ( $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $\varphi=45^\circ$ ).

La figure 4.15 représente la variation du module d'élasticité adimensionnel dans le plan  $E_1/E_s$  pour différents rapports d'aspect de paroi cellulaire  $\alpha$ . Pour un angle de cellule interne de  $\theta= -8^\circ$  configuration auxétique, on peut enregistrer une forte diminution de la rigidité dans le plan (autour de 46 %) passant d'une valeur de  $\alpha$  de 1

à 2. Les mêmes observations peuvent être faites pour le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et le module de cisaillement relatif  $G_{12}/E_s$ . (voir figure 4.16 - 4.17).



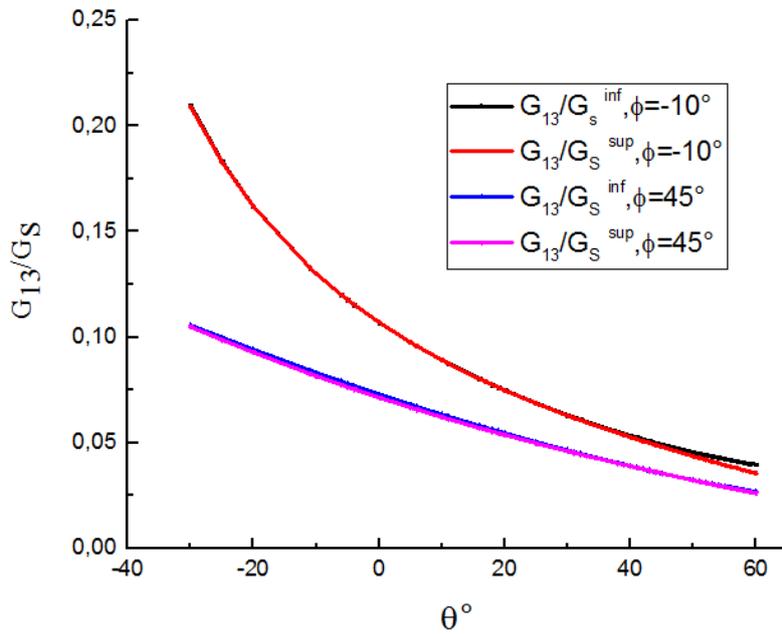
**Figure 4.18** Variation du module d'élasticité adimensionnel  $E_2/E_s$  en fonction de l'angle interne de la cellule pour différentes valeurs du  $\alpha$  ( $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $\varphi=45^\circ$ ).

La figure 4.18 illustre la dépendance de la rigidité dans le plan  $E_2/E_s$  par rapport aux paramètres géométriques non dimensionnels. Pour augmenter la valeur de  $\alpha$ , la rigidité dans le plan est dans ce cas diminuée, compte tenu des paramètres constants  $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $\varphi=45^\circ$ . Il faut souligner que le modèle analytique tient en compte la contribution de déformation axiale et de cisaillement.

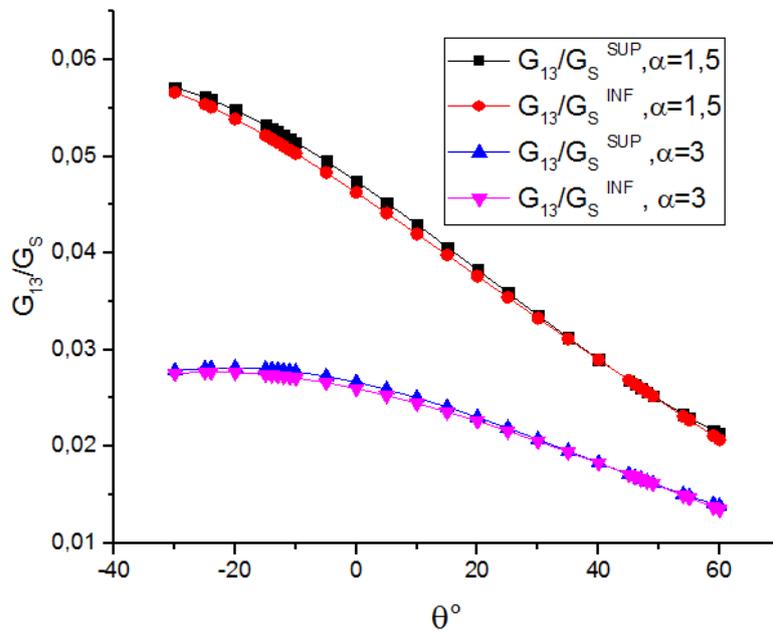
#### 4.2.5 Propriétés du cisaillement hors plan

Le cisaillement hors plan influe sur la déformation transversale d'un panneau sandwich sous un niveau de charge donné, le noyau apportant la contribution de la déformation par cisaillement hors plan et le revêtement de la face par flexion et tension/compression [83]. Les valeurs théoriques des limites supérieures et inférieures du noyau de la structure sont indiquées sur la figure 4.19 pour :  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\beta = 0.2$ . Il convient de noter que la sensibilité des limites  $G_{13}/G_s$  aux angles cellulaires se produise lorsque  $\theta$  et  $\varphi$  sont tous les deux négatifs, tandis que les mêmes bornes sont plus élevées lorsque les angles de cellule sont à la fois négatifs. Les limites  $G_{13}/G_s$

augmentent de quatre fois depuis la configuration  $\theta=60^\circ$ ,  $\phi= -10^\circ$ , jusqu'à la configuration de cellule  $\theta = -30^\circ$ ,  $\phi = -10^\circ$ .



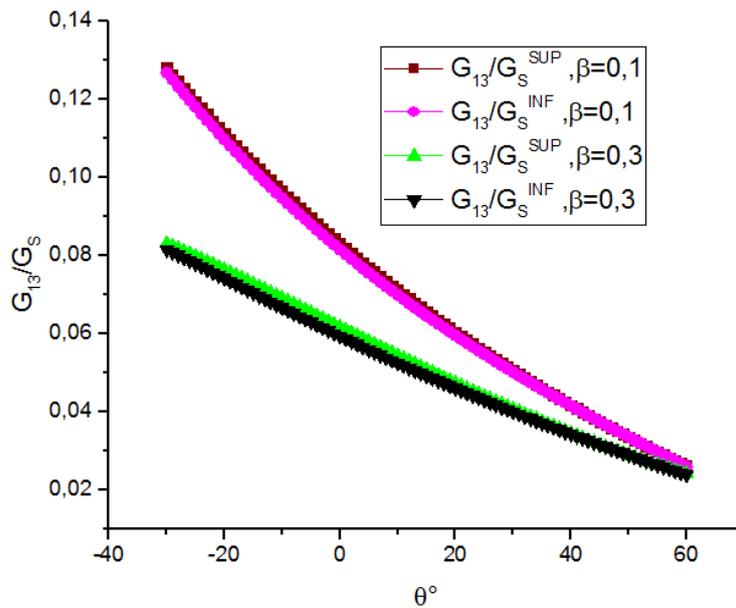
**Figure 4.19** Résultats du modèle analytique  $G_{13}/G_s$  pour les deux bornes en fonction de  $\theta$ . ( $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\beta = 0.2$ ),  $\phi = -10^\circ, 45^\circ$ .



**Figure 4.20** Résultats du modèle analytique  $G_{13}/G_s$  pour les deux bornes en fonction de  $\theta$ . ( $\gamma = 0.1$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\phi = 45^\circ$ ).  $\alpha = 1.5, 3$ .

La figure 4.20 montre la variation du module de cisaillement adimensionnel  $G_{13}/G_s$  en fonction de l'angle interne pour deux valeurs de rapport d'aspect de la cellule.

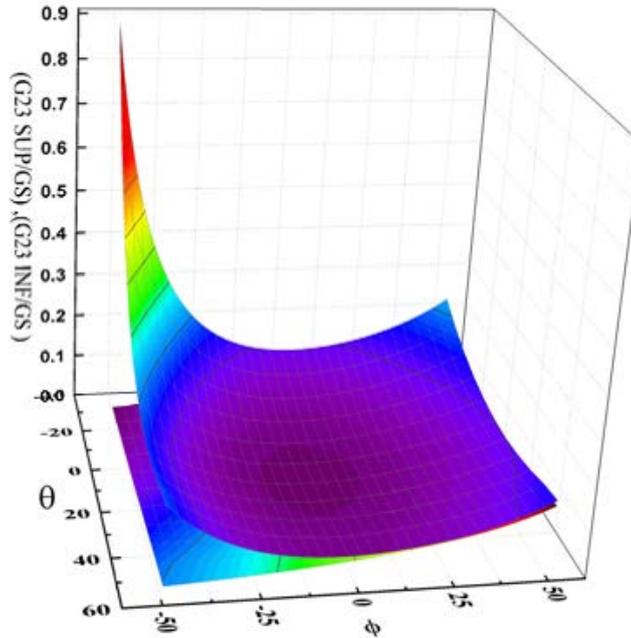
On compare cette figure avec la précédente, les limites supérieures et inférieures changent leur forme globale par rapport à la forme représentée sur la figure 4.19. Il convient de remarquer que les valeurs négatives de  $\theta$  et les faibles valeurs de  $\alpha$  conduisent à des valeurs élevées de rigidité au cisaillement, qui augmentent jusqu'à 18 % par rapport à la valeur obtenue pour  $\theta = 60^\circ$  et  $\alpha = 3$ .



**Figure 4.21** Variation de  $G_{13}/G_s$  en fonction de  $\theta$  pour ( $\alpha=1$ ,  $\varphi=50^\circ$ ,  $\gamma=0.1$ ),  $\beta=0.1, 0.3$ .

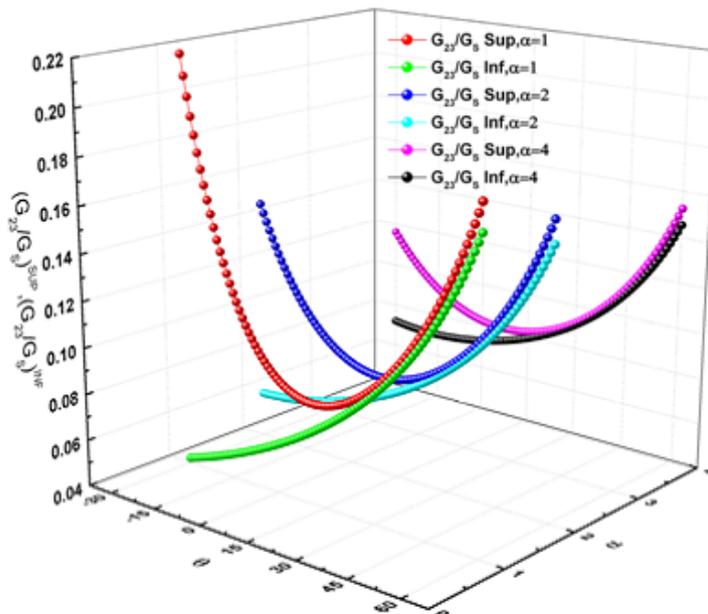
La figure 4.21 montre la variation des bornes de  $G_{13}/G_s$  en fonction de  $\theta$  et pour deux valeurs du rapport de paroi de base. L'influence de  $\alpha$  est plus importante que celle du rapport d'aspect de la paroi de base. L'augmentation de cette dernière (c-à-d de longue paroi de base) induit à une diminution de la rigidité de cisaillement plus de 50 % surtout dans la plage des angles négatifs.

La figure 4.22 montre les valeurs théoriques des limites supérieures et inférieures du cœur chargé dans la direction  $X_2$  (Eq.3.49, Eq.3.50). Les deux limites sont espacées par rapport au module de cisaillement  $G_{13}$ . Pour les valeurs positives de  $\theta$ , les limites supérieure et inférieure apparaissent proche les unes des autres et également pour les angles positifs de paroi de base, par contre dans le domaine des angles négatif les limites tendent à diverger. L'augmentation de l'angle  $\varphi$  conduit à une augmentation de 20 % de rigidité de cisaillement en passant de  $\varphi=25^\circ$  à  $\varphi=50^\circ$  pour ( $\alpha=1$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.1$ ).

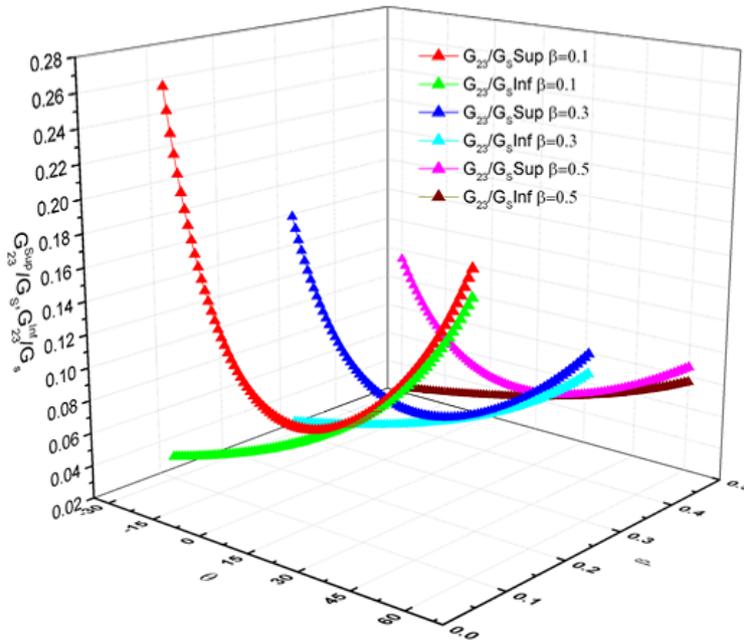


**Figure 4.22** Borne supérieure et inférieure du module de cisaillement  $G_{23}/G_S$  en fonction de  $\theta$ ,  $\phi$  pour  $(\alpha=1, \beta=0.2, \gamma=0.1)$ .

La forme globale des limites  $G_{23}/G_S$  ne change pas pour la variation du rapport d'aspect de la cellule avec une grande amplitude est obtenue pour  $\alpha=1$  et avec  $\phi=50^\circ$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\gamma=0.1$  (voir figure 4.23). Le minimum du rapport  $G_{23}/G_S$  est lié à la borne inférieure est apparait pour les configurations réentrant (  $\theta$  négatif) avec une divergence par rapport à la borne supérieure.



**Figure 4.23** Borne supérieure et inférieure du module de cisaillement  $G_{23}/G_S$  en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  pour  $(\phi=50^\circ, \beta=0.2, \gamma=0.1)$ .



**Figure 4.24** Borne supérieure et inférieure du module de cisaillement  $G_{23}/G_S$  en fonction de  $\theta$  et  $\beta$  pour ( $\varphi=20^\circ$ ,  $\alpha=1$ ,  $\gamma=0.1$ ).

La figure 4.24 montre les limites de  $G_{23}/G_S$  par rapport aux rapports d'aspect de paroi de base et l'angle interne de la cellule pour ( $\varphi=20^\circ$ ,  $\alpha=1$ ,  $\gamma=0.1$ ). Les limites augmentent en moyenne de 50 % lorsque  $\beta$  diminue de 0.5 à 0.1 pour une valeur de  $\theta$  supérieurs à  $-10^\circ$ . La figure 4.24 montre également plus des limites divergentes lorsque  $\theta \geq -5^\circ$ , comme présentent également les figures (4.22 - 4.23).

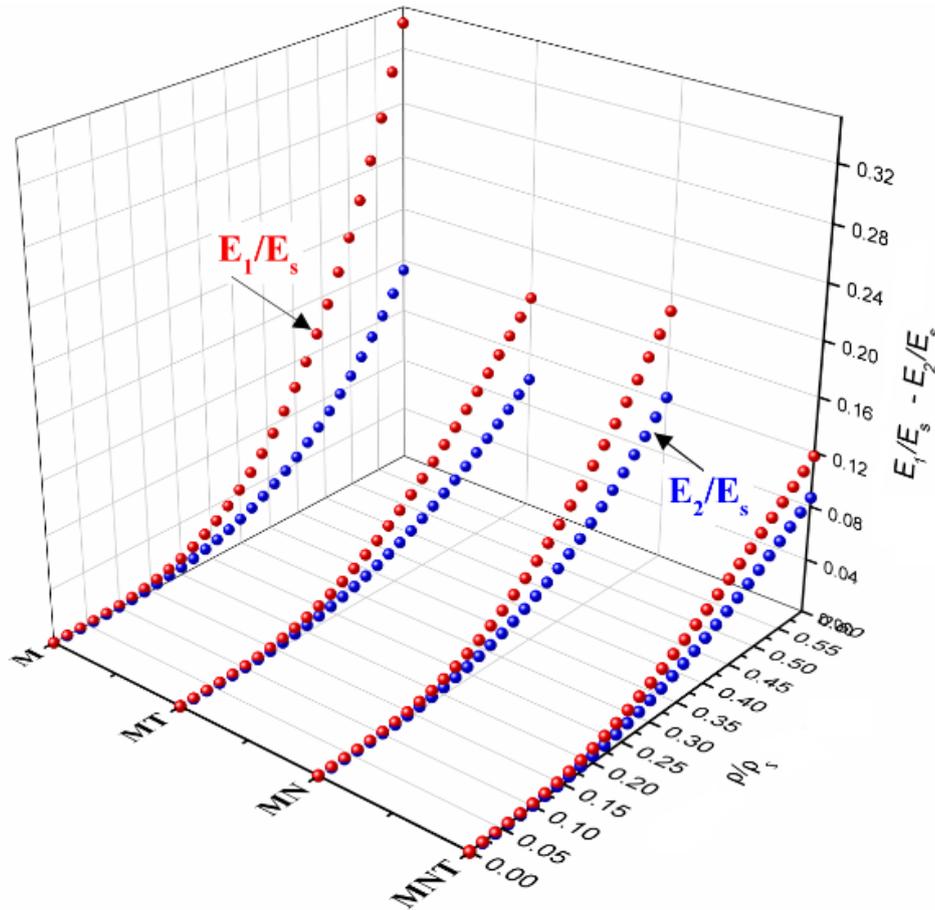
### 4.3 Densité relative

La conception des matériaux innovants pour des applications multifonctionnelles avancées doit répondre à deux critères essentiels : augmentation des performances mécaniques avec une densité réduite. Cette double exigence a conduit à un intérêt accru dans la classe des matériaux cellulaires. Les matériaux cellulaires de faible densité sont principalement utilisés comme noyau dans les panneaux sandwichs. Les matériaux cellulaires sont connus par leur faible densité, ou plus exactement leur faible densité relative définie comme le rapport de la densité du matériau cellulaire à celle du matériau constitutif du squelette, généralement considéré comme un paramètre important pour déterminer le comportement mécanique des matériaux cellulaires [30]. Les modes de déformation dominants dans ces matériaux sont donc la flexion et le cisaillement et les effets axiaux de compression ou traction des clinquants constituants les cellules. Pour caractériser un matériau cellulaire tel que les nids

d'abeille figure 4.2, le paramètre le plus fréquemment utilisé est la densité relative généralement notée  $\rho/\rho_s$ , peut donc être écrit comme [62]:

$$\frac{\rho}{\rho_s} = \gamma \frac{2 + 4\beta + \alpha}{2(2\beta \cos \varphi + \cos \theta)(\alpha + \sin \theta + 2\beta \sin \varphi)} \quad (4.1)$$

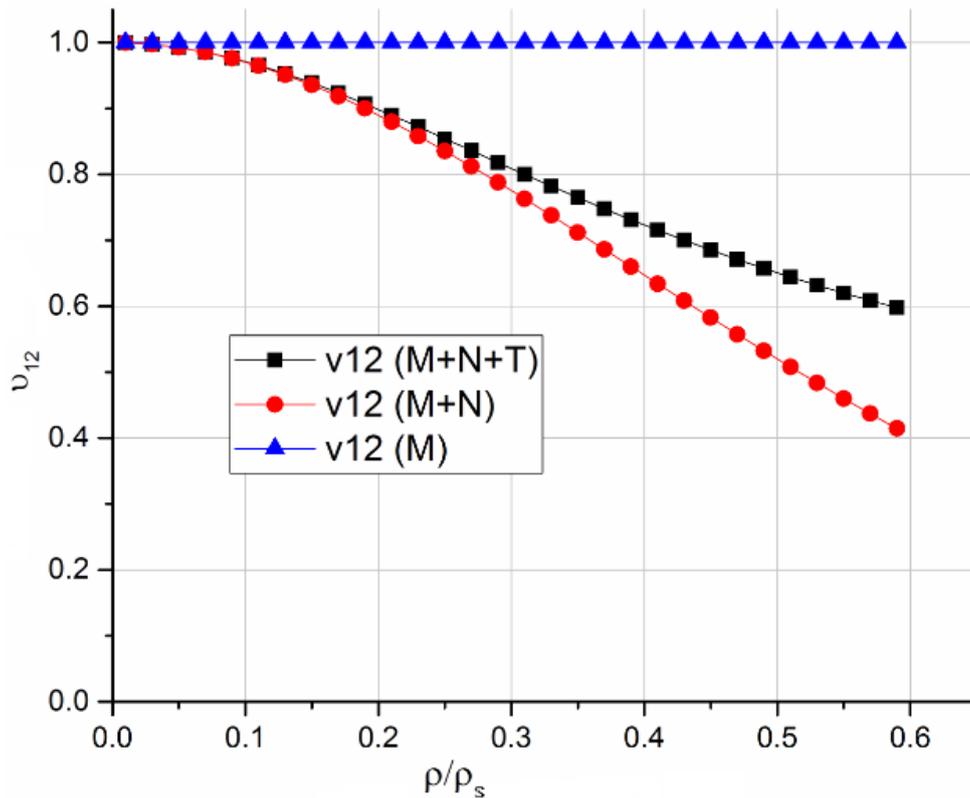
### 4.3.1 Effet de divers types de mécanismes de déformation



**Figure 4.25** Module d'élasticité  $E_1/E_s$  en fonction de la densité relative pour diverses combinaisons de déformation, pour ( $\alpha= 1, \beta= 0.2, \varphi= 60^\circ, \theta= -20^\circ$ ).

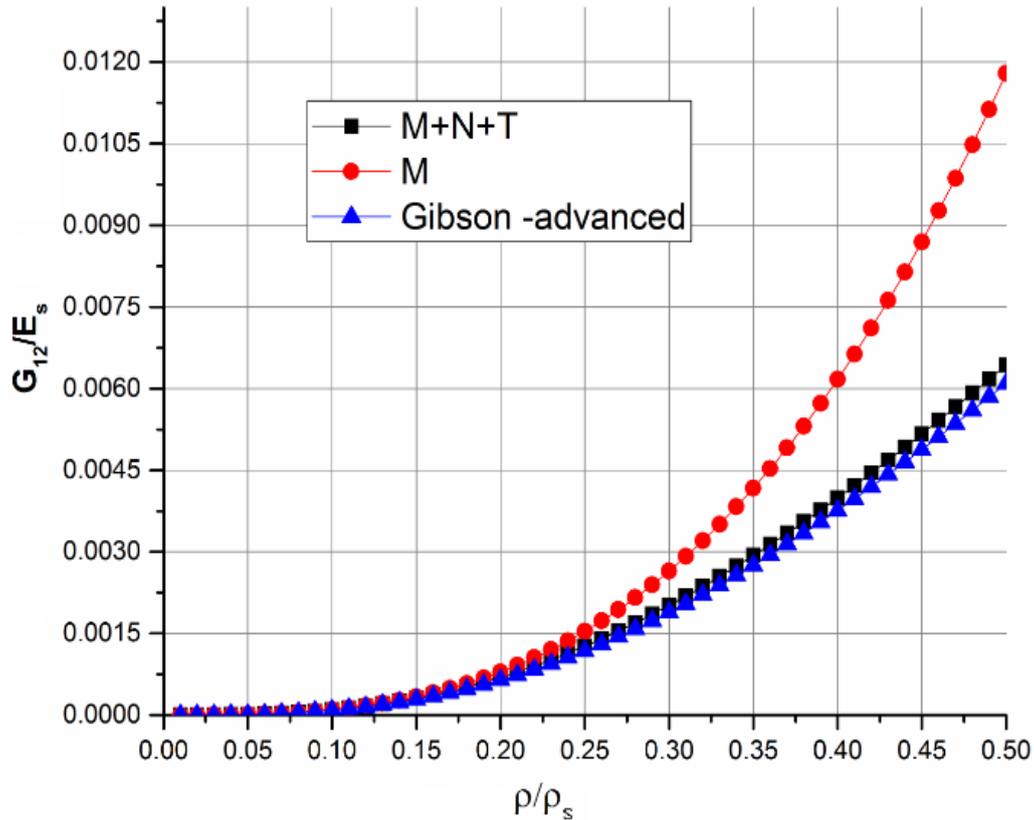
La figure 4.25 illustre la variation du module d'élasticité adimensionnel en fonction de la densité relative pour les quatre combinaisons de déformation : M, MN, MT, MNT. Les modules d'élasticité ont les mêmes valeurs pour les faibles densités relatives contrairement aux densités relatives plus élevées où des écarts importants entre les modules d'élasticité pour chacune des sollicitations, on remarque que le module d'élasticité  $E_1/E_s$  amplifié d'une manière monotone en fonction de la densité relative jusqu'à un maximum de 0.6. Pour une densité relative de 0.5 et pour la

contribution de la flexion en tant que le seul mécanisme de déformation, le rapport  $E_1/E_s$  est de 2.5 fois plus supérieur par rapport à tous les mécanismes des déformations. Les mêmes observations peuvent être faites pour le rapport d'élasticité  $E_2/E_s$ . L'effet de la flexion seule surestime la rigidité dans les deux sens pour des rapports de densités relatives supérieures à 0.3.



**Figure 4.26** Coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  en fonction de la densité pour diverses combinaisons de déformation.

L'effet de la contribution des différents modes de déformations déduite de l'expression (3.19) est clair dans la figure 4.26 représentant la variation du coefficient de Poisson avec la densité relative pour différentes origines de déformation. Remarquant que sous l'effet du moment fléchissant seul la valeur du coefficient de Poisson  $\nu_{12}=1$  est constante pour les différentes valeurs de la densité relative. L'effet de la déformation axiale diminue sensiblement les valeurs de  $\nu_{12}$  avec l'accroissement de la densité relative jusqu'à  $\nu_{12}=0.4$  pour une densité relative 0.6 et une valeur  $\nu_{12}=0.6$  pour la contribution de la déformation de cisaillement.

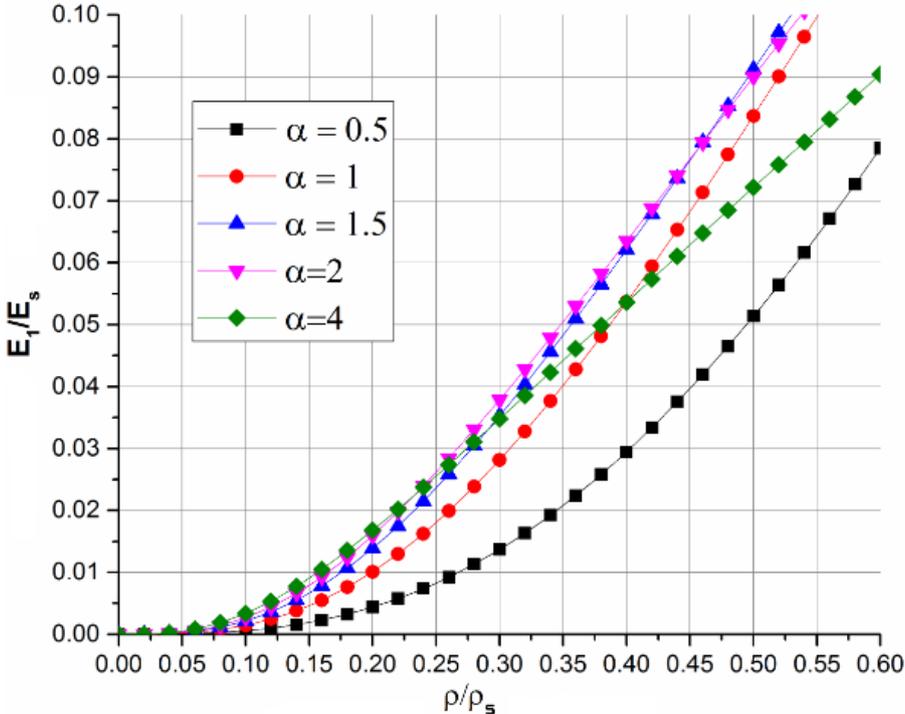


**Figure 4.27** Variation du module de cisaillement  $G_{12}/E_s$  en fonction de la densité relative.

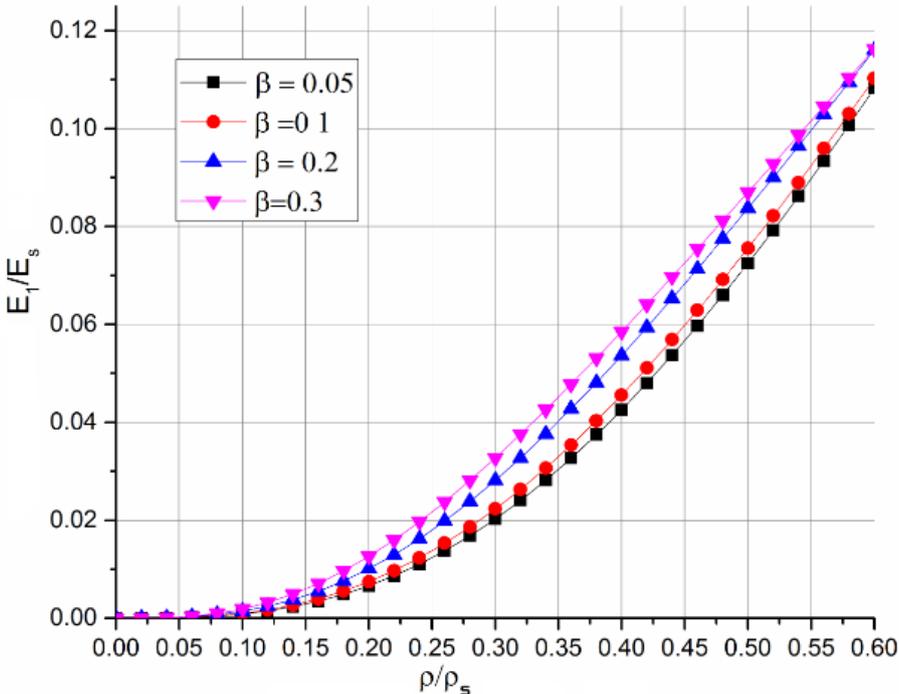
Le module de cisaillement augmente de façon monotone avec la densité relative comme montre la figure 4.27 pour  $(\alpha=1, \beta=0.2, \varphi=45^\circ, \theta=-25^\circ)$ , ce résultat est qualitativement semblable à celui prédit pour les modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$ , mais de moindres amplitudes. L'effet des déformations de cisaillement et axiales est généralement négligé à cause de leurs faibles contributions dans l'évaluation du module de cisaillement dans le plan de la cellule. Les résultats trouvés par le modèle raffiné montrent que l'effet de ces derniers devient significatif pour les cellules épaisses. Il conclut que le comportement des nids d'abeilles ayant une densité relative élevée ne peut pas être décrit par une paroi soumise uniquement en flexion comme prévu dans les études déjà exposées [43]. Il convient de noter que les cellules hexagonales [30] présentent une rigidité au cisaillement inférieure de 0.04 fois que la configuration de cellule étudiée pour une densité relative 0.5.

4.3.2. Effet des différents paramètres géométriques sur la densité relative

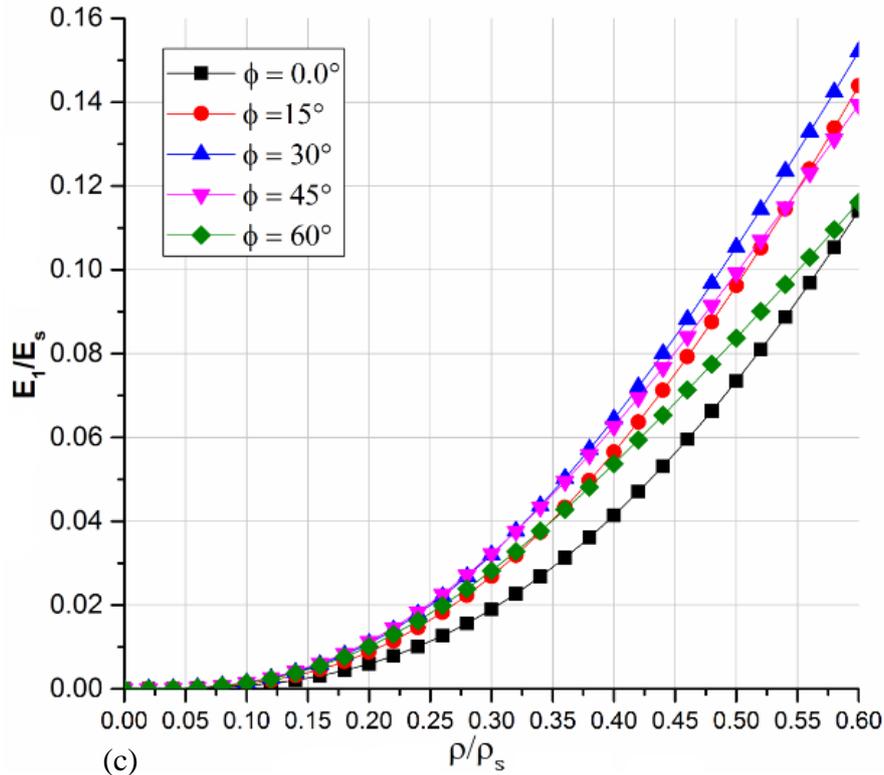
4.3.2.1 Module d'élasticité  $E_1$



(a)



(b)

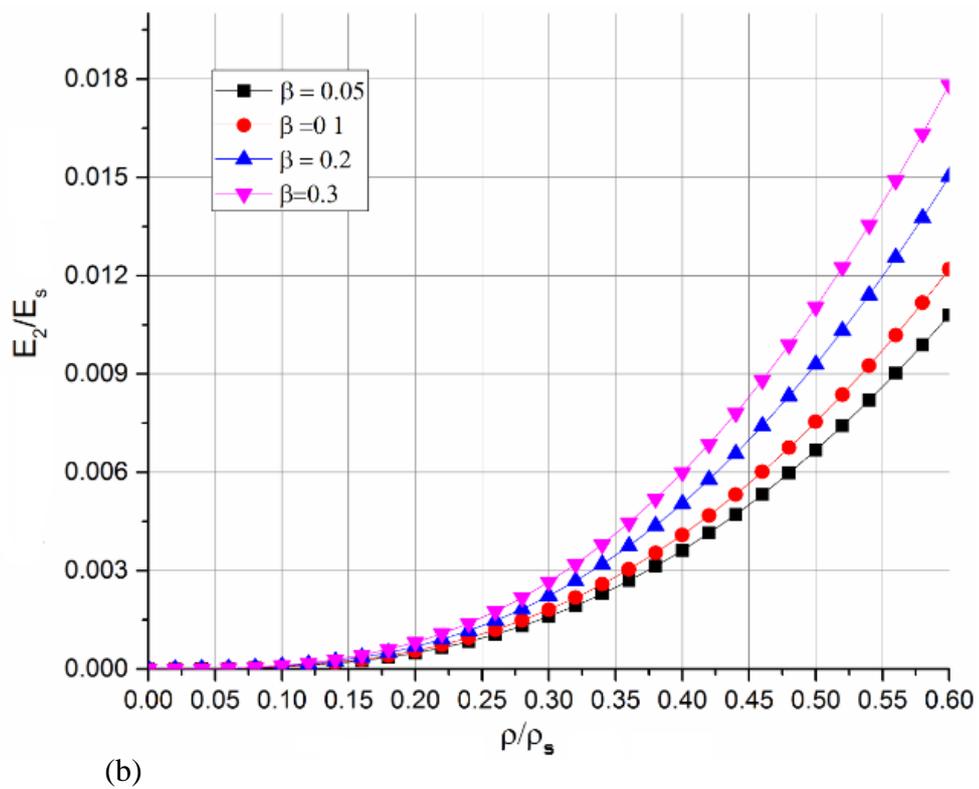
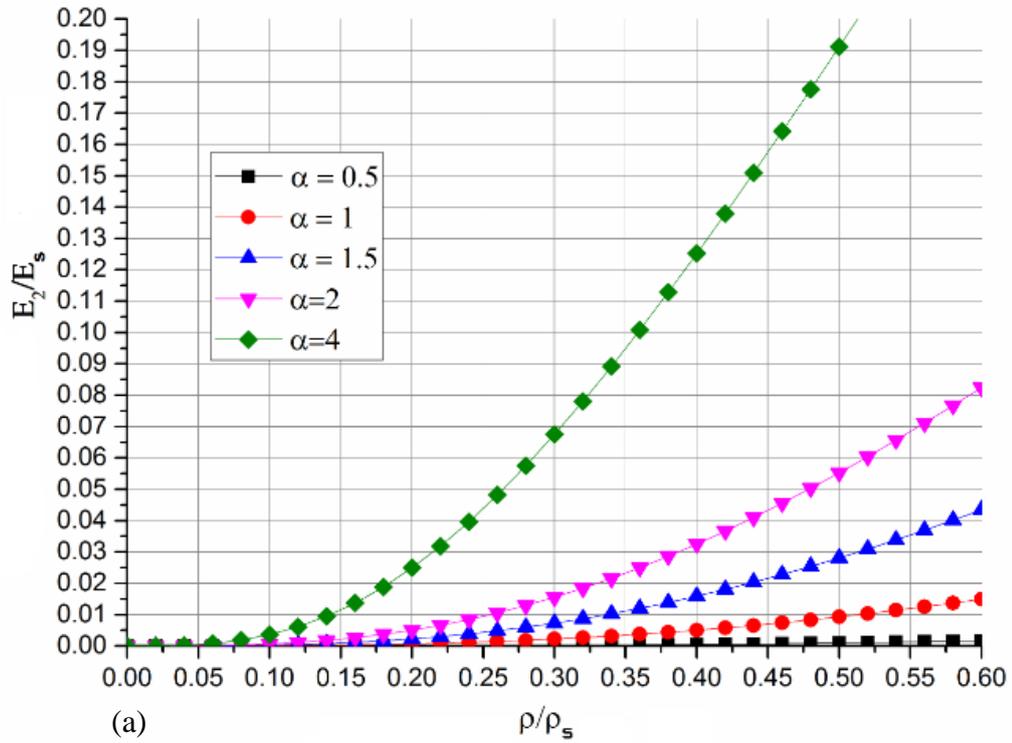


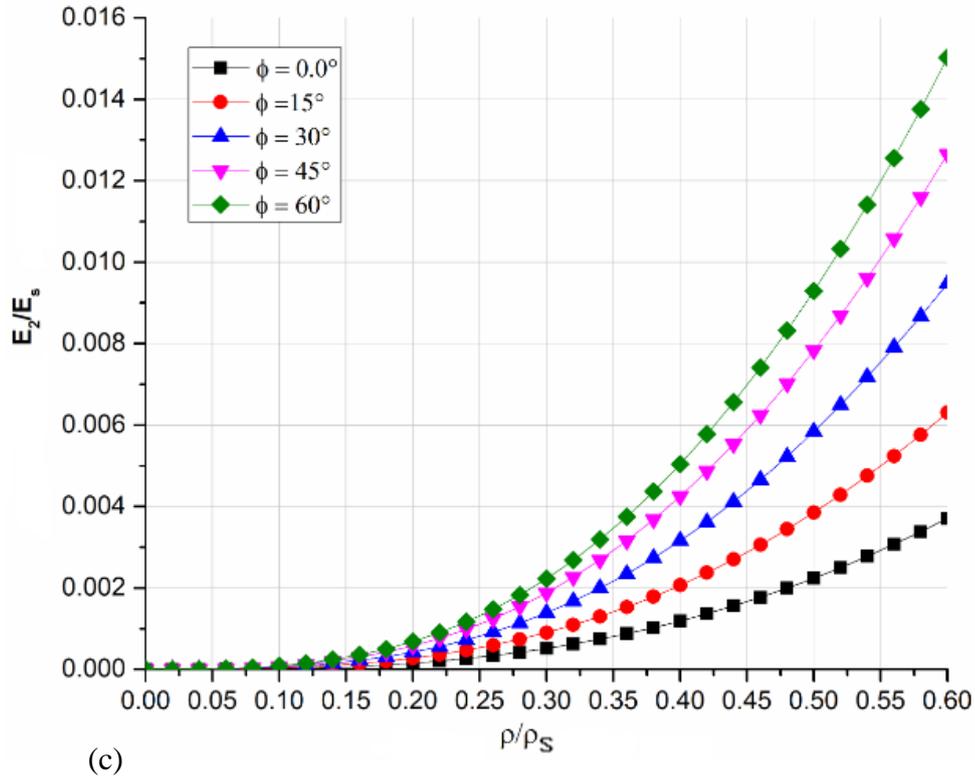
**Figure 4.28** Variation du module de Young adimensionnel  $E_1/E_s$  en fonction de la densité relative. (a)  $E_1/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour  $(\beta=0.2, \phi=60^\circ, \theta= -20^\circ)$ , (b)  $E_1/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour  $(\alpha=1, \phi=60^\circ, \theta= -20^\circ)$ , (c)  $E_1/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour  $(\alpha=1, \beta=0.2, \theta= -25^\circ)$ .

La figure 4.28 montre la variation du module d'élasticité adimensionnel  $E_1/E_s$  en fonction de la densité relative par rapport aux différents paramètres non dimensionnels qui sont utilisés pour définir la topologie de la cellule. Il est clair que la valeur du module d'élasticité effective  $E_1$  est très sensible à la densité relative, croit lorsque  $\rho/\rho_s$  augmente. La figure 4.28.a. Indique que le module d'élasticité adimensionnel augmente progressivement avec le rapport  $h/l$  jusqu'à atteindre un maximum  $h/l=1.5$  ce qui traduit par une structure plus rigide par rapport aux autres configurations en fixant  $(\beta=0.2, \phi=60^\circ, \theta= -20^\circ)$ . L'augmentation de l'aspect de la paroi de base de 0.05 à 0.3, induit une augmentation de rigidité de 50 % à une densité de 0.35, considérant les paramètres constants  $(\alpha=1, \phi=60^\circ, \theta=-20^\circ)$  figure 4.28.b. Comme montre la figure 4.28.c, l'augmentation de l'angle d'inclinaison  $\phi$  fournit une augmentation significative du module d'élasticité sans dimension dans la direction (1) jusqu'à un maximum de  $\phi = 30^\circ$ , alors que l'accroissement de l'angle de base  $\phi$  fournit

une diminution significative du module d'élasticité adimensionnel dans la direction  $X_1$ .

#### 4.3.2.2 Module d'élasticité $E_2$

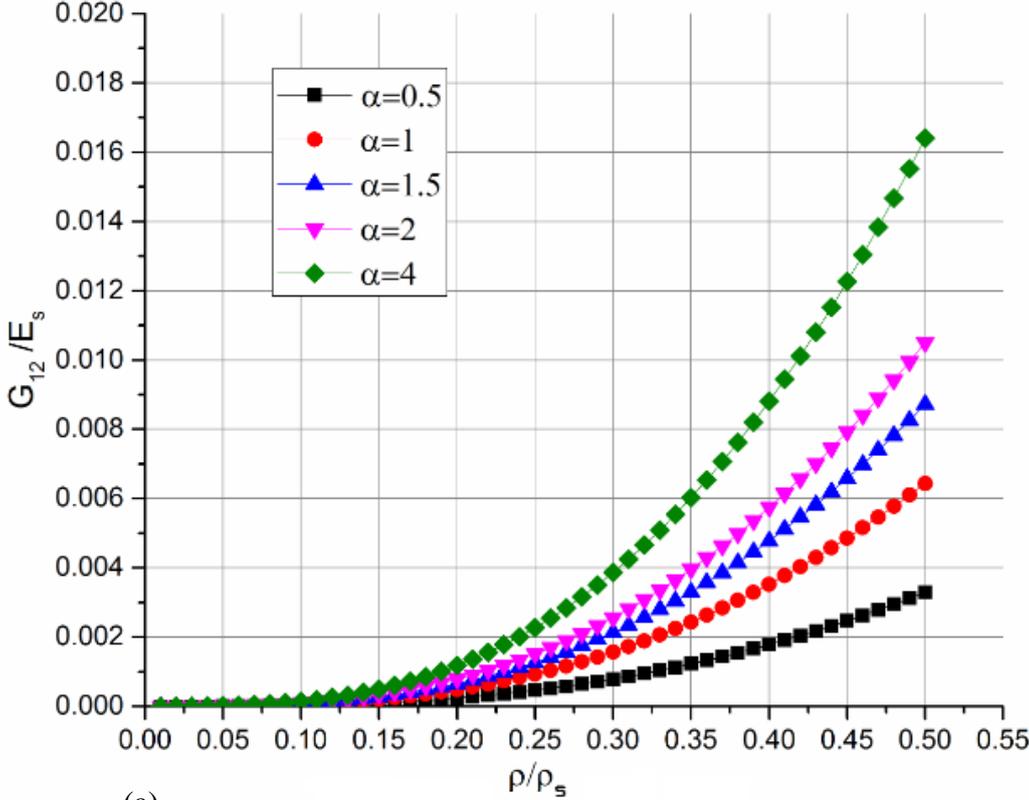




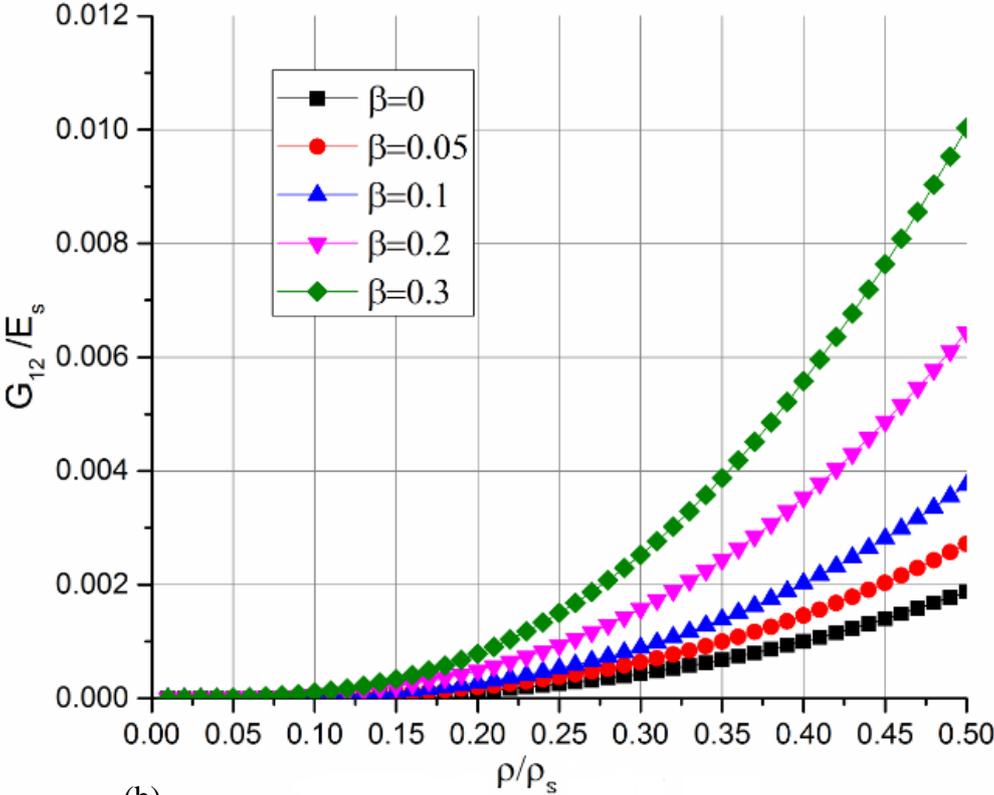
**Figure 4.29** Variation du module de Young adimensionnel  $E_2/E_s$  en fonction de la densité relative. (a)  $E_2/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour ( $\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta= -20^\circ$ ). (b)  $E_2/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour ( $\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta= -20^\circ$ ). (c)  $E_2/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour ( $\alpha=1, \beta=0.2, \theta= -25^\circ$ ).

La figure 4.29.a représente l'évolution du module d'élasticité adimensionnel  $E_2/E_s$  en fonction de la densité relative pour différentes valeurs de  $\alpha$  (0.5, 1.0, 1.5, 2 et 4), on constate que l'augmentation du rapport d'aspect de la cellule favorise une augmentation de module  $E_2/E_s$ , contrairement à  $E_1/E_s$  qui atteint un maximum à  $\alpha=1,5$  en tenant compte des paramètres constants ( $\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ$ ). La figure (4.29.b) montre que le module d'élasticité  $E_2/E_s$  dépend en grande partie du rapport d'aspect de paroi de base. La tendance générale est que  $E_2/E_s$  augmente avec l'augmentation de  $\beta$ , ceci est semblable à celle prédite par  $E_1/E_s$ , mais de fortes amplitudes considérant ( $\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta= -20^\circ$ ). L'augmentation de l'angle de base  $\varphi$  fournit une augmentation significative du module d'élasticité adimensionnel  $E_2/E_s$  (voir figure 4.29.c), le rapport de rigidité dans le plan est 2.4 fois supérieur lorsqu'on passe d'un angle de paroi de base  $\varphi=45^\circ$  à  $\varphi=0^\circ$  pour une densité de 0.3. L'augmentation de l'angle de la paroi de base  $\varphi$  fournit une contribution accrue de la déformation axiale de l'ensemble des parois cellulaires.

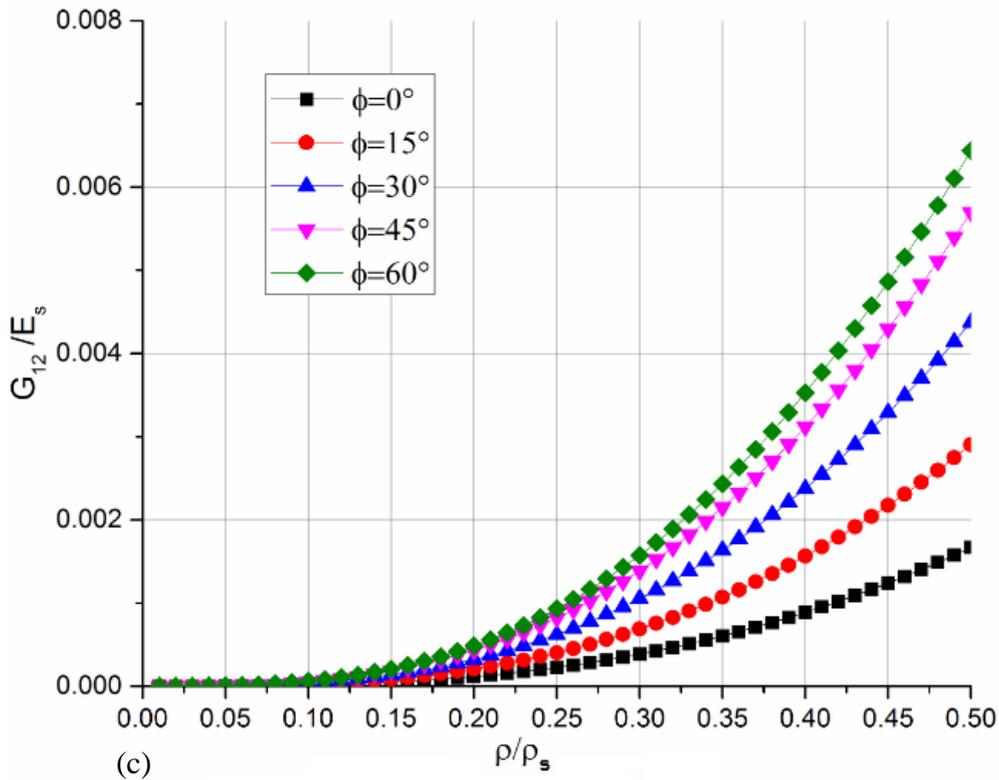
4.3.2.3 Module d'élasticité  $G_{12}$



(a)



(b)

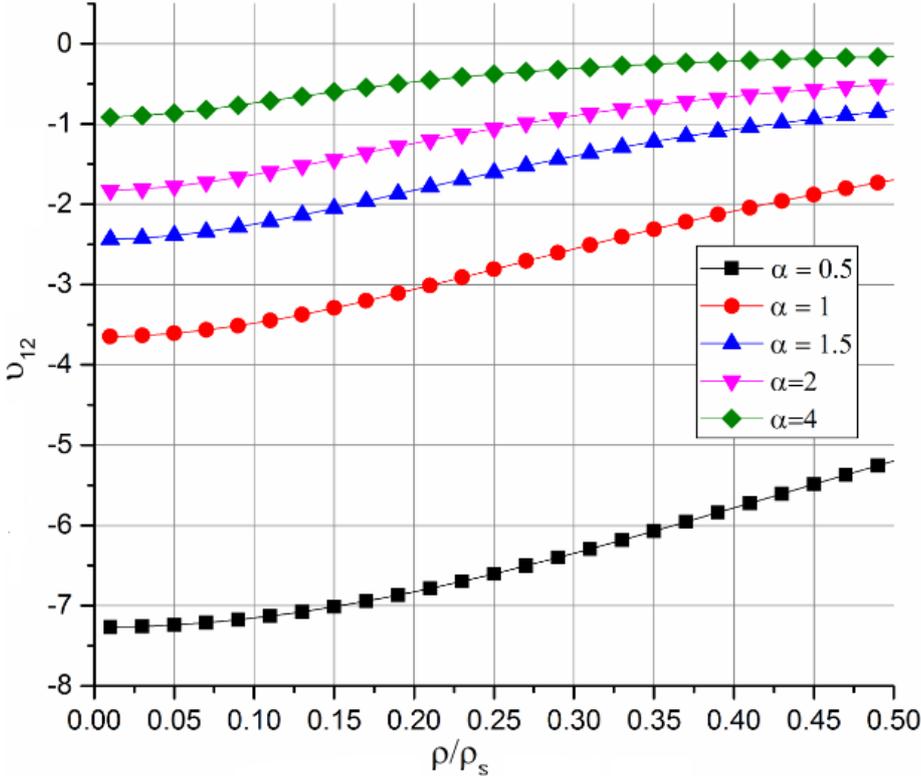


**Figure 4.30** Variation du module de cisaillement  $G_{12}/E_s$  en fonction de la densité relative. (a)  $G_{12}/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour  $(\beta=0.2, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ)$ . (b)  $G_{12}/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour  $(\alpha=1, \varphi=60^\circ, \theta=-20^\circ)$ . (c)  $G_{12}/E_s$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  pour  $(\alpha=1, \beta=0.2, \theta=-20^\circ)$ .

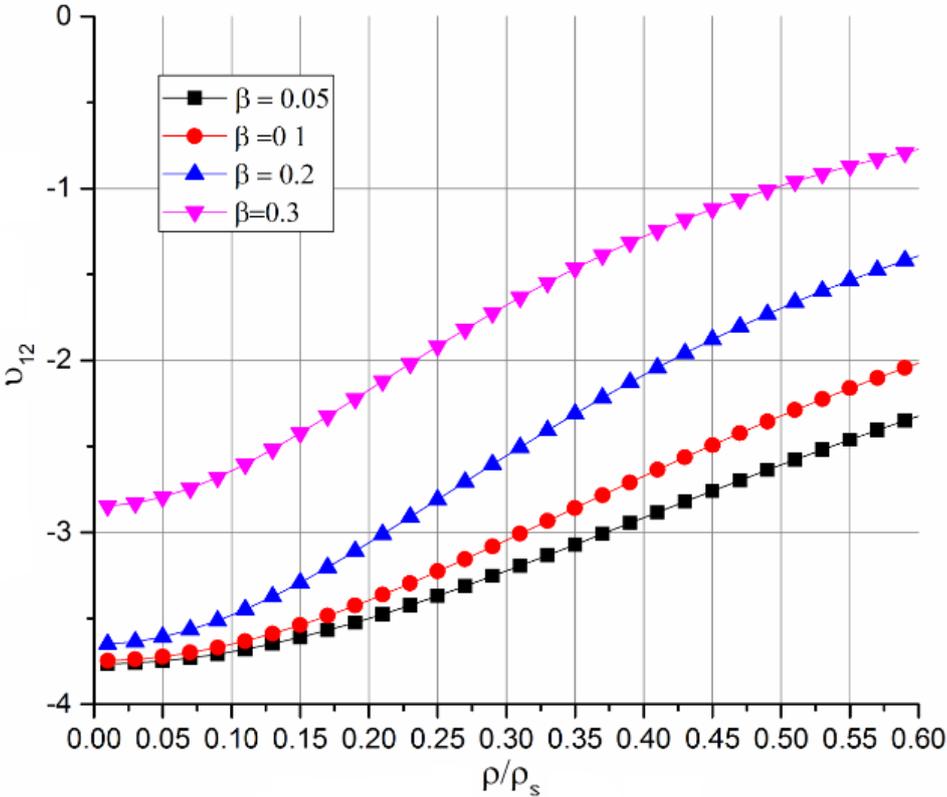
Il est clair dans la figure 4.30.a que le module de cisaillement  $G_{12}/E_s$  augmente avec l'augmentation de la densité relative et le rapport d'aspect de la cellule  $h/l$ , ce qui est similaire au module  $E_1$  et  $E_2$ , un module de cisaillement élevé est attendu pour une cellule avec un rapport de longueur élevé. Sous l'effet des trois mécanismes de déformation, le Module  $G_{12}$  (Eq.3.35) augmente avec l'accroissement de la densité relative (figure 4.30.b). Notons que le module  $G_{12}$  amplifié d'une manière significative avec les valeurs du talon « a », la rigidité en cisaillement est plus de 3.4 fois quand le talon est de  $a=0.3L$  par rapport à une paroi de base nulle cellule hexagonale [30], et la cellule devient plus rigide en cisaillement.

La figure 4.30.c montre l'effet de l'angle de base sur le module de cisaillement relatif en fonction de la densité relative. Dans le cas de densité relativement élevée l'écart est important du module  $G_{12}/E_s$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  l'augmentation de ce dernier, rend le module de cisaillement maximal et la structure devient de plus en plus rigide.

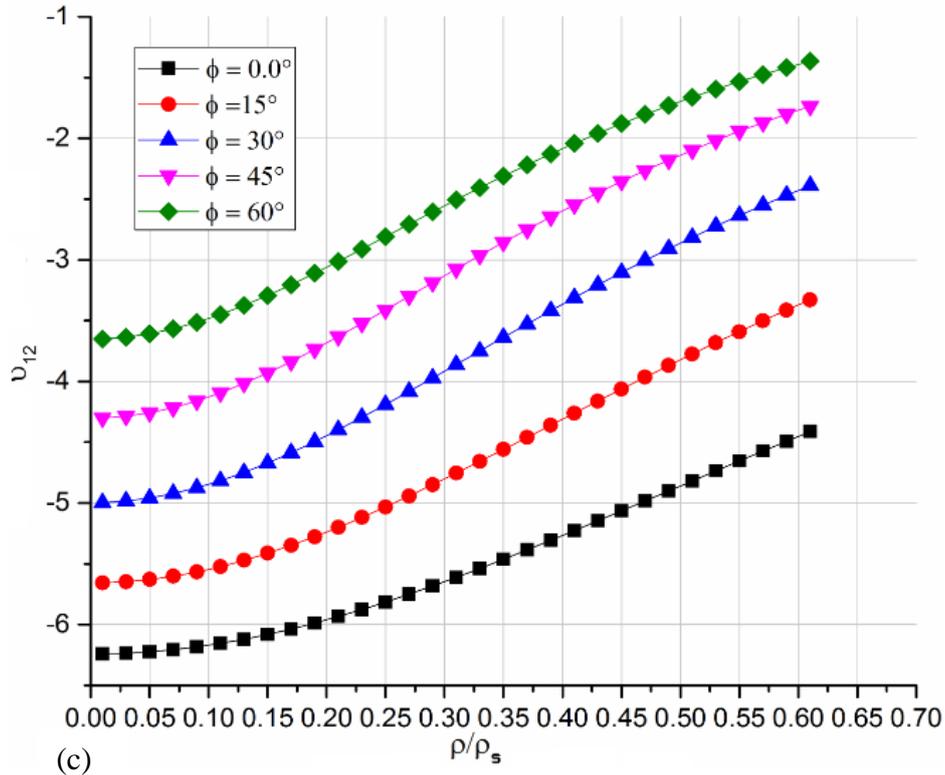
4.3.2.4 Coefficient de Poisson  $\nu_{12}$



(a)



(b)



**Figure 4.31** Variation de coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  en fonction de la densité relative. (a)  $\nu_{12}$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  et  $\alpha$  pour ( $\beta=0.2$ ,  $\phi=60^\circ$ ,  $\theta= -20^\circ$ ), (b)  $\nu_{12}$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  et  $\beta$  pour ( $\alpha=1$ ,  $\phi=60^\circ$ ,  $\theta= -20^\circ$ ). (c)  $\nu_{12}$  en fonction de  $\rho/\rho_s$  et  $\phi$  pour ( $\alpha=1$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\theta= -20^\circ$ ).

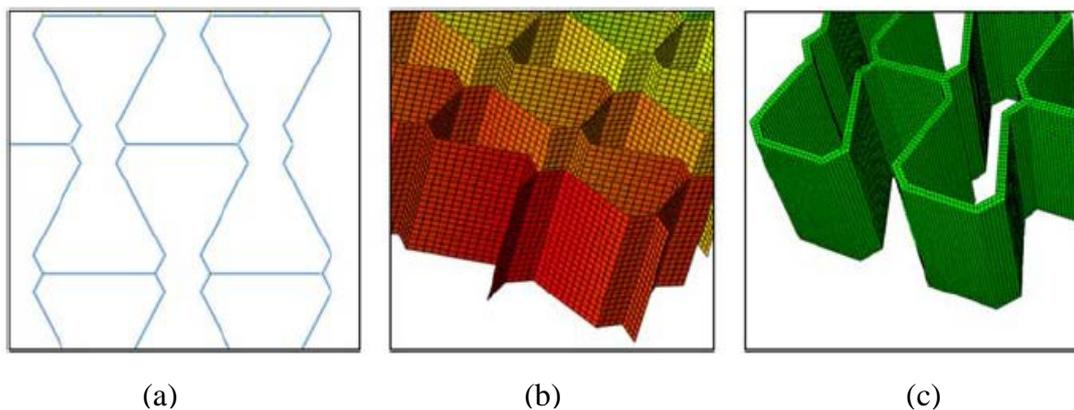
La figure 4.31.a et la figure 4.31.b montrent l'évolution du coefficient de Poisson en fonction de la densité relative pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  avec ( $\phi= 60^\circ$  et  $\theta = -20^\circ$ ). Les résultats obtenus montrent que l'augmentation de la densité relative provoque une diminution de la valeur absolue du coefficient de Poisson négatif. Cependant, la valeur absolue du coefficient de Poisson augmente avec la diminution des rapports d'aspect  $\alpha$  et  $\beta$ . Ceci s'explique par l'impact de la rigidité axiale des parois ( $h$  et  $a$ ) sur la déformation des clinquants. Lorsque la cellule est réentrante  $\theta = -20^\circ$ , elle présente un comportement auxétique et un coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  proche de -7,5. Ensuite, elle diminue avec l'augmentation de la densité relative.

L'effet de l'angle  $\phi$  sur la variation du coefficient Poisson dans le plan en fonction de la densité relative, est montré sur la figure 4.31.c. Il a initialement une valeur relativement constante, puis il augmente d'une façon continue avec l'augmentation de  $\rho/\rho_s$ . Le coefficient de Poisson négatif diminue avec l'augmentation de l'angle de la

paroi de base  $\varphi$ , cette découverte est en désaccord avec l'étude de référence [52]. Ceci est dû à la présence de la contribution des forces normales et de cisaillement dans le modèle analytique.

#### 4.4. Validation numérique

L'objectif de cette section est la détermination des constantes élastiques par une méthode d'homogénéisation numérique appliquée à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif du nid d'abeille (figure 4.32) afin de comparer les résultats avec ceux obtenus analytiquement. La validation des formules analytiques a été exécutée en utilisant un modèle élément fini implicite développé avec le code commercial ABAQUS 6.10 [84]. L'étude numérique a pour but le développement des modèles fiables et prédictifs pour la simulation numérique du comportement des structures.



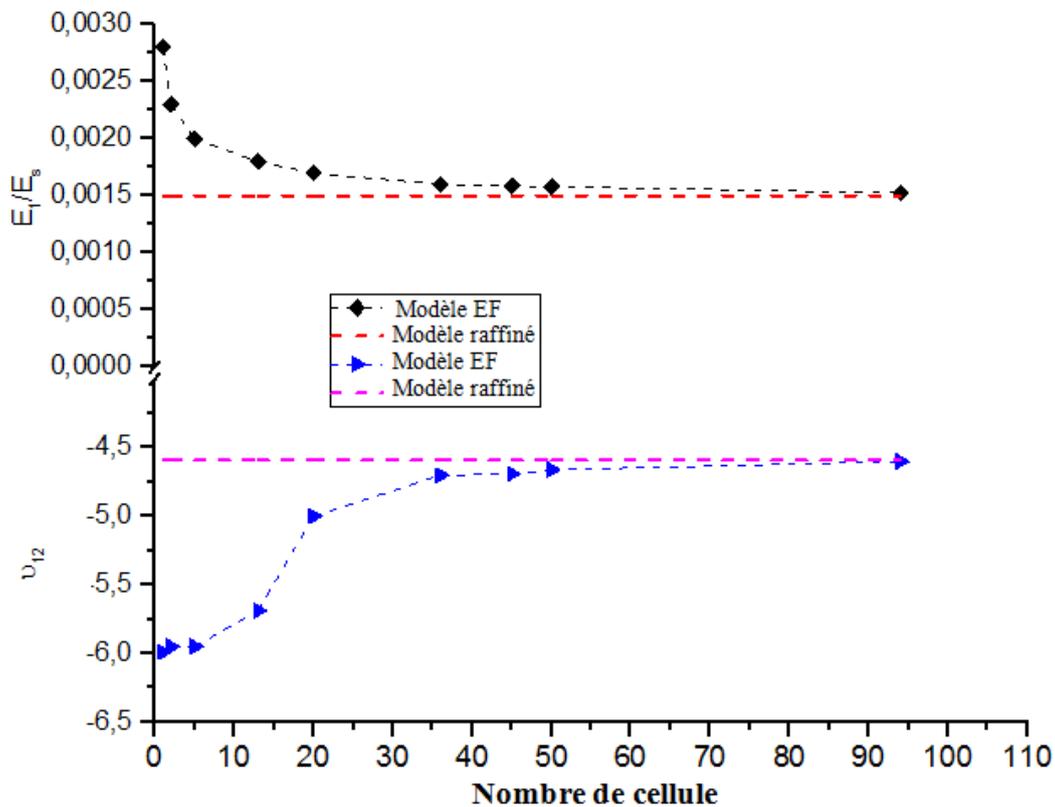
**Figure 4.32** Volume élémentaire représentatif pour les simulations numériques.

(a) poutre (2D), (b) coque ou shell (3D), (c) solide (3D),

Afin de mettre en évidence l'influence des nombres de cellules sur la convergence des résultats, des calculs ont été entrepris en commençant par un nombre de 2 cellules jusqu'à un maximum de 94 cellules (figure 4.33). La convergence s'est révélée être réalisée sur un nombre de 49 cellules. Les auteurs ont utilisé un nombre de 68 cellules qui est largement suffisant. Dans cette étude, un modèle de 68 cellules est adopté pour le VER afin d'assurer la convergence du modèle [58]. Afin d'évaluer les différents modules d'élasticités, un déplacement unitaire est donné d'un côté du volume élémentaire représentatif dans la direction considérée, tandis que le côté opposé est fixe. La symétrie a été prise en compte lors de l'examen des conditions aux limites. Trois simulations sont nécessaires pour déterminer les cinq modules d'élasticité : la

simulation de la contrainte de traction dans la direction (x, y) conduit à la détermination des modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  avec les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  (figures 4.34.a et 4.34.b) tandis que la simulation de la contrainte de cisaillement le long du plan (xy) conduit à déterminer les modules de cisaillement  $G_{12}$  (figure 4.34.c).

Notez que plusieurs simulations sont effectuées afin d'optimiser les modèles numériques [62].



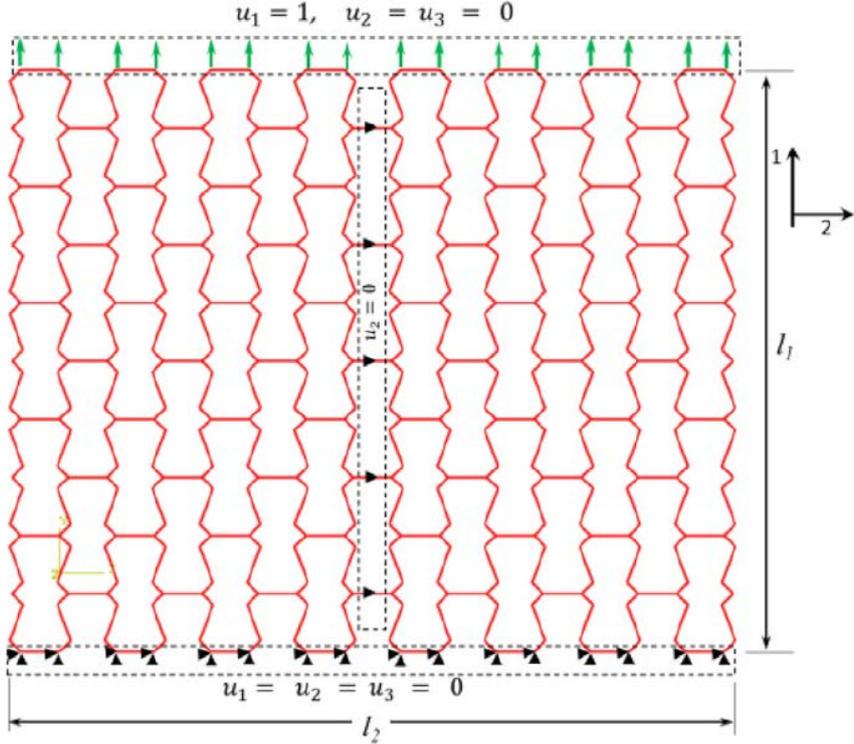
**Figure 4.33** Dépendance du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et le module d'élasticité adimensionnelle  $E_1/E_s$  sur le calcul de nombre des cellules.

Nous avons utilisé trois modèles (voir figure 4.32) :

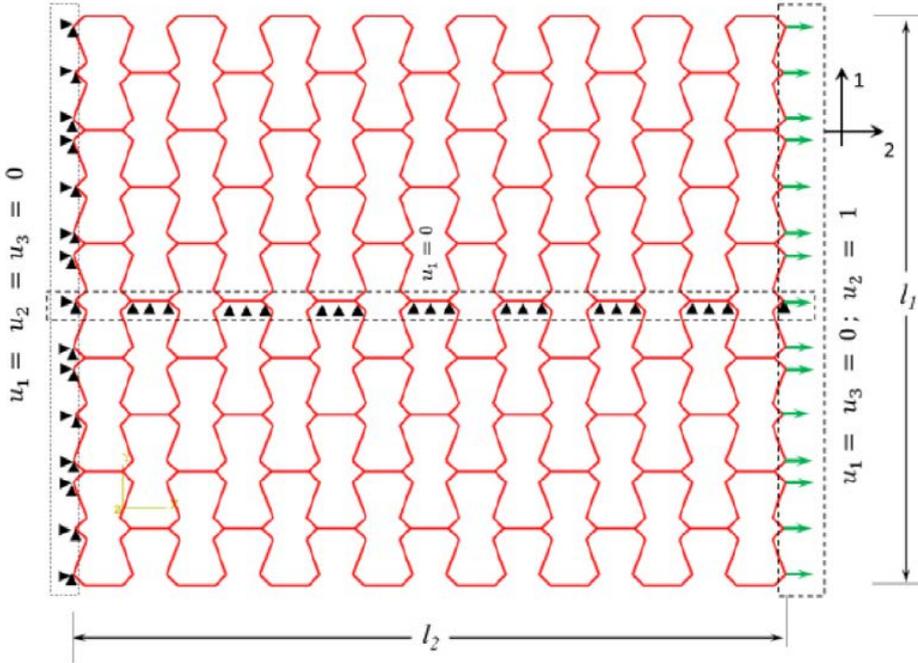
(1) Dans le premier modèle, la structure en nid d'abeille est modélisée en utilisant des éléments de coque. L'élément de coque (S4R) avec intégration réduite.

(2) Dans le second modèle, la structure en nid d'abeille est modélisée à l'aide d'éléments solides. L'élément solide C3D8R est utilisé pour l'évaluation du module de cisaillement dans le plan et différentes valeurs des paramètres géométriques de la cellule. Un maillage de 9 600 éléments est adopté pour assurer la convergence.

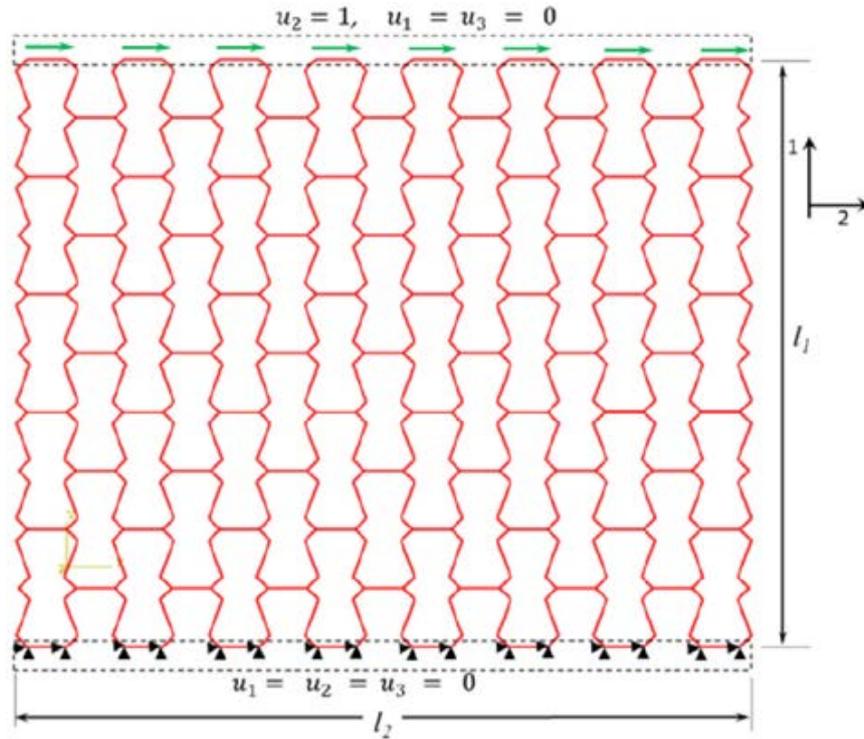
(3) Dans le troisième modèle, la structure en nid d'abeille est modélisée en utilisant des éléments de poutre. L'élément de poutre flexible de cisaillement Timoshenko B21 est utilisé. Un maillage avec 5 637 éléments est adopté, dans lequel, chaque paroi inclinée est constituée de 17 éléments de poutre.



(a)



(b)



(c)

**Figure 4.34** Description du modèle numérique.

(a) et (b) Les conditions aux limites prises dans la simulation de la traction suivant les directions 1 et 2 respectivement.

(c) Conditions aux limites prises pour déterminer  $G_{12}$ .

Des bonnes corrélations entre les résultats analytiques et numériques pour toutes les configurations sont obtenues. Des écarts ne dépassent pas 3.5 % sur les modules de Young  $E_1$  et 2.8 % pour le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  obtenu avec le modèle de poutre, ces écarts sont inférieurs à ceux obtenus avec le modèle coque qui sont au voisinage de 7 %. Pour le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  les meilleurs résultats sont obtenus avec le modèle poutre et également avec le modèle solid3D pour des angles de cellule positifs ( $\theta > 0$ ) correspond aux cellules (2-4-5-6-8) voir tableau 4.1, l'erreur est inférieure à 5 %. On constate que pour le module  $E_1$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  l'erreur est quasi négligeable pour l'élément de poutre et pour les deux configurations de cellule conventionnelle ( $\theta$  positif) et auxétique ( $\theta$  négatif). Quant au module  $G_{12}$  un faible écart de 4 % est observé pour les angles internes négatifs. Des faibles écarts ont été remarqués avec des éléments coques. Ils sont inférieurs à 6 % sur le module d'élasticité  $E_1$  et 2.8 % sur le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et de 7.2 % sur le module de cisaillement  $G_{12}$  et pour les différentes configurations.

Pour les cellules réentrantées un large écart dépassant 19 % par rapport aux résultats analytiques a été observé pour le modèle composé par des éléments Solid 3D. Cet écart devient très acceptable (inférieurs 2 %) pour les cellules ouvertes à angles internes positifs.

En général, et pour une analyse dans le plan, le modèle formé par des éléments de poutre avec la prise en compte de l'effet des déformations axiales et de cisaillement est le plus répondu et le plus efficace pour homogénéiser les modules élastiques dans le plan. Cet élément et avec des conditions aux limites soigneusement choisies dans le VER donne des résultats très proches que ceux trouvés analytiquement et par d'autres éléments. L'élément coque donne aussi de bons résultats et permet aussi de modéliser la hauteur de la cellule (dimension  $b$ ) qui devient indispensable pour l'évaluation des autres modules hors plan.

Les modèles les plus complets sont les modèles Shell et Solid 3D car ces modèles peuvent évaluer les neuf modules indépendants dans et hors plan.

**Tableau 4.1** Comparaison entre le modèle analytique et numérique.

		$\frac{\rho}{\rho_s}$	Module de Young $E_1$ ( $E_s=70000$ MPa)			Coefficient de Poisson $\nu_{12}$			Module de cisaillement $G_{12}$ ( $E_s=70000$ MPa)			
			Raffiné	M.E.F Poutre	M.E.F Shell	Raffiné	M.E.F Poutre	F.E.M Shell	Raffiné	M.E.F Poutre	M.E.F Shell	M.E.F Solid 3D
			1	$\alpha=1.0, \beta=0.2, \phi=25^\circ, \theta=-25^\circ$	0.010 0.100	0.047 45.987	0.049 46.429	0.050 48.370	-4.364 -4.302	-4.498 -4.430	-4.612 -4.600	0.002 1.505
2	$\alpha=1.0, \beta=0.2, \phi=0^\circ, \theta=+25^\circ$	0.010 0.100	0.154 147.017	0.159 143.465	0.166 151.856	2.205 2.132	2.185 2.087	2.350 2.231	0.021 20.512	0.022 20.882	0.022 21.376	0.0215 21.1593
3	$\alpha=2.0, \beta=0.2, \phi=0^\circ, \theta=-25^\circ$	0.010 0.100	0.094 90.799	0.093 88.085	0.101 96.250	-1.989 -1.938	-2.050 -1.998	-2.100 -2.080	0.003 2.473	0.003 2.605	0.003 2.675	0.0036 2.9419
4	$\alpha=1.0, \beta=0, \phi=0^\circ, \theta=30^\circ$	0.010 0.100	0.106 101.741	0.110 103.589	0.114 109.412	1.000 0.971	1.030 0.991	1.060 1.000	0.027 25.805	0.026 24.772	0.025 26.399	0.0276 25.877
5	$\alpha=1.0, \beta=0.2, \phi=25^\circ, \theta=0^\circ$	0.010 0.100	4.195 2162.22	4.163 2198.05	4.282 2240.23	12.723 6.79	13.010 7.081	13.355 7.152	0.010 13.484	0.010 14.136	0.0106 14.536	0.0102 13.7941
6	$\alpha=1.0, \beta=0, \phi=0^\circ, \theta=0^\circ$	0.010 0.100	469.052 4690.70	478.251 4780.05	488.021 4890.04	0 0	0 0	0 0	0.007 6.924	0.007 6.720	0.007 6.685	0.007 7.0833
7	$\alpha=1.667, \beta=0, \phi=0^\circ, \theta=-30^\circ$	0.010 0.100	0.036 35.813	0.037 34.987	0.038 36.798	-1.285 -1.269	-1.284 -1.267	-1.292 -1.294	0.0014 1.372	0.0014 1.365	0.0013 1.389	0.0017 1.6327
8	$\alpha=1.0, \beta=0.2, \phi=-25^\circ, \theta=25^\circ$	0.010 0.100	0.132 126.37	0.133 130.85	0.139 134.85	2.598 2.496	2.680 2.458	2.781 2.654	0.003 3.014	0.003 3.105	0.003 3.254	0.003 3.0833

#### 4.5. Conclusion

Les résultats trouvés fournissent de nouveaux aperçus sur la compréhension de la mécanique des nids d'abeilles avec des structures périodiques, cette topologie en nid d'abeille présente quatre types de paramètres géométriques, permettant au concepteur d'en tenir compte et les optimiser à l'avenir. La variation de l'angle de cellule, le rapport entre la paroi verticale de la cellule et la paroi inclinée, le rapport d'épaisseur et le rapport d'aspect de la paroi de base montrent que :

- Les modules d'élasticité  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  sont proportionnels à l'épaisseur des parois.
- Le coefficient de Poisson est inversement proportionnel à l'épaisseur de la paroi pour les différents mécanismes de déformations.
- Les modèles classiques surestiment les valeurs des modules élastiques, en particulier pour les densités relatives élevées.
- L'influence de l'effet de ces trois mécanismes de déformation est insignifiante à des faibles valeurs de densité relative et dans la région de densité intermédiaire, l'effet de ces derniers devient de plus en plus importants.
- L'effet auxétique est dû à un couplage flexion-membrane-cisaillement élevée et à l'influence des contraintes dans les clinquants ainsi que leur répartition géométrique dans l'espace de la cellule réentrant.
- Les résultats des recherches numériques confirment les résultats de tous les modèles proposés pour le calcul des propriétés mécaniques dans le plan des nids d'abeilles.
- Une valeur remarquable du coefficient de Poisson dans le plan inférieur à (-7) est particulièrement avantageuse pour les applications structurelles ou le comportement auxétique est recommandé.

## **CHAPITRE V**

**Comportement dynamique des  
structures sandwichs en nid d'abeille :  
analytique et expérimental**

## 5.1 Introduction

Les structures en nid d'abeille en aluminium sont largement utilisées dans diverses applications industrielles en raison de leurs excellentes propriétés physiques, mécaniques et une grande capacité d'absorption d'énergie où un bon amortissement des vibrations est nécessaire [14-85]. Les caractéristiques de vibration des matériaux sandwichs ont attiré beaucoup d'attention récemment. Les paramètres dynamiques d'une structure, c'est-à-dire, la fréquence naturelle, l'amortissement et la forme de mode, sont déterminés à l'aide des tests de vibration ce qui constitue la base d'une caractérisation dynamique rapide et peu coûteuse des structures composites [86]. Plusieurs travaux dans la littérature [87-88-89-90-91-23] tentent à décrire le comportement dynamique des structures composites sandwichs sous la forme de fréquence naturelle et de forme de mode de poutre et de plaque à travers des tests expérimentaux et des méthodes d'éléments finis. Il a été découvert que, les faces dominent la raideur des poutres sandwichs, les fréquences naturelles étaient directement affectées par les matériaux de la face et diminuaient avec l'orientation croissante des fibres des stratifiés face graphite/époxy. Un modèle mathématique basé sur une technique asymptotique multi échelle pour la description dynamique des structures en nid d'abeille est présenté dans la référence [92]. Les méthodes analytiques sont parfois incapables de prédire le comportement des structures sandwichs, en particulier lorsqu'elles ont une géométrie complexe et avec certaines conditions aux limites. À ce stade, l'utilisation des méthodes numériques entre en scène, telle que la méthode des éléments finis (FEM), qui permet de traiter des problèmes très complexes et d'obtenir une bonne précision. Cependant, le désavantage typique de ces méthodes, à savoir le temps long nécessaire pour définir et modifier les modèles, ce qui encourage les chercheurs à modéliser les structures par des approches alternatives, telles que des méthodes équivalentes. Les méthodes équivalentes sont basées sur le concept d'homogénéisation. Avec cette hypothèse, le composant complexe est considéré comme un modèle continu, évitant ainsi tous les problèmes causés par l'hétérogénéité de la structure [93-94]. À ce jour, de nombreuses méthodes équivalentes des plaques sandwichs en nid d'abeille ont été étudiées [96-99]. En 2003, Xia et al.[100] ont proposé trois méthodes équivalentes appelées la théorie du sandwich, la théorie de nid d'abeille et la théorie équivalente de la plaque. Grâce aux trois méthodes, les fréquences naturelles d'une plaque sandwich en nid d'abeille

comprenant deux cas de charge ont été calculées. Les résultats computationnels montrent que les trois méthodes équivalentes sont fiables et pratiques dans l'analyse par éléments finis. Dans ce chapitre, nous citons des généralités sur la théorie des plaques stratifiées et leur comportement vibratoire et en deuxième lieu une analyse modale expérimentale et numérique comparative de plaque et poutre sandwich de topologie hexagonale avec différents matériaux de cœur est effectuée. La très bonne concordance entre les résultats montre que le modèle numérique est adéquat, puis la méthode analytique utilisant l'approche du modèle équivalent a été réalisée pour vérifier la faisabilité et la précision des modèles MEF proposés. Ensuite, une analyse paramétrique a été faite afin d'étudier la sensibilité des fréquences naturelles, des formes de mode par rapport à la taille des cellules, l'épaisseur des peaux, la topologie de cellule et le matériau constitutif des plaques. Enfin, nous étudions la vibration forcée et le calcul du facteur de perte pour différente topologie de cellule.

## **5.2 Théorie des plaques en flexion**

### **5.2.1 Définition d'une plaque**

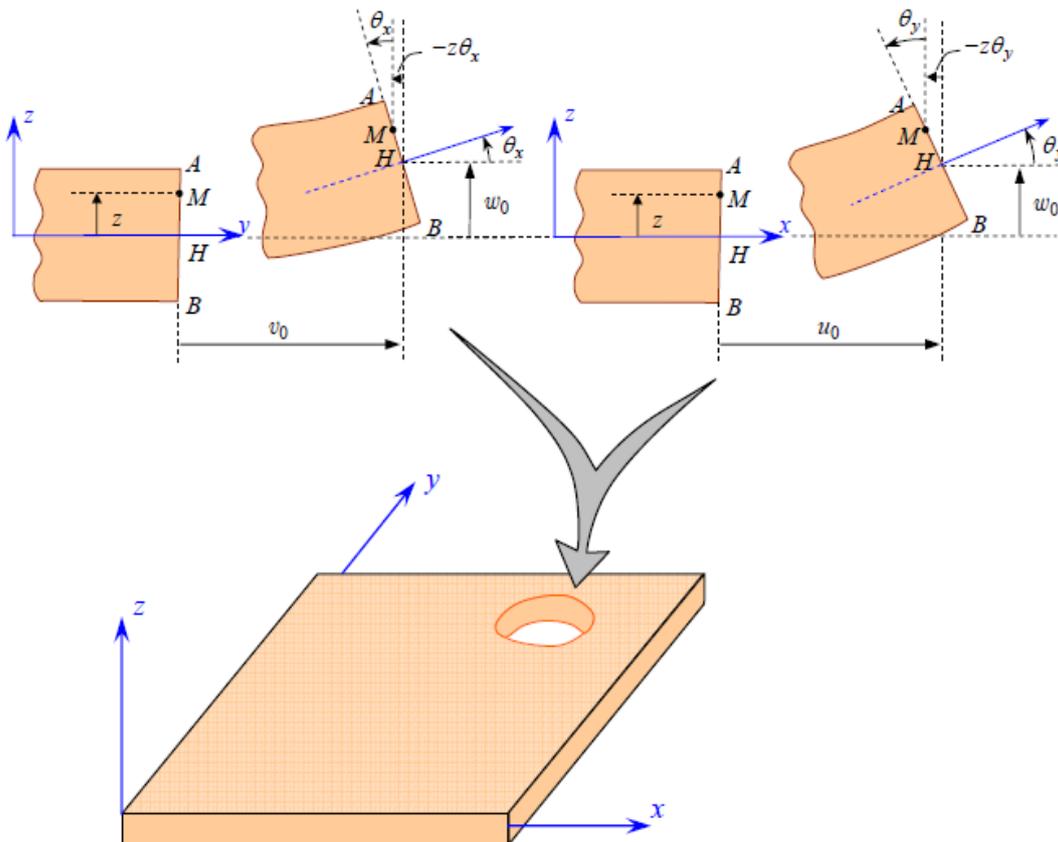
Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne. Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur. Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes, on dit qu'une plaque travaille à la flexion quand les charges auxquelles elle est soumise sont parallèles à l'axe perpendiculaire au plan moyen z.

### **5.2.2 Théorie classique des stratifiés dans les plaques (CLT)**

La Théorie classique des stratifiés est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, employées pour l'étude de structures du type plaque et coque courbe. D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure, reste droite et perpendiculaire à cette surface, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction [101]. Dans la théorie CLT les effets de déformations des cisaillements transversaux ( $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ) et la déformation normale transversale ( $\epsilon_{zz}$ ), ne sont pas

considérés. Les hypothèses supplémentaires adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont :

- Les plis sont parfaitement liés les uns aux autres.
- Les déplacements selon les plis sont continus.
- Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique.
- Le stratifié est considéré comme mince.
- Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.



**Figure 5.1** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés [1]

Le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{xz} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'équation (5.2) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Où les déformations en membrane sont:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Et la matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

### 5.2.2.1 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q_k' \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Où  $Q_k'$  est la matrice de rigidité réduite de la couche k et dont les termes sont exprimés en fonction des modules d'élasticité.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & Q_{16}^i \\ Q_{12}^i & Q_{22}^i & Q_{26}^i \\ Q_{16}^i & Q_{26}^i & Q_{66}^i \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & Q_{16}^i \\ Q_{12}^i & Q_{22}^i & Q_{26}^i \\ Q_{16}^i & Q_{26}^i & Q_{66}^i \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

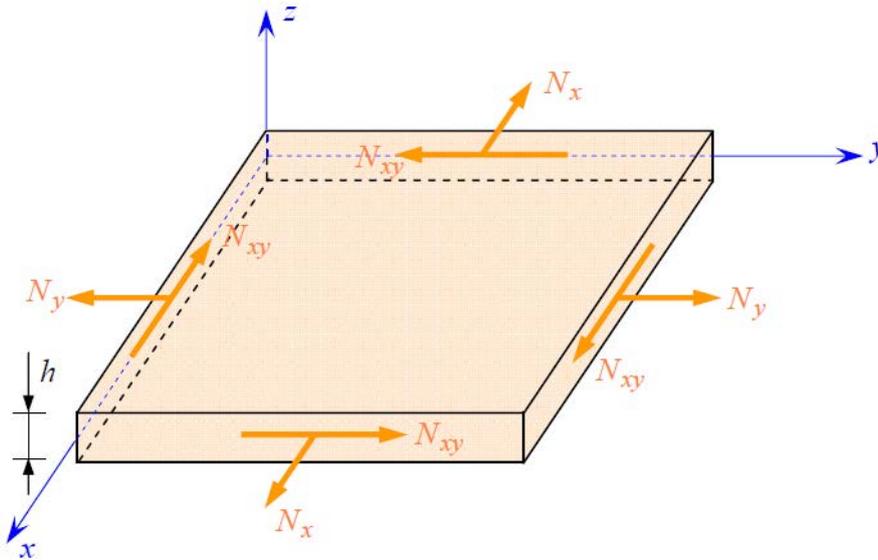
### 5.2.2.2 Expression des résultantes et moments

#### ➤ Résultantes en membrane

Les résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$ , est défini par :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (5.8)$$

Les composantes  $N_x$   $N_y$   $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et des contraintes de cisaillement, dans le plan  $(x, y)$ . Elles sont schématisées sur la figure 5.2.



**Figure 5.2** Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.[1]

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (5.8) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (5.9)$$

#### ➤ Résultantes en cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

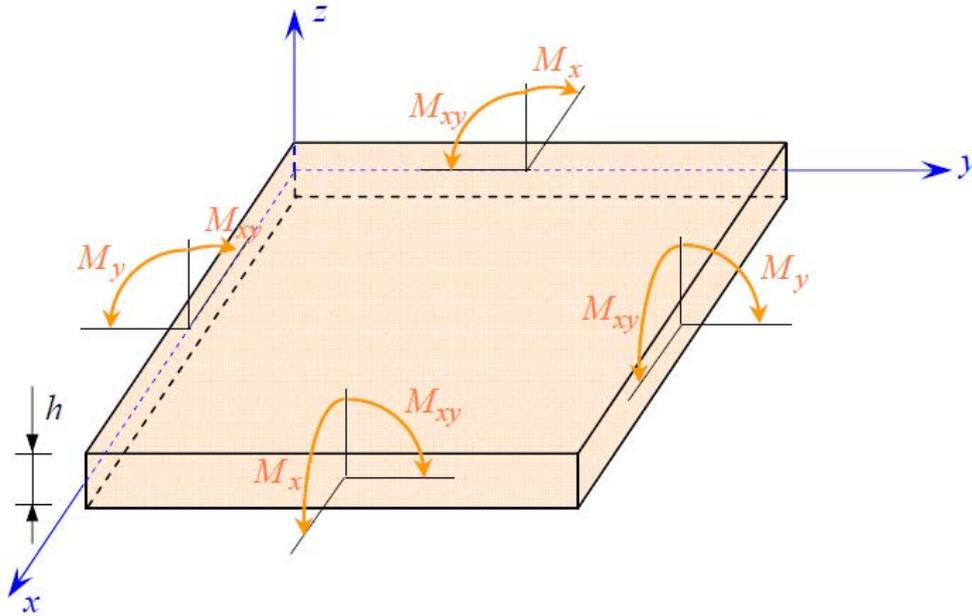
$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (5.10)$$

➤ **Moments de flexion et de torsion**

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (5.11)$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure 5.3.



**Figure 5.3** Schématisation des moments de flexion et de torsion [1].

En remplaçant l'équation (5.7) dans l'équation (5.9), les résultantes en membrane sont exprimées en fonction des déformations du plan moyen et des courbures par:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^n \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \left( \int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right) \quad (5.12)$$

Similairement, en remplaçant l'équation (5.7) dans l'équation (5.11), les moments sont exprimées en fonction des déformations du plan moyen et des courbures par:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{K=1}^n \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \left( \int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right) \quad (5.13)$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

avec:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

La matrice **A** est la matrice de rigidité en membrane, **D** la matrice de rigidité en flexion et **B** la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

### 5.2.3 Equation du comportement mécanique d'un stratifié

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient sous la forme:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Le couplage membrane-flexion-torsion est nul (**B** = 0), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique.

## 5.2.4 Vibrations en flexion d'un stratifié orthotrope

### 5.2.4.1 Équation des vibrations transverses d'une plaque orthotrope

Afin d'identifier les fréquences et les modes propres du matériau composite, nous devons établir les équations d'équilibre en absence de cisaillement transversal:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (5.17a)$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (5.17b)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (5.17c)$$

Où  $u_0(x, y, 0)$ ,  $v_0(x, y, 0)$  et  $w_0(x, y, 0)$  représentent les déplacements du plan moyen géométrique suivant les directions respectives  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Les équations de comportement dynamique du composite varient selon la disposition des plis dans le stratifié.

### 5.2.4.2 Vibrations de plaques orthotropes rectangulaires en appuis simples

Les stratifiés symétriques sont spécialement orthotropes lorsqu'ils sont caractérisés par des rigidités en flexion nulles ( $D_{16} = D_{26} = 0$ ). Les relations fondamentales s'écrivent en l'absence de charges latérales ( $q=0$ ), sous la forme:

$$u_0 = v_0 = 0$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (5.18)$$

La flèche exprimée sous la forme:

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (5.19)$$

Où  $\omega$  est la fréquence de vibration, conduit en reportant cette expression dans l'équation (5.18) à:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \rho_s \omega^2 w_0 = 0 \quad (5.20)$$

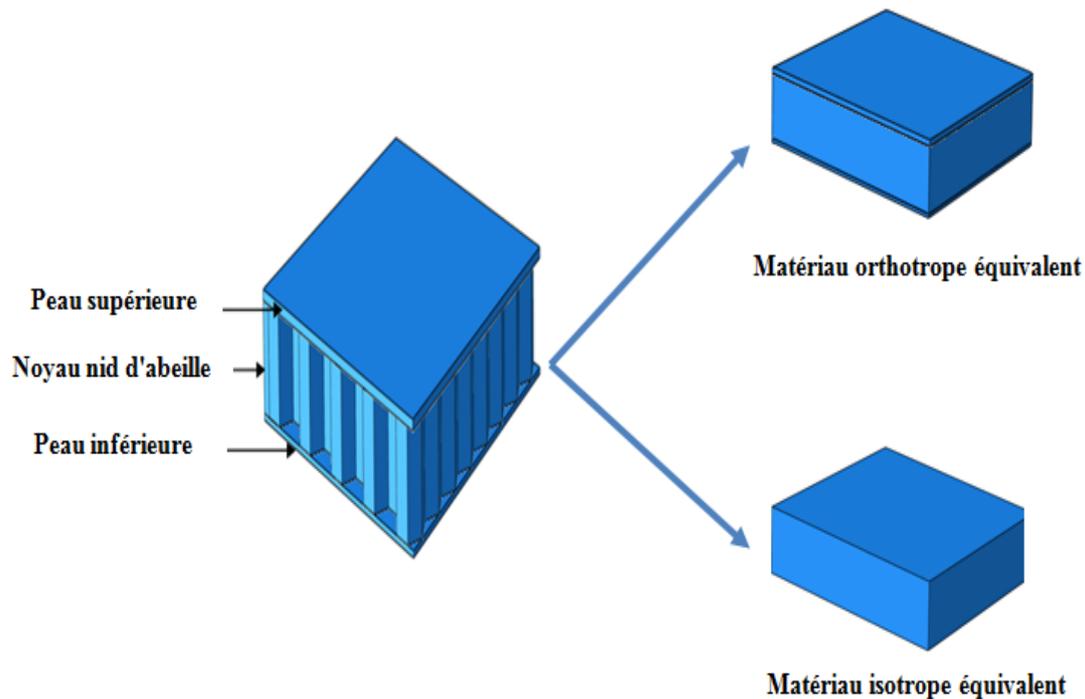
Dans le cas d'appuis simples, l'expression des fréquences propres :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4]} \quad (5.21)$$

où R représente le rapport longueur/largeur (a/b) de la plaque.

### 5.3 Théorie du modèle équivalent

L'ensemble de la structure sandwich en nid d'abeille est modélisé comme une couche solide unique (matériau isotrope équivalent) ou seulement le noyau en nid d'abeille (matériau orthotrope équivalent) [95] comme on le voit en figure 5.4.



**Figure 5.4** Équivalence de la structure sandwich en nid d'abeille.

Pour remplacer le panneau sandwich en nid d'abeille par une couche solide unique, la méthode de rigidité équivalente peut être envisagée. Les caractéristiques équivalentes d'une plaque sandwich en nid d'abeille telle que l'épaisseur, le module d'élasticité et la densité sont déterminées en identifiant sa rigidité à la membrane et à la flexion, comme le montre les équations suivantes :

$$t_{eq} = \sqrt{3h_c^2 + 6h_c t_f + 4t_f^2} \quad (5.22a)$$

$$E_{eq} = \frac{2t_f}{t_{eq}} E_f \quad (5.22b)$$

$$\rho_{eq} = 2\rho_f t_f + 2\rho_c (H - t_f) \quad (5.22c)$$

#### 5.4 Techniques expérimentales

La détermination des fréquences propres et des amortissements modaux a beaucoup d'importance pour la survie des structures et des machines tournantes. La connaissance avec exactitude de ces fréquences permet d'éviter l'apparition du phénomène de résonance qui représente un danger réel pour ces structures. Dans la pratique, la mesure des fréquences propres est influencée par plusieurs paramètres tels que la masse du capteur, le type d'excitation et les conditions aux limites.

##### 5.4.1 Détails des échantillons

Les panneaux sandwichs nid d'abeille étudiés dans cette étude sont livrés par EuroComposite et destinés à l'industrie aéronautique. Les dimensions géométriques et les propriétés mécaniques des échantillons sont indiquées dans le tableau 5.1- 5.2.

**Tableau 5.1** Caractéristiques géométriques des échantillons testées.

Matériaux de peau et cœur	Dimension mm	Épaisseur de peau mm	Épaisseur de cœur mm	Hauteur totale mm	Taille de cellule mm
<b>Échantillon de poutre sandwich</b>					
Aluminium -Aluminium	281*38	0.6	8.8	10	19.2
Aluminium-Aramide	195*38	0.6	8.8	10	3.2
<b>Échantillon de plaque sandwich</b>					
Aluminium-Aluminium	500*250	0.6	8.8	10	19.2

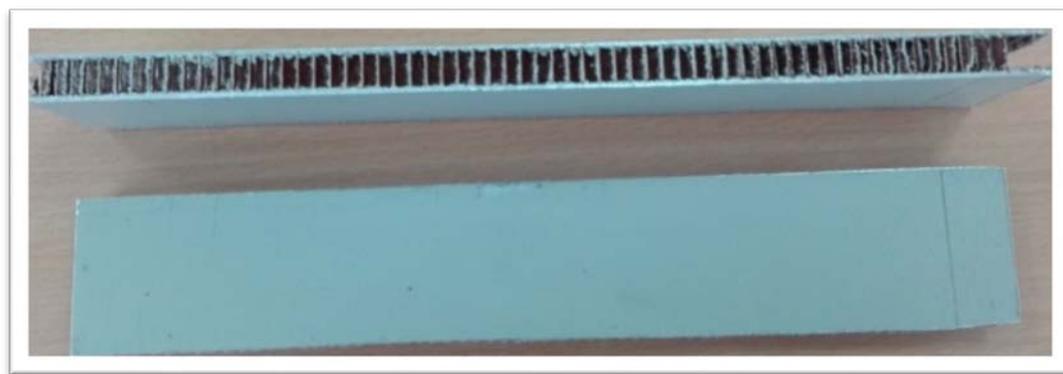
**Tableau 5.2** Propriétés mécaniques des échantillons.

	Module de Young (Mpa)	Coefficient de Poisson	Densité (Kg/m <sup>3</sup> )
<b>Aluminium</b>	70000	0.33	2700
<b>Aramide</b>	3400	0.25	1440

La figure 5.5 montre les photos des deux types de poutres sandwichs testées. Ils ont des peaux en aluminium 3003 de mêmes épaisseurs et de mêmes propriétés mécaniques. La structure centrale est en alliage d'aluminium AA3003 (ECM), fig.5.5.a et en aramide (Nomex-ECA), fig.5.5.b. L'ensemble formant une structure cellulaire hexagonale.



(a)



(b)

**Figure 5.5** Photos des poutres sandwichs testées.

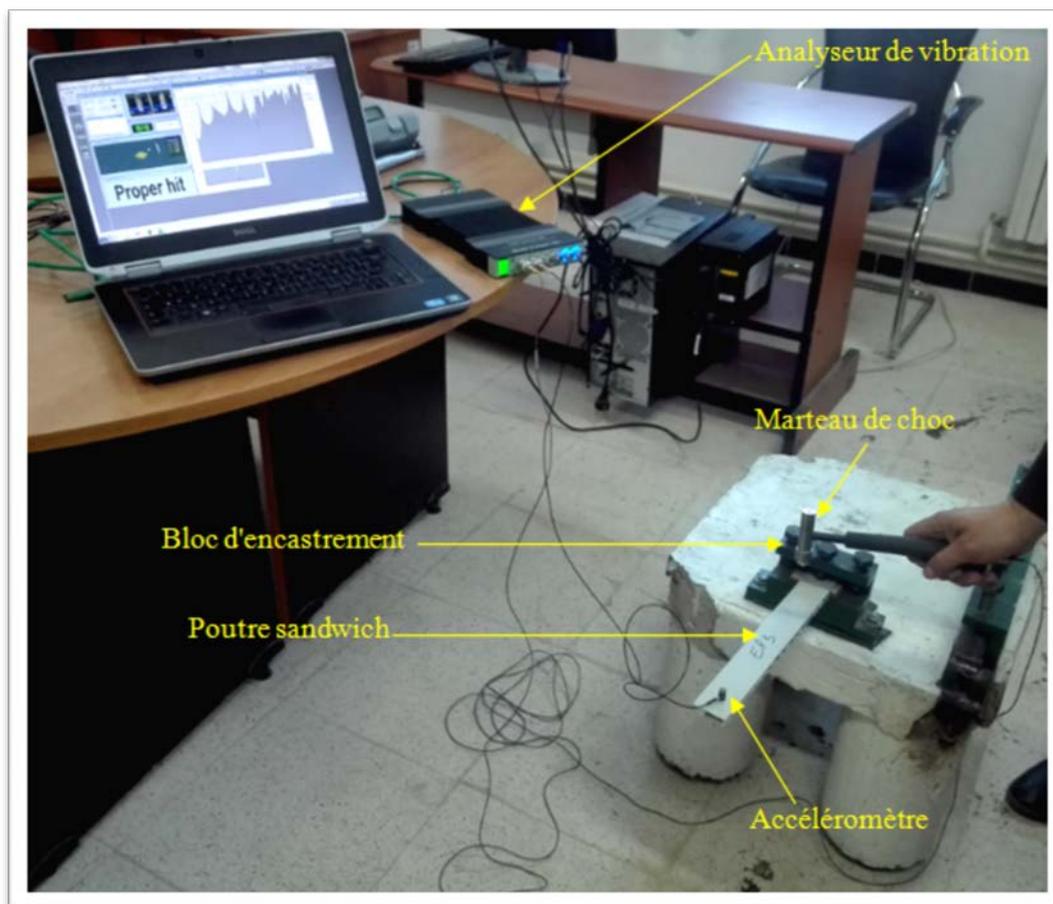
a)cœur en Aluminium b)cœur en Aramide.

#### 5.4.2 Dispositif expérimental

La méthode la plus répandue pour la mesure des fréquences et des amortissements modaux c'est la méthode qui consiste à exciter la structure par un marteau de choc et à mesurer la réponse par un accéléromètre. Dans cette méthode, les FRFs obtenues sont lissées sur les résonances, ce qui permet de déterminer les fréquences et les amortissements modaux avec exactitude. Cependant, on constate que les antirésonances n'apparaissent pas sur les FRFs.

Dans cette étude, les fréquences et les amortissements modaux, des poutres et des plaques sandwichs ont été mesurées par des essais d'analyse modale en configuration encasturé-libre. Les échantillons sont encasturés à une de leurs extrémités au moyen d'un

dispositif de fixation approprié. Pour éviter d'endommager les structures sandwichs au moment du serrage, des talons métalliques sont insérés au niveau de l'extrémité encastree. L'excitation à proximité de l'encastrement est réalisée au moyen d'un marteau de choc équipé d'un capteur de force. La réponse de la structure est mesurée à l'aide d'un accéléromètre collé à son extrémité libre. L'acquisition des signaux est effectuée par un système B&K PULSE. Les fréquences propres sont obtenues directement à partir des FRFs et les amortissements modaux sont déterminés à l'aide du logiciel d'analyse modale M'Scope. L'ensemble du dispositif est présenté sur la figure 5.3.

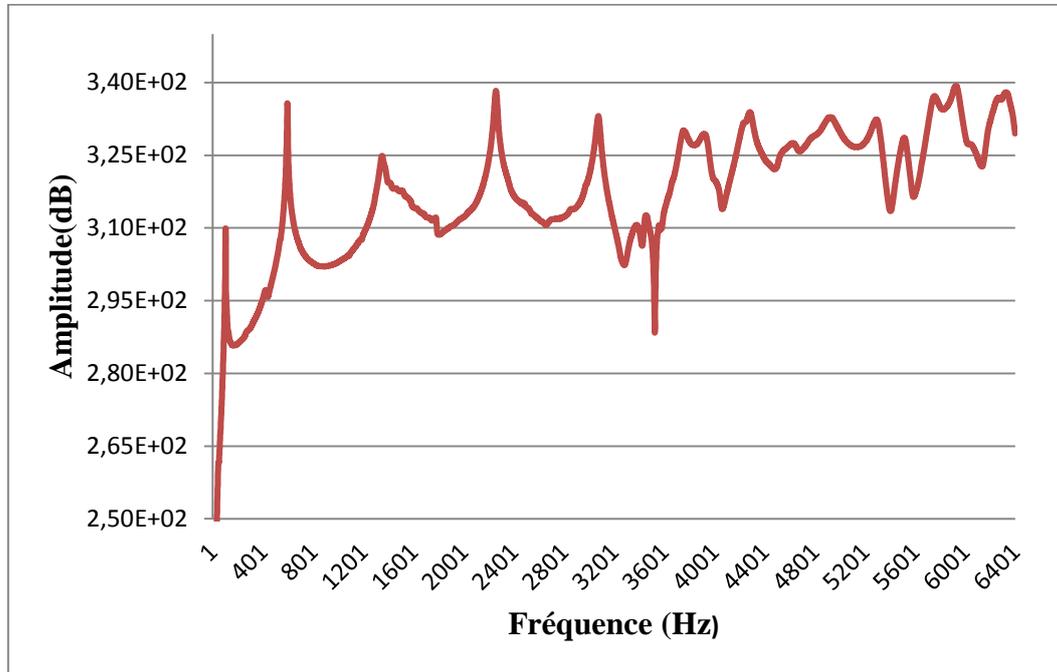


**Figure 5.6** Dispositif expérimental.

### 5.4.3 Résultats expérimentaux

Les fonctions de réponses en fréquences (FRFs) sont ensuite enregistrées et traitées afin d'identifier les modes de flexion  $f_i$  et de calculer les coefficients d'amortissements modaux  $\zeta_i$ , par méthode de largeur de bande passante à -3dB.

La figure 5.7 montre un exemple de la FRFs mesurée d'une poutre sandwich en aluminium. Les valeurs des fréquences et des amortissements modaux obtenus de l'analyse expérimentale sont reportées dans le tableau 5.3.



**Figure 5.7** Exemple de fonction de réponse en fréquence d'une poutre Aluminium encastree libre enregistrée par le système d'acquisition.

Un modèle élément fini a été développé dans Abaqus/CAE pour valider l'analyse expérimentale, nous allons l'aborder en détail dans la section suivante. Une très bonne précision est observée pour tous les modes, les erreurs importantes qui atteignent (13%) dans le cas de poutre (Alum-Alum) est probablement due aux différentes conditions aux limites, déterminées par le système de serrage et la disposition des cellules entre le cas modélisé et le cas expérimental.

Pour les modes de rang élevé les fréquences propres sont légèrement supérieures à celles obtenues expérimentalement, cela s'explique par la non prise en compte dans les modèles mathématiques de certains effets tels que le cisaillement et l'inertie rotationnelle, qui ont un effet notable en haute fréquence.

Cependant, le modèle numérique est considéré comme fiable est utilisé dans la suite de l'étude.

**Tableau 5.3** Comparaison entre le résultat expérimental et numérique dans les deux cas

		Fréquence (i)	Fréquence naturelle (Hz)		Amortissement (%)
			Numérique	Expérimentale	
			Poutre sandwich	Alu-Alu	
2	675.1	596			0.33
3	1369.9	1350			1.33
Alu-Aram	1	147.27		137	2.74
	2	786.07		806	0.735
	3	1517.9		1720	1.28
Plaque sandwich	Alu-Alu	1	53.79	53.8	2.11
		2	216.04	199	0.581
		3	341.26	340	1.04

## 5.5 Modélisation par élément fini

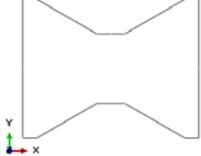
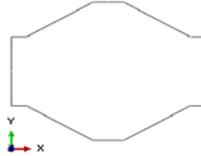
### 5.5.1 Modèle équivalent

Dans cette section, nous présentons une analyse modale de deux topologies en nid d'abeille réalisée avec différentes méthodes: analyse par éléments finis ou on utilisant un modèle réel (le cœur est représentée d'une manière géométriquement exacte) et deux modèles équivalents et la méthode analytique. Le but est de déterminer les fréquences propres et la forme des modes de plaque (100\*100) dans les conditions aux limites encastree sur les 4 côtés. Un modèle équivalent à trois couches est introduit pour calculer les fréquences propres du panneau sandwich en nid d'abeille en aluminium, dans lequel les couches supérieure et inférieure sont les mêmes que celles du panneau sandwich alvéolaire en aluminium, le noyau central en nid d'abeille est équivalent à une couche avec des propriétés orthotropes calculées à l'aide des équations données au chapitre3. Pour la deuxième approche en utilisant les formules du modèle équivalent isotrope données par [93], les valeurs de la rigidité équivalente ( $E_{eq}$ ), l'épaisseur équivalente ( $t_{eq}$ ) et la densité équivalente ( $\rho_{eq}$ ) sont:

- Cas auxétique:  $E_{eq} = 8082.9$  MPa,  $t_{eq} = 8.66$  mm,  $\rho_{eq} = 745.17$  kg/m<sup>3</sup>

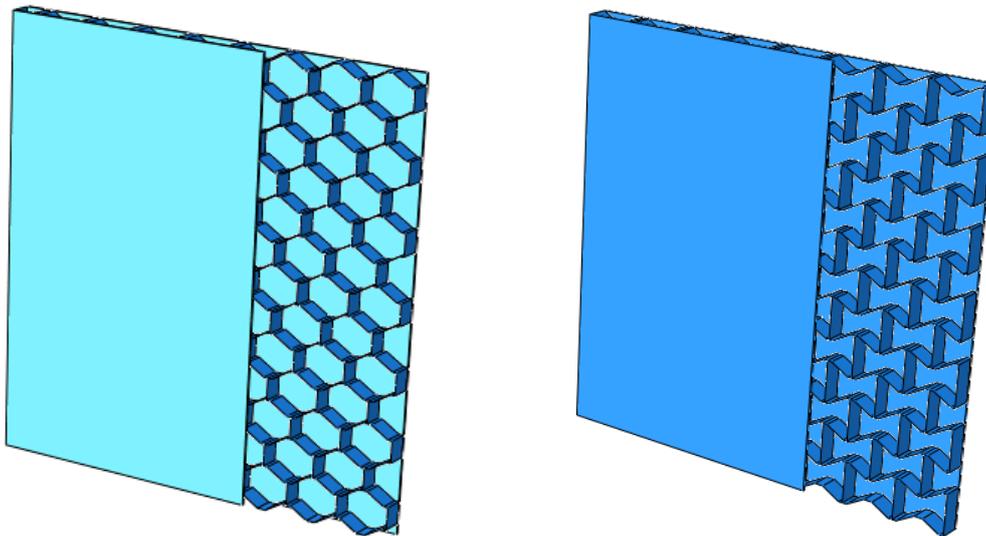
- Cas conventionnel :  $E_{eq} = 8082.9 \text{ MPa}$ ,  $t_{eq} = 8.66 \text{ mm}$ ,  $\rho_{eq} = 654.86 \text{ kg/m}^3$

**Tableau 5.4** Propriétés des noyaux en nid d'abeille

Géométrie de cœur	Configuration auxétique 	Configuration conventionnelle 
<b>h(mm)</b>	10	5
<b>l(mm)</b>	5	5
<b>a(mm)</b>	1	1
<b><math>\theta(^{\circ})</math></b>	-30	+30
<b><math>\varphi(^{\circ})</math></b>	0	0
<b><math>E_1(\text{Mpa})</math></b>	104	104
<b><math>E_2(\text{Mpa})</math></b>	38	38
<b><math>E_3(\text{Mpa})</math></b>	8847	7003.54
<b><math>G_{12}(\text{Mpa})</math></b>	4	24
<b><math>G_{13}(\text{Mpa})</math></b>	1366	1366
<b><math>G_{23}(\text{Mpa})</math></b>	461	500
<b>Masse total de la plaque sandwich(g)</b>	44.6	41.1

Des cellules unitaires de deux configurations différentes sont développées: configuration conventionnelle et configuration auxétique (fig.5.8). Le nid d'abeille conventionnelle est défini avec un angle de cellule interne positif  $\theta=30^{\circ}$  et  $h = 1$ . La configuration auxétique est définie avec un angle de cellule négatif  $\theta= -30^{\circ}$  et  $h = 21$ . Les deux configurations ont la même taille de cellule, même module de Young dans le plan ( $E_1$  et  $E_2$ ) et même module de cisaillement hors plan  $G_{13}$ . L'épaisseur de la paroi cellulaire reste la même dans les deux cas ( $t=0.5\text{mm}$ ). Les propriétés des cellules sont énumérées dans le tableau 5.4.

Le modèle par éléments finis a été construit en utilisant le logiciel Abaqus. Le nombre de cellules unitaire le long de la direction horizontale (X) est choisi 8 cellules et le long de la direction verticale (y) 7 cellules, avec une hauteur de 5mm pour les deux configurations. Ces dimensions fournissent un nombre raisonnable de cellules (56 cellules)[58]. L'épaisseur de peau est de 0.5mm. Une procédure d'extraction des fréquences est effectuée avec le solveur Lanczos, cette méthode est extrêmement performante elle fonctionne bien lorsque le modèle est composé des éléments coque ou d'une combinaison d'éléments coque et solide [102]. Des éléments coque quadrilatéraux linéaires avec intégration réduite (S4R) sont utilisés pour représenter le noyau du modèle réel. Ces éléments permettent une déformation transversale en cisaillement. Ils utilisent la théorie de coque épaisse si l'épaisseur est élevée ou bien utilise la formulation de coque mince Kirchhoff si l'épaisseur est faible, tandis que le noyau du modèle équivalent et les peaux sont discrétisés par des éléments brique à huit nœuds avec intégration réduite (C3D8R). Abaqus fournit une option TIE qui permet d'attacher les peaux au noyau en nid d'abeille.



**Figure 5.8** Vue en coupe d'une plaque conventionnelle et auxétique.

Le tableau 5.5 montre une comparaison entre les résultats des quatre méthodes utilisées pour l'analyse modale d'une plaque en nid d'abeille, par l'analyse éléments finis, le modèle équivalent et la méthode analytique. Les trois premières fréquences ont été prises pour la comparaison. La forme de mode dans les modèles équivalents et le modèle réel sont similaires. La fréquence fondamentale se produit avec  $m = n = 1$ ,

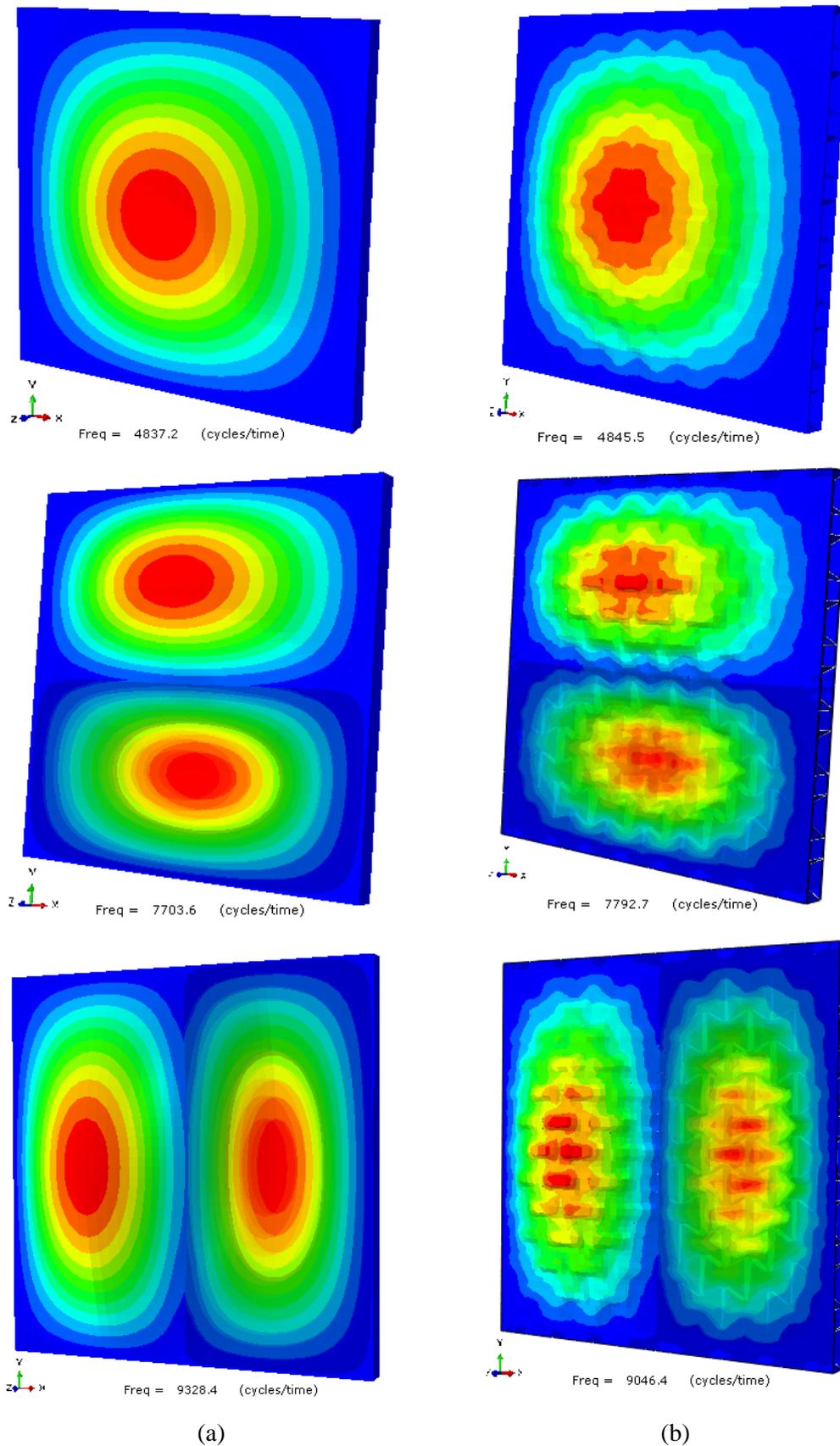
qui est une demi-onde sinusoïdale dans chaque direction. De plus, les fréquences propres trouvées par le modèle équivalent orthotrope sont en bon accord avec celles calculées par le modèle réel. Ce résultat confirme que le modèle équivalent orthotrope représente une excellente approximation du comportement dynamique de la structure en nid d'abeille et valide la formulation déterministe statique (chapitre 3) surtout pour la configuration auxétique ou l'erreur ne dépassent pas 0.17% pour le 1<sup>er</sup> mode et 1.4% pour le deuxième mode.

Les résultats analytiques présentent une divergence avec les modèles numériques due à la limitation de la théorie.

**Tableau 5.5:** Comparaison des trois premières fréquences modales pour deux topologies de cellule et différente méthode

Modèle	Configuration auxétique			Configuration conventionnelle		
	f1 m=1,n=1	f2 m=1,n=2	f3 m=2,n=1	f1 m=1,n=1	f2 m=1,n=2	f3 m=2,n=1
Modèle réel	4845.5	7792.7	9046.4	5186.1	8106	8343.4
Modèle équivalent orthotrope	4837.2	7703.6	9328.4	5091.1	8194.5	9761.2
Modèle équivalent isotope [93]	4580.7	8862.5	8862.5	4886.4	9454	9495
Modèle Analytique [1]	4889.2	6438.5	12750	4889.2	6438.5	12750

La figure 5.9 montre les différentes formes de modes du modèle équivalent orthotrope et le modèle réel donné par la méthode des éléments finis pour la configuration auxétique. La fréquence la plus basse était en 1<sup>er</sup> mode et augmente avec chaque mode de vibration suivant. La configuration conventionnelle montrait des modes similaires en raison de la similarité de la macro structure globale.



**Figure 5.9** Déformées obtenues par éléments finis pour les trois premiers modes de vibration d'une plaque sandwich a) modèle équivalent orthotrope. b) modèle réel.

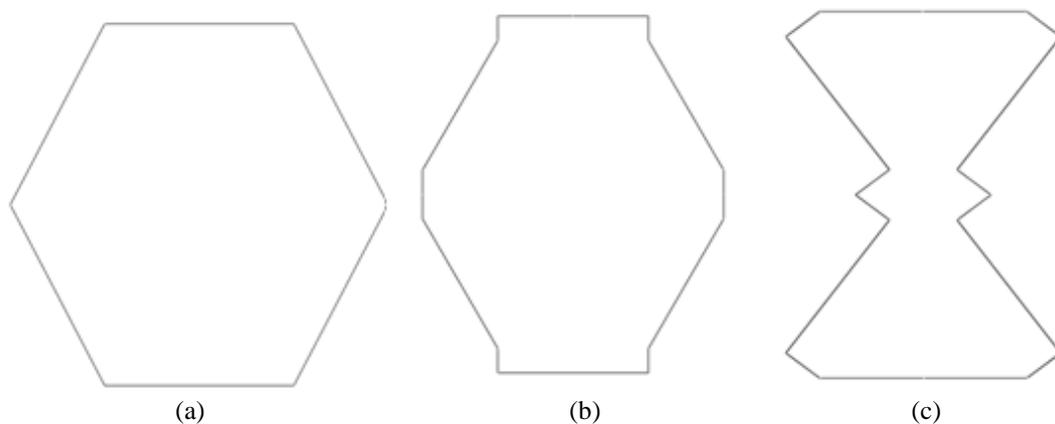
## 5.6 Étude paramétrique de l'analyse des vibrations libres

Un certain nombre de paramètres de conception peuvent affecter la fréquence naturelle du panneau sandwich en nid d'abeille, par exemple la taille de la cellule, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur du noyau ainsi que la topologie de la cellule. La contribution de ces paramètres sera discutée dans cette section.

L'extraction des fréquences a été effectuée sur un modèle de poutre sandwich 300\*40 dont les conditions aux limites sont encastées-libre en utilisant le même modèle numérique que la section précédente. Il convient de noter que la cellule utilisée, celle qui a été développée dans le troisième chapitre.

### 5.6.1 Effet de topologie de cellule

Pour étudier l'effet de type de cellule sur la réponse des vibrations libres, trois configurations ont été considérées (fig.5.10), la configuration hexagonale, hexagonale avec talon et auxétique. Les trois configurations possèdent la même densité ( $\rho=140.3 \text{ Kg/m}^3$ ) et la même taille de cellule (19.2mm).



**Figure 5.10** Cellule unitaire de nids d'abeilles a) hexagonale. b) hexagonale avec talon. c) auxétique.

La figure 5.11 illustre la variation des fréquences selon la topologie de la cellule pour les cinq premiers modes. La première fréquence la plus basse pour la poutre sandwich à noyau en nid d'abeille auxétique est survenue à 116.42Hz. Il a été montré que la première fréquence de flexion diffère légèrement dans la poutre hexagonale et hexagonale avec talon, ceci est dû au changement de rigidité, bien que la densité de la poutre soit maintenue constante. En outre, il a été constaté que la cellule hexagonale

présente des valeurs assez élevées par rapport aux autres configurations pour la fréquence de mode de torsion et le troisième mode de flexion.

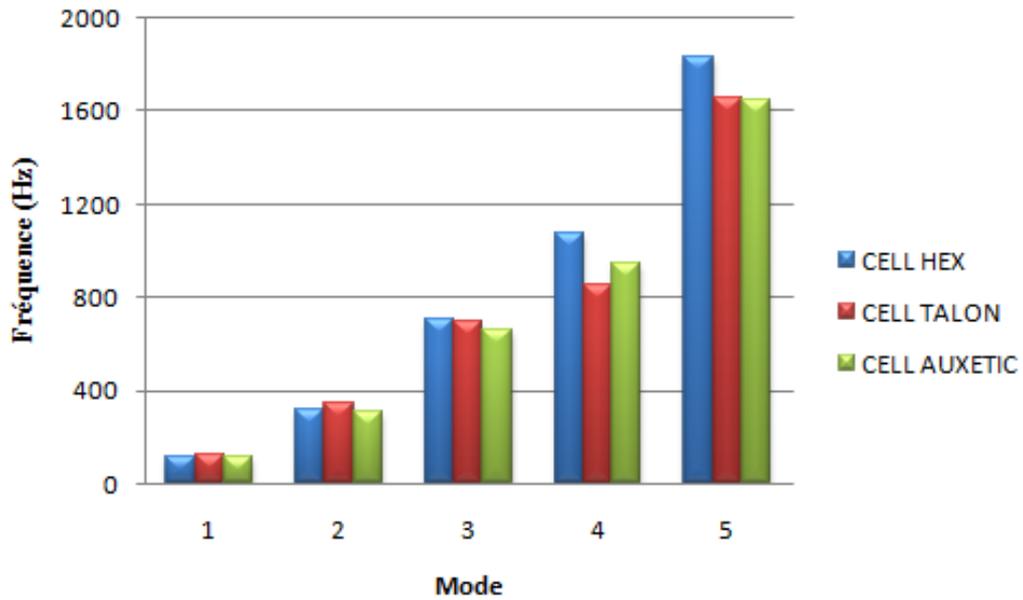


Figure 5.11 Variation de fréquence en fonction de la topologie de cellule.

### 5.6.2 Effet de la taille de cellule

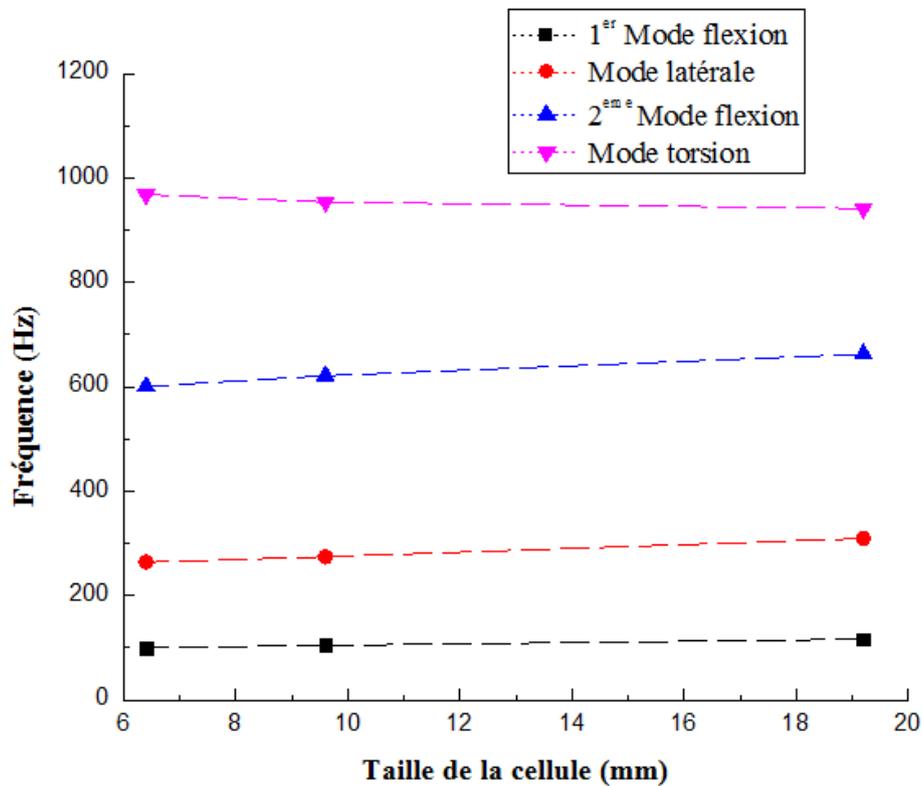


Figure 5.12 Variation de fréquence en fonction de la taille de cellule.

La figure 5.12 montre l'effet de la taille de cellule sur les fréquences d'une poutre sandwich. Cette figure a été tracée pour les mêmes propriétés et les mêmes dimensions de poutre dont la taille variant de 6.4 mm à 19.2 mm. Il est clair qu'en augmentant la taille de la cellule, la fréquence augmente alors qu'une légère diminution affecte le mode de torsion. Selon ces résultats, nous constatons que la taille de la cellule influe sur les fréquences parce que l'augmentation de la taille de la cellule provoque une diminution de la densité relative du cœur et par conséquent la masse ainsi que la rigidité du cœur (fig.4.25).

### 5.6.3 Effet de la hauteur du cœur

La variation de la fréquence avec la hauteur du cœur est représentée sur la figure 5.13, l'augmentation de la hauteur du cœur entraîne une augmentation des fréquences naturelles pour les modes de flexion cylindrique et de torsion par contre une diminution dans le mode de flexion latéral, cela est expliqué par une augmentation significatif de la rigidité pour les modes de vibration transversale.

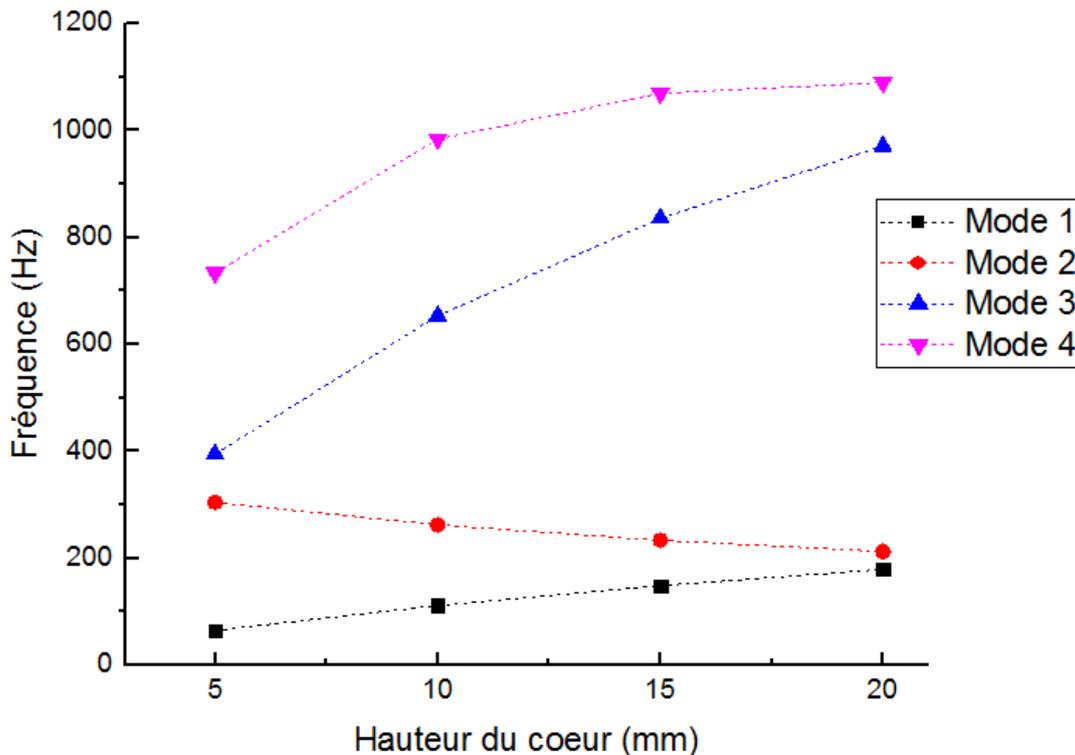


Figure 5.13 Variation de fréquence en fonction de la hauteur du cœur.

### 5.6.4 Effet d'épaisseur des peaux

La figure 5.14 illustre la variation des fréquences en fonction des différentes épaisseurs des peaux et pour les cinq premiers modes, en faisant augmenter l'épaisseur de la peau de 0.5 à 2 mm et en gardant les mêmes autres dimensions telles qu'elles sont on constate une légère augmentation monotone des fréquences proportionnelle aux faibles épaisseurs des peaux choisis.

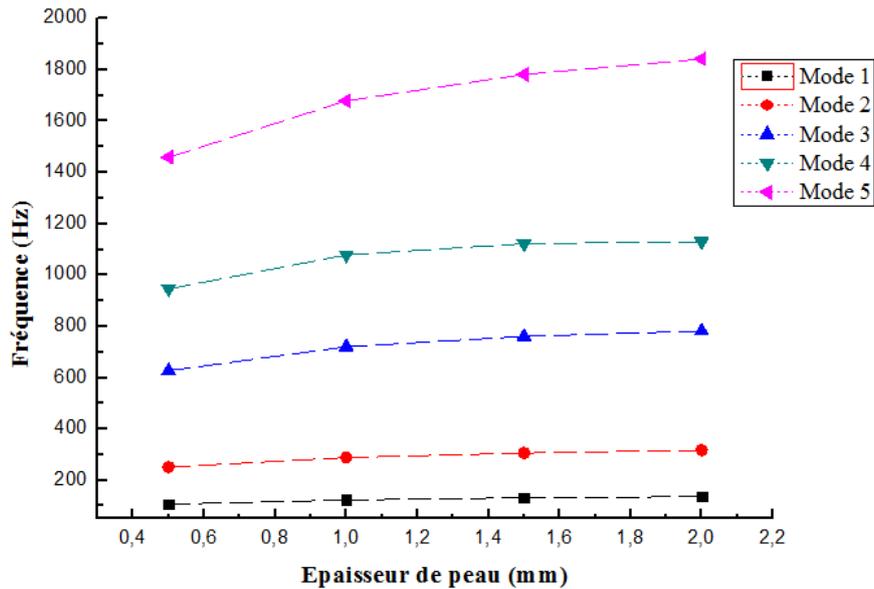


Figure 5.14 Variation de fréquence en fonction d'épaisseur des peaux.

### 5.6.5 Effet de type du matériau

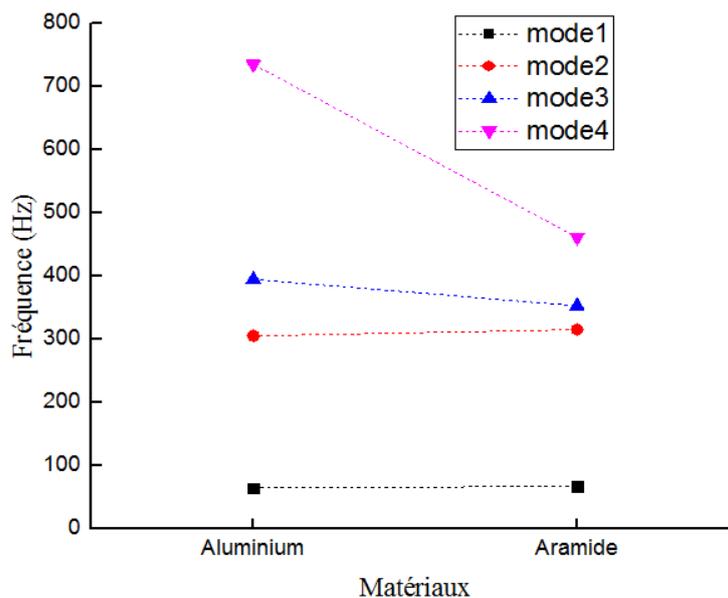
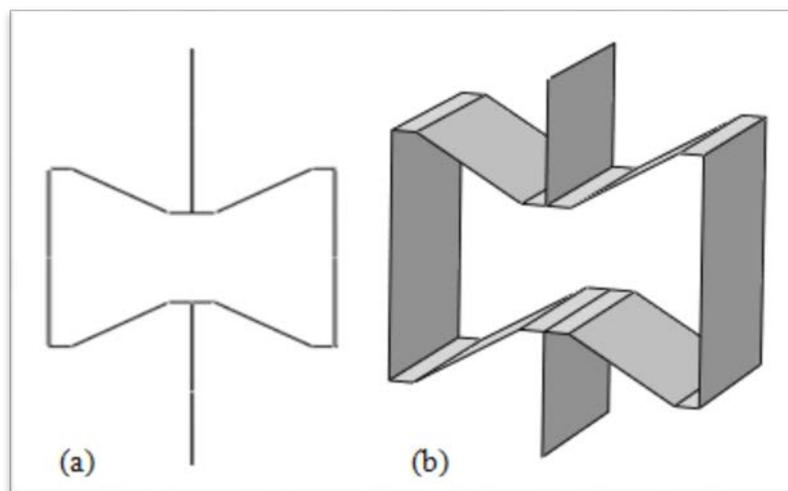


Figure 5.15 Variation de fréquence en fonction du changement de matériaux.

La variation des fréquences des quatre premiers modes avec les deux types de matériaux de noyau à propos de l'aluminium et l'aramide sont discutées, les propriétés des matériaux sont les mêmes que celles utilisées dans la partie expérimentale (tableau 5.2). D'après la figure 5.15 on constate que pour les basses fréquences une légère augmentation des fréquences dans le cas d'aramide par contre une forte diminution des fréquences à partir du 3<sup>ème</sup> mode. Le type de matériaux figure comme un critère de choix pour différents types d'application des panneaux sandwich.

### 5.7 Discussion sur le modèle 2D par rapport au modèle 3D

Les éléments de poutre sont utilisés pour les modèles bidimensionnels et les éléments de coque sont utilisés pour le modèle tridimensionnel (fig.5.16). Ces éléments sont préférés aux éléments 3D solides classiques pour réduire le temps de calcul. Les détails des modèles d'éléments finis sont discutés dans la sous-section suivante.



**Figure 5.16** Cellule en nid d'abeille auxétique sans peaux.

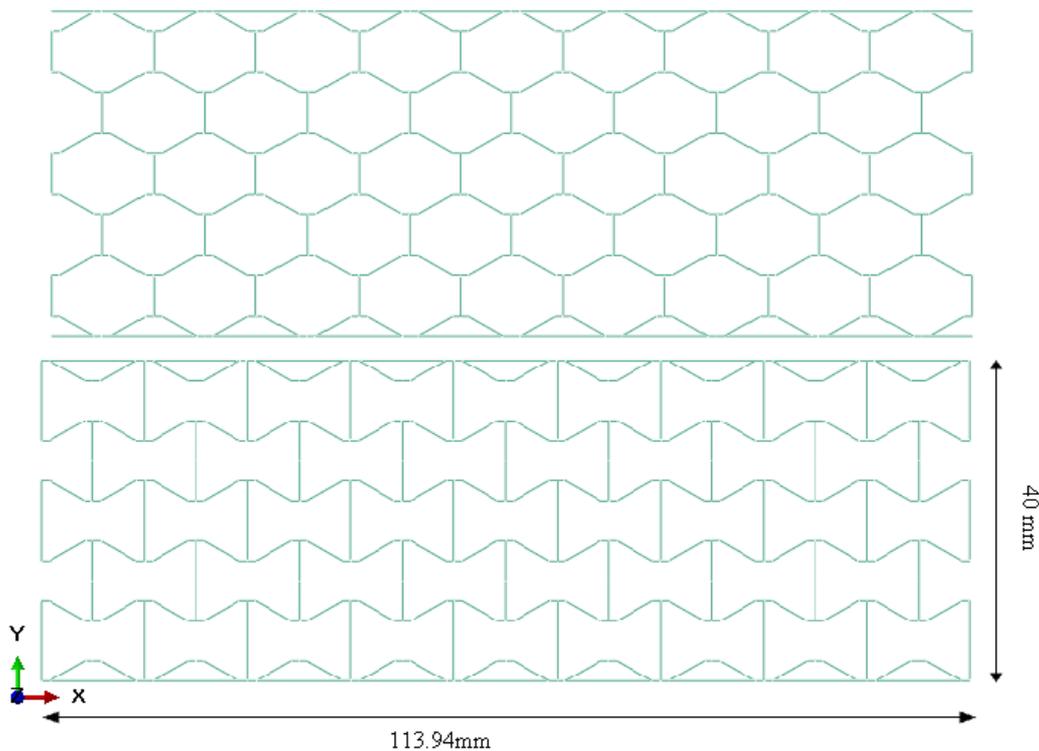
a) Modèle 2D, b) Modèle 3D.

#### 5.7.1 Modèle dans le plan

Un modèle bidimensionnel est développé dans Abaqus pour ce cas, le chargement est uniquement le long des directions dans le plan ( $X_1$  ou  $X_2$ ).

Le nombre de cellules unitaires le long de la direction horizontale ( $X_1$ ) est choisi pour être 9 cellules et le long de la direction verticale ( $X_2$ ) 3. En utilisant le tableau 5.4 pour les dimensions des paramètres géométriques de deux configurations, les dimensions globales du noyau en nid d'abeille sont de 113.94 mm et 40 mm le long de la direction  $X_2$ . L'épaisseur de la paroi cellulaire  $t=0.5$ mm, le matériau est en aluminium. La feuille de face de longueur 113.94 mm est générée. Les feuilles de face

sont assemblées au haut et au bas du noyau en nid d'abeille. La plaque sandwich complètement assemblée ressemble à la figure 5.17 pour le noyau conventionnelle et auxétique. Dans ce modèle, des éléments de poutre B22 sont affectés au noyau et aux peaux. B22 correspond à une poutre planaire utilisant une interpolation quadratique. Il a 3 nœuds par élément, chaque nœud a trois degrés de liberté, le déplacement suivant la direction  $X_1$  et  $X_2$  et la rotation autour de la direction  $X_3$ . Ils suivent la théorie de poutre de Timoshenko en permettant une déformation transversale en cisaillement. La poutre sandwich est bi encastrée et maillée avec 2850 éléments.



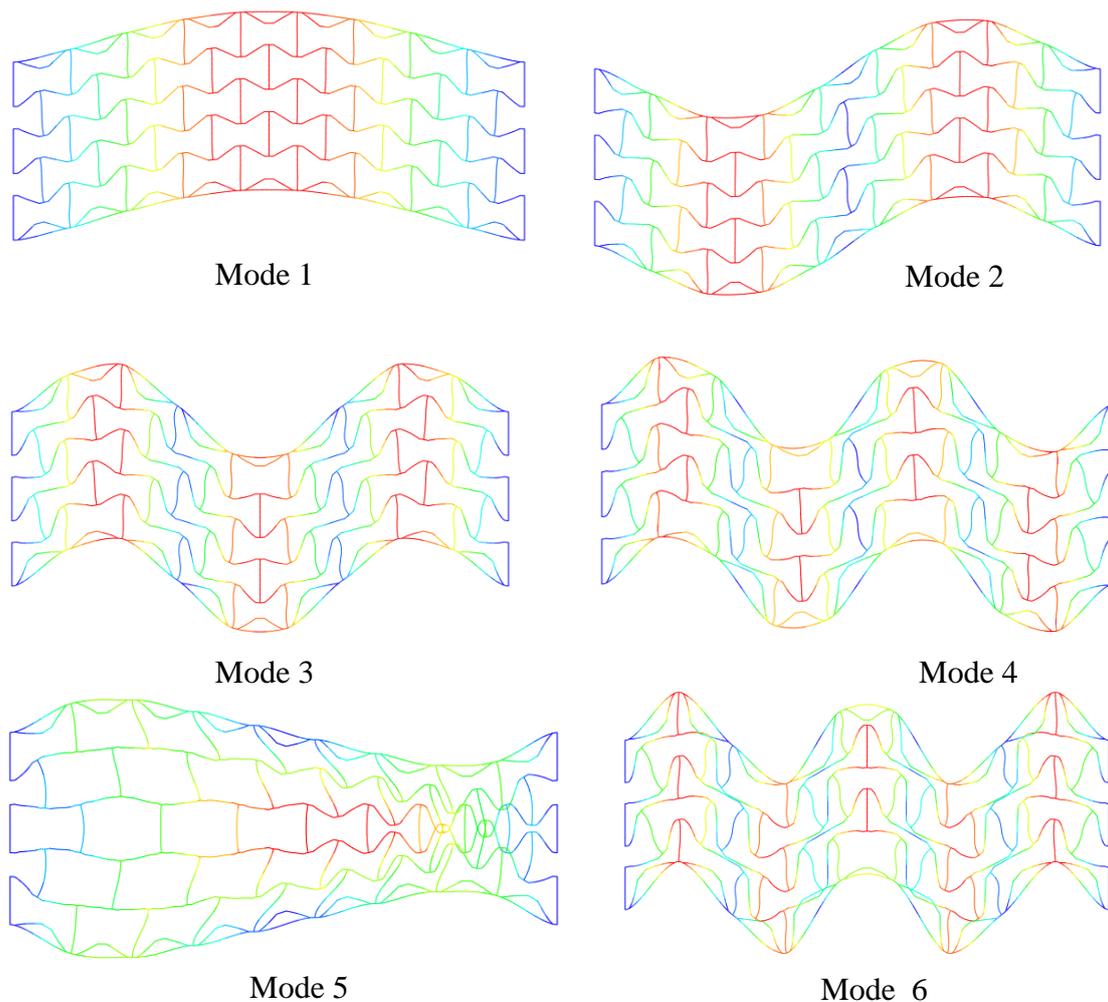
**Figure 5.17** Dimensions générales des modèles conventionnels et auxétiques dans le plan.

Le tableau 5.6 montre les six premières fréquences naturelles non amorties de deux configurations de cellule. La première fréquence modale du panneau sandwich en nid d'abeille conventionnelle se produit à 1309.4 Hz. Les fréquences modales du nid d'abeille auxétique sont plus faibles que celles du nid d'abeilles conventionnel. La première fréquence modale d'une configuration auxétique se situe à 477.21 Hz, soit 63.5% moins que le cas d'une configuration conventionnelle. Même si le noyau auxétique est conçu pour avoir le même  $E_1$  et  $E_2$ , l'augmentation relativement importante de la masse de 16.8% a entraîné une réduction des fréquences naturelles.

**Tableau 5.6** Six premières fréquences modales des modèles dans le plan.

Nombre de mode	Fréquence (Hz)	
	Conventionnelle	Auxétique
1	1309.4	477.21
2	2630.8	986.96
3	3327.1	1554.6
4	3588.0	2189.6
5	3961.4	2539.7
6	4523.8	2890.4

La figure 5.18 montre les formes de modes correspondantes du panneau sandwich en nid d'abeille auxétiques. Les cellules conventionnelles montraient des modes similaires en raison de la similarité de la structure macroscopique globale.



**Figure 5.18** Les six premières formes de mode du modèle dans le plan avec un noyau en nid d'abeille auxétique.

### 5.7.2 Modèle hors plan

Dans ce cas, le chargement se fait dans la direction hors plan  $X_3$ . Par conséquent, un modèle tridimensionnel est développé dans Abaqus. Le modèle étudié dans cette partie est le même que celui de la section 5.5.

Le tableau 5.7 montre les six premières fréquences naturelles non amorties des deux configurations de cellule. La première fréquence modale du panneau sandwich en nid d'abeille conventionnelle se produit à 5186.1 Hz. Les fréquences modales du nid d'abeille auxétique sont plus faibles que celles du nid d'abeille conventionnelle. La première fréquence modale de la configuration auxétique se situe à 4845.5 Hz, soit 10.4 % moins que la plaque sandwich avec une configuration conventionnelle .

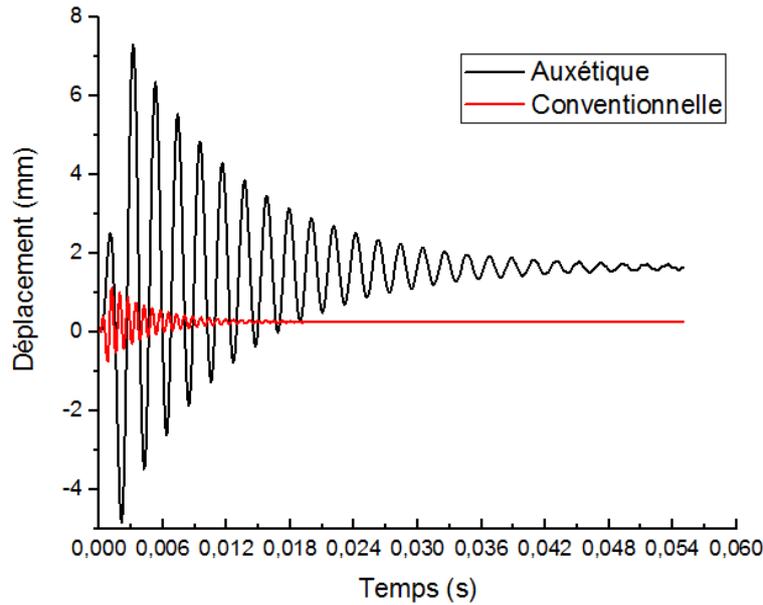
**Tableau 5.7:** Six premières fréquences modales des modèles hors plan.

Nombre de mode	Fréquence (Hz)	
	Conventionnelle	Auxétique
1	5186.1	4845.5
2	8106.0	7792.7
3	8343.4	9046.4
4	8369.9	11073.0
5	8414.6	11298.0
6	8629.8	13785.0

## 5.8 Réponse harmonique et calcul du facteur de perte

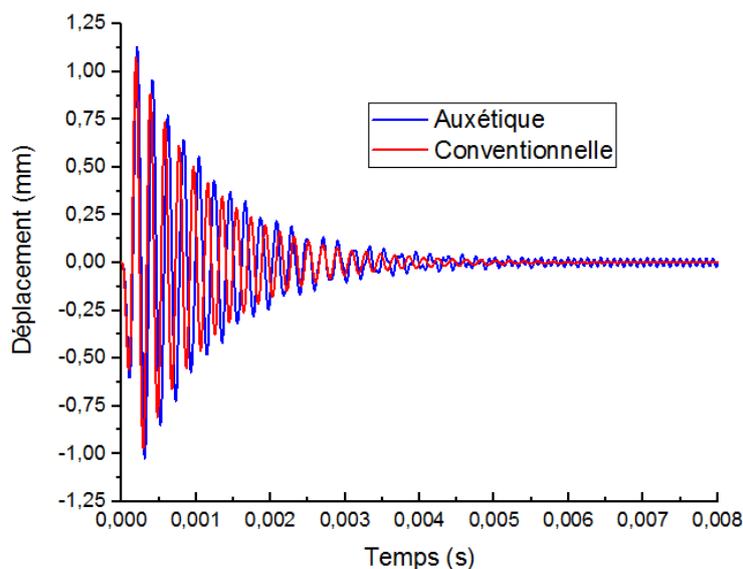
### 5.8.1 Analyse temporelle

L'intérêt ici est destiné à l'analyse temporelle des structures sandwichs nid d'abeille. En effet, la réponse vibratoire des configurations de cellule dans le plan et hors plan est réalisée sous une charge harmonique de la forme  $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$  où  $P_0=1N$ . La réponse en régime permanent est établie après une réponse transitoire.



**Figure 5.19** Comparaison de la réponse sous chargement harmonique des deux configurations de cellule dans le plan pour le 1<sup>er</sup> mode.

La réponse harmonique a été menée par comparaison de deux configurations de cellule dans le plan pour le 1<sup>er</sup> mode (fig.5.19). On observe sur cette figure que la cellule conventionnelle est rigide par rapport à la cellule auxétique, mais la moins amortie. Au premier temps 0.003s, la réponse est une réponse de vibration forcée. Après cela, le résultat devient une réponse de vibration libre. En terme de temps, la configuration conventionnelle vibre pendant 0.015 s et la configuration auxétique 0.055 s ( la décroissance est plus lente).

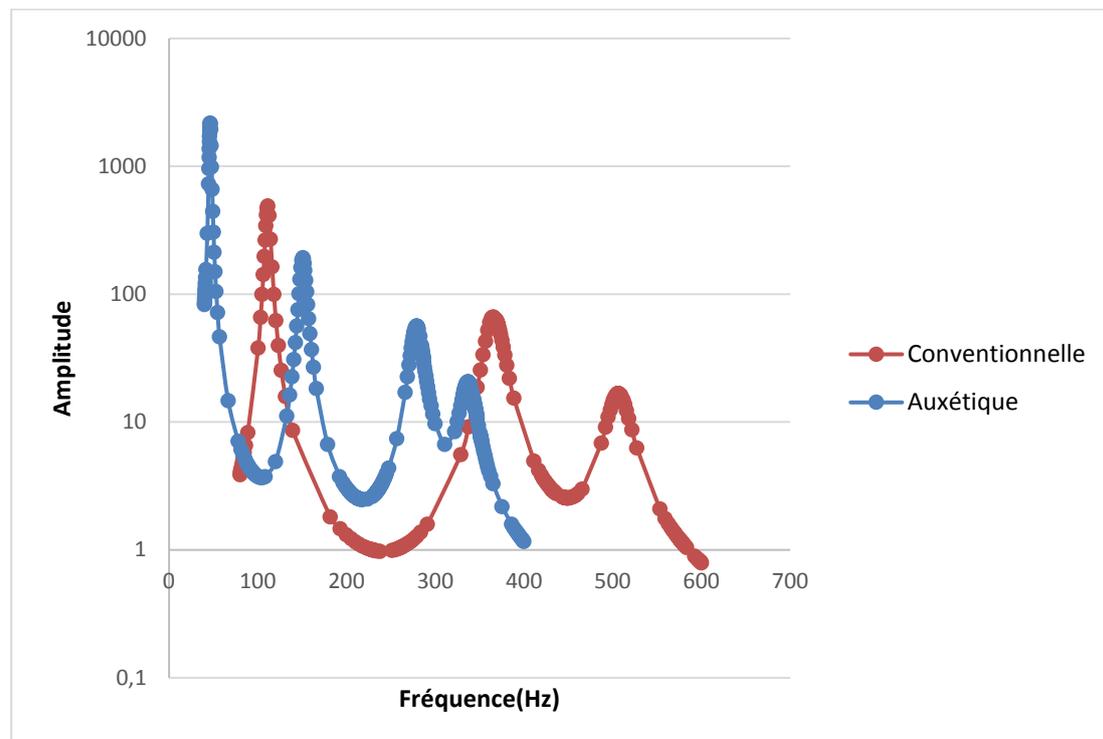


**Figure 5.20** Comparaison de la réponse sous chargement harmonique des deux configurations de cellule hors plan pour le 1<sup>er</sup> mode.

En comparant les courbes présentées à la figure 5.20, on note une légère différence entre les deux configurations de cellule. La réponse maximale produite dans le cas d'une configuration auxétique.

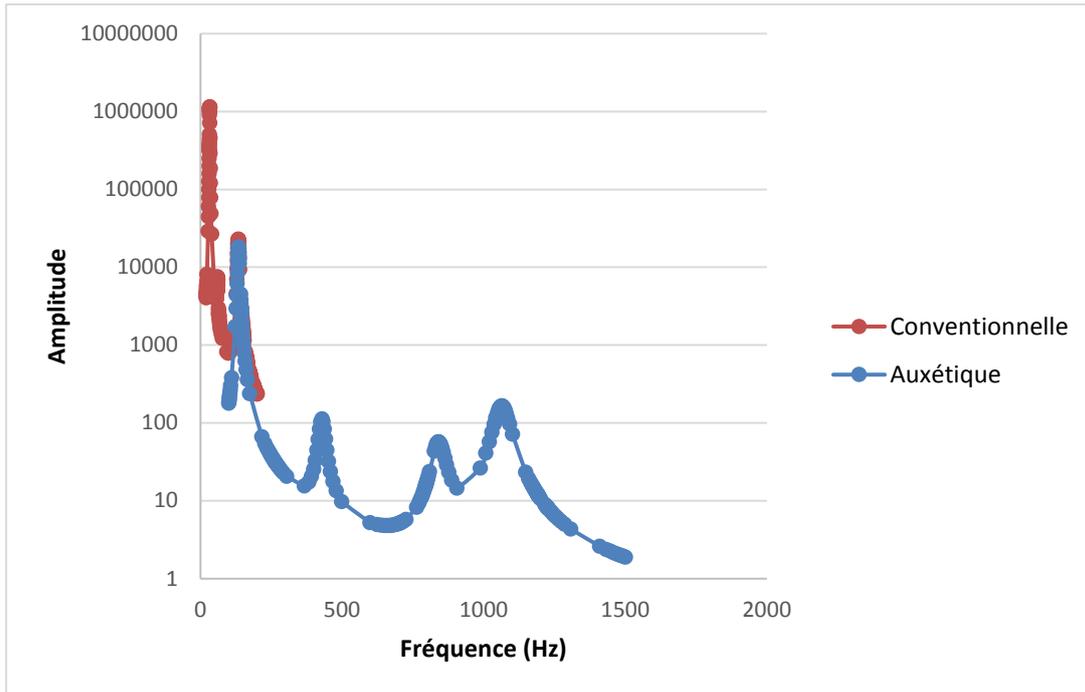
### 5.8.2 Analyse fréquentielle

Comme pour les autres modèles développés jusqu'à présent, le sandwich est modélisé avec des éléments SHELL pour le cœur et SOLID pour les peaux. Pour cette analyse, seulement le cœur est modélisé en configuration auxétique et conventionnelle pour les deux types de chargements. Une procédure de type "steady state dynamics modal" est utilisée pour obtenir la réponse de la structure soumise à une excitation de type harmonique. La réponse fréquentielle des deux cas est illustrée dans les figures suivantes.



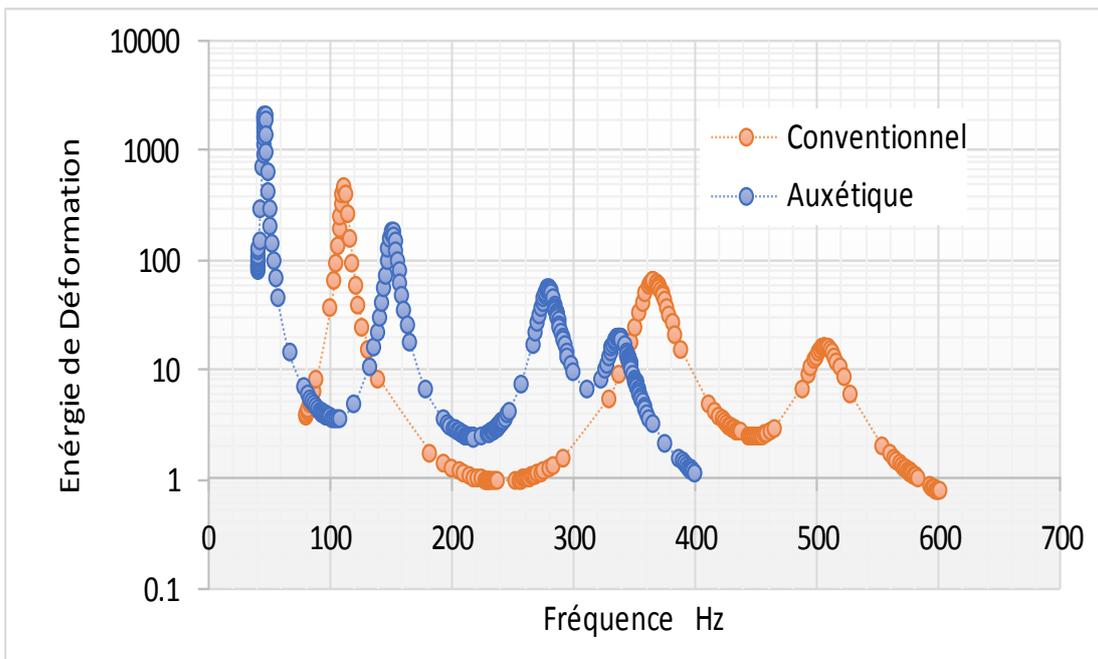
**Figure 5.21** Réponse en fréquence des deux configurations de cellule dans le plan.

Chaque pic représente un mode de la structure qui a été excité par le chargement imposé (fig.5.21). Les tendances générales pour les deux configurations sont les mêmes. Alors que le premier pic se produit à un niveau de fréquence faible avec une configuration auxétique. L'espacement entre chacun des pics dans le cas d'une configuration auxétique est inférieur à celui de la configuration conventionnelle.

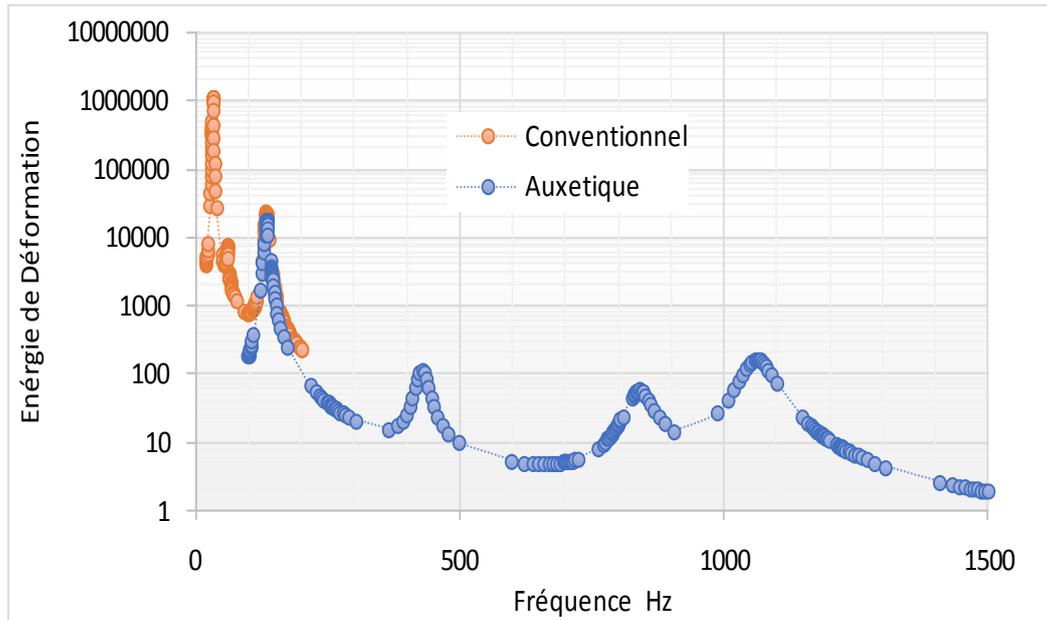


**Figure 5.22** Réponse en fréquence des deux configurations de cellule hors plan.

Des tendances similaires peuvent également être observées pour le cas de chargement hors plan (figure 5.22). La configuration de cellule auxétique a le plus grand espacement. En outre, dans le cas d'une configuration conventionnelle le nombre de résonances est diminué dans la plage de fréquence comprise entre 0 Hz et 1500 Hz.



(a)



(b)

**Figure 5.23** Énergie de déformation dans le cœur pour les deux configurations de cellule.(a) dans le plan (b) hors plan.

Sur la figure 5.23, nous avons reporté les variations des énergies de déformation dans le cœur en fonction de la fréquence pour deux configurations de cellule dans et hors plan. Nous constatons que l'énergie de déformation diminue lorsque la fréquence croît pour les deux cas de chargements. Ce comportement peut être attribué à l'effet dominant de la déformation en cisaillement transverse.

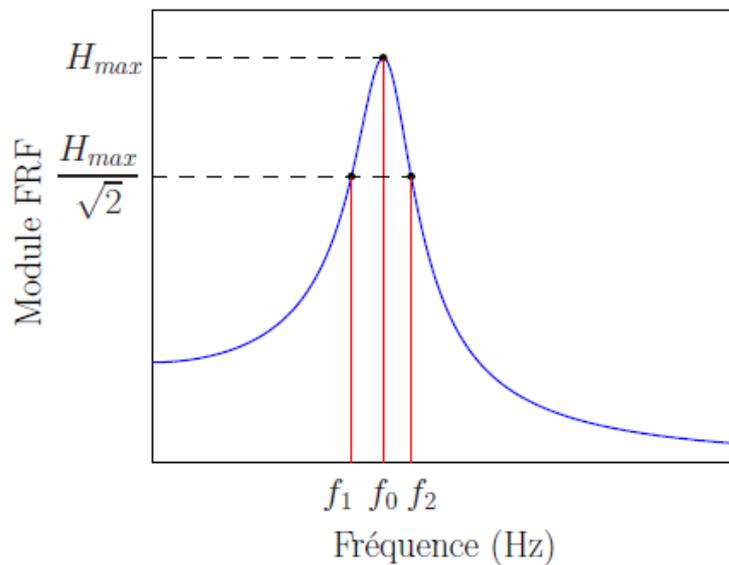
La réponse dynamique est largement influencée par la topologie de cellule nid d'abeille.

### 5.8.3 Facteur de perte

L'un des paramètres utilisés pour décrire l'amortissement du panneau sandwich est le facteur de perte ( $\eta$ ), qui représente la capacité de la structure à amortir les vibrations intérieures provenant de l'environnement extérieur. Dans la présente étude, les facteurs de perte sont calculés uniquement pour les pics de résonance correspondant au premier mode. Le tableau 5.8 résume les facteurs de perte des modèles dans le plan et hors plan pour les deux configurations de cellule extraites des courbes de réponse à l'aide de la méthode demi-puissance ou largeur de bande à  $-3$  dB présentée ci-dessous.

### 5.8.3.1 Méthode de largeur de bande

L'amortissement peut être aussi extrait à l'aide d'une méthode dite largeur de bande à -3dB. La figure 5.24 montre la détermination de la fréquence propre  $f_0$  ainsi que les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $H(f_1) = H(f_2) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ . Elles définissent une bande de fréquence dont l'ordonnée se situe à -3 dB de la réponse maximale du mode considéré de fréquence propre  $f_0$ .



**Figure 5.24** Méthode de la largeur de bande -3dB [103]

Le facteur d'amortissement se déduit à l'aide de la relation :

$$\eta = 2\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_0} \quad (5.36)$$

**Tableau 5.8** Facteurs de perte pour deux configurations de cellule nid d'abeille.

Chargement	Configuration	Facteur de perte
Dans le plan	conventionnel	0.05829
	auxétique	0.08924
Hors plan	conventionnel	0.04569
	auxétique	0.06427

Les facteurs de pertes calculés à l'aide de la méthode de la largeur de bande ont montré que la configuration auxétique avait une capacité d'amortissement supérieure à celle de configuration conventionnelle, quel que soit le type de chargement. Plus le facteur de perte est élevé, plus la capacité d'amortissement du système est élevée.

### **5.9 Conclusion**

Dans ce chapitre nous présentons une série des résultats associés au comportement dynamique des structures sandwich avec des topologies de cellule nid d'abeille qui n'ont pas été illustrées auparavant. Les conclusions tirées de la présente étude sont :

La méthode de mesure des fréquences propres qui permet une meilleure mesure des amortissements modaux est l'excitation de la poutre par un marteau de choc et la mesure de la réponse vibratoire par un accéléromètre fixé au bord de l'extrémité libre de la poutre ou plaque. La mesure des vibrations libre de la poutre, sans aucune contrainte extérieure de l'excitateur, permet d'obtenir des spectres où des FRFs avec des résonances de bandes passantes à -3dB beaucoup plus large, ce qui permet de calculer les amortissements modaux avec plus de précision.

Les résultats du modèle équivalent présenté dans cette analyse sont obtenus avec une bonne précision conduisant à la réduction du coût et du temps d'analyse par rapport au cœur représentée de manière géométriquement exacte. Les différents résultats obtenus sont prometteurs et montrent que la géométrie et le type de matériau ont un effet sur la valeur des fréquences modales de la plaque alvéolaire.

Les plaques sandwich en nid d'abeilles conventionnelles ont des fréquences naturelles plus élevées que les configurations auxétiques.

Les facteurs de pertes calculés à l'aide de la méthode de la largeur de bande à demi-puissance ont montré également que la configuration auxétique avait une capacité d'amortissement plus élevée par rapport à la configuration conventionnelle, quel que soit le type de chargement.

## **Conclusion générale**

# Conclusions

L'objectif initial du travail était d'analyser l'amortissement des matériaux composites sandwichs constitués d'une âme en nid d'abeille multi réentrante et de peaux en aluminium. Les travaux de recherche de ce mémoire comportent des développements analytiques, des simulations numériques ainsi qu'une étude expérimentale.

Pour mettre en place cette étude, dans un premier temps une cellule alvéolaire multi rentrante en forme de nid d'abeille est étudiée à l'aide d'un modèle analytique étendu qui prend en compte les trois mécanismes de déformation (MNT) produisant dans les parois. Le modèle est développé pour prédire les modules d'élasticités dans le plan en utilisant une approche basée sur le théorème énergétique. On montre que les modèles analytiques qui décrivent le comportement anisotrope des cellules en nid d'abeille peuvent être améliorés en considérant les trois mécanismes de déformation, qui sont les mécanismes de flexion, d'étirement et de cisaillement généralement négligés par de nombreux travaux précédents en raison de leurs faibles contributions dans l'évaluation des modules d'élasticités dans le plan d'une topologie de cellule classique à symétrie centrale.

Pour établir ces objectifs, nous avons décrit la méthode d'homogénéisation et son application numérique pour calculer les constantes élastiques effectives de la cellule multi réentrante. Nous avons validé les résultats obtenus avec les formules avancées de Gibson et un bon accord est obtenu entre les résultats, ceci valide le modèle analytique développé. L'estimation des propriétés mécaniques modules de Young, coefficients de Poisson et module de cisaillement par la MEF a fait ses preuves, les résultats présentent une approximation plus proche de la solution analytique. En utilisant de plus en plus des considérations complexes, telles que des nouvelles topologies de cellule cette dernière reste inadéquate. En prenant en compte les différents mécanismes de déformations, les résultats obtenus montrent que les valeurs du module d'élasticité sont les mêmes pour de faibles densités relatives, mais la différence dans la région de densité relative intermédiaire devient de plus en plus importante, cela indique que la densité et les propriétés mécaniques des nids-d'abeilles peuvent être optimisées pour des applications spécifiques à travers la conception et le contrôle de l'épaisseur des parois. La présente étude montre plutôt que l'impact des déformations axiales et de cisaillement devient significatif pour les cellules à paroi épaisse ainsi que celles

---

## Conclusion générale

---

possédant des géométries complexes. Les modèles conventionnels surestiment les modules d'élasticité dans le plan, en particulier pour les densités relatives élevées.

En outre, les paramètres géométriques ont eu des effets différents sur la rigidité de la cellule tel que le paramètre de paroi de base  $\beta$ . En conséquence, il a été montré que l'effet des variations de  $\beta$  sur les modules d'élasticités  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  diminue de manière significative avec l'augmentation du rapport de paroi de base cellulaire. Une découverte importante de cette étude est que la cellule multi réentrante à coefficient de Poisson négatif montrent une amélioration du module de cisaillement transversal par rapport aux configurations hexagonales classiques. L'effet auxétique est dû à un couplage flexion-membrane-cisaillement élevée et à l'influence des contraintes dans les clinquants ainsi que leur répartition géométrique dans l'espace de la cellule réentrante. Ce phénomène correspond à une valeur négative remarquable du coefficient de Poisson dans le plan inférieur à (-7). Ceci est particulièrement avantageux pour les applications structurelles pour lesquelles un comportement auxétique est recommandé.

Le deuxième volet de ce travail a été consacré à l'analyse du comportement dynamique. La méthode la plus répandue pour la mesure des fréquences et des amortissements modaux c'est la méthode qui consiste à exciter la structure par un marteau de choc et à mesurer la réponse par un accéléromètre. Dans cette méthode, les FRFs obtenus sont lissés sur les résonances, ce qui permet de déterminer les fréquences et les amortissements modaux avec exactitude. Cependant, on constate que les antirésonances n'apparaissent pas sur les FRFs. Des poutres et des plaques sandwich ont été mesurées par des essais d'analyse modale en configuration encastree libre. La comparaison des résultats obtenus expérimentalement et ceux par éléments finis montrent que les fréquences naturelles sont en bon accord. Les coefficients d'amortissement sont également bien estimés. Un écart entre les valeurs apparaît pour les modes de rang élevé des fréquences propres, cela s'explique par la non-prise en compte dans les modèles mathématiques de certains effets tels que le cisaillement et l'inertie rotationnelle, qui ont un effet notable en haute fréquence. En plus, on a confirmé que le modèle équivalent orthotrope représente une excellente approximation du comportement dynamique de la structure sandwich en nid d'abeille, ce qui valide la formulation déterminée en statique (les constantes élastiques homogénéisées) par une erreur relative de 0.17 % à environ 1.4 % pour le premier et le second mode d'une configuration auxétique. Cela encourage les chercheurs à utiliser la méthode équivalente lors de développement de ce type de structure qui reste fiable et conduise à la réduction du temps de calcul requis pour exécuter le modèle.

## Conclusion générale

---

Des études paramétriques détaillées ont été réalisées en utilisant le modèle élément fini sous le code de calcul Abaqus sur des poutres sandwichs nid d'abeille en aluminium à noyau multi réentrant, dans lequel les peaux supérieures et inférieures sont identiques. Les paramètres de géométrie et le type de matériau ont des effets sur les caractéristiques de vibration tel que les fréquences propres du panneau sandwich. L'effet de la hauteur du noyau a une grande influence sur la fréquence naturelle fondamentale du panneau sandwich en nid d'abeille. L'augmentation de l'épaisseur du noyau augmente la fréquence naturelle et l'augmentation est plus importante dans les modes supérieurs.

En outre, il a été constaté qu'en augmentant la taille de la cellule, les fréquences de flexion augmentent également alors que la fréquence du mode de torsion diminue légèrement. Il a également été révélé que la première fréquence de flexion différait légèrement entre les poutres à cœur en cellules hexagonales, hexagonales avec talon et auxétiques. L'augmentation de la densité du noyau diminue la fréquence naturelle de la plaque sandwich. Théoriquement, la fréquence naturelle est inversement proportionnelle à la densité de la plaque sandwich. Enfin, les facteurs de pertes calculés à l'aide de la méthode de la largeur de bande à demi-puissance ont montré également que la configuration auxétique avait une capacité d'amortissement plus élevée par rapport à la configuration conventionnelle, quel que soit le type de chargement. Plus le facteur de perte est élevé, plus la capacité d'amortissement du système est élevée.

Ces résultats pourraient être utilisés pour mieux comprendre et explorer la conception du comportement dynamique des panneaux sandwich en nid d'abeille.

Comme perspective, nous proposons d'étudier l'amortissement des structures sandwich comportant des matériaux viscoélastiques au niveau de l'âme et de proposer d'autres formes de cellule plus efficaces afin d'offrir de meilleures capacités d'amortissement que celle utilisée dans cette étude et avec différente condition aux limites.

Améliorer la précision du modèle analytique pour le calcul des fréquences propres des panneaux sandwich en nid d'abeille en adoptant des théories plus développées (c'est-à-dire le facteur de correction de cisaillement et l'inertie de rotation doivent être pris en compte en plus a une cinématique d'ordre élevée).

## **Références bibliographiques**

# Références bibliographiques

[1] BERTHELOT, J.M., *Matériaux Composites, Comportement mécanique et analyse des structures*. Paris : 3<sup>ème</sup> édition, tec&doc, 1999.

[2] IDRIS M., *Analyse expérimentale et par éléments finis du comportement statique et vibratoire des matériaux composites sandwichs sains et endommagés*. thèse de doctorat, université du Maine, 2013, 160 p.

[3] LACHGUER, A. AKYOUS, M. *les matériaux sandwich et les risques d'instabilités géométriques locales*, école des mines de Douai, 2012.

[4] GAY, D. *Les matériaux sandwichs. Matériaux composites*. Paris : 2<sup>ème</sup> Edition. Hermès, 1989.

[5] De Havilland DH.98 Mosquito. 2007. In site de TOUS LES AVIONS MILITAIRES [En ligne]. <http://aviation-militaire.kazeo.com/?page=rubrique&idr=285108&pa=54>. (site consulté le 10 juillet 2014).

[6] MAROUENE, A. *Comportement sous choc des composites sandwichs et influence des paramètres des matériaux et du test : Mémoire de Maîtrise*, université de Montréal, 2010.

[7] MERTANI, B. *Modélisation numérique et expérimentale du comportement des panneaux sandwichs à âme en nids d'abeilles*. Thèse de magistère, université Sétif, 2011.

[8] BINETRUY, C. *Structures sandwichs*, Techniques de l'Ingénieur, octobre 2008, Réf am5141.

[9] CHAKRABARTI, A., SHEIKH, A., *Vibration of laminate faced sandwich plate by a new refined element*. J. Aerosp. Eng. Vol.3, pp.123–134, 2004.

[10] KEPENG, QIU., ZHANG, W., and DUYSINX, P., *dynamic analysis of sandwich panels topological design of cores considering the size effect*. 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), Italy.

[11] CHALAK, H. D., CHAKRABARTI, A., IQBAL, M. A., and SHEIKH, A., *Vibration of laminated sandwich beams with soft core*. J. Vib. Control, Vol.18 No.10, pp.1422–1435, 2012.

[12] LONG, R., BARRY, O., and OQUAMANAM, D. C. D., *Finite element free vibration analysis of soft-core sandwich beams*. AIAA J., Vol.50 No.1, pp.235–238, 2012.

## Références bibliographiques

---

- [13] YONGQIANG, L., and ZHIQIANG, J., *Free flexural vibration analysis of symmetric rectangular honeycomb panels with SCSC edge supports*. Compos. Struct., Vol.83, No.2, pp154–158,2008.
- [14] YU, S.D., and CLEGHORN, W.L., *Free flexural vibration analysis of symmetric honeycomb panels*. J. Sound Vib., 284(1–2), pp.189–204,2005.
- [15] Rao, M. K., Scherbatiuk, K., Desai, Y. M., and Shah, A. H., *Natural vibrations of laminated and sandwich plates*. J. Eng. Mech., Vol.11, pp.1268–1278,2004.
- [16] LEE, C. R., KAM, T. Y., and SUN, S. J., *Free-vibration analysis and material constants identification of laminated composite sandwich plates*. J. Eng. Mech., Vol.8, pp.874–886,2007.
- [17] CHENINIA, R. NASRI, C. and ABDELLI, Y., *Kinematics effect on honeycomb sandwich beams vibration*. Mechanics & Industry 18, 302, 2017.
- [18] JAFAR ESKANDARI, J., EFTARI, B., and HOSSEIN, S., TAGHAVIAN, *Better predicting the dynamic response of sandwich panels*. Plastic Research, Society of Plastics Engineers, 2010.
- [19] LIU, Q and ZHAO, Y., *Prediction of natural frequencies of a sandwich panel using thick plate theory*. J Sandw Struct Mater. Vol.3, pp.289–309, 2001.
- [20] MAHERI. M. R. and ADAMS, R. D., *Steady state flexural vibration damping of honeycomb sandwich beams*, Composites Science and Technology, Vol.52, p.333-347, 1994.
- [21] BERTHELOT, J.M., ASSARAR, M., SEFRANI, Y., EL MAHIA, A., *Damping Analysis of Composite Materials and Structures*. Composite Structures. Vol.85, Issue 3, pp189-204, 2008.
- [22] EL MAHIA, A., ASSARAR, M., SEFRANI, Y., BERTHELOT, J.M., *Damping Analysis of Orthotropic Composite Materials and Laminates*. Composites B. Vol.39, No.7, pp1069-1076, 2008.
- [23] SAKAR, G., Bolat, F.C., *The Free Vibration Analysis of Honeycomb Sandwich Beam Using 3D and Continuum Model*. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering. Vol.9, No.6, 2015.
- [24] VLACHI, J., POMP, N., *Modal analysis of honeycomb panels and the influence of boundary conditions on the calculation*. Pilsen, Czech Republic, 2014.
- [25] SCARPA. F., TOMLINSON. G., *Theoretical characteristics of the vibration of sandwich plates with in-plane negative Poisson's ratio values*. J. Sound Vib. Vol.230, pp.45–67, 2000.
- [26] LIM, T.C., *Buckling and vibration of circular auxetic plates*. J. Eng. Mater. Technol. Vol.136, No.6, pp. 21007, 2014.

## Références bibliographiques

---

- [27] MARUSZEWSKI, B.T., DRZEWIECKI, A., STAROSTA, R., and RESTUCCIA, L., *Thermoelastic damping in an auxetic rectangular plate with thermal relaxation: Forced vibrations*, *J.Mech. Mater. Struct.*, Vol.8, No.10, pp.403– 413, 2013.
- [28] KERWIN, E.M., *Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer* *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol.31, pp.952-962, 1959.
- [29] EMILIA ROSA, M., *Cellular Materials: Structure and Properties* ; Marie Curie School on Knowledge Based Materials – Estremoz, Portugal – 21 August 2007.
- [30] GIBSON, L.J. ASHBY, M.F. *Cellular solids: structure and properties*, 2nd ed. UK, Cambridge university press, 1997.
- [31] CHAMIS, C.C., AIELLO, R. A, MURTHY, L., NURTHY L., *Journal of composite technology & research*, Vol. 10, pp. 93-99, 1988.
- [32] TAKANO, N. ZAKO, M. KIKUCHI, N., *Mater. Sci. Res. Int.* Vol.1 No.2, pp.82–88, 1995.
- [33] BOURGEOIS, S., CARTRAUD, P., DEBORDES, O., *Homogenization of periodic sandwiches. In: Mechanics of Sandwich Structure*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 139– 146, 1998.
- [34] VOUGIOUKA, G., GUEDES, H.R, *Prediction of elastic properties of sandwich panels using a homogenization computational model. In: Mechanics of Sandwich Structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 147–154, 1998.
- [35] MERAGHNI, F., DESRUMANX, F., BENZEGGAGH, M. L., *Composites*. Vol.30 No.6, pp.767–779, 1999.
- [36] MASTERS, I.G., EVANS, K. E., *Models for the elastic deformation of honeycombs*. *Compos. Struct*, Vol.35, pp.403-422, 1997.
- [37] Xu XF, QIAO, P., *Homogenized elastic properties of honeycomb sandwich with skin effect*. *International journal of solids and structures*. Vol.39, pp.2153-88, 2002.
- [38] *Mechanics of Honeycombs*, <http://www.mse.mtu.edu~drjohn/my4150/honey> consulter le 25/12/2014.
- [39] KELSEY, S., GELLATLY, R.A., CLARK, B.W. *The shear modulus of foil honeycomb cores: A theoretical and experimental investigation on cores used in sandwich construction*. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. Vol.30, pp.294–302, 1958.
- [40] GREDIAC, M., *A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores*. *International journal of solids and structures*. Vol.30, pp.1777-88, 1993.
- [41] SCARPA, F., TOMLIN, P.J., *On the transverse shear modulus of negative Poisson's ratio honeycomb structures*. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* Vol.23, pp.717-20. 2000.

## Références bibliographiques

---

- [42] SILVA,M.J., HAYES, W.C., GIBSON,L.J. *The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids*. Int. J. Mech. Sci. Vol.11, pp.61–77,1995.
- [43] BEZAZI,A., SCARPA,F., REMILLAT,C.A. *Novel centre symmetric honeycomb composite structure*. Compos. Struct. Vol.71,pp.356-64, 2005.
- [44] GRIMA, J.N.,CAUCHI,R., GATT, R., ATTARDT,D. *Honeycomb composites with auxetic out of- plane characteristics*. Compos. Struct. Vol.106, pp.150-159,2013.
- [45] KÖRNER,C., LIEBOLD-RIBEIRO,Y. *A systematic approach to identify cellular auxetic materials*. Smart Mater. Struct. Vol.24,10 PP., 2015.
- [46] SUN,Y., PUGNO,N.M. *In plane stiffness of multifunctional hierarchical honeycombs with negative Poisson's ratio sub-structures*. Compos. Struct. Vol.106, pp.681-689,2013.
- [47] EL-SAYED, F.K., JONES, R., BURGINS, I.W. *Theoretical approach to the deformation of honeycomb based composite-materials*. Composites, Vol. 10, pp. 209-214,1979.
- [48] GIBSON, L. J., ASHBY, M. F., ZHANG, J., TRIANTAFILLOU, T.C., *Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads I. Modelling*, Int. J. Mech. Sci, Vol.31,No.9,pp.635-663,1989.
- [49] NKANSAH,M.E., EVANS,K.E., HUTCHINSON,I.J. *Modelling the mechanical properties of an auxetic-molecular network*. Model. Simul. Mater. SCI. Engin. Vol.2, 337,1994 .
- [50] WANG, A.J., MCDOWELL, D.L. *In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs*. Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 126, pp. 137-156,2004.
- [51] THEOCARIS, P.S., PANAGIOTOPOULOS, G.E. *Negative Poisson's ratio in materials with a star-shaped microstructure*. Archive of Applied Mechanics: A Numerical Homogenization Approach, Vol. 67, pp. 274-286,1997.
- [52] SMITH, C.W., GRIMA, J.N., EVANS, K.E. *A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams: missing rib foam model*. Acta Materialia, Vol. 48, pp. 4349-4356,2000.
- [53] GASPAR, N., REN, X.J., SMITH, C.W., GRIMA, J.N., EVANS, K.E. *Novel honeycombs with auxetic behaviour*. Acta Materialia, Vol. 53, pp. 2439-2445,2005.
- [54] KWANGWON-KIM, J.J., DOO-MAN, K., HYUN-SEUN, Y. *Modulus and high strain flexure design with auxetic honeycomb structures*. IDETC/CIE, DETC2012-70552, 2012.
- [55] JU, J., SUMMERS, J.D. *Compliant hexagonal periodic lattice structures having both high shear strength and high shear strain*. Materials & Design, Vol. 32, No. 2, pp. 512-524,2011.

## Références bibliographiques

---

- [56] IMRAN, A., YU, J.J. *Mathematical models for in-plane moduli of honeycomb structures-a review*. Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, Vol. 7 No. 3, pp. 581-592,2014.
- [57] LIRA, C., INNOCENTI,P., SCARPA, F. *Transverse elastic shear of auxetic multi reentrant honeycombs*. Compos Struct. Vol. 90,pp. 314–22,2009.
- [58] HARKATI,E., DAOUDI,N., BEZAZI,A., HADDAD, A., SCARPA, F. *In-plane elasticity of a multi re-entrant auxetic honeycomb*. Composite structures, vol. 180, pp.130-139,2017.
- [59] BALAWI, S., ABOT, J.L. *The effect of honeycomb relative density on its effective in plane elastic moduli: an experimental study*. Composite Structures, Vol. 84, pp. 293-299, 2008.
- [60] QUEHEILLALT, D.T.,WADLEY, H.N.G.*Titanium alloy lattice truss structures*. Materials & Design, Vol. 30, pp. 1966-1975, 2009.
- [61] YANPING, L., HONG, H. *A review on auxetic structures and polymeric materials*. Scientific Research and Essays, Vol. 5 No. 10, pp. 1052-1063, 2010.
- [62] DAOUDI,N., HARKATI, E., BOUTAGOUGA,D., LOUAFI,M. *A refined analytical model for studying the effect of the relative density on the homogenised elastic constants of a honeycomb cell structure*. Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, Vol. 14 No.1, pp.16-39, 2018.
- [63] OLSSON, R.G.*Zur Berechnung der Frequenz der Transversalschwingungen des prismatischen Stabes*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 15 No. 4, pp. 245,1935.
- [64] SHI, G., TONG, P. *Equivalent transverse shear stiffness of honeycomb cores*. Int J Solid Struct.Vol.32, pp.1383–93,1995.
- [65] XU, XF., QIAO, PZ., DAVALOS, JF. *On the transverse shear stiffness of composite honeycomb core with general configuration*. J Eng Mech ASCE Vol.127,pp.1144–51,2001.
- [66] COOK,R.D., MALKUS,D.S., PLESHA,M.E. *Concepts and applications of finite elemnt analysis*. Newyork :3rd ed.john wiley & sons,1989.
- [67] WHITTY, J.P.M., ALDERSON,A., MYLER,P., KANDOLA,B. *Towards the design of sandwich panel composites with enhanced mechanical and thermal properties by variation of the in-plane Poisson's ratios*. Compos. Part A.Vol. 34,pp. 525-534,2003.
- [68] POZNIAK,A.A., KAMINSKIKEDZIORA,H., KEDZIORAE,P., MARUSZEWSKI, B., STREK,T., WOJCIECHOWSKI,T.KW. *Anomalous deformation of auxetic constrained square*. Reviews on Advanced Materials Science, Vol.23 No.2, pp.169-174,2010.

## Références bibliographiques

---

- [69] LIM, T.C. *Auxetic Materials and Structures*. Springer, Singapore, 2015.
- [70] GIBSON, L.J., ASHBY, M.F., SCHAJER, G.S., ROBERTSON, C.I. *The mechanics of two-dimensional cellular materials*. Proceedings of the Royal Society of London A, Vol. 382, pp. 25-42, 1982.
- [71] EVANS, K.E., NKANSAH, M.A., HUTCHINSON, I.J., ROGERS, S.C. *Molecular network design*. Nature, Vol. 353, p.124, 1991.
- [72] LAKES, R. *Foam structures with a negative Poisson's ratio*. Science, Vol. 235, pp. 1038-1040, 1987.
- [73] LIRA, C., SCARPA, F. *Transverse shear stiffness of thickness gradient honeycombs*. Composites Science and Technology, Vol. 70, pp. 930-936, 2010.
- [74] LAKES, R.S., ELMS, K. *Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams*. Journal of Composite Materials, Vol. 27, pp. 1193-1202, 1993.
- [75] GRIMA, J.N., EVANS, K.E. *Auxetic behavior from rotating squares*. Journal of Materials Science Letters, Vol. 19, pp. 1563-1565, 2000.
- [76] YANG, W., LI, Z.M., SHI, W., XIE, B.H., YANG, M.B. *Review on auxetic materials*. Journal of Materials Science, Vol. 39, pp. 3269-3279, 2004.
- [77] EVANS, K.E. *Auxetic polymers: a new range of materials*. Endeavour, Vol. 15, pp. 170-174, 1991.
- [78] ALDERSON, A., ALDERSON, K.L. *Auxetic materials*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 221, pp. 565-575, 2007.
- [79] HOU, S., LIU, T., ZHANG, Z., HAN, X., LI, Q. *How does negative Poisson's ratio of foam filler affect crashworthiness*. Materials & Design, Vol. 82, pp. 247-259, 2015.
- [80] CHEN, C.P., LAKES, R.S. *Micromechanical analysis of dynamic behavior of conventional and negative Poisson's ratio foams*. Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 118, pp. 285-288, 1996.
- [81] BILIM, A.V. *Effect of geometric parameters on the in-plane crushing behavior of honeycombs and honeycombs with facesheets*. Thesis doctorat, The Pennsylvania State University, 175p, 2009.
- [82] GIBSON, L. J., ASHBY, M. F., ZHANG, J., TRIANTAFILLOU, T.C., *Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads I. Modelling*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 31, No. 9, pp. 635-663, 1989.
- [83] ZENKERT, D. *The handbook of sandwich constructions*. UK: Emas publishing, 1997.

## Références bibliographiques

---

- [84] ABAQUS. *ABAQUS reference manuals, version CEA 6.10-1*. Dassault Systemes, Abaqus Inc., Providence.2010.
- [85] LEI CAO, YULIANG LIN, FANGYUN LU, RONG CHEN, ZHIFENG ZHANG and YAN LI. *Experimental Study on the Shock Absorption Performance of Combined Aluminium Honeycombs under Impact Loading*. Shock and Vibration, Article ID 689546, 8 pages,2015.
- [86] HAYES, A.M., WANG, A. j., DEMPSEYe, B.M., McDowell, D.L.,. *Mechanics of linear cellular alloys*. Mechanics of Materials ,Vol.36,pp.691–713.2004.
- [87] GIBSON, R.F., *Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures*. Composite Science and Technology,Vol.60,pp. 2769–80,2000.
- [88] WANG B, YANG M., *Damping of honeycomb sandwich beams*. J. Mater Process Technol. Vol.105,pp. 67–72.2000.
- [89] LI, Z., CROCKER, M.J., *Effects of thickness and delamination on the damping in honeycomb-foam sandwich beams*. J. Sound Vibr.Vol. 294,PP. 473–85.2006.
- [90] HARISH R *et al.*, International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences, 5(6), June-August 2013, pp. 582- 586
- [91] HOZHABR MOZAFARI, SARA NAJAFIA, *Vibration analysis of foam filled honeycomb sandwich panel numerical study*. Australian Journal of Mechanical Engineering, 2017.
- [92] LUCA GUJ,ALDO SESTIERI., *Dynamic modeling of honeycomb sandwich panel*. Arch Appl Mech,Vol.77,pp.779–793,2007.
- [93] JEOM KEE PAIK, ANIL K. THAYAMBALLI, GYU SUNG KIM, *The strength characteristics of aluminium honeycomb sandwich panels*, Thin-Walled Struct.Vol. 35 pp.205–231,1999.
- [94] FU M.H., YIN J.R., *Equivalent elastic parameters of the honeycomb core*. Acta Mechanica Sinica, Vol.31, pp113–118,1999.
- [95] XU Sheng-jin, Kong Xian-ren, Wang Ben-li, MA Xing-rui, Zhang Xiaochao, *Method of equivalent analysis for statistics and dynamics behavior of orthotropic honeycomb sandwich plates*, Acta Materiae Compositae Sinica. 17(3): 92-95,2000.
- [96] NOOR, A., BURTON, W., and BERT, C. *Computational models for sandwich panels and shells*. Appl. Mech. Rev.,Vol. 49, No.3,pp.155–199,1996.
- [97] BUANNIC N., CARTRAUD P., QUESNEL T., *Homogenization of corrugated core sandwich panels*. Composite Structures, Vol.59, pp.299–312,2003.
- [98] HASSANI B., HINTON E., *A review of homogenization and topology optimization II—analytical and numerical solution of homogenization equations*.Computers and Structures, Vol.69, No.6, pp.719–738,1998.

## Références bibliographiques

---

- [99] BOUDEMAICA, AMRI M, SALEM A, BOUANANE M H, BOUTCHICHA D. *Modal analysis and testing of hexagonal honeycomb plates used for satellite structural design. Materials and Design.* Vol. 35, pp.266–275,2012.
- [100] XIA LI-JUAN, JIN XIAN-DING, WANG YANG-BAO. *Equivalent analysis of honeycomb sandwich plates for satellite structure.* Journal of Shanghai Jiao Tong University, Vol.37, No.7, pp.999-1001,2003.
- [101] DAWE D.J, ROUFAEIL O.L *Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates.* Journal of Sound and Vibration, Vol. 69, No. 3, pp. 345–359,1980.
- [102] JINSUO NIE, XING WEI. *On the use of material dependent damping in ansys for mode superposition transient.* Proceedings of the ASME 2011 Pressure Vessels & Piping Division, July 17-21, 2011, Baltimore, Maryland, USA.
- [103] NASHIF A.D., JONES D.I.G., John P. Henderson. *Vibration damping.* John Wiley & Sons, 1985.