



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
UNIVERSITE LARBI TEBESSI DE TEBESSA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



DOMAINE DE FORMATION : Sciences et Technologie  
Génie Mécanique

# Matériaux Composites

Matière : Matériaux Composites  
Spécialité : Construction Mécanique  
Niveau : 2 Année Master

Nom et prénom : DEGHBODJ Samir

Année universitaire : 2020-2021



• *Sommaire*

Préface

Sommaire

*Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux composites et leurs applications*

1.1 Introduction	1
1.2 Définition d'un matériau composite	1
1.3 Constituants d'un composite	2
1.3.1 Matrice	2
1.3.2 Renforts	2
1.4 Les principales fibres	3
1.4.1 Les fibres de verre	3
1.4.2 Les fibres de carbone	3
1.4.3 Les fibres d'aramide (Kevlar)	4
1.4.4 Autres fibres	4
1.5 Classification des matériaux composites	5
1.5.1 Les composites à grande diffusion	5
1.5.2 Les composites hautes performances	5
1.6 Avantages des matériaux composites	6
1.7 Domaines d'application des matériaux composites	6
1.8 Les différentes architectures des renforts de composites	7
1.8.1 Les mats	7
1.8.2 Les unidirectionnels (UD)	7
1.8.3 Les tissus bidirectionnels	7
1.8.4 Les multidirectionnels	8
1.9 Les matériaux composites structuraux	8
1.9.1 Les monocouches	8
1.9.2 Les stratifiés	9
1.9.3.1 Avantages des sandwichs	12

1.9.3.2 Inconvénients des sandwiches	12
<i>Chapitre 2 : Procédés d'obtention des constituants et de fabrication des composites</i>	
2. 1 Obtentions des fibres	13
2.1.1 Les fibres de verre	13
2.1.2 Les fibres de carbone	14
2.1.3 Les fibres d'aramide (KEVLAR)	16
2.1.4 Les fibres de bore	17
2.1.5 Les fibres naturelles	17
2. 2 Matrices organiques et polymères	18
2.2.1 Définition des polymères	18
2.2.2 Exemple de polymères usuels	19
2.2.3 Différents types de polymères	19
2.2.4 Définition des plastiques	20
2.3 Fabrication des composites	21
2.3.1 Moulage au contact	21
2.3.2 Moulage par projection	22
2.3.3 Enroulement filamentaire	24
2.3.4 Moulage par pultrusion	25
2.3.5 Moulage par injection R.T.M	26
<i>Chapitre 3 : Propriétés mécaniques des composites</i>	
3.1 Homogénéisation micromécanique	27
3.2 Loi des mélanges	27
3.2.1 Fractions volumiques	27
3.2.2 Fractions massiques	28
3.2.3 Relation entre fractions volumiques et fractions massiques	28
3.3 Détermination des propriétés élastiques d'un pli unidirectionnel	32
3.3.1 Module d'élasticité longitudinal	32
3.3.2 Module d'élasticité transversal	34
3.3.3 Module de cisaillement	40
3.3.4 Coefficient de Poisson	42
3.3.5 Méthodes analytiques pour la détermination des modules d'élasticité du pli	45



<i>Chapitre 4 : Comportement élastique d'un composite unidirectionnel</i>	
4.1 Généralités sur le comportement élastique des matériaux	49
4.1.1 Loi de comportement élastique	49
4.1.2 Différents types des matériaux	49
4.1.2.1 Notation de l'ingénieur	50
4.1.2.2 Matériaux anisotropes	50
4.1.2.3 Matériau monoclinique	51
4.1.2.4 Matériau unidirectionnel	51
4.1.2.5 Matériau orthotrope	52
4.1.2.6 Matériaux transversalement isotrope	53
4.1.2.7 Matériau quasi isotrope transverse	54
4.1.2.8 Matériau quasi isotrope	54
4.1.2.9 Matériau isotrope	54
4.1.2.10 Loi de Hooke généralisée pour un milieu isotrope	55
4.2 Comportement élastique d'un composite unidirectionnel	57
4.2.1 Comportement en souplesse et en rigidité	58
4.2.2 Modules de l'ingénieur	58
4.2.3 Traction longitudinale	59
4.2.4 Traction transverse	60
4.2.6 Cisaillement longitudinal	63
4.2.7 Cisaillement transverse	64
4.2.8 Compression hydrostatique latérale	67
<i>Chapitre 5 : Comportement élastique d'un matériau composite hors axes principaux</i>	
5.1 Composite orthotrope	71
5.2 Comportement en souplesse et en rigidité	71
5.2.1 Traction dans le sens chaîne	72
5.2.2 Traction dans le sens trame	73
5.2.3 Traction transverse	75
5.2.4 Essai de cisaillement	76
5.3 Loi de comportement en dehors des axes d'orthotropie	81

5.4 Matrices de rigidité et de souplesse	82
5.5 Rappel sur les changements de base	83
5.5.1 Tenseurs d'ordre deux	85
5.5.2 Notation de l'ingénieur	85
5.5.3 Changement de base cas d'une rotation autour de la direction $\bar{e}_3$	86
5.6 Loi de comportement d'une couche hors axes principaux	87
5.6.1 Constantes de rigidité dans le cas d'un composite unidirectionnel	90
5.6.2 Constantes de souplesse dans le cas d'un composite unidirectionnel	91
5.6.3 Constantes de rigidité dans le cas d'un composite orthotrope	92
5.6.4 Constantes de souplesse dans le cas d'un composite orthotrope	93
5.6.5 Expression des modules de l'ingénieur hors axes principaux	94
5.6.5.1 Essai de traction suivant la direction x	94
5.8.2 Essai de traction suivant la direction y	96
5.6.5.2 Essai de cisaillement transverse	96
5.6.6 Etat de contraintes planes	97
5.6.7 Matrice de rigidité réduite d'un composite orthotrope par rapport à ces axes principaux	100
<i>Chapitre 6 : Comportement en flexion des stratifiés composites</i>	
6.1 Définition d'une plaque	121
6.2 Classification des plaques	121
6.3 Champ de déplacement	121
6.4 Schémas du premier ordre	122
6.5 Champ de déformation	125
6.6 Champ de contraintes	125
6.7 Résultantes et moments	126
6.8 Résultantes en cisaillement	128
6.9 Moments de flexion-torsion	128
6.10 Relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier ordre	129
6.10.1 Equations du mouvement	129
6.10.2 Equations de mouvement relatives aux résultantes en membranes	129
6.10.3 Equations de mouvement relatives aux résultantes de cisaillement	131

6.10.4 Equations de mouvement relatives aux moments	132
6.11 Loi de comportement d'un stratifié multicouches	134
6.11.1 Hypothèses de la théorie des stratifiés	134
6.11.2 Champ de déformations	135
6.11.3 Champ de contraintes	137
6.11.4 Expressions des résultantes et moments	139
6.11.4.1 Résultantes en membranes	139
6.11.4.2 Moments de flexion et de torsion	140
6.11.5 Equation constitutive d'un stratifié	140
6.11.5.1 Calcul des contraintes et des déformations	141
6.11.5.2 Calcul des déformations en membrane	141
6.11.6 Modes de stratification particuliers	142
6.11.6.1 Stratifié équilibré (Angle ply laminate)	142
6.11.6.2 Stratifié symétrique (Symetric laminate)	142
6.11.6.3 Stratifié croisé (Cross ply laminate)	143
6.11.6.3 Stratifié orthogonal	143
<i>Chapitre 7 : Comportement thermomécanique d'un composite unidirectionnel</i>	
7.1 Introduction	152
7.2 Equations du comportement des composites en tenant compte du phénomène de dilatation	152
7.2.1 Loi de comportement dans les axes principaux	152
7.2.2 Loi de comportement en dehors des axes principaux	154
<i>Chapitre 8 : Rupture et endommagement des composites unidirectionnel</i>	
8.1 Endommagement des composites	158
8.2 Mécanismes d'endommagement et de rupture dans les composites	158
8.2.1 Fissuration transverse	159
8.2.2 Fissuration longitudinale	159
8.2.3 Délaminage entre couches	160
8.2.4 Rupture des fibres	160
8.2.5 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale	162
8.3 Moyen de contrôle de l'endommagement des composites	163
8.3.1 Méthodes de caractérisation directes	163

8.3.1 Microscopie optique	163
8.3.2 Radiographie X	164
8.3.2 Méthodes indirectes de caractérisation	164
8.3.2.1 Emission acoustique	164
8.4 Critères de rupture	165
8.4.1 Critères en contraintes maximales	166
8.4.1.1 Critères dans les axes principaux	166
8.4.1.2 Critères de rupture en-dehors des axes principaux	167

[Références bibliographiques](#)

## • *Préface*

Un composite est l'assemblage de plusieurs matériaux non miscibles de nature différente et dont les qualités se complètent afin d'obtenir un matériau hétérogène dont les performances sont supérieures à celles de ses composants. Un matériau composite est constitué d'un renfort (ossature du matériau) qui assure la tenue mécanique et d'une matrice (enveloppe ou peau du matériau) qui est généralement polymérique (résine thermoplastique ou thermodurcissable) ou métallique, qui assure la cohésion de la structure et la retransmission des efforts vers le renfort.

Ce polycopié de cours traite de la mécanique des matériaux composites, et présente plus spécifiquement les méthodes et les outils nécessaires qui permettent d'analyser la réponse mécanique de structures composites simples, de type plaque, à partir des propriétés physiques et morphologiques des constituants et de leur assemblage. Cet ouvrage est principalement inspiré des cours de mécanique des matériaux composites donné par l'auteur au département de génie mécanique de l'université Larbi Tébessi - Tébessa .Il représente en fait l'effort de plusieurs années d'enseignement. Il est destiné aux étudiants de la spécialité génie mécanique et ceux des cursus proches tel que le génie civil, qui poursuivent des études de Master.

Le contenu et la progression de cet ouvrage ont été conçus avec trois objectifs :

1. Apporter à l'étudiant de la discipline les éléments nécessaires pour aborder des problèmes de des matériaux composites.
2. Soutenir et contribuer aux efforts de l'enseignement de cette discipline (Mécanique des Matériaux Composites) en mettant à la disposition de l'étudiant un document rigoureux et pratique.
3. Présenter aux étudiants, cette discipline, ses capacités ainsi que ses limites pour qu'ils enrichissent leurs culture dans le domaine.

Cet ouvrage est divisé en neuf chapitres, le premier présente des généralités sur les matériaux composites et leurs applications. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des procédés d'obtention des constituants et de fabrication des composites. Dans le troisième chapitre nous avons exposé les concepts fondamentaux du comportement élastique des

matériaux. Nous présentons aussi dans le quatrième chapitre Les propriétés mécaniques des composites. Le cinquième chapitre est dédié au comportement élastique d'un composite unidirectionnel. Dans le sixième chapitre nous avons présenté le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope. Le septième chapitre a été réservé aux lois de comportement en dehors des axes d'orthotropie. Dans le huitième chapitre nous avons présenté les principes de base de la théorie des plaques. En fin le neuvième et dernier cinquième chapitre présente la théorie classique des stratifiés.

# Généralités sur les matériaux composites et leurs applications

## 1.1 Introduction

Les composites sont employés depuis longtemps (briques en argile et paille, arcs et arbalètes en bois et tendons d'animaux, épées en alliages différents). A partir des années 60, les matériaux composites commencent à attirer l'attention pour résoudre des problèmes technologiques, et surtout depuis la découverte des composites à base polymère ; ainsi les composites sont devenus les matériaux d'engineering les plus importants et les plus utilisés dans diverses applications (industrie automobile, articles de sports, aéronautique, industrie maritime etc..) figure 1.1. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels tel que : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes.

## 1.2 Définition d'un matériau composite

Un composite est l'assemblage de plusieurs matériaux non miscibles de nature différente et dont les qualités se complètent afin d'obtenir un matériau hétérogène dont les performances sont supérieures à celles de ses composants. Un matériau composite est constitué d'un **renfort** (ossature du matériau) qui assure la tenue mécanique et d'une **matrice** (enveloppe ou peau du matériau) qui est généralement polymérique (résine thermoplastique ou thermodurcissable) ou métallique, qui assure la cohésion de la structure et la retransmission des efforts vers le renfort.

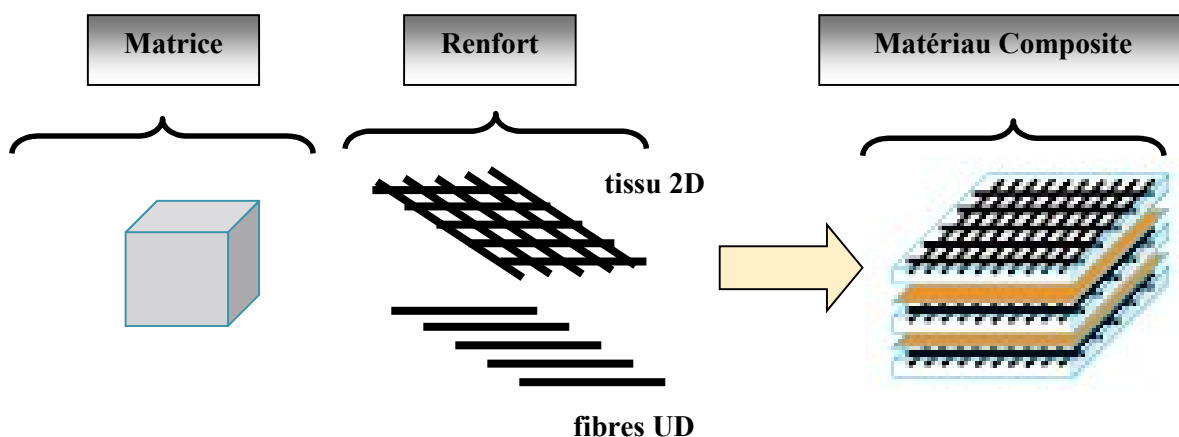


Fig.1.1 Constituants de base d'un matériau composite

## 1.3 Constituants d'un composite

### 1.3.1 Matrice

La matrice est l'un des deux principaux constituants de base des matériaux composites. Le rôle principal de la matrice est de maintenir les renforts en place et de leur assurer la cohésion et la protection. Elle permet également la transmission des efforts mécaniques vers les renforts. Elle est généralement homogène et isotrope. On distingue les matrices céramiques, les matrices métalliques, les matrices minérales et les matrices organiques. On utilise actuellement surtout des résines thermodurcissables (TD) que l'on associe à des fibres longues, mais l'emploi de polymères thermoplastiques (TP) renforcés de fibres courtes se développe fortement. Les principales résines thermodurcissables sont les polyesters très largement utilisés, les résines époxy (ou époxydes) qui constituent la résine type pour les composites HP et les résines phénoliques. Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont le polypropylène (PP), les polyamides (PA).

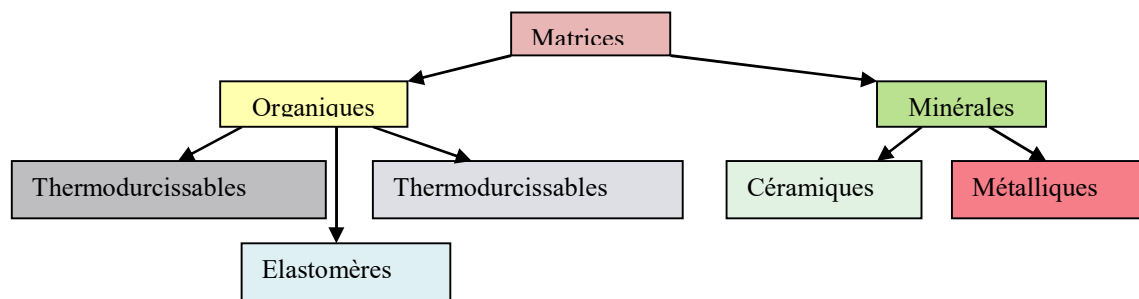


Fig.1.2 Principaux familles de matrices

### 1.3.2 Renforts

Le renfort est généralement composé de matériau plus dur que la résine, son rôle principal est d'assurer au matériau une grande résistance surtout à la traction, et qui se présente généralement sous forme de fibres (diamètres de 5 à 20  $\mu\text{m}$ ) (figure 1.3) :

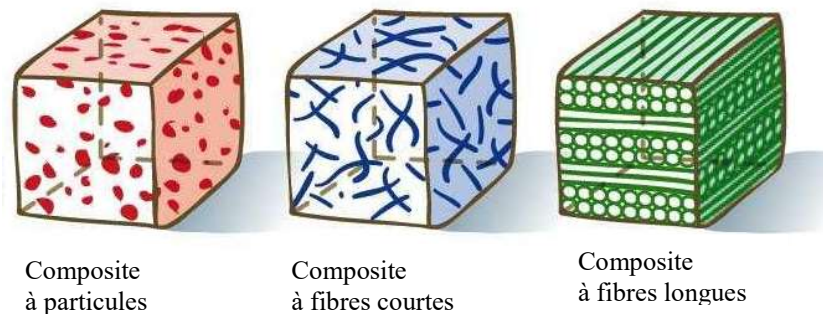
- fibres longues unidirectionnelles (carbone, verre)
- fibres longues tissées (tissus 3D et 2D)
- fibres courtes réparties aléatoirement sans directions privilégiées (mat)

Les fibres sont de type organique (fibres en polyamide, polyester, polypropylène ...) et inorganiques (fibres de verre, de carbone, ...) ou encore naturelles (cellulose). En général, elles



présentent d'excellentes caractéristiques mécaniques. En fonction de la forme des renforts, on distingue deux types de composites :

1. **les composites à fibres** : constitués de fibres continues ou discontinues (fibres coupées ou courtes). Leur orientation permet de moduler les propriétés mécaniques du matériau et d'obtenir des matériaux isotropes ou anisotropes.
2. **les composites à particules** : les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux.



**Fig. 1.3** Les structures géométriques des renforts de composites à fibres longues, à fibres courtes et à particules

#### 1.4 Les principales fibres

Une fibre est un solide à une dimension dont la structure est fortement orientée. On définit une fibre par sa section moyenne dans la direction transversale. Elle est caractérisée par un diamètre moyen très faible, de l'ordre de 5 à 30  $\mu\text{m}$ , sa longueur totale peut varier de 2 cm à plusieurs kilomètres. Parmi les différents types de fibres utilisées comme renforts on peut citer :

##### 1.4.1 Les fibres de verre

Sous forme massive, le verre est caractérisé par une grande fragilité et une forte sensibilité à la fissuration. Au contraire, le verre employé sous forme de fibres de faibles diamètres présente de très bonnes caractéristiques mécaniques. Ces fibres de verre sont obtenues par extrusion du verre à travers une filière percée de trous de 1 à 2 mm de diamètre. Les fibres de verre sont ensuite étirées jusqu'à obtenir des diamètres de 5 à 15  $\mu\text{m}$  à la fin du processus elles sont enduites et bobinées (roving) (figure 1.4.a).

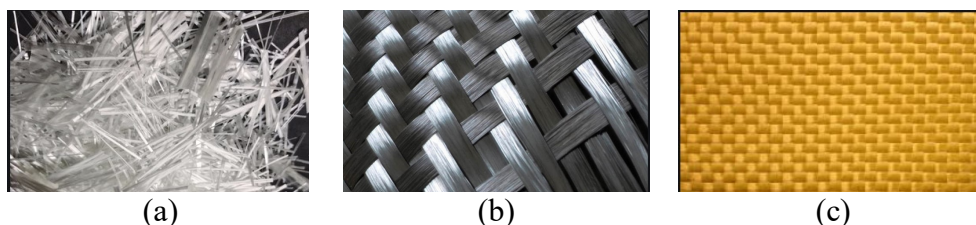
##### 1.4.2 Les fibres de carbone

Elles sont fabriquées à partir de fibres de polymère de base appelé précurseur qui se présente lui-même sous forme de fibres orientées préalablement tissées, et carbonisées sous tension en plusieurs étapes, oxydation (100 à 200  $^{\circ}\text{C}$ ), puis pyrolyse (1500-2500  $^{\circ}\text{C}$ ). Selon la température

et le temps de cuisson, les fibres présentent une "haute résistance" (HR) ou un "haut module" (HM). Généralement on utilise comme précurseur des fibres acryliques élaborées à partir du poly acrylonitrile (PAN) (figure 1.4.b).

### 1.4.3 Les fibres d'aramide (Kevlar)

Le poly-para-phénylène téréphtalamide, connu est commercialisée depuis les années 1970 sous le nom de Kevlar est constitué de noyaux de benzène séparés par des groupements amides. La fibre d'aramide Le Kevlar possède des propriétés très intéressantes pour l'industrie. Elle est caractérisée par une excellente résistance à la traction, aux chocs et à l'usure. Ce type de fibres est surtout utilisé dans la fabrication de gilets pare-balles et dans l'industrie aéronautique (figure 1.4.c).



**Fig. 1.4** Les principales fibres: (a) fibres de verre, (b) fibres de carbone, (c) fibres d'aramide

**Tableau 1.1** Caractéristiques mécaniques de quelques renforts de composites

Fibres	$\phi$ ( $\mu\text{m}$ )	$\rho$	E (MPa)	G (MPa)	$\nu$	$\sigma_{tr}$ (MPa)
Verre E	16	2.54	74 000	30 000	0,25	2 500
Verre R	10	2.48	86 000		0.2	3 200
Carbone HM	6.5	1.80	390 000	20 000	0,35	2 500
Carbone HR	7	1.75	230 000	50 000	0,3	3 200
Kevlar	12	1.45	130 000	12 000	0,4	2 900

### 1.4.4 Autres fibres

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture. Généralement, leur utilisation est réservée à une recherche de produits à bas prix de revient, des produits à haute isolation thermique, des produits à bonne conductibilité thermique ou électrique et des produits à haute absorption acoustique. Parmi ces fibres nous avons:

### **Les fibres minérales**

Elles sont de longueur limitée, à l'exception des types particuliers tels que ceux de l'amiante, qui sont maintenant connus par leur caractère toxique et nuisible pour la santé humaine (cancérogénicité).

### **Les fibres animales**

Ce sont les plus utilisées dans la fabrication des textiles par les filateurs à main, comme la laine de mouton et la de soie. Toutes les fibres animales n'ont pas les mêmes propriétés, et même au sein d'une même espèce, la fibre n'est pas homogène.

### **Les fibres végétales**

Les fibres végétales sont des matériaux filamenteux issus de la biomasse. Elles peuvent être extraites du fruit, de la tige ou de la feuille d'une plante cultivée, des arbres et des herbes. Elles sont susceptibles d'être filées pour fabriquer des fils et des cordes. Elles sont tissées, tricotées ou tressées pour confectionner des textiles indispensables aux besoins quotidiens de la société. L'utilisation de fibres végétales (bois, lin, chanvre) comme renforts dans les matériaux polymères, thermoplastiques ou thermodurcissables, en remplacement des fibres de verre, est un concept déjà industrialisé et commercialisé. On trouve ces composites dans les meubles de jardin, les plinthes et huisseries, les pièces d'habillage intérieur d'automobiles de toutes marques.

## **1.5 Classification des matériaux composites**

Selon leur taux d'utilisation, les composites sont classés en deux grandes classes: les composites à grande diffusion et les composites hautes performances.

### **1.5.1 Les composites à grande diffusion**

Ils occupent une portion de 95 % des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort est de 30 %. Dans 90 % des cas, l'anisotropie n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters avec des fibres de verre. Dans ce cas le renfort et la matrice sont à des coûts voisins.

### **1.5.2 Les composites hautes performances**

Ils sont principalement utilisés dans l'aéronautique et sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement

supérieures à celles des métaux, contrairement aux composites à grande diffusion. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les composites hautes performances.

### 1.6 Avantages des matériaux composites

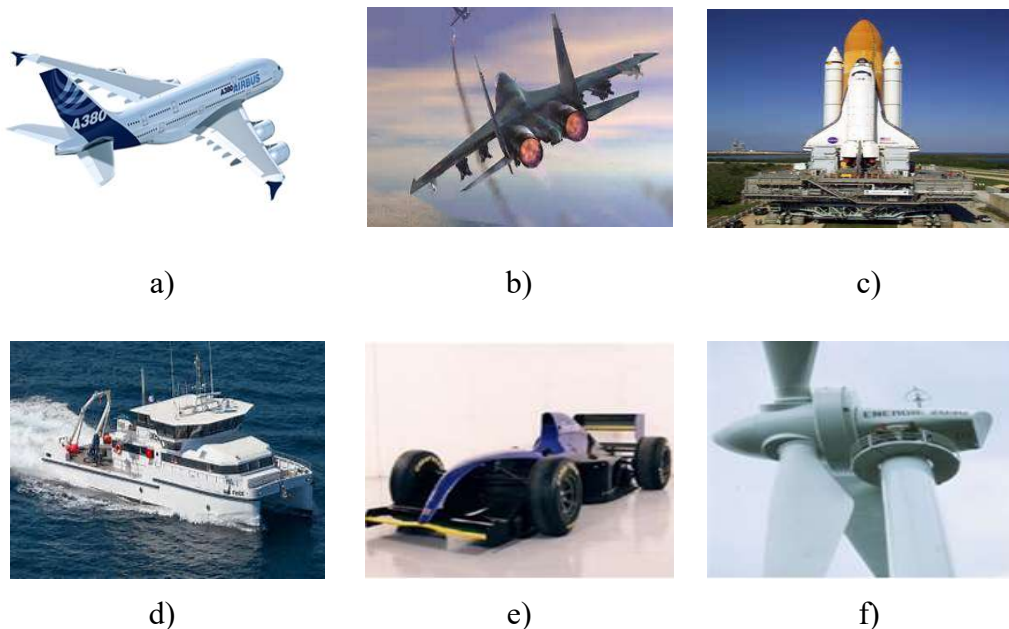
Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- légèreté
- résistance mécanique et chimique
- maintenance réduite et liberté de formes
- tenue aux chocs et au feu
- isolation thermique et/ou phonique

### 1.7 Domaines d'application des matériaux composites

Le développement des composites modernes est dû essentiellement aux besoins de plus en plus poussés de l'industrie, surtout dans les secteurs

- Aérospatial
- Aéronautique
- Défense
- Sport
- Biomécanique



**Fig. 1.5** Domaines d'application des matériaux composites : a) Aéronautique b) Militaire c) Aérospatiale d) Nautique e) Sport f) Energie

## 1.8 Les différentes architectures des renforts de composites

Les renforts sont assemblés dans le but de faciliter leur mise en forme. On peut distinguer cinq catégories de renforts : Les mats, tissus UD (unidirectionnels), les tissus bidirectionnels, les et les tissus multidirectionnels.

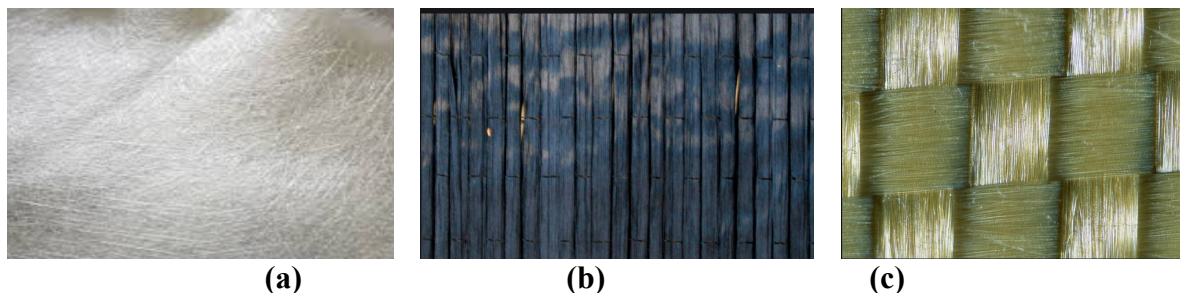


Fig. 1.6 Différentes architectures des renforts de composites : a) mats de verre, b) tissu unidirectionnel (UD), c) tissu bidirectionnel

### 1.8.1 Les mats

Ce sont des nappes de filaments composées de fibres courtes et discontinues, orientées aléatoirement et maintenues ensemble par un liant soluble (figure 1.6), ce qui offre une propriété quasi isotrope au composite final. Ce sont des matériaux déformables, peu coûteux et souvent utilisés avec un taux volumique de fibres important (figure 1.6.a).

### 1.8.2 Les unidirectionnels (UD)

Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand (figure 1.6.b).

### 1.8.3 Les tissus bidirectionnels

Le tissu destiné au renfort de composites est une surface souple, constituée par un assemblage régulier de fils tissés ou torsadés, obtenue par entrecroisement des mèches selon deux directions perpendiculaires, chaîne et trame. Ils peuvent avoir différentes armures. On distingue principalement : la toile ou le taffetas, le sergé et le satin (figure 1.6.c).

- **Le taffetas**

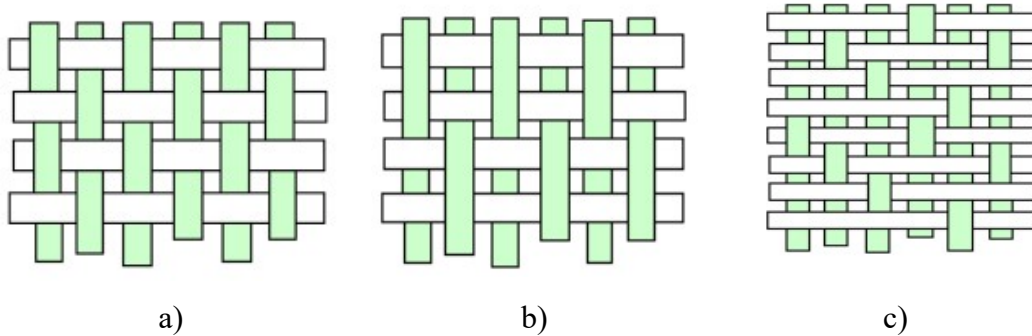
Chaque fil de chaîne passe dessus puis dessous chaque fil de trame, et réciproquement. Le produit obtenu est plat, relativement rigide, peu déformable pour la mise en œuvre et caractérisé par un embuvage important (figure 1.7.a).

- **Le sergé**

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au dessus de (m) fils de chaîne. Ce type de tissu est caractérisé par une armure à la fois souple et dense (figure 1.7.b).

- **Le satin**

Chaque fil de chaîne flotte au dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus présente une forte masse spécifique (figure 1.7.c).



**Fig. 1.7** Différents formes de tissu tissus bidirectionnels pour des renforts surfaciques: a) Le taffetas, b) Le sergé, c) Le satin

### 1.8.4 Les multidirectionnels

Ce sont des structures 3D formées de fibres orientées dans plusieurs directions de l'espace, composé de plusieurs couches qui sont liées, par conséquent le risque de délaminage est très faible. Les composites renforcés par des tissus multidirectionnels sont caractérisés par une masse volumique faible et conservent parfaitement leur rigidité. Ils sont préférables pour des applications demandant de hautes performances, en particulier en aérospatiale.

## 1.9 Les matériaux composites structuraux

### 1.9.1 Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les monocouches sont caractérisées par la forme du renfort. On distingue les monocouches à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement, à fibres tissées (tissus de renfort) et à fibres courtes (figure 1.8).



**Fig.1.8** Monocouches UD (Pli unidirectionnel)



### 1.9.2 Les stratifiés

Un stratifié résulte de la superposition de plusieurs monocouches (ou plis) de nappes unidirectionnelles ou de tissus ayant chacune une orientation propre par rapport à un repère commun aux couches et désigné par le référentiel du stratifié (figure 1.9). Les nappes successives sont en général orientées différemment (classiquement  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $-45^\circ$ ). Il y a au minimum quelques couches, et jusqu'à 20 ou 30 couches, pour une épaisseur qui peut aller de 1 mm à plusieurs mm.

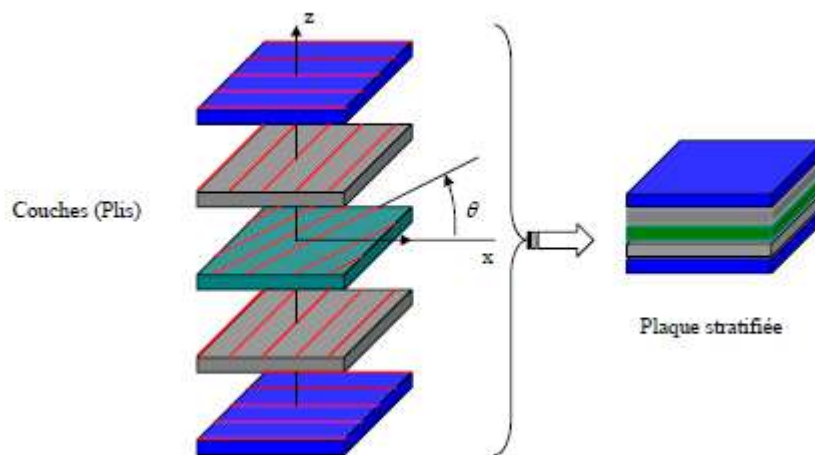


Fig.1.9 Stratifié composé de plusieurs monocouches avec différentes orientations

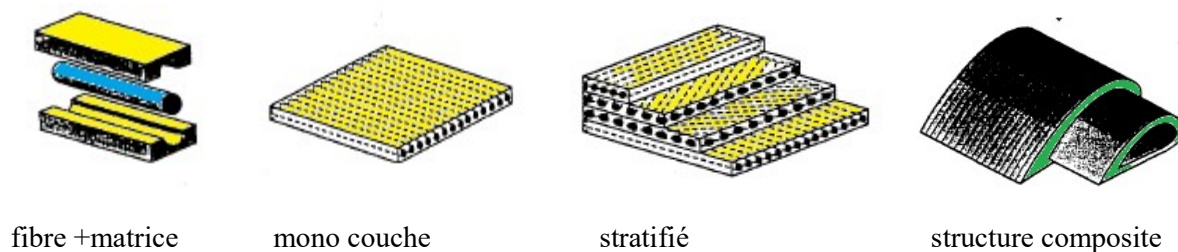


Fig.1.10 Conception d'une structure composite

On appelle stratifié :

- 1- Equilibré : un stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$ .
- 2- Symétrique : un stratifié comportant des couches disposées par rapport au plan moyen (miroir).
- 3- Orthogonal : un stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .

- **Code de représentation d'un stratifié**

On utilise fréquemment les orientations qui sont représentées sur la figure 1.10. La direction à  $0^\circ$  correspond à la direction de l'application de l'effort ou à une direction privilégiée de la pièce considérée ou bien encore à l'axe des abscisses du repère choisi. Selon besoin on peut trouver des réalisations de plis à  $\pm 30^\circ$  et à  $\pm 60^\circ$ .

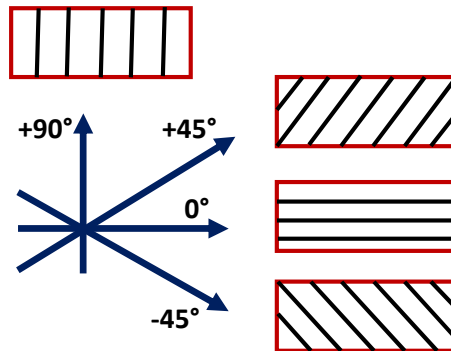


Fig.1.11 Orientation des plis d'un stratifié

- **Plan moyen**

On appelle plan moyen le plan qui sépare en deux parties l'épaisseur du stratifié. Ce plan moyen correspond à la cote  $z=0$ .

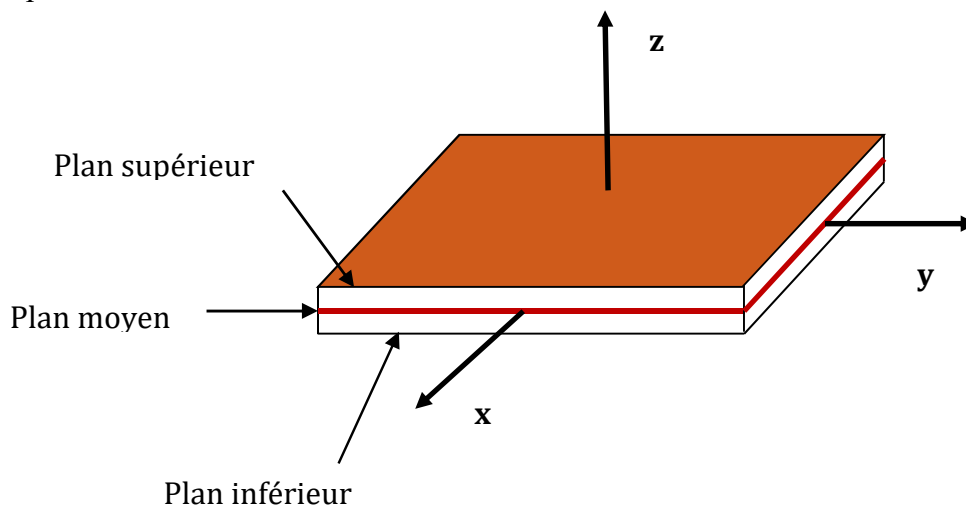


Fig.1.12 Définition du plan moyen

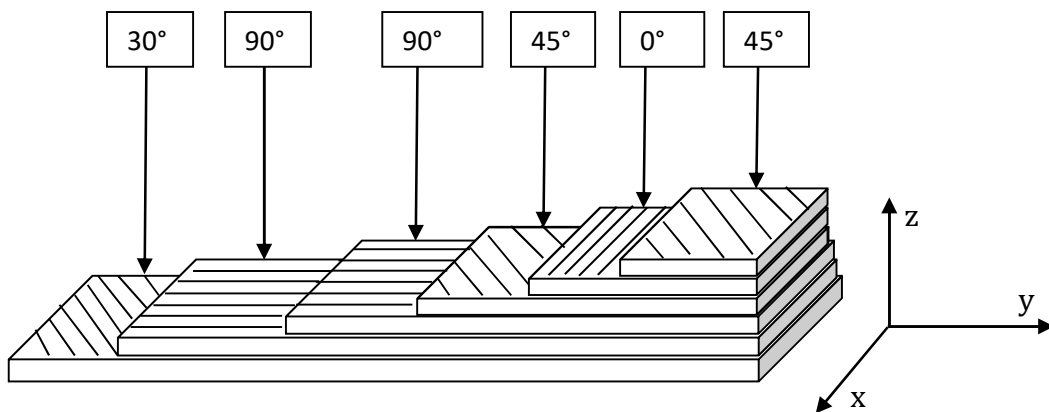
- **Désignation d'un stratifié**

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :



1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence (x)
2. Les couches successives sont séparées par un (/) si leurs angles sont différents
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique
4. Les couches sont nommées successives en allant d'une face à l'autre
5. Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code

Un exemple est présenté ci-dessous :



Désignation : [30/90<sub>2</sub>/45/0/45]

Fig.1.13 Désignation d'un stratifié

- **Stratifiés symétriques**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est un plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives. Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice (s) indique que le stratifié est symétrique.

$$90^\circ \ 45^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ \qquad [90/45^\circ/0]_s$$

Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant sur lignée.

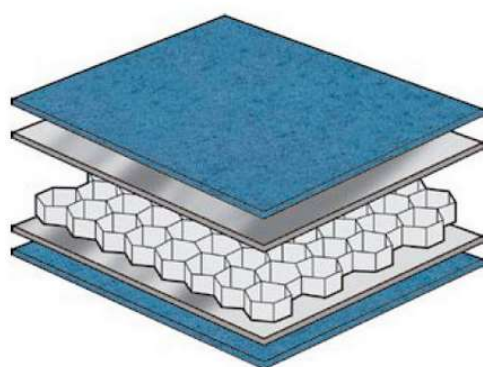
$$90^\circ \ 45^\circ \ 45^\circ \ 0^\circ \ 45^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ \qquad [90/0/45_2^\circ/\bar{0}]_s$$

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois ou une séquence est successivement répétée.

$$0^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ \ 0^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ \ 90^\circ \ 45^\circ \ 0^\circ \ 90^\circ \ 45^\circ \ 0^\circ \qquad [(0/45/90)_2]_s$$

### 1.9.3 Les sandwichs

Ce sont des matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et de faible résistance (figure 1.12). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. L'assemblage des peaux avec l'âme se fait généralement par collage, par soudage ou par polymérisations dans les moules dans le cas des composites plastiques. Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse, ...etc.) ou creuse (alliages métalliques léger, papier, ...etc.). Les peaux sont généralement des stratifiées ou des feuilles d'alliage légers. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse (figure 1.13). Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.



Nid d'abeilles



Âme ondulé

**Fig.1.14** Eléments constitutifs d'un sandwich

#### 1.9.3.1 Avantages des sandwichs

Les sandwichs sont caractérisées par une grande légèreté ; une excellente rigidité à la flexion et par de bonnes caractéristiques d'isolation.

#### 1.9.3.2 Inconvénients des sandwichs

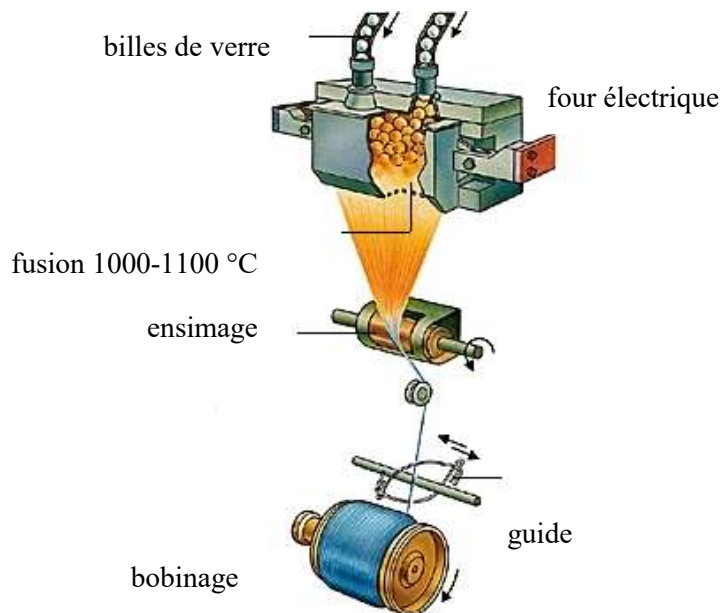
Malgré les atouts dont disposent les sandwichs ils présentent comme même des inconvénients : mauvais amortissement et isolation acoustique, tenue au feu moyenne, problèmes de décollement âme /peau et possibilité et risque de flambage par rapport aux autres structures.

## *Procédés d'obtention des constituants et de fabrication des composites*

### 2.1 Obtentions des fibres

#### 2.1.1 Les fibres de verre

Les fibres de verre sont largement employées comme renfort pour les composites plastiques à matrices organiques car elles présentent, par rapport aux autres renforts existants, un excellent rapport coût/performance. Pour obtenir les fibres de verre on mélange les éléments de base suivants : la silice d'alumine, le bore et la chaux. Ce mélange est porté à plus de 1200°C à travers une filière en platine-rhodium. Les filaments ainsi obtenus sont étirés et deviennent des fils appelés filaments (figure 2.1). Ces fils assemblés entre eux deviennent des mèches et les mèches assemblées entre elles deviennent du roving. Le procédé de fibrage le plus courant consiste en un étirage mécanique qui donne un fil constitué de filaments parallèles continus. Le procédé est appelé Silionne. Le diamètre des filaments qui constituent les fils Silionne peut aller de 5 à 25 micron. L'unité de mesure du fil est le Tex : 1 Tex = 1 gramme par kilomètre de fil.



**Fig. 2.1** Processus de fabrication des fibres de verre

### Qualités des fibres de verre

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). Selon usage, il existe trois qualités de verre :

- fibres E pour les composites grandes diffusions (GD)
- fibres R pour les composites hautes performances (HP)
- fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés)

### Ensimage

Lors de l'opération de fibrage, on dispose à la surface des filaments une dispersion de produits organiques dans l'eau appelée «**ensimage**». Les ensimages textiles constitués d'agents collants et de lubrifiants, confèrent aux fils de verre les propriétés requises pour les opérations textiles retordage, câblage et tissage. Les ensimages plastiques ont pour rôle le collage des filaments entre eux, la protection contre l'abrasion et surtout de conférer à la surface du verre une excellente compatibilité avec la résine et un bon accrochage. L'ensimage permet de coller les filaments, de lubrifier les fils, de diminuer l'attaque de l'eau, d'éliminer les charges électrostatiques et améliorer l'adhérence sur les résines.

#### 2.1.2 Les fibres de carbone

Au cours des dernières décennies, l'utilisation des fibres de carbone dans le domaine des matériaux composites à hautes performances s'est développée à cause des propriétés intéressantes qu'elles peuvent ramener. Elles présentent une excellente rigidité en traction, cisaillement et même en compression. Les fibres de carbone utilisées se divisent essentiellement en deux catégories : les fibres de carbone fabriquées à partir de polyacrylonitrile (PAN) et celles fabriquées à partir de brais qui est un mélange de houille et de pétrole.



Fig. 2.2 Bobinage des fibres de verre



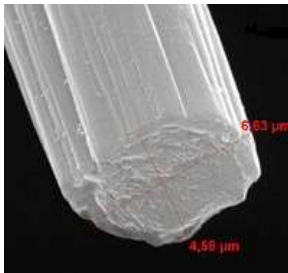
Fig. 2.3 Bobinage des fibres de carbone

### Les fibres obtenues à base de poly acrylonitrile (PAN)

Les fibres obtenues à partir de poly acrylonitrile (PAN) représentent la majeure partie des renforts utilisés dans les composites. Ceci est lié au fait qu'elles présentent de très bonnes propriétés mécaniques tout en ayant un coût de fabrication modéré. Le (PAN) est un polymère dont la formule chimique est

$[-CH_2-CH(CN)-]_n$ . Les étapes de fabrication des fibres (PAN) sont les suivantes :

1. Obtention des mono-filaments par filage et étirage du polymère. Ceux-ci sont ensuite assemblés en mèches contenant plusieurs milliers de fils
2. les mèches sont stabilisées par oxydation entre 200 °C et 300 °C pendant une à deux heures. Durant cette étape, les fils sont maintenus sous tension pour garder l'orientation des chaînes de PAN
3. une carbonisation sous atmosphère inerte entre 1 000 °C et 1 500 °C.
4. pour améliorer la structure des fibres, on peut réaliser un second traitement thermique à haute température (plus de 2 000 °C). Ceci permet d'augmenter le caractère graphitique de la fibre et donc ses propriétés mécaniques.



**Fig. 2.4** Fibre de PAN à haut module



**Fig.2.5** Le brai matériau de base dans la fabrication des fibres de carbone

### Les fibres obtenues à partir de brai

Le brai est un fabriquée à partir d'un résidu de houille ou de pétrole. C'est un mélange d'hydrocarbures aromatiques. Le brai peut être filé et former des fibres. Ces fibres sont cependant très fragiles et difficiles à manipuler, comparativement aux fibres de PAN. Le brai, comme la plupart des matières organiques, peut être carbonisé à haute température sous atmosphère inerte et produire du carbone. À l'origine, ces fibres de carbone étaient obtenues à partir de brais isotropes, c'est-à-dire sans orientation particulière. Elles se caractérisaient par de faibles résistances à la rupture et de faibles modules de traction, ces propriétés mécaniques étant liées à l'isotropie du brai. Les fabricants découvrirent rapidement que les brais dits «

mésophases », obtenus par traitement thermique de brais isotropes sélectionnés et purifiés, conduisaient à des fibres de carbone à structure orientée axialement et de hautes performances mécaniques.

### Qualités des fibres de carbone

Il existe deux types de fibres de carbone : HM (haut module) et HR (haute résistance). En plus de leurs excellentes propriétés mécaniques, les fibres de carbone sont caractérisées par une bonne tenue en température avec une dilatation thermique nulle. Elles ont aussi une bonne usinabilité et une bonne conductibilité thermique et électrique.

Le tableau suivant illustre les propriétés de fibres (haute résistance) HR ainsi que celles des fibres (haut module) HM.

Fibre	$\sigma_{Tmax}$ (MPa)	$E_T$ (GPa)	$\epsilon$ (%)	$\sigma_{Cmax}$ (MPa)
Fibre HR	3400 à 4500	230 à 250	1.4 à 1.8	2200 à 2800
Fibre HM	2000 à 2500	390 à 450	0.5 à 0.6	1300 à 1700

### 2.1.3 Les fibres d'aramide (KEVLAR)

C'est un polymère de la famille des aramides ou polyamides aromatiques, dont le nom scientifique est poly-para-phénylène téréphthalamide. Les propriétés exceptionnelles de ce matériau proviennent de liaisons intermoléculaires fortes entre chaînes parallèles. Sa résistance à la traction est comparable à celle de l'acier mais pour une masse de trois à cinq fois moins.



Fig. 2 aramide

### Fabrication

On fait réagir para-phénylène diamine avec le chlorure de terephtalyle dans un solvant organique pour obtenir le PPD-T. Le polymère obtenu est dissout dans l'acide sulfurique. A ce stade, le polymère est partiellement orienté dans une forme de cristaux liquides. Ce polymère est extrudé dans une filière et filé. Les filaments sont refroidis par jet d'air et à la fin ils suivent les étapes de lavage, séchage et bobinage.

## Qualités des fibres d'aramide

Les fibres d'aramide présentent une résistance à la rupture en traction spécifique de l'ordre de 3045 MPa, en d'autres termes plus de 5 fois celle de l'acier (sous l'eau, l'aramide est 4 fois plus fortes) et deux fois plus que celle des fibres de verre ou de nylon. La résistance à la compression des fibres d'aramide est relativement médiocre. Le comportement de la fibre d'aramide est élastique sous faible charge et plastique sous forte charge, montrant ainsi une certaine analogie avec les métaux. Les fibres d'aramide présentent aussi une bonne tenue thermique. Le module d'élasticité en traction conserve à 300°C plus de 80 % de sa valeur à température ambiante.

### 2.1.4 Les fibres de bore

Les fils de bore de 100 à 200 micromètres de diamètre sont fabriqués par dépôt en continu de bore (obtenu par réduction du trichlorure de bore à l'hydrogène), sur un filament de tungstène chauffé par effet Joule. Un traitement au carbure de bore est effectué par les filaments entrant dans les renforts de métaux. Ces fibres à très hautes performances se caractérisent par une haute tenue thermique (supérieure à 500°C) et d'excellentes propriétés mécaniques (charge spécifique de rupture de 3,5 GPa, module d'élasticité 400GPa). Mais leur coût élevé limite leurs applications.

### 2.1.5 Les fibres naturelles

Les fibres naturelles sont d'origine végétale, animale ou minérale. Selon leur origine, elles peuvent être classées en trois grandes classes :

1. les fibres végétales qui comprennent :
  - les fibres provenant des poils séminaux de graines (coton, kapok)
  - les fibres libériennes extraites des tiges de plantes (lin, chanvre, jute, ramie)
  - les fibres dures extraites de feuilles (sisal), de troncs (chanvre de manille), et d'enveloppes de fruits (noix de coco).
2. les fibres animales qui proviennent des poils (toison animale) et des sécrétions (soie);
3. les fibres minérales telles que le basalte et l'amiante.

- **Les fibres végétales**

Composées de cellulose plus ou moins pure, les fibres végétales se présentent sous forme de gousses, de tiges (fibres caulinaires), de feuilles ou de sève. Ce type de fibres naturelles sont les plus utilisées comme renforts dans les composites, en raison de leurs propriétés mécaniques



intéressantes. Les principales fibres végétales utilisées sont le coton, le lin et le chanvre. Ces fibres végétales représentent une alternative intéressante aux fibres de verre car elles peuvent être brûlées. Elles se travaillent facilement avec les technologies du textile (tissage).

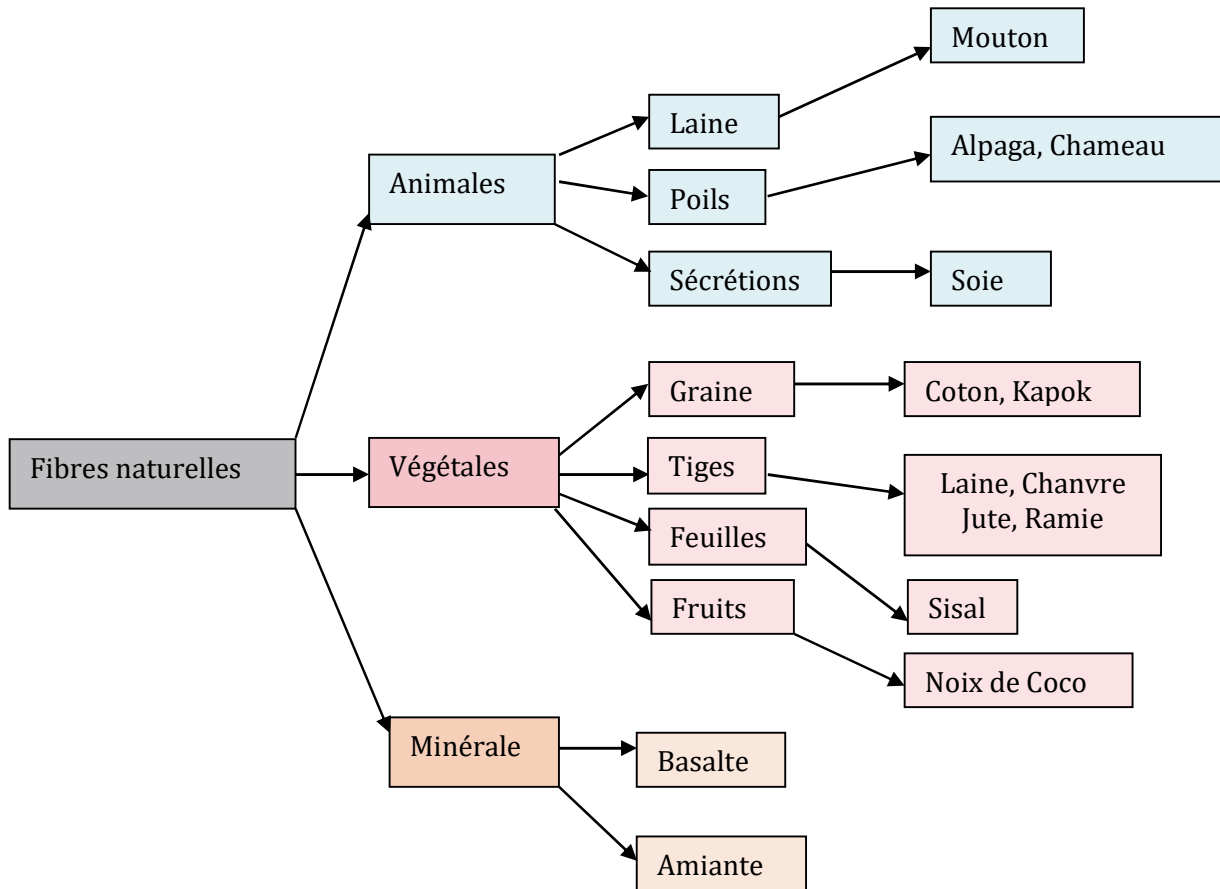


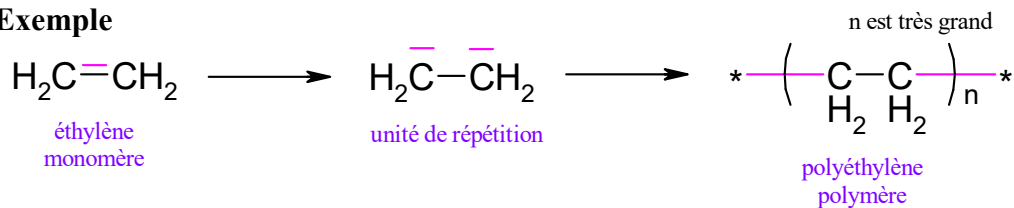
Fig. 2.7 Classification des fibres naturelles en fonction de leur origine

## 2. 2 Matrices organiques et polymères

### 2.2.1 Définition des polymères

Un polymère est une macromolécule formée de l'enchaînement covalent d'un très grand nombre d'unités de répétition qui dérivent d'un ou de plusieurs monomères (qui sont également appelés motifs) et préparée à partir de molécules appelées monomère. Les monomères sont des molécules organiques, qui sont constituées essentiellement de carbone (C) et d'hydrogène (H). L'oxygène(O) et l'azote (N) sont en faibles proportions.

- Exemple



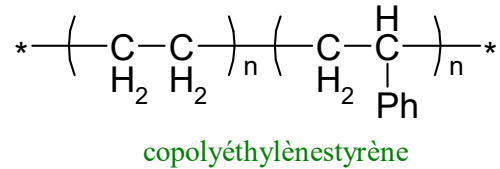




## Les copolymères

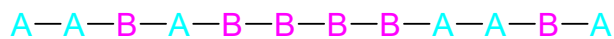
Les copolymères sont des polymères qui possèdent plusieurs unités. Comme pour les homopolymères, les copolymères peuvent se classer dans différentes familles. On parle alors de modes de copolymères.

### Exemple

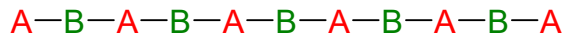


Notons A et B deux unités différentes du copolymère. Parmi les différents modes de copolymères, nous trouvons :

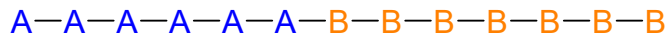
le mode statistique.



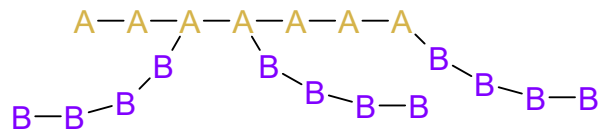
le mode alterné



le mode séquencé



le mode greffé



### 2.2.4 Définition des plastiques

Les plastiques sont des matériaux caractérisés par leur grande déformabilité et par leur aptitude au moulage. Ils sont en général facilement modelables à chaud et sous pression. Ils présentent une bonne résistance aux chocs, aux variations de température, à l'humidité, et aux détergents. Leur mise en forme est relativement facile ce qui les rendent utiles et pratiques dans plusieurs domaines tel que : emballage, bâtiment, automobile, électricité, etc. Il existe grande diversité des matériaux plastiques avec des propriétés très variées. On les classe généralement en trois grandes catégories: les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères.

#### Les thermoplastiques

Sous l'effet de la chaleur, les thermoplastiques ramollissent et deviennent souples. On peut alors leur donner une forme qu'ils garderont en refroidissant. La transformation est réversible et renouvelable un grand nombre de fois, les thermoplastiques sont ainsi facilement recyclables. Cependant ils ne sont pas biodégradables et ont une « durée de vie » de plusieurs centaines d'années. Ce sont les matières plastiques les plus utilisées (notamment PE et le PVC).

### **Les thermodurcissables**

Ces plastiques prennent une forme définitive au premier refroidissement. Ils deviennent durs et ne se ramollissent plus une fois moulés. La technique de fabrication est difficile à mettre en œuvre mais elle produit des matériaux très solides et très résistants aux agressions chimiques et à la chaleur.

### **Les élastomères**

Les élastomères sont élastiques et se déforment et tendent à reprendre leur forme initiale et supportent de très grandes déformations avant rupture. Ce ne sont pas réellement des « plastiques ». Issu du latex d'Hévéas (arbre d'Amazonie), le caoutchouc naturel est resté longtemps le seul élastomère connu mais les méthodes modernes de fabrication ont permis d'obtenir une grande diversité de matériaux en ajoutant des additifs, accélérateurs, agents protecteurs (anti UV, anti oxygène,...) et en les combinant à d'autres matériaux (métaux, textiles, autres plastiques...). On distingue trois grandes catégories qui présentent chacune de nombreux produits aux propriétés variées. Les élastomères présentent des caractéristiques bien spécifiques : grande élasticité, bonne étanchéité, fort pouvoir amortissant...employés essentiellement en tant que pneumatiques, on les utilise également sous la forme de joints, de tubes et tuyaux, de membranes, de dispositifs antivibratoires,...dans de nombreux domaines d'activités : automobile, industrie, aéronautique, médecine.

## **2.3 Fabrication des composites**

L'élaboration d'un matériau composite se déroule généralement en trois opérations indispensables qui sont :

1. Imprégnation du renfort par la résine
2. Mise en forme à la géométrie de la pièce dans des moules
3. Durcissement du système

### **2.3.1 Moulage au contact**

C'est un procédé manuel pour la réalisation de structures à partir de résines thermodurcissables. Son principe consiste à imprégner manuellement les renforts disposés dans un moule à température ambiante et sans pression. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée. Le moulage au contact est peu coûteux utilisé pour produire des pièces de formes quelconques mais à cadence très faible.

### Cas d'utilisation

- Procédé pour petites séries : de 1 à 1000 pièces / an
- Pièces de grandes à très grandes dimensions

### Avantages

- Offre la possibilité de produire des pièces de forme variées et complexes
- Pas de limite dimensionnelle des pièces réalisées par ce procédé
- Obtention de surfaces lisses
- Propriétés mécaniques moyennes à bonnes
- Moules simples, peu coûteux, rapides à réaliser

### Inconvénients

- Une seule face lisse
- Nécessité de finition (détourage, perçage, etc.)
- Faible cadence de production par moule
- Espace de travail important
- Conditions de travail médiocres

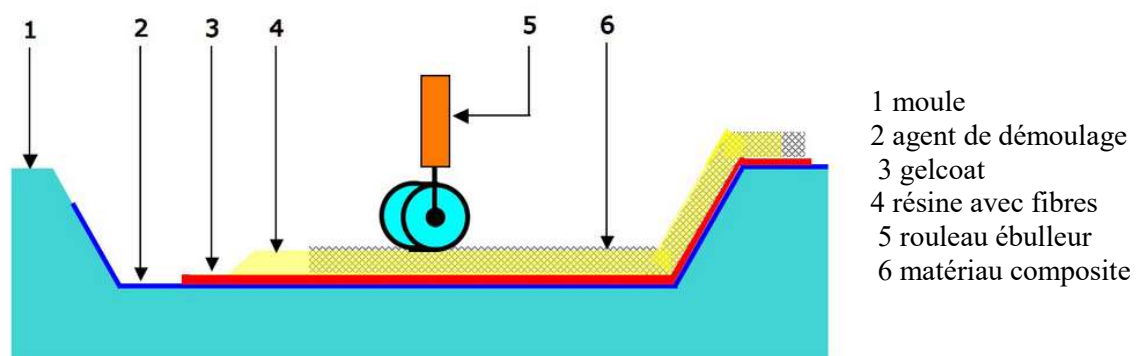


Fig. 2.8 Schéma simplifié du procédé de moulage au contact

### 2.3.2 Moulage par projection

Ce procédé peut être réalisé d'une façon manuelle ou bien même robotisée. Il permet la réalisation de pièces à partir de résines thermodurcissables à température ambiante et sans pression. Les matières premières sont mises en œuvre à l'aide d'une machine dite "de projection" comprenant :

1. un dispositif de coupe - projection du renfort
2. un ou deux pistolets projetant simultanément la résine

Les fils coupés et la résine sont projetés sur la surface du moule puis compactés à l'aide de rouleaux et d'ébulleurs. La résine pré accélérée est catalysée en continu lors de sa projection.

### Cas d'utilisation

Production de pièces de moyennes à grandes dimensions

Recherche de réduction des coûts par rapport au contact

Petite et moyenne série

### Avantages

Très larges possibilités de forme et de dimensions

Travail simplifié, la mise en forme obtenue directement par la projection

Productivité plus élevée qu'au contact

Moules simples, peu onéreux, rapides à réaliser

### Inconvénients

Une seule face lisse

Propriétés mécaniques moyenne

La qualité du produit dépend de la qualité de la main d'œuvre

Conditions de travail très médiocres

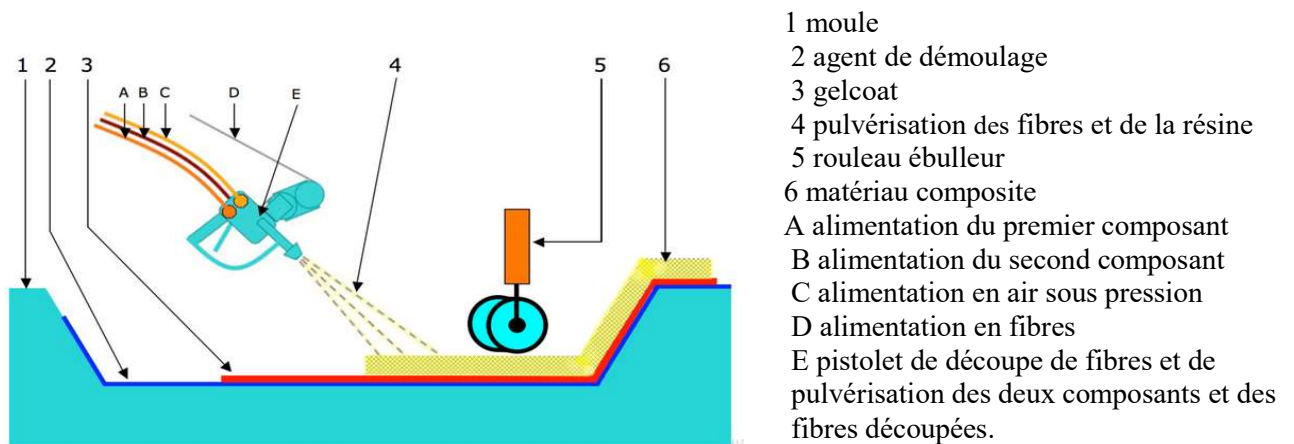


Fig.2.9 Schéma simplifié du procédé de moulage par projection simultanée

### 2.3.3 Enroulement filamentaire

Le moulage par enroulement filamentaire permet l'obtention de corps creux en bobinant sur un moule (mandrin) différents renforts continus imprégnés de résine.

Ce procédé est limité aux formes de révolution.

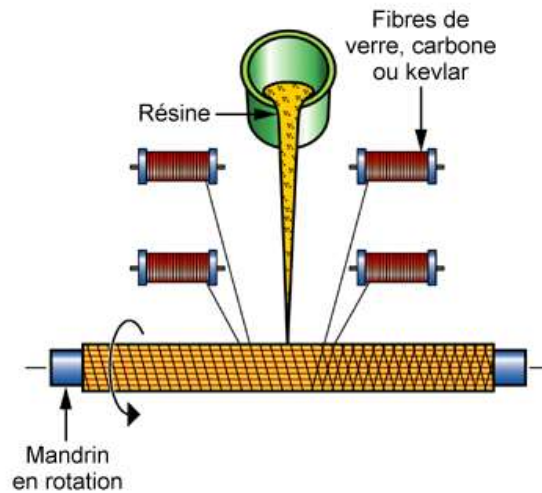


Fig.2.10 Moulage par enroulement filamentaire

#### Cas d'utilisation

Production en série des de pièces de révolution

Pièces nécessitant une résistance élevée

#### Avantages

Obtention de pièces à fort taux de renforts (environ 70 %) apportant des caractéristiques mécaniques élevées- Orientation possible du renfort pour optimiser les contraintes que subit la pièce- Possibilité sur un matériel adapté de réaliser simultanément la partie cylindrique et les fonds d'une même pièce. (Citerne par exemple)

#### Inconvénients

L'inconvénient de ce procédé est surtout d'ordre économique parce qu'il est onéreux à cause du coût élevé matériel utilisé et du temps de mise en œuvre- Les pièces n'ont pas un aspect lisse à l'extérieur, ce qui peut être un inconvénient pour les pièces visibles.

#### Les applications

On fabrique par cette technique, des tubes pour installations pétrolières, des tuyaux pour le chauffage urbain, pour l'assainissement ou pour l'adduction d'eau. Ces tuyaux sont généralement réalisés avec un renfort de fibres de verre et une résine polyester ou époxyde. Le

procédé d'enroulement, compte tenu des hautes caractéristiques mécaniques qu'il permet d'obtenir, est également utilisé pour la fabrication de :

- Corps de fusée
- Arbres de transmission
- Bouteilles de gaz comprimé

### 2.3.4 Moulage par pultrusion

Le procédé est destiné à la réalisation en continu de profilés de sections constantes.

Des renforts continus, rovings divers, mats et tissus en bandes de largeurs appropriées, tirés par un banc de traction situé en fin de ligne de production, sont successivement prédisposés de façon précise, imprégnés de résine et mis à la forme désirée par passage à travers une filière chauffée dans laquelle s'effectue le durcissement de la résine.

#### Cas d'utilisation

Réalisation de profilés en quantités significatives (plusieurs milliers de mètres linéaires).

#### Avantages

- Toutes formes de sections, même creuses, angles vifs
- Aspect de surface lisse, moyen
- Très grande résistance mécanique, surtout longitudinale
- Bonne productivité : 0,2 à 2,5 m/min selon résines et sections
- Très faible part de main d'œuvre
- Bonnes conditions de travail et d'hygiène niveau de productivité

#### Inconvénients

- Pas de possibilité de variation de sections
- Profilé nécessairement rectiligne
- Investissement relativement élevé

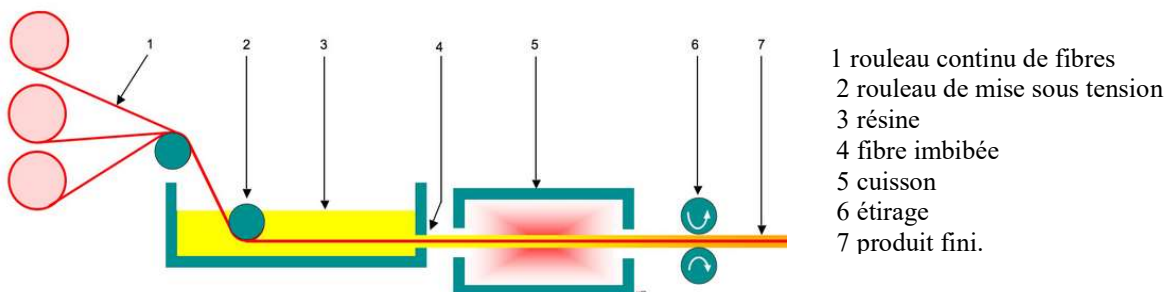


Fig. 2.11 Schéma simplifié du procédé de pultrusion

### 2.3.5 Moulage par injection R.T.M

Le moulage par injection de résine liquide R.T.M (Resin Transfer Molding), s'effectue entre un moule et un contre-moule rigides. Le renfort (mats, préforme, éventuellement tissus) est disposé dans le moule. Une fois celui-ci solidement fermé, la résine, accélérée et catalysée, est injectée sous faible pression (1.5 à 4 bars) à travers le renfort jusqu'au remplissage complet de l'empreinte. Après durcissement de la résine, le moule est ouvert et la pièce démoulée.

#### Cas d'utilisation

Procédé pour moyennes séries : 1000 - 10000 pièces/an

#### Avantages

Deux faces lisses

Dimensions jusqu'à 7 m<sup>2</sup>

Qualité non dépendante de la main d'œuvre

Qualité constante

Cadence de production élevée

Bonnes conditions de travail et d'hygiène

#### Inconvénients

Limité aux formes peu ou moyennement complexes

Nécessité d'effectuer des finitions post moulage

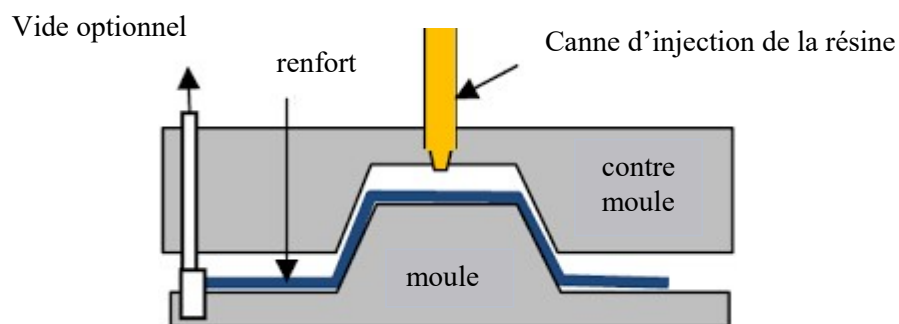


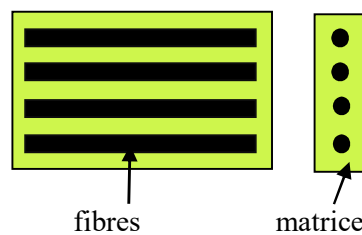
Fig.2.12 Moulage par injection R.T.M



## Propriétés mécaniques des composites

### 3.1 Homogénéisation micromécanique

Un matériau composite est principalement composé de l'ensemble matrice et renfort. Puisque le renfort est lui le responsable de la tenue mécanique du composite, son ajout augmente et influence les propriétés mécaniques de la matrice renforcée. Soit un composite composé d'un pli unidirectionnel (Figure 3.1).



**Fig.3.1** Constituants d'un matériau composite

Ce matériau par sa nature est hétérogène, ces propriétés dépendent de celles de ces composants (fibres et matrice). Pour étudier les propriétés de ce composite, on suppose qu'il est homogène et on prend en considération ses propriétés moyennes vis-à-vis des charges externes appliquées. L'un des facteurs essentiels dans la détermination des caractéristiques d'un matériau composite est la proportion relative du renfort et de la matrice. Celle-ci peut être exprimée en fraction volumique ou bien en fraction massique. La fraction massique est facile à mesurer lors de l'élaboration d'un composite. La fraction volumique quand à elle, est plutôt utilisée dans les modèles théoriques qui décrivent le comportement mécanique de ces matériaux.

### 3.2 Loi des mélanges

#### 3.2.1 Fractions volumiques

Soit un volume ( $v_c$ ) d'un matériau composite d'un volume ( $v_f$ ) de fibres et d'un volume ( $v_m$ ) de matrice. La fraction volumique de fibres est définie comme

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad (3.1)$$

La fraction volumique de matrice est définie par:

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (3.2)$$

$v_f$  : volume des fibres

$v_m$  : volume de la matrice

$v_c$  : volume du composite

Sachant que :

$$v_c = v_m + v_f \quad (3.3)$$

Alors :

$$V_f + V_m = \frac{v_f}{v_c} + \frac{v_m}{v_c} = \frac{v_f + v_m}{v_c} = \frac{v_c}{v_c} = 1 \quad (3.4)$$

Ce qui conduit à :

$$V_m = 1 - V_f \quad (3.5)$$

Et :

$$V_f = 1 - V_m \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Fractions massiques

De la même manière on peut exprimer la fraction massique en fonction des masses ( $w_c$ ,  $w_f$  et  $w_m$ ) respectivement du composite, des fibres et de la matrice. La fraction massique de fibres est définie comme suit :

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \quad (3.7)$$

La fraction volumique de matrice est définie par:

$$W_m = \frac{w_m}{w_c} \quad (3.8)$$

Avec :

$w_f$  : masse des fibres

$w_m$  : masse de la matrice

$w_c$  : masse du composite

Sachant que :

$$w_c = w_m + w_f \quad (3.9)$$

Alors :

$$W_f + W_m = \frac{w_f}{w_c} + \frac{w_m}{w_c} = \frac{w_f + w_m}{w_c} = \frac{w_c}{w_c} = 1 \quad (3.10)$$

Ce qui conduit à :

$$W_m = 1 - W_f \quad (3.11)$$

Et :

$$W_f = 1 - W_m \quad (3.12)$$

### 3.2.3 Relation entre fractions volumiques et fractions massiques

La masse volumique d'un matériau est la masse de ce matériau par unité de volume. Elle est notée ( $\rho$ ) et est déterminée par la relation :

$$\rho = \frac{w}{V} \quad (3.13)$$

L'unité de  $\rho$  dépend des unités choisies pour la masse ( $m$ ) et le volume ( $V$ ). Dans la relation précédente :

$w$  : masse

$V$  : volume

$\rho$  : masse volumique

D'après la relation (3.13) :

La masse des fibres, de la matrice et du composite est donnée par les relations suivantes :

$$w_f = \rho_f \cdot v_f \quad (3.14)$$

$$w_m = \rho_m \cdot v_m \quad (3.15)$$

$$w_c = \rho_c \cdot v_c \quad (3.16)$$

La masse totale du composite est donnée grâce à la relation (3.9):

$$w_c = w_m + w_f$$

Ou bien :

$$\rho_c \cdot v_c = \rho_m \cdot v_m + \rho_f \cdot v_f \quad (3.17)$$

Si on divise cette relation par le volume du composite, on obtient l'expression de la masse volumique du composite en fonction des fractions volumiques.

$$\rho_c = \rho_m \cdot \frac{v_m}{v_c} + \rho_f \cdot \frac{v_f}{v_c} = \rho_m \cdot V_m + \rho_f \cdot V_f \quad (3.18)$$

Ou bien :

$$\rho_c = \rho_m \cdot (1 - V_f) + \rho_f \cdot V_f \quad (3.18)$$

Le volume du composite est donnée par la relation (3.3):

$$v_c = v_m + v_f$$

Ou bien si on substitue avec les relations (3.14), (3.15), (3.16), (3.7) et (3.8) :

$$\frac{w_c}{\rho_c} = \frac{w_m}{\rho_m} + \frac{w_f}{\rho_f} \quad (3.19)$$

Si on divise cette relation par la masse du composite, on obtient :

$$\frac{1}{w_c} \left( \frac{w_c}{\rho_c} \right) = \frac{1}{w_c} \left( \frac{w_m}{\rho_m} + \frac{w_f}{\rho_f} \right) = \frac{w_m}{w_c} \left( \frac{1}{\rho_m} \right) + \frac{w_f}{w_c} \left( \frac{1}{\rho_f} \right) = W_m \left( \frac{1}{\rho_m} \right) + W_f \left( \frac{1}{\rho_f} \right) \quad (3.20)$$

L'expression finale de la masse volumique du composite en fonction des fractions massiques est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{\rho_c} = \left( \frac{W_m}{\rho_m} + \frac{W_f}{\rho_f} \right) \quad (3.21)$$

Alors :

$$\rho_c = \frac{1}{\left( \frac{W_m}{\rho_m} + \frac{W_f}{\rho_f} \right)} \quad (3.22)$$

On peut ainsi établir une relation entre les fractions massiques et les fractions volumiques en partant des définitions suivantes : La masse des fibres est donnée par la relation (3.7) :

$$W_f = \frac{w_f}{w_c}$$

Donc :

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} = \frac{\rho_f \cdot v_f}{\rho_c \cdot v_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f$$

Finalement :

$$W_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f \quad (3.23)$$

De la même manière on aboutit à :

$$W_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m \quad (3.24)$$

Si on remplace les expressions de la masse volumique (3.18) et (3.22) respectivement dans les relations (3.23) et (3.24) on obtient :

$$W_f = \left( \frac{\rho_f}{\rho_m \cdot (1 - V_f) + \rho_f \cdot V_f} \right) V_f \quad (3.25)$$

Et :

$$W_m = \left( \frac{\rho_m}{\frac{1}{\left( \frac{W_m}{\rho_m} + \frac{W_f}{\rho_f} \right)}} \right) V_m \quad (3.26)$$

**Exercice 3.1**

Une structure en composite doit être réalisée en un composite contenant une proportion  $V_f$  en volume de fibres. La structure à réaliser a un volume  $v_c$ . Calculer les masses de fibres et de matrice nécessaires à la réalisation de cette structure dans le cas des composites suivants :

Composite

	masse volumique des fibres $\rho_f$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	masse volumique de la matrice $\rho_m$ [Kg/m <sup>3</sup> ]
Verre/Epoxy	2500	1200
Carbone/Epoxy	1900	1200
Kevlar/Epoxy	1500	1200

On donne :  $V_f = 50\%$ ,  $v_c = 0.01\text{ m}^3$

**Solution**

Soit :  $V_f = 50\%$ ,  $v_c = 0.01\text{ m}^3$

Fraction volumique des fibres :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}$$

$$v_f = V_f \cdot v_c = 0.5 \cdot 0.01 = 0.005\text{ m}^3$$

Sachant que :

$$v_c = v_f + v_m$$

$$v_m = v_c - v_f = 1 - 0.005 = 0.995\text{ m}^3$$

Masse des fibres :

$$w_f = \rho_f v_f$$

Masse de la matrice :

$$w_m = \rho_m v_m$$

**Composite : Verre/Epoxy**

$$w_f = \rho_f v_f = 2500 \cdot 0.005 = 12.5\text{ Kg}$$

$$w_m = \rho_m v_m = 1200 \cdot 0.995 = 1194\text{ Kg}$$

**Composite : Carbone/Epoxy**

$$w_f = \rho_f v_f = 1900 \cdot 0.005 = 9.5\text{ Kg}$$

$$w_m = \rho_m v_m = 1200 \cdot 0.995 = 1194\text{ Kg}$$

**Composite : Kevlar/Epoxy**

$$w_f = \rho_f v_f = 1500.0,005 = 7,5 \text{ Kg}$$

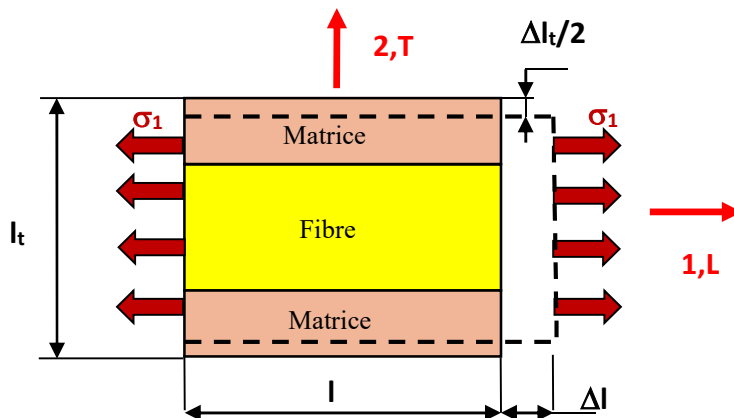
$$w_m = \rho_m v_m = 1200.0,005 = 6,0 \text{ Kg}$$

**3.3 Détermination des propriétés élastiques d'un pli unidirectionnel**

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice (Figure 3.1). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude.

**3.3.1 Module d'élasticité longitudinal**

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel. Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (Figure 3.5). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation identique dans la fibre et dans la matrice.



**Fig.3.2** Cellule élémentaire sollicitée longitudinalement

Sous l'action d'une force de traction le composite s'allonge d'une quantité ( $\Delta L$ ). La déformation dans ce cas est définie par la relation :

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L} \tag{3.28}$$

Cette déformation est identique dans la fibre et dans la matrice :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon_L \tag{3.29}$$

Nous savons que pour un matériau élastique et si on applique la loi de Hooke:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f = E_f \varepsilon_L \tag{3.30}$$

Et :

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m = E_m \varepsilon_L \quad (3.31)$$

La force F dans les fibres et dans la matrice peut être exprimée par :

$$F_f = \sigma_f S_f = E_f \varepsilon_L S_f \quad (3.32)$$

Et :

$$F_m = \sigma_m S_m = E_m \varepsilon_L S_m \quad (3.33)$$

$S_f$  et  $S_m$  représentent respectivement les sections transversales des fibres et de la matrice.

La force totale appliquée dans le sens longitudinal est :

$$F_L = F_1 = F_f + F_m \quad (3.34)$$

Ou bien :

$$F_L = F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad (3.35)$$

Si (S) est la section transversale du composite, nous avons :

$$\sigma_L = \sigma_1 = \frac{F_1}{S} \quad (3.36)$$

Si on substitue la relation (3.35) dans (3.36) on obtient :

$$\sigma_L = \sigma_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{\sigma_f S_f + \sigma_m S_m}{S} = \sigma_f \frac{S_f}{S} + \sigma_m \frac{S_m}{S} \quad (3.37)$$

Considérons la section transversale du composite comme montré sur la figure 3.3 :

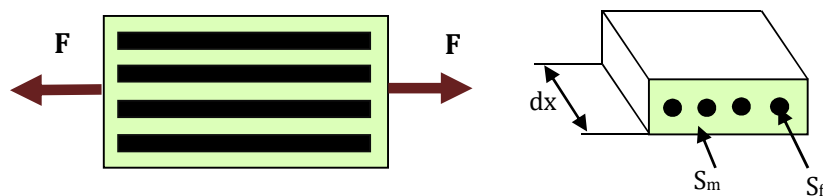


Fig.3.3 Section transversale du composite

Sachant que :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{S_f \cdot dx}{S_c \cdot dx} = \frac{S_f}{S_c} \quad (3.38)$$

Et :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} = \frac{S_m \cdot dx}{S_c \cdot dx} = \frac{S_m}{S_c} \quad (3.39)$$

La relation (3.37) devient :

$$\sigma_L = \sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (3.40)$$

Ou bien encore :

$$\sigma_L = \sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (3.41)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'élasticité longitudinal dans le sens longitudinal :

$$\sigma_L = \sigma_1 = E_L \varepsilon_L \quad (3.42)$$

La combinaison des relations (3.41) et (3.42) conduit à l'expression du module de Young longitudinal :

$$E_L = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = \frac{\sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)}{\varepsilon_L} \quad (3.43)$$

Sachant que :

$$\varepsilon_L = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (3.44)$$

Alors :

$$E_L = \frac{\sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f)}{\varepsilon_L} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_f} V_f + \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} (1 - V_f) = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3.45)$$

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3.46)$$

Cette expression est connue sous le nom de loi de mélanges qui permet de calculer le module de Young dans la direction des fibres.

### 3.3.2 Module d'élasticité transversal

Le module d'élasticité transversal ou module d'Young transverse peut être déterminé par un essai de traction transverse dans le quel le composite est sollicité en traction par rapport à une direction perpendiculaire aux fibres (Figure 3.8). On considère une cellule élémentaire représentative (CER) constituée de fibre de hauteur ( $h_f$ ) entourée de matrice de hauteur ( $h_m$ ) sollicitée en traction ( $\sigma_2$  ou  $\sigma_T$ ) par rapport à la direction transverse (2 ou T) (Figure 3.9).

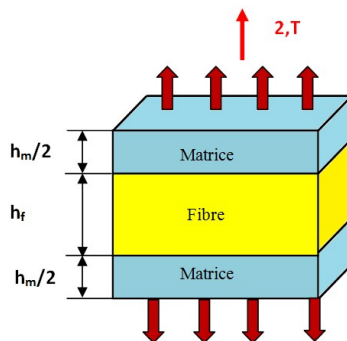


Fig.3.7 Cellule élémentaire sollicitée transversalement



Exprimons l'expression des fractions volumiques des fibres et de la matrice en fonction des hauteurs des couches (matrice + fibre).

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{S_f \cdot e}{S_c \cdot e} = \frac{h_f \cdot L \cdot e}{(h_f + h_m) \cdot L \cdot e} = \frac{h_f}{(h_f + h_m)} \quad (3.47)$$

Avec :

L : longueur de la CER

e : épaisseur de la CER

De même :

$$V_m = 1 - V_f = \frac{h_m}{(h_f + h_m)} \quad (3.48)$$

La force  $F_2$  imposée selon la direction transverse est complètement transmise dans la fibre et dans la matrice conduisant à des contraintes égales.

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad (3.49)$$

Les déformations résultantes dans la fibre et dans la matrice dans la direction transverse sont données grâce aux relations :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad (3.50)$$

Et :

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (3.51)$$

L'allongement transverse dans la cellule élémentaire représentative (CER), résultant des allongements dans la fibre et dans la matrice est donnée par la relation suivante:

$$\Delta L_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m \quad (3.52)$$

Et la déformation transverse :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{(h_f + h_m)} + \varepsilon_m \frac{h_m}{(h_f + h_m)} \quad (3.53)$$

Si on substitue (3.47) et (3.48) dans (3.53) on aboutit à :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m V_m = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (3.54)$$

La combinaison des relations (3.50), (3.51) et (3.54) conduit à :

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_T} = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) = \frac{\sigma_2}{E_f} V_f + \frac{\sigma_2}{E_m} (1 - V_f)$$

Dans cette relation ( $E_T$ ) représente le module d'Young transversal. Ceci conduit après simplification à :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_f} V_f + \frac{1}{E_m} (1 - V_f)$$

Finalement :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1 - V_f)}{E_m} \quad (3.55)$$

Cette expression est connue sous le nom de loi de mélanges inverse et permet de calculer le module de Young transversal dans la direction perpendiculaire à celle des fibres.

La relation (3.55) peut être écrite sous une autre forme adimensionnelle :

$$\frac{E_m}{E_T} = \frac{E_m V_f}{E_f} + \frac{E_m (1 - V_f)}{E_m} = \frac{E_m}{E_f} V_f + (1 - V_f) = 1 + V_f \left( \frac{E_m}{E_f} - 1 \right)$$

Alors :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + V_f \left( \frac{E_m}{E_f} - 1 \right)} \quad (3.56)$$

De même :

$$\frac{E_f}{E_T} = \frac{E_f V_f}{E_f} + \frac{E_f (1 - V_f)}{E_m} = \frac{E_f}{E_f} V_f + (1 - V_f) \frac{E_f}{E_m} = V_f + (1 - V_f) \frac{E_f}{E_m} = 1 + V_f \left( 1 - \frac{E_f}{E_m} \right)$$

Alors :

$$\frac{E_T}{E_f} = \frac{1}{1 + V_f \left( 1 - \frac{E_f}{E_m} \right)} \quad (3.57)$$

### Exercice 3.2

On donne les caractéristiques d'un composite élaboré à partir de fibres de verre et d'une matrice époxyde.

masse des fibres	$w_f = 4 \text{ Kg}$
masse de la matrice	$w_m = 6 \text{ Kg}$
module d'Young des fibres	$E_f = 100 \text{ GPa}$
module d'Young de la matrice	$E_m = 5 \text{ GPa}$
masse volumique des fibres	$\rho_f = 2500 \text{ Kg.m}^{-3}$
masse volumique de la matrice	$\rho_m = 1200 \text{ Kg.m}^{-3}$

1. Déterminer les fractions volumiques du renfort et de la matrice
2. Déterminer les modules d'élasticités longitudinal  $E_L$  et transversal  $E_T$

**Solution**

La fraction volumique des fibres est donnée par la relation :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{v_f}{v_f + v_m}$$

Sachant que la masse volumique des fibres est donnée par la relation :

$$\rho_f = \frac{w_f}{v_f}$$

Alors :

$$v_f = \frac{w_f}{\rho_f}$$

De même la masse volumique de la matrice est donnée par la relation :

$$\rho_m = \frac{w_m}{v_m}$$

Alors :

$$v_m = \frac{w_m}{\rho_m}$$

Donc :

$$V_f = \frac{\frac{w_f}{\rho_f}}{\frac{w_f}{\rho_f} + \frac{w_m}{\rho_m}} = \frac{\frac{4}{2500}}{\frac{4}{2500} + \frac{6}{1200}} = 0,2424$$

$$V_m = 1 - V_f = 1 - 0,2424 = 0,7576$$

Le module d'élasticité longitudinal  $E_L$  est donné par la relation :

$$E_L = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m$$

$$E_L = 0,2424 \cdot 100 + (1 - 0,2424) \cdot 5 = 28,03 \text{ GPa}$$

Le module d'élasticité transversal  $E_T$  est donné par la relation :

$$E_T = \frac{E_f \cdot E_m}{V_f \cdot E_m + (1 - V_f) \cdot E_f}$$

$$E_T = \frac{100 \cdot 5}{0,2424 \cdot 5 + (1 - 0,2424) \cdot 100} = 6,496 \text{ GPa}$$

**Exercice 3.3**

Le renfort d'un composite à fibres longues et continues représente 35 % de sa masse. Ces fibres de carbone ont un module d'élasticité de 150 GPa. La matrice organique de ce composite est caractérisée par un module d'Young qui vaut 4.5 GPa. Si on donne les masses volumiques des fibres et de la matrice :

$$\rho_f = 2200 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ et } \rho_m = 1100 \text{ Kg.m}^{-3}.$$

1. Déterminer le module d'Young de ce composite s'il est chargé dans une direction qui coïncide avec celle de ses fibres.
2. Déterminer le module d'Young de ce composite s'il est chargé dans une direction transversale par rapport à celle de ses fibres.
3. La rigidité spécifique  $\frac{E_c}{\rho_c}$  pour le premier cas.

**Solution**

La fraction massique des fibres est donnée par la relation :

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} = \frac{w_f}{w_f + w_m} = 0,35$$

Alors :

$$0,35 \cdot (w_f + w_m) = w_f$$

$$0,35w_f + 0,35w_m = w_f$$

$$0,35w_m = 0,65w_f$$

$$w_f = 0,538w_m$$

La fraction volumique des fibres est donnée par la relation :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} = \frac{v_f}{v_f + v_m} = \frac{\frac{w_f}{\rho_f}}{\frac{w_f}{\rho_f} + \frac{w_m}{\rho_m}} = \frac{\frac{0,538w_m}{\rho_f}}{\frac{0,538w_m}{\rho_f} + \frac{w_m}{\rho_m}} = \frac{\frac{0,538}{\rho_f}}{\frac{0,538}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_m}}$$

$$V_f = \frac{\frac{0,538}{2200}}{\frac{0,538}{2200} + \frac{1}{1100}} = 0,211$$

Module d'Young longitudinal  $E_L$ :

$$E_L = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m$$

$$E_f = 150 \text{ GPa}$$

$$E_m = 4,5 \text{ GPa}$$

$$E_L = 0,211 \cdot 150 + (1 - 0,211) \cdot 4,5 = 35,20 \text{ GPa}$$

La rigidité spécifique  $\frac{E_c}{\rho_c}$  pour le premier cas :

$$E_c = E_L = 35,20 \text{ GPa}$$

$$\rho_c = V_f \cdot \rho_f + (1 - V_f) \cdot \rho_m$$

$$\rho_c = 0,211 \cdot 2200 + (1 - 0,211) \cdot 1100 = 1321,1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\frac{E_c}{\rho_c} = \frac{35\,200}{1321,1} = 26,644 \frac{\text{MPa}}{\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

### Exercice 3.4

Le renfort d'un composite à fibres longues, continues et alignées représente 30 % de son volume. Le module d'Young de ce composite s'il est chargé dans une direction qui coïncide avec celle de ses fibres vaut 40.98 GPa et 3.40 GPa s'il est chargé dans une direction transversale par rapport à celle de ses fibres. Sachant que la rigidité du renfort de ce composite est supérieure à celle de sa matrice :

1. Déterminer le module d'Young des fibres de ce composite.
2. Déterminer le module d'Young de la matrice de ce composite.

### Solution

$$E_L = 40.98 \text{ GPa}$$

$$E_T = 3.40 \text{ GPa}$$

$$V_f = 0.3$$

$$V_m = 1 - V_f = 0.7$$

Module d'Young longitudinal

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (1)$$

Module d'Young transversal

$$E_T = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \quad (2)$$

D'après les relations (1) et (2) nous avons :

$$40.98 = 0.3 E_f + 0.7 E_m \quad (1)$$

$$3.40 = \frac{E_f E_m}{0.7E_f + 0.3E_m} \quad (2)$$

De l'équation (1) :

$$E_f = 136.6 - 2.33E_m$$

On remplace dans l'équation (2) :

$$3.40 = \frac{(136.6 - 2.33E_m)E_m}{0.7(136.6 - 2.33E_m) + 0.3E_m}$$

$$3.40 = \frac{136.6E_m - 2.33E_m^2}{95.62 - 1.331E_m}$$

Alors :

$$-2.33E_m^2 + 141.12E_m - 325.10 = 0$$

Cette équation admet deux racines :

$$E_{m,1} = \frac{-141.12 + 129.94}{-4.66} = 2.399 = 2.4$$

$$E_{m,2} = \frac{-141.126 - 129.94}{-4.66} = 58.16$$

- **Première possibilité:**

$$E_m = 2.4 \text{ MPa}$$

D'après la relation (1) :

$$E_f = 136.6 - 2.33E_m = 136.6 - 5.592 = 131 \text{ MPa}$$

$$E_f = 131 \text{ MPa}$$

- **Seconde possibilité:**

$$E_f = 58.16 \text{ MPa}$$

$$E_f = 136.6 - 2.33E_m = 136.6 - 135.51 = 1.08 \text{ MPa}$$

$$E_f = 1.08 \text{ MPa}$$

Seule la première possibilité est retenue car il est bien évident que :  $E_f > E_m$

### 3.3.3 Module de cisaillement

Le module de cisaillement  $G_{LT}$  est déterminé à partir d'un essai de cisaillement schématisé sur la figure 3.10. On considère une cellule élémentaire représentative (CER) d'un composite unidirectionnel, constituée de fibre et de matrice. Les contraintes de cisaillement dans la fibre

et dans la matrice sont égales (iso contraintes) car la contrainte  $\tau$  est supposée imposée sur la cellule entière composée de fibre et de matrice.

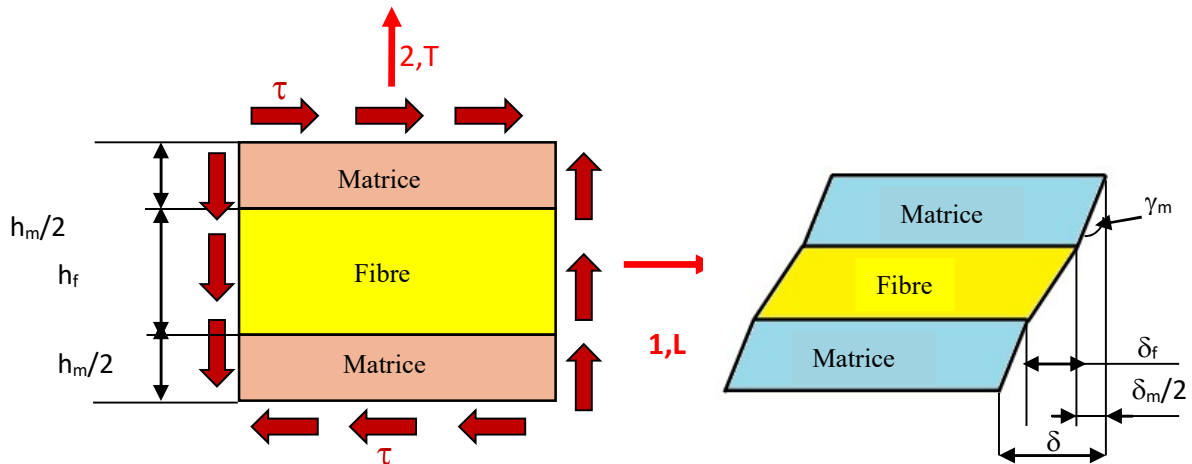


Fig.3.8 Cellule élémentaire sollicitée en cisaillement

Les déformations de cisaillement (distorsions) dans la fibre et dans la matrice (Figure 3.8) s'expriment par les relations suivantes :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad (3.58)$$

Et :

$$\gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (3.59)$$

Les déformations engendrées dans la fibre et dans la matrice sont données par les relations suivantes :

$$\delta_f = h_f \cdot \gamma_f \quad (3.60)$$

Et :

$$\delta_m = h_m \cdot \gamma_m \quad (3.61)$$

La déformation totale dans la cellule (CER) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m \quad (3.62)$$

Ou bien :

$$\delta = h_f \cdot \gamma_f + h_m \cdot \gamma_m \quad (3.63)$$

L'angle de cisaillement global dans la cellule est :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} \quad (3.64)$$

Si on remplace (3.63) dans (3.64) on obtient :

$$\gamma = \frac{h_f \cdot \gamma_f + h_m \cdot \gamma_m}{h_f + h_m} = \left( \frac{h_f}{h_f + h_m} \right) \gamma_f + \left( \frac{h_m}{h_f + h_m} \right) \gamma_m \quad (3.65)$$

Sachant que :

$$V_f = \frac{h_f}{(h_f + h_m)}$$

Et :

$$V_m = 1 - V_f = \frac{h_m}{(h_f + h_m)}$$

Alors :

$$\gamma = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (3.66)$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement  $G_{LT}$  par la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \quad (3.67)$$

En combinant les relations (3.66) et (3.67), on aboutit à :

$$\gamma = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) = \frac{\tau}{G_{LT}} = \frac{\tau}{G_f} V_f + \frac{\tau}{G_m} (1 - V_f) \quad (3.68)$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m} \quad (3.69)$$

Il y'a une certaine analogie entre cette relation (3.69) et la relation (3.55) qui exprime le module de cisaillement transversal  $E_T$ .

### 3.3.4 Coefficient de Poisson

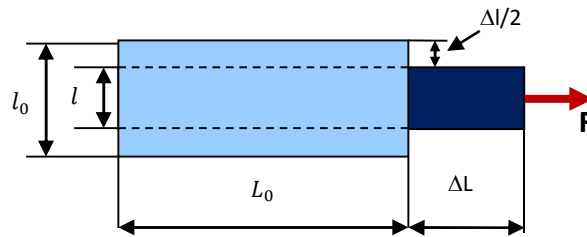
Le coefficient de Poisson caractérise l'aptitude d'un matériau à se comprimer (Figure.3.9). Il traduit le rapport de l'allongement relatif transversal  $\varepsilon_T$  et longitudinal  $\varepsilon_L$  :

$$\varepsilon_T = -\nu \cdot \varepsilon_L \quad (3.70)$$

Le coefficient de Poisson est un paramètre essentiel dans la caractérisation des propriétés élastiques d'un matériau. Il est inaccessible par mesure directe ; toute fois il est déterminé par mesure expérimentale grâce à la relation suivante :

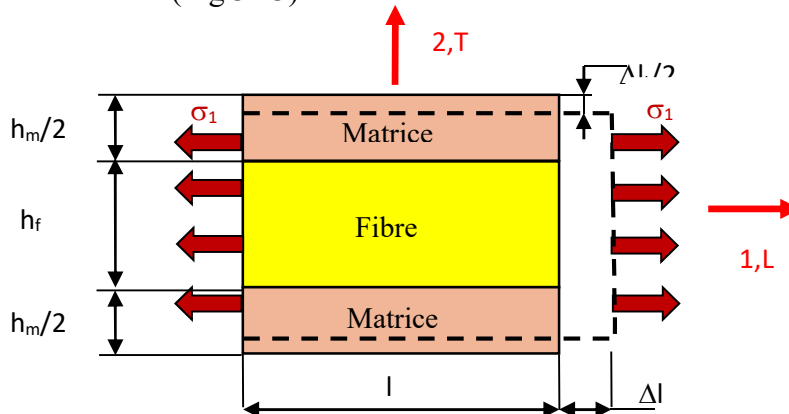
$$\nu = \frac{\Delta l}{\Delta L} = \frac{\frac{(l_0 - l)}{l_0}}{\frac{(L - L_0)}{L_0}} = -\frac{(l - l_0)}{(L - L_0)} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (3.71)$$





**Fig.3.9** Coefficient de Poisson

Pour déterminer le coefficient de Poisson pour le cas d'un matériau composite, considérons une (CER) de ce matériau (Fig.3.13).



**Fig.3.9** Cellule élémentaire représentative sollicitée dans la direction des fibres

Pour un essai de traction l'allongement relatif du composite dans le sens transverse est défini par :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_T = \frac{\Delta l_T}{l_T} \quad (3.72)$$

L'allongement relatif du composite dans le sens longitudinal est défini par :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_L = \varepsilon_f = \varepsilon_m \quad (3.73)$$

Les déformations dans la matrice et dans les fibres sont données par les relations :

$$\varepsilon_{2,m} = -\nu_m \cdot \varepsilon_1 \quad (3.74)$$

Et :

$$\varepsilon_{2,f} = -\nu_f \cdot \varepsilon_1 \quad (3.75)$$

D'un autre coté l'allongement relatif transversal de la CER est :

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m \quad (3.76)$$

Sachant que d'une façon générale la déformation relative est définie par le rapport de l'allongement à la longueur initiale:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.77)$$

Alors :

$$\varepsilon_{2,f} = \frac{\Delta h_f}{h_f} \quad (3.78)$$

Et :

$$\varepsilon_{2,m} = \frac{\Delta h_m}{h_m} \quad (3.79)$$

Ainsi la relation (3.76) devient :

$$\Delta h = \varepsilon_{2,f} \cdot h_f + \varepsilon_{2,m} \cdot h_m \quad (3.80)$$

Si on substitue (3.74) et (3.75) dans (3.80), on obtient :

$$\Delta h = -\nu_f \cdot \varepsilon_1 \cdot h_f - \nu_m \cdot \varepsilon_1 \cdot h_m \quad (3.81)$$

D'autre part la déformation totale de la CER dans le sens transversal est donnée par la relation :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h_f + h_m} \quad (3.82)$$

Ou bien :

$$\varepsilon_2 = \frac{-\nu_f \cdot \varepsilon_1 \cdot h_f - \nu_m \cdot \varepsilon_1 \cdot h_m}{h_f + h_m} = \left( -\nu_f \frac{h_f}{h_f + h_m} - \nu_m \frac{h_m}{h_f + h_m} \right) \varepsilon_1 \quad (3.83)$$

Or :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad (3.84)$$

Et :

$$V_m = (1 - V_f) = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (3.85)$$

Alors :

$$\varepsilon_2 = \left( -\nu_f V_f - \nu_m (1 - V_f) \right) \varepsilon_1 \quad (3.86)$$

Finalement on aboutit à l'expression du coefficient de Poisson transversal  $\nu_{LT}$ :

$$\begin{aligned} \nu_{LT} &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \\ \nu_{LT} &= \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \end{aligned} \quad (3.87)$$

### 3.3.5 Méthodes analytiques pour la détermination des modules d'élasticité du pli

La comparaison entre les valeurs des modules déterminées expérimentalement sur des unidirectionnels et évaluées par la loi des mélanges a montré que seules les formules (3.46) et (3.89) donnent des valeurs proches de celles obtenues expérimentalement. De plus, cette méthode ne permet pas d'évaluer le module de cisaillement  $G_{TT'}$ . Une approche plus précise consiste à développer des modèles qui prennent en considération la géométrie des fibres et leur arrangement à l'intérieur de la matrice. En considérant un arrangement cylindrique (cellule élémentaire constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de résine la résolution du problème d'élasticité correspondant permet d'aboutir à des solutions analytiques exactes représentant le comportement du composite constitué d'une répartition uniforme de cette cellule. Les modules indépendants obtenus par cette approche sont :

#### a) Module d'élasticité longitudinal

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 + V_f) + \frac{4V_f(1 - V_f)(v_f - v_m)^2}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \simeq E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3.88)$$

#### b) Coefficient de Poisson $\nu_{LT}$

$$\nu_{LT} = v_f V_f + v_m (1 - V_f) + \frac{V_f(1 - V_f)(v_f - v_m) \left( \frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad (3.89)$$

$$\simeq v_f V_f + v_m (1 - V_f)$$

#### c) Module de cisaillement $G_{LT}$

$$G_{LT} = G_m \frac{G_f(1 + V_f) + G_m(1 - V_f)}{G_f(1 - V_f) + G_m(1 + V_f)} \quad (3.90)$$

#### d) Module de compressibilité (matrice)

$$k_m = \frac{E_m}{3(1 - V_f) + G_m(1 + V_f)} \quad (3.90)$$

#### e) Module de compression latéral $K_L$

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{K_f - K_m + \frac{(G_f - G_m)}{3} + \frac{1 - V_f}{K_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (3.91)$$

**f) Module de cisaillement transversal  $G_{TT'}$**

$$G_{TT'} = G_m \left[ 1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{K_m + \frac{7}{3}G_m}{2K_m + \frac{8}{3}G_m} (1 - V_f)} \right] \quad (3.92)$$

**g) Module d'élasticité transversal**

Le module de Young transversal est calculé à partir des modules précédents grâce à la relation d'élasticité :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TT'}} + 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}} \quad (3.93)$$

**Exercice 3.5**

Un composite verre / époxy est constitué de fibres longues avec une fraction qui représente 70 % de son volume.

On donne les masses volumiques des fibres et de la matrice :

$$\rho_f = 2500 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ et } \rho_m = 1200 \text{ Kg.m}^{-3}.$$

1. Déterminer la masse volumique de ce composite
2. Déterminer les fractions massiques  $W_f$  et  $W_m$  des fibres et de la matrice
3. Déterminer le volume de ce composite si sa masse est de 4 Kg
4. Déterminer la masse des fibres et de la matrice qui correspondent à ce cas

**Solution**

*1) La masse volumique du composite*

D'après la loi des mélanges nous avons :

$$\rho_c = \rho_m \cdot (1 - V_f) + \rho_f \cdot V_f$$

Sachant que  $V_f=0.7$

$$V_m = 1 - V_f = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$\rho_c = 1200 \cdot (0.3) + 2500 \cdot (0.7) = 2110 \text{ kg.m}^{-3}$$

*2) Fractions massiques des fibres et de la matrice*

$$W_f = \frac{w_f}{w_c}$$

Et :

$$W_m = \frac{w_m}{w_c}$$

En plus :

$$w_f = \rho_f \cdot v_f$$

$$w_m = \rho_m \cdot v_m$$

Alors :

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} = \frac{\rho_f \cdot v_f}{w_c} = \frac{\rho_f \cdot v_f}{\rho_c \cdot v_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} \cdot V_f = \frac{2500}{2110} (0.7) = 0.8294$$

Et :

$$W_m = \frac{w_m}{w_c} = \frac{\rho_m \cdot v_m}{w_c} = \frac{\rho_m \cdot v_m}{\rho_c \cdot v_c} = \frac{\rho_m}{\rho_c} \cdot V_m = \frac{1200}{2110} (0.3) = 0.1706$$

On remarque bien que :

$$W_f + W_m = 0.8294 + 0.1706 = 1$$

### 3) Volume du composite

$w_c = 4 \text{ Kg}$

Sachant que :

$$w_c = \rho_c \cdot v_c$$

Alors :

$$v_c = \frac{w_c}{\rho_c} = \frac{4}{2110} = 1.896 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

### 4) Masses et volumes des fibres et de la matrice

#### Volume des fibres

Sachant que :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}$$

Alors :

$$v_f = V_f \cdot v_c = (0.7) \times 1.896 \times 10^{-3} = 1.327 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

#### Volume de la matrice

$$V_m = \frac{v_m}{v_c}$$

Alors :

$$v_m = V_m \cdot v_c = (0.3) \times 1.896 \times 10^{-3} = 0.5688 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

**Masse des fibres**

Sachant que :

$$w_f = \rho_f \cdot v_f$$

Alors :

$$w_f = \rho_f \cdot v_f = 2500 \times (1.327 \times 10^{-3}) = 3.3175 \text{ Kg}$$

**Masse de la matrice**

Sachant que :

$$w_m = \rho_m \cdot v_m$$

Alors :

$$w_m = \rho_m \cdot v_m = 1200 \times (0.5688 \times 10^{-3}) = 0.6826 \text{ Kg}$$

## Comportement élastique d'un composite unidirectionnel

### 4.1 Généralités sur le comportement élastique des matériaux

#### 4.1.1 Loi de comportement élastique

C'est grâce à la propriété élastique des corps déformables qu'on a pu relier la déformation à la contrainte et établir une relation entre les deux phénomènes (loi de Hooke). Dans un milieu continu, les champs de déformations  $\varepsilon_{ij}$  et de contraintes  $\sigma_{ij}$  sont liés par les lois de comportement. Ces lois caractérisent le comportement mécanique de ce milieu. Dans le domaine de l'élasticité linéaire, les contraintes  $\sigma_{ij}$  et les déformations  $\varepsilon_{ij}$  sont reliées par le tenseur de constitution noté C.

$$[\sigma] = [C].[\varepsilon] \quad (4.1)$$

En notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (4.2)$$

Le comportement élastique d'un milieu continu est aussi caractérisé par une relation linéaire liant les déformations aux contraintes:

$$[\varepsilon] = [S].[\sigma] \quad (4.3)$$

En notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (4.4)$$

$C_{ijkl}$  et  $S_{ijkl}$  représentent respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse. Compte tenu de la symétrie des deux tenseurs  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  selon le principe de réciprocité de Cauchy, on peut dire que ces deux tenseurs sont aussi symétriques. A cause de sa symétrie, le tenseur d'élasticité fait apparaître (21) coefficients au lieu de (36).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Et :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

## 4.1.2 Différents types des matériaux

### 4.1.2.1 Notation de l'ingénieur

Les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de la propriété de symétrie de ses deux tenseurs. Pour des raisons de commodité et de simplification de l'écriture, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante appelée notation de l'ingénieur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow (\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow (\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

### 4.1.2.2 Matériaux anisotropes

Ce sont des matériaux avec des propriétés qui varient selon une direction bien déterminée et ne présentent pas de plans de symétrie. Les tenseurs de rigidité et de souplesse sont caractérisés par 81 coefficients et en raison de la symétrie des tenseurs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformations  $\varepsilon_{ij}$ , il y a une réduction à 21 coefficients qui sont indépendants. Les distorsions angulaires sont exprimées en fonction des déplacements :

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} , \quad \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} , \quad \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \quad (4.17)$$

La loi de Hooke s'écrit sous forme matricielle :



$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

En inversant (3.18), on obtient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

#### 4.1.2.3 Matériau monoclinique

Si le matériau a un plan de symétrie il est dit monoclinique (Figure. 4.1), quelques constantes du tenseur de constitution sont nulles et le comportement peut être décrit par 13 constantes indépendantes:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

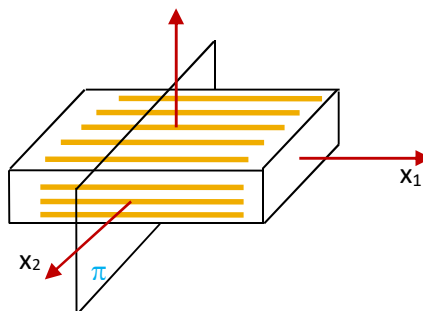


Fig. 4.1 Symétrie par rapport un plan

#### 4.1.2.4 Matériau unidirectionnel

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe  $\vec{x}_1$ , c'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans une matrice (Figure. 4.2). Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans ce cas la relation d'élasticité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

La forme inverse s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

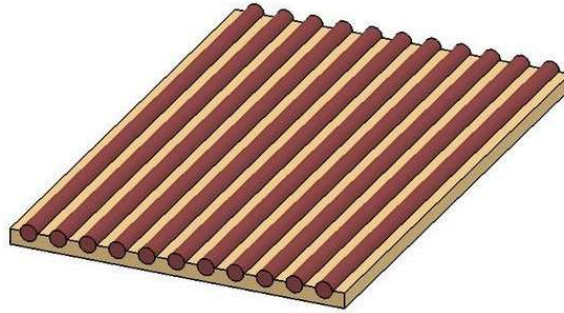


Fig. 4.2 Matériau unidirectionnel

#### 4.1.2.5 Matériau orthotrope

Se sont des matériaux qui possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux (Figure. 4.3), ces derniers ont les mêmes propriétés ou caractéristiques mécanique, ce qui réduit le nombre des coefficients indépendants à 9.

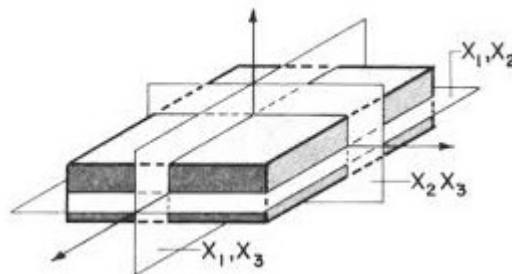


Fig. 4.3 Matériau orthotrope

Pour ce type de matériaux, la relation d'élasticité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

En inversant ce système on obtient :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

En fonction des modules de l'ingénieur, les coefficients de souplesse sont définis comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$E_{ij}$  et  $G_{ij}$  sont respectivement : le module de Young ou élasticité longitudinal et Coulomb ou cisaillement transversal et  $\nu_{ij}$  est le coefficient de Poisson. La relation entre les modules de Young et les coefficients de Poisson s'écrit en notation indicielle:

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_i} \quad (4.25)$$

#### 4.1.2.6 Matériaux transversalement isotrope

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie (Figure.4.4). Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques donc:

$$C_{22} = C_{33} , \quad C_{12} = C_{13} , \quad C_{55} = C_{66} \quad (4.26)$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients indépendants et la loi de comportement s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

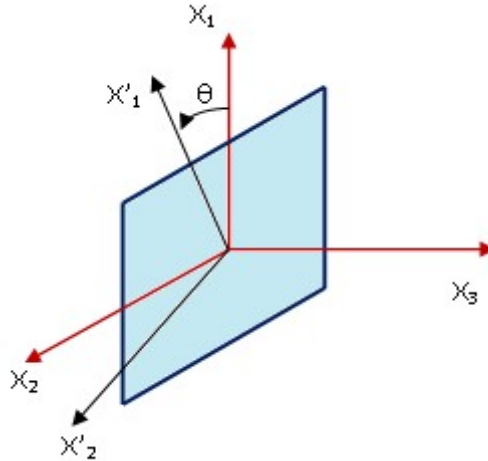


Fig.4.4 Matériau isotrope transverse

#### 4.1.2.7 Matériau quasi isotrope transverse

Dans ce type de matériaux, le nombre de coefficients indépendants se réduit à 6 coefficients et la loi de comportement s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

#### 4.1.2.8 Matériau quasi isotrope

Dans ce cas, le nombre de coefficients indépendants se réduit à 3 coefficients et la loi de comportement s'écrit comme suit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

#### 4.1.2.9 Matériau isotrope

Un matériau est dit isotrope lorsque ses propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions, soit :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad , \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \quad , \quad G_{12} = G_{13} = G_{23} = G \quad (4.30)$$

Ce qui réduit le nombre des coefficients élastiques indépendants à 2 ( $C_{11}$  et  $C_{12}$ ).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

En termes de constantes de l'ingénieur, la loi de comportement élastique d'un milieu isotrope s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.34)$$

#### 4.1.2.10 Loi de Hooke généralisée pour un milieu isotrope

La loi de Hooke généralisée permet de définir le comportement d'un matériau élastique linéaire, homogène isotrope et pour un état de sollicitation quelconque. Elle peut être exprimée en notation indicielle par la relation suivante

$$\varepsilon_{ij} = 3p \cdot \frac{\nu}{E} \cdot \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} \quad (4.35)$$

Les composantes du tenseur de déformations normales et tangentielles peuvent être exprimées grâce à la relation (4.35) comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \quad (4.36)$$

Et :

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} = \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{23} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{12} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} = \varepsilon_{21} \end{cases} \quad (4.37)$$

E,  $\nu$ , et G, représentent respectivement : le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement. L'expression (3.8) s'inverse sous la forme suivante, appelée équation de constitution d'un milieu élastique :

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(3\lambda + 2\mu)} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (4.38)$$

$\mu$  (ou encore noté G),  $\lambda$  sont dit coefficients de Lamé et  $\sigma_{ij}$  le trace du tenseur de contraintes  $\sigma_{ij}$ .

Ces coefficients sont donnés par les relations qui suivent :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad (4.39)$$

Nous avons aussi :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (4.40)$$

Et :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.41)$$

Et en fin :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (4.42)$$

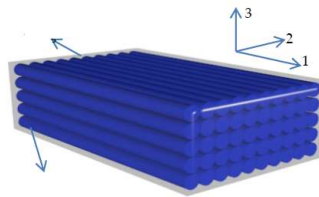
La loi de comportement est caractérisée par deux écritures différentes. On utilise soit les coefficients de Lamé ( $\mu$ ) et ( $\lambda$ ), soit le module de Young (E) et le coefficient de Poisson ( $\nu$ ). On préfère souvent l'emploi de ces deux dernières grandeurs qu'on peut facilement les déterminer par un simple essai de traction. Le tableau suivant résume la valeur de ses grandeurs pour quelques matériaux.

**Tableau 4.1** Caractéristiques mécaniques pour quelques matériaux usuels

Matériaux	E (GPa)	$\nu$	$\rho(\text{kg}/\text{dm}^3)$
Acier de construction	210	0.285	7.8
Acier Inox 18-12	203	0.29	7.9
Fonte grise	90 à 120	0.29	7.1 à 7.2
Aluminium	71	0.34	2.6
Zinc	78	0.21	7.15
Verre	60	0.25	2.8
Caoutchouc	0.2	0.5	1.8
Graphite	250 à 350	0.3 à 0.4	1.75 à 1.92
Elastomère	0.2	0.5	1

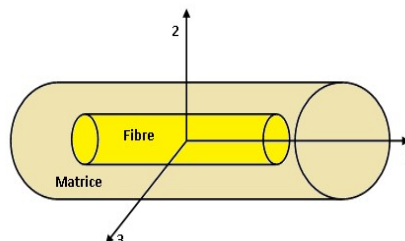
#### 4.2 Comportement élastique d'un composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres continues parallèles qui sont placées dans une matrice (Figure 4.5). Pour étudier le comportement élastique de ce type de composite, on considère une cellule élémentaire représentative (CER) constituée d'une fibre supposée cylindrique, entourée d'un cylindre de matrice (Figure 4.6).



**Fig.4.5** Composite unidirectionnel

La cellule élémentaire représentative (CER) possède un axe de révolution noté (1,L) appelé : direction longitudinale. La direction perpendiculaire aux fibres noté (2,T), est appelée direction transversale. Un composite unidirectionnel est aussi appelé isotrope transverse ou bien orthotrope de révolution car il est isotrope dans la plan normal à la direction (1,L). Le plan transverse est repéré par les directions (2,T) et (3,T') qui sont équivalentes (Figure 4.6).



**Fig.4.6** Cellule élémentaire représentative (CER)

### 4.2.1 Comportement en souplesse et en rigidité

Le comportement élastique d'un composite unidirectionnel est décrit par les constantes de rigidité de la matrice de rigidité  $C_{ij}$  et par les constantes de souplesse de la matrice de souplesse  $S_{ij}$ . Dans ce cas la loi de Hooke s'écrit selon les formes suivantes :

$$\sigma = [C]\varepsilon \quad (4.43)$$

Avec :

$\sigma$  : tenseur de contrainte

$\varepsilon$  : tenseur de déformation

C : matrice de rigidité

Et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

La seconde forme ou forme inverse permet d'exprimer les déformations en fonction des contraintes et de la matrice de souplesse :

$$\varepsilon = [S]\sigma \quad (4.45)$$

$\sigma$  : tenseur de contrainte

$\varepsilon$  : tenseur de déformation

S : matrice de souplesse

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre et permettent de caractériser le comportement élastique d'un composite unidirectionnel, elles sont définies par 5 coefficients indépendants de rigidité :  $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}$  et  $C_{66}$  et 5 coefficients indépendants de souplesse :  $S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{23}$  et  $S_{66}$ .

### 4.2.2 Modules de l'ingénieur

Les modules de l'ingénieur sont le module de Young E, le coefficient de Poisson  $\nu$  et le module de cisaillement G. Ces modules sont mesurés grâce à des essais de traction et de cisaillement



simples. L'usage de ses modules quantifiables (mesurables) et plus pratique que celui des constantes de rigidité  $C_{ij}$  et de souplesse  $S_{ij}$ . Les modules de l'ingénieur sont liés aux de rigidité  $C_{ij}$  et de souplesse  $S_{ij}$  par des relations simples déduites à partir d'essais simples de traction et de cisaillement.

### 4.2.3 Traction longitudinale

Considérons un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale suivant la direction longitudinale (1,L) (Figure 4.7). Dans ce cas toutes les contraintes sont nulles sauf la contrainte  $\sigma_1$  :

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_i = 0, i = 2,3,\dots,6 \quad (4.47)$$

En fonction des constantes de rigidité les équations de l'élasticité (4.2) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Avec :  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$

A partir de ces équations :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}\varepsilon_1 \quad (4.49)$$

Et :

$$\sigma_1 = \left( C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1 \quad (4.50)$$

A partir des relations (4.49) et (4.50) on peut déduire le coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  et le module de Young dans la direction longitudinale  $E_L$  :

$$E_L = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \quad (4.51)$$

Et :

$$\nu_{LT} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \quad (4.52)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$ , les équations de l'élasticité (4.45) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 \\ \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 \\ \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Avec :  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$

A partir des relations (4.53), nous avons :

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1}{S_{11}} = \frac{1}{S_{11}} \cdot \varepsilon_1 \quad (4.54)$$

Le module de Young longitudinal  $E_L$  est déduit par identification à partir de cette relation (4.54) :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}} \quad (4.55)$$

A partir de ces mêmes relations (4.53) nous avons aussi:

$$\varepsilon_2 = S_{12} \sigma_1 \quad (4.56)$$

Et :

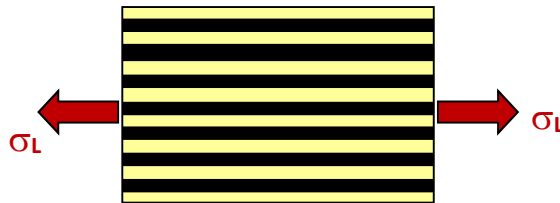
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{S_{11}} \cdot \sigma_1 \quad (4.57)$$

Alors :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (4.58)$$

Le coefficient de Poisson dans la plan (L,T),  $\nu_{LT}$  déduit par identification à partir de cette relation (4.58) :

$$\nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (4.59)$$



**Fig.4.7** Cellule élémentaire représentative en traction longitudinale

#### 4.2.4 Traction transverse

Si le composite unidirectionnel est soumis à une traction transverse suivant la direction (T) (Figure 4.8), le champ de contraintes se réduit à :

$$\sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_i = 0, \quad i \neq 2 \quad (4.60)$$

Et dans ce cas, les équations de l'élasticité (4.43) en fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} 0 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2 + C_{23} \varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13} \varepsilon_1 + C_{23} \varepsilon_2 + C_{33} \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Avec :  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$

La résolution du système d'équations (4.61) conduit à :

$$\varepsilon_1 = -\frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \cdot \varepsilon_2 \quad (4.62)$$

$$\sigma_2 = \left( C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \right) \cdot \varepsilon_2 \quad (4.63)$$

$$\varepsilon_3 = -\left( \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \right) \cdot \varepsilon_2 \quad (4.64)$$

A partir des relations (4.62), (4.63) et (4.64) et par identification, on peut déduire respectivement : le module de Young transverse ( $E_T$ ) et les coefficients de Poisson  $\nu_{TL}$  et  $\nu_{TT'}$  dans les plans (T,L) et (T,T') :

$$E_T = C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \quad (4.65)$$

$$\nu_{TL} = \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \quad (4.66)$$

Et :

$$\nu_{TT'} = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \quad (4.67)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$ , les équations qui décrivent le comportement élastique (4.45) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{12} \sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= S_{22} \sigma_2 \\ \varepsilon_3 &= S_{23} \sigma_2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Avec :  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$

A partir des équations de la relation (4.68), nous avons :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{S_{12}}{S_{22}} \quad (4.69)$$

Alors :

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}} \varepsilon_2 \quad (4.70)$$

Et :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{S_{22}}{S_{23}} \quad (4.71)$$

Alors :

$$\varepsilon_2 = \frac{S_{22}}{S_{23}} \varepsilon_3 \quad (4.72)$$

Et :

$$\sigma_2 = \frac{I}{S_{22}} \varepsilon_2 \quad (4.73)$$

On peut déduire à partir des relations (4.73),(4.70) et (4.72), respectivement , le module de Young transverse ( $E_T$ ) et les coefficients de Poisson  $\nu_{TL}$  et  $\nu_{TT'}$  dans les plans (T,L) et (T,T') en fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$ :

$$E_T = \frac{I}{S_{22}} \quad (4.74)$$

$$\nu_{TL} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \quad (4.75)$$

Et :

$$\nu_{TT'} = -\frac{S_{23}}{S_{22}} \quad (4.76)$$

On note : L=1 , T=2 et si on compare les relations (4.74) et (4.75) avec les relations (4.55) et (4.16), nous aurons :

$$E_L = E_1 = \frac{I}{S_{11}} \quad (4.77)$$

$$\nu_{LT} = \nu_{12'} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (4.78)$$

Et :

$$E_T = E_2 = \frac{I}{S_{22}} \quad (4.79)$$

$$\nu_{TL} = \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \quad (4.80)$$

Donc :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = -\frac{I}{S_{12}} \quad (4.81)$$

Et :

$$\frac{E_T}{\nu_{TL}} = -\frac{I}{S_{12}} \quad (4.82)$$

Alors :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}} \quad (4.83)$$

Ou bien en notation indicielle:

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \quad (4.84)$$

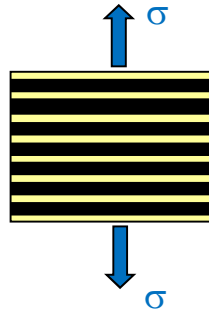


Fig.4.8 Cellule élémentaire représentative en traction transversale

**Exercice 4.1**

Déterminer les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$  d'une plaque composite constituée de 70 % de volume de fibres. On donne:  $\nu_f = 0.2$  et  $\nu_m = 0.3$   $E_1=40$  GPa  $E_2= 10$  GPa

**Solution**

Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  est donné par la loi des mélanges

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

$$\nu_{12} = (0.2) \times 0.7 + (0.3) \times 0.3 = 0.23$$

**Coefficient de Poisson  $\nu_{21}$**

D'après la relation :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$$

Nous avons :

$$\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \nu_{12} = \frac{10}{40} (0.23) = 0.0575$$

**4.2.6 Cisaillement longitudinal**

Un essai de cisaillement longitudinal est réalisé dans le plan qui coupe la fibre dans le sens longitudinal dans le plan (1,2) ou bien (1,3) (figure 4.9). Pour ces deux cas nous aurons :

$$\sigma_5 \neq 0, \sigma_i = 0, i \neq 5 \tag{4.85}$$

Ou bien :

$$\sigma_6 \neq 0, \sigma_i = 0, i \neq 6 \tag{4.86}$$

Si on considère le second cas ( $\sigma_6 \neq 0$ ) alors :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \tag{4.87}$$

En fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$ , les équations d'élasticité (4.44) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

De ces équations on peut écrire :

$$\sigma_6 = C_{66} \cdot \varepsilon_6 \quad (4.89)$$

Sachant que :

$$\sigma_6 = G_{12} \cdot \varepsilon_6 = G_{LT} \cdot \varepsilon_6 \quad (4.90)$$

On peut déduire que :

$$C_{66} = G_{12} = G_{LT} \quad (4.91)$$

De la même manière et si on utilise les équations de l'élasticité en fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$  on obtient :

$$G_{12} = G_{LT} = \frac{1}{S_{66}} \quad (4.92)$$

Sachant que pour un pli unidirectionnel les deux plans (1,2) et (1,3) sont équivalents car les deux directions 2 et 3 (T et T') sont identiques, alors :

$$G_{LT} = G_{LT'} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (4.93)$$

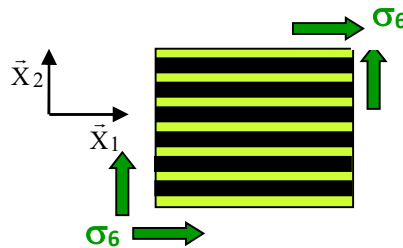


Fig.4.9 Cellule élémentaire représentative en cisaillement transverse dans le plan (1,2)

#### 4.2.7 Cisaillement transverse

Un essai de cisaillement transverse est réalisé dans le plan transverse (T,T') ou bien (2,3). Dans ce cas nous avons :

$$\sigma_4 \neq 0, \quad \varepsilon_4 \neq 0, \quad \sigma_i = 0, \quad \varepsilon_i = 0, \quad i \neq 4 \quad (4.94)$$

En fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$ , les équations d'élasticité (4.2) conduisent à :

$$\sigma_4 = \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) \cdot \varepsilon_4 \quad (4.95)$$

Or :

$$\sigma_4 = G_{23} \cdot \varepsilon_4 = G_{TT'} \cdot \varepsilon_4 \quad (4.96)$$

On comparant les deux relations (4.51) et (4.52), peut déduire le module de cisaillement transverse  $G_{TT'}$ :

$$G_{TT'} = \frac{I}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad (4.97)$$

De même, si utilise les équations de l'élasticité en fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$  on obtient :

$$G_{TT'} = \frac{I}{2(S_{22} - S_{23})} \quad (4.98)$$

Le module de cisaillement transverse  $G_{TT'}$  peut être exprimé en fonction du module de Young transverse ( $E_T$ ) et du coefficient de Poisson ( $\nu_{TT'}$ ). D'après les relations (4.76) et (4.79) :

$$\nu_{TT'} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}$$

Et :

$$E_T = \frac{I}{S_{22}}$$

Nous avons :

$$S_{23} = -\nu_{TT'} \frac{I}{E_T} \quad (4.99)$$

Et :

$$S_{22} = \frac{1}{E_T} \quad (4.100)$$

Si on substitue (4.98) et (4.99) dans (4.100), on obtient :

$$G_{TT'} = \frac{I}{2\left(\frac{I}{E_T} + \frac{\nu_{TT'}}{E_T}\right)} \quad (4.101)$$

Finalement :

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})} \quad (4.102)$$

Ou bien en notation indicielle :

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (4.103)$$

### Exercice 4.2

Déterminer le module de cisaillement  $G_{12}$  d'un composite unidirectionnel (verre/époxyde), réalisé en fibres de verre et d'une matrice époxyde et dont les caractéristiques sont portées sur le tableau suivant :

$E_f$	$E_m$	$\nu_f$	$\nu_m$	$V_f$
75 GPa	4.5 GPa	0.2	0.3	0.65

### Solution

#### **Fibre**

La fibre de verre est supposée isotrope, le module de cisaillement des fibres est donné par la relation :

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}$$

Soit :

$$G_f = \frac{75}{2(1 + 0.2)} = 31.25 \text{ GPa}$$

#### **Matrice**

La matrice époxyde est isotrope, son module de cisaillement est donné par la relation :

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}$$

Soit :

$$G_m = \frac{4.5}{2(1 + 0.3)} = 1.73 \text{ GPa}$$

#### **Module de cisaillement du composite $G_{12}$**

D'après la loi de mélange, le module de cisaillement de ce composite est donné par la relation :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m}$$

Soit :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{0.65}{31.25} + \frac{0.35}{1.73} = 0.00208 + 0.20231 = 0.2044$$

$$G_{12} = 4.8923 \text{ GPa}$$



### 4.2.8 Compression hydrostatique latérale

C'est un essai qui se fait sans déformation longitudinale, il permet de caractériser la compressibilité d'un matériau composite. La figure ci-dessous présente un CER d'un matériau unidirectionnel soumise à une compression latérale. Dans ce cas nous avons :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -P, \quad \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \sigma_1 \neq 0 \quad (4.104)$$

P est la pression hydrostatique imposée. En fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$ , les équations d'élasticité (4.44) conduisent à :

$$\sigma_1 = C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3 \quad (4.105)$$

$$\sigma_2 = -P = C_{22} \varepsilon_2 + C_{23} \varepsilon_3 \quad (4.106)$$

$$\sigma_3 = -P = C_{32} \varepsilon_2 + C_{33} \varepsilon_3 \quad (4.107)$$

Les déformations transversales sont nulles :

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \quad (4.108)$$

A partir des relations (4.106) et (4.107), on peut déduire :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad (4.109)$$

Si on substitue (4.109) dans (4.107) et (4.105), on obtient respectivement:

$$-P = \varepsilon_2 (C_{22} + C_{23}) \quad (4.110)$$

Et :

$$\sigma_1 = 2 C_{12} \varepsilon_2 \quad (4.111)$$

La dilatation surfacique dans le plan (T,T'), notée  $\varepsilon_s$  est exprimée par la relation :

$$\varepsilon_s = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \left( \frac{-P}{C_{22} + C_{23}} \right) + \left( \frac{-P}{C_{22} + C_{23}} \right) = \frac{-2P}{C_{22} + C_{23}} \quad (4.112)$$

Donc :

$$P = \frac{-1}{2} (C_{22} + C_{23}) \cdot \varepsilon_s \quad (4.113)$$

On peut déduire le module de compression latérale  $K_L$  sans déformation longitudinale.

$$K_L = \frac{1}{2} (C_{22} + C_{23}) \quad (4.115)$$

En fonction des coefficients de souplesse l'expression du module de compression latérale  $K_L$  est donnée par :

$$K_L = \frac{1}{2 \left( S_{22} + S_{23} - 2 \frac{S_{12}^2}{S_{11}} \right)} \quad (4.116)$$

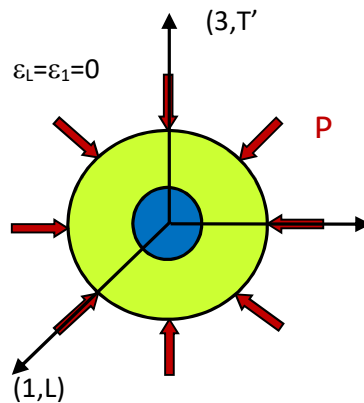


Fig.4.10 Cellule élémentaire représentative en compression hydrostatique latérale

**Récapitulation**

a) Les modules de l'ingénieur en fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$ :

$E_L = C_{11} - \frac{2 C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}$	$\nu_{LT} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}$	$E_T = C_{22} + \frac{C_{12}^2 (C_{22} - 2 C_{23}) + C_{11} C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11} C_{22}}$
$\nu_{TL} = \frac{C_{12} (C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11} C_{22}}$	$\nu_{TT'} = \frac{C_{12}^2 - C_{11} C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11} C_{22}}$	$G_{TT'} = \frac{I}{2} (C_{22} - C_{23})$
$G_{LT} = C_{66}$	$K_L = \frac{I}{2} (C_{22} + C_{23})$	

b) Les modules de l'ingénieur en fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$  :

$E_L = \frac{I}{S_{11}}$	$\nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}$	$E_T = \frac{I}{S_{22}}$	$G_{LT} = \frac{I}{S_{66}}$
$\nu_{TL} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}$	$\nu_{TT'} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}$	$G_{TT'} = \frac{I}{2(S_{22} - S_{23})}$	$K_L = \frac{I}{2 \left( S_{22} + S_{23} - 2 \frac{S_{12}^2}{S_{11}} \right)}$

c) Les constantes de rigidité  $C_{ij}$  en fonction des modules de l'ingénieur :

$C_{11} = E_L + 4 \nu_{LT}^2 K_L$	$C_{12} = 2 K_L \nu_{LT}$	$C_{22} = G_{LT} + K_L$
$C_{23} = -G_{LT} + K_L$	$C_{66} = G_{LT}$	

d) Les constantes de souplesse  $S_{ij}$  en fonction des modules de l'ingénieur :

$S_{11} = \frac{I}{E_L}$	$S_{22} = \frac{I}{E_T}$	$S_{66} = \frac{I}{G_{LT}}$
$S_{12} = -\frac{\nu_{LT}}{E_L}$	$S_{23} = -\frac{\nu_{TT'}}{E_T}$	

**Exercice 4.3**

Déterminer les constantes de rigidité et de souplesse pour un composite unidirectionnel avec les caractéristiques suivantes :

$E_L = E_1$	45 GPa
$E_T = E_2$	10 GPa
$\nu_{LT} = \nu_{12}$	0.31
$G_{LT} = G_{12}$	4.5 GPa
$G_{TT'} = G_{23}$	4 GPa

**1. Calcul des constantes de souplesse  $S_{ij}$**

$$S_{11} = \frac{1}{E_L} = \frac{1}{E_1} = \frac{1}{45} = 0.0222 \quad S_{12} = \frac{-\nu_{LT}}{E_L} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = -\frac{0.31}{45} = -0.0069$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_2} = \frac{1}{10} = 0.1 \quad S_{66} = \frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{4.5} = 0.2222$$

$$S_{23} = \frac{-\nu_{TT'}}{E_T} = \frac{-\nu_{23}}{E_2}$$

$\nu_{23}$  est calculé d'après la relation suivante :

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})}$$

Ou bien :

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$$

De cette relation on tire :

$$\nu_{23} = \frac{E_2 - 2G_{23}}{2G_{23}}$$

$$\nu_{23} = \frac{10 - 2(4)}{2(4)} = 0.25 = \nu_{TT'}$$

Alors :

$$S_{23} = -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{0.25}{10} = 0.025$$

**2. Les constantes de rigidité  $C_{ij}$**

$C_{11} = E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L$	$C_{12} = 2K_{LT} \nu_{LT}$	$C_{22} = G_{LT} + K_L$
$C_{23} = -G_{LT} + K_L$	$C_{66} = G_{LT}$	

$K_L$  : coefficient de compressibilité

$$K_L = \frac{1}{2 \left( S_{22} + S_{23} - 2 \frac{S_{12}^2}{S_{11}} \right)}$$

$$K_L = \frac{1}{2 \left( 0.1 - 0.025 - 2 \frac{(0.0069)^2}{0.0222} \right)} = 7.071$$

$$C_{11} = E_L + 4\nu_{LT}^2 K_{LT}$$

$$C_{11} = 45 + 4(0.31)^2 7.071 = 47.718$$

$$C_{12} = 2K_{LT} \nu_{LT}$$

$$C_{12} = 2(7.07)(0.31) = 4.384$$

$$C_{22} = 4.5 + 7.07 = 11.071$$

$$C_{23} = -G_{LT} + K_L$$

$$C_{23} = -4.5 + 7.07 = 3.071$$

$$C_{66} = 4.5$$

Finalemment :

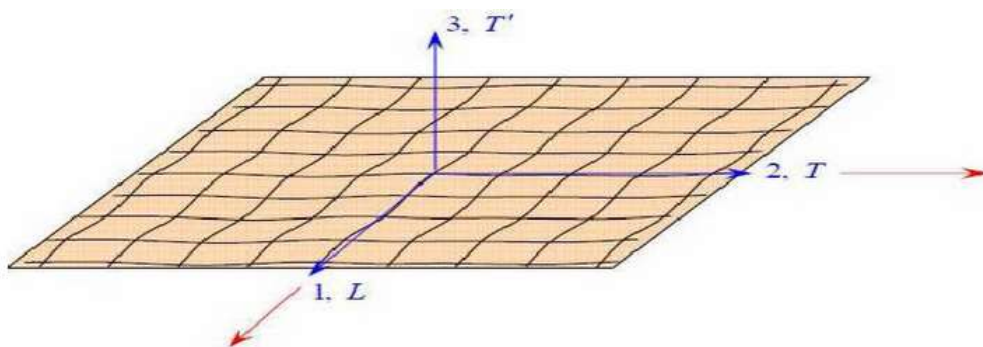
$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0222 & -0.0069 & -0.0069 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0069 & 0.1000 & -0.0250 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0069 & -0.0250 & 0.1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2222 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2222 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 47.718 & 4.384 & 4.384 & 0 & 0 & 0 \\ 4.384 & 11.071 & 3.071 & 0 & 0 & 0 \\ 4.384 & 3.071 & 11.071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

## Comportement élastique d'un matériau composite hors axes principaux

### 5.1 Composite orthotrope

Les matériaux composites orthotropes sont constituées de la superposition de couches unidirectionnelles ou à base de tissus. Les tissus sont généralement formés par des fils unidirectionnels croisés à 90° dans deux sens appelés respectivement chaîne et trame (Figure 5.1). Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. Un composite orthotrope possède deux directions principales (1,L) dans la direction chaîne et (2,T) dans la direction trame. La troisième direction qui est orthogonale au plan des couches est notée (3,T').



### 5.2 Comportement en souplesse et en rigidité

Le comportement élastique d'un composite orthotrope est décrit par la loi de l'élasticité linéaire (loi de Hooke) qui lie les contraintes aux déformations par des coefficients appelés constantes de rigidité  $C_{ij}$  ou bien par les constantes de souplesse  $S_{ij}$ . Dans ce cas la loi de Hooke s'écrit selon les formes suivantes :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (5.1)$$

Ou bien :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl} \quad (5.2)$$

Les deux tenseurs  $C_{ijkl}$  et  $S_{ijkl}$  appelés tenseurs de constitution sont symétriques, ce qui permet d'utiliser une écriture matricielle condensée des deux relations (5.1) et (5.2). Soient la première forme qui donne les contraintes en fonction des déformations et de la matrice de rigidité:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Et la seconde forme ou forme inverse qui permet d'exprimer les déformations en fonction des contraintes et de la matrice de souplesse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre et permettent de caractériser le comportement élastique d'un composite unidirectionnel, elles sont définies par 9 coefficients indépendants de rigidité :  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  et  $C_{66}$  et par 9 coefficients indépendants de souplesse :  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{33}$ ,  $S_{44}$ ,  $S_{55}$  et  $S_{66}$

Les deux matrices  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  sont inverses l'une de l'autre, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22} S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S} & C_{12} &= \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{\Delta S} & C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} \\ C_{22} &= \frac{S_{11} S_{33} - S_{13}^2}{\Delta S} & C_{13} &= \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{\Delta S} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} \\ C_{33} &= \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S} & C_{23} &= \frac{S_{12} S_{13} - S_{23} S_{11}}{\Delta S} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned}$$

Avec :  $\Delta S = S_{11} S_{22} S_{33} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{13}^2 - S_{33} S_{12}^2 + 2 S_{12} S_{22} S_{13}$

### 5.2.1 Traction dans le sens chaîne

Au cours d'un essai de traction sens chaîne (1,L), toutes les contraintes sont nulles sauf la contrainte  $\sigma_1$  (Figure 5.2):

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_i = 0 \quad i = 2, 3, \dots, 6 \quad (5.5)$$

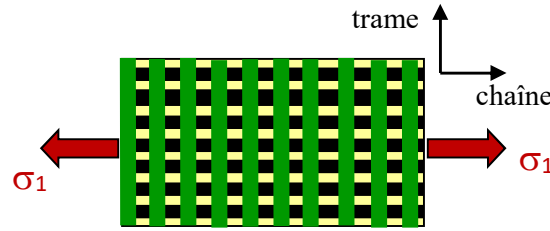


Fig.5.2 Composite orthotrope en traction longitudinale

En fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$ , les équations de l'élasticité (5.4) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \quad (5.7)$$

Des relations (5.7) on peut déduire :

$$\sigma_1 = \frac{1}{S_{11}} \varepsilon_1 \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{S_{12}}{S_{11}} \varepsilon_1 \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{S_{13}}{S_{11}} \varepsilon_1 \quad (5.10)$$

A partir des relations (5.8), (5.9) et (5.10) on peut déduire le module de Young dans la direction (1,L), sens chaîne ( $E_L$  ou bien  $E_1$ ) ainsi que les coefficients de Poisson ( $\nu_{LT}$  ou bien  $\nu_{12}$ ) et ( $\nu_{LT'}$  ou bien  $\nu_{13}$ ):

$$E_L = E_1 = \frac{1}{S_{11}} \quad (5.11)$$

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (5.12)$$

$$\nu_{LT'} = \nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}} \quad (5.13)$$

### 5.2.2 Traction dans le sens trame

Dans un essai de traction sens trame (2,T), toutes les contraintes sont nulles sauf la contrainte  $\sigma_2$  (Figure 5.3):

$$\sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_i = 0, \quad i \neq 2 \quad (5.14)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$ , les équations de l'élasticité (5.4) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_1 = S_{12} \sigma_2, \quad \varepsilon_2 = S_{22} \sigma_2, \quad \varepsilon_3 = S_{23} \sigma_2, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \quad (5.16)$$

Des relations (5.16) on peut déduire :

$$\sigma_2 = \frac{1}{S_{22}} \varepsilon_2 \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{11}} \varepsilon_2 \quad (5.18)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}} \varepsilon_2 \quad (5.19)$$

A partir des relations (5.17), (5.18) et (5.19) on peut déduire le module de Young dans la direction (2,T) , sens trame ( $E_T$  ou bien  $E_2$ ) ainsi que les coefficients de Poisson ( $\nu_{TL}$  ou bien  $\nu_{21}$ ) et ( $\nu_{TT'}$  ou bien  $\nu_{23}$ ):

$$E_T = E_2 = \frac{1}{S_{22}} \quad (5.20)$$

$$\nu_{TL} = \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \quad (5.21)$$

$$\nu_{TT'} = \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}} \quad (5.22)$$

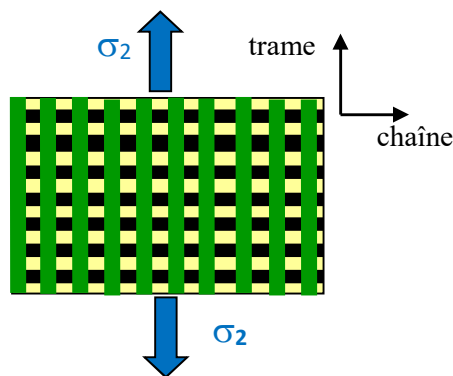


Fig.5.3 Composite orthotrope en traction transversale



### 5.2.3 Traction transverse

C'est une traction la direction (3,T'). Dans ce cas toutes les contraintes sont nulles sauf la contrainte  $\sigma_3$  (Figure 5.4) :

$$\sigma_3 \neq 0, \sigma_i = 0, i \neq 3 \quad (5.23)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$ , les équations de l'élasticité (5.4) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_1 = S_{13}\sigma_3, \varepsilon_2 = S_{23}\sigma_3, \varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3, \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \quad (5.25)$$

Des relations (5.25) on peut déduire :

$$\sigma_3 = \frac{1}{S_{33}} \varepsilon_3 \quad (5.26)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{S_{23}}{S_{33}} \varepsilon_3 \quad (5.27)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{13}}{S_{22}} \varepsilon_3 \quad (5.28)$$

A partir des relations (5.26), (5.27) et (5.28) on peut déduire le module de Young dans la direction (3,T') ( $E_{T'}$  ou bien  $E_3$ ) ainsi que les coefficients de Poisson ( $\nu_{T'L}$  ou bien  $\nu_{31}$ ) et ( $\nu_{T'T}$  ou bien  $\nu_{32}$ ) :

$$E_{T'} = E_3 = \frac{1}{S_{33}} \quad (5.29)$$

$$\nu_{T'L} = \nu_{31} = -\frac{S_{13}}{S_{33}} \quad (5.30)$$

$$\nu_{T'T} = \nu_{32} = -\frac{S_{23}}{S_{33}} \quad (5.31)$$

On peut déduire à partir des relations (5.11), (5.12), (5.13), (5.20), (5.21), (5.22), (5.29), (5.30) et (5.31) respectivement une relation entre les modules de Young et les coefficients de Poisson :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{\frac{1}{S_{11}}}{-\frac{S_{12}}{S_{22}}} = -\frac{1}{S_{12}} = \frac{E_1}{\nu_{12}} \quad (5.32)$$

$$\frac{E_T}{\nu_{TL}} = \frac{\frac{I}{S_{22}}}{-\frac{S_{12}}{S_{22}}} = -\frac{I}{S_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}} \quad (5.33)$$

A partir des relations (5.32), (5.33), on peut déduire que:

$$\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}} \quad (5.34)$$

$$\frac{E_L}{\nu_{LT'}} = \frac{\frac{I}{S_{11}}}{-\frac{S_{13}}{S_{11}}} = -\frac{I}{S_{13}} = \frac{E_1}{\nu_{13}} \quad (5.35)$$

$$\frac{E_{T'}}{\nu_{T'L}} = \frac{\frac{I}{S_{33}}}{-\frac{S_{13}}{S_{33}}} = -\frac{I}{S_{13}} = \frac{E_3}{\nu_{31}} \quad (5.36)$$

A partir des relations (5.35), (5.36), on peut déduire que:

$$\frac{E_1}{\nu_{13}} = \frac{E_3}{\nu_{31}} \quad (5.37)$$

$$\frac{E_T}{\nu_{TT'}} = \frac{\frac{I}{S_{22}}}{-\frac{S_{23}}{S_{22}}} = -\frac{I}{S_{23}} = \frac{E_2}{\nu_{23}} \quad (5.38)$$

$$\frac{E_{T'}}{\nu_{T'T}} = \frac{\frac{I}{S_{33}}}{-\frac{S_{23}}{S_{33}}} = -\frac{I}{S_{23}} = \frac{E_3}{\nu_{32}} \quad (5.39)$$

A partir des relations (5.38), (5.39), on peut déduire que:

$$\frac{E_2}{\nu_{23}} = \frac{E_3}{\nu_{32}} \quad (5.40)$$

Finalement la relation entre les modules de Young et les coefficients de Poisson s'écrit en notation indicielle:

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \quad (5.41)$$

### 5.2.4 Essai de cisaillement

Un essai de cisaillement dans le plan de la couche (L,T) ou bien (1,2) (figure), correspond à l'état de contraintes suivant :

$$\sigma_6 \neq 0, \sigma_i = 0, i \neq 6, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \quad (5.42)$$

En fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$ , les équations d'élasticité (5.2) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

De ces équations on peut déduire :

$$\sigma_6 = C_{66} \cdot \varepsilon_6 \quad (5.44)$$

Le module de cisaillement peut être déduit directement à partir de la relation (5.44) :

$$G_{LT} = G_{12} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (5.45)$$

De la même manière on peut déterminer les modules de cisaillement dans des essais transversaux dans les plans (1,3) et (2,3) :

$$G_{LT'} = G_{13} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad (5.46)$$

Et :

$$G_{TT'} = G_{23} = C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \quad (5.47)$$

La relation qui lie les contraintes aux déformations (5.4) pour un composite orthotrope peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

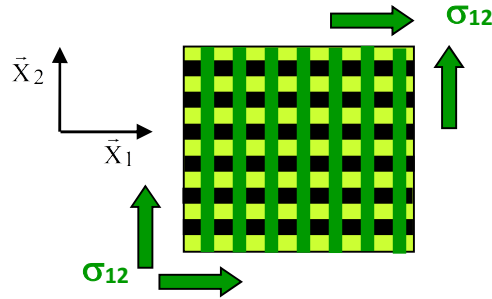


Fig.5.4 Composite orthotrope en cisaillement

**Exercice 5.1**

Déterminer les constantes de rigidité et de souplesse pour un composite orthotrope dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau suivant :

$E_1 = E_L$	30 GPa
$E_2 = E_T$	20 GPa
$E_3 = E_{T'}$	10 GPa
$\nu_{12} = \nu_{LT}$	0.14
$\nu_{13} = \nu_{LT'}$	0.30
$\nu_{23} = \nu_{TT'}$	0.32
$G_{12} = G_{LT}$	4 GPa
$G_{13} = G_{LT'}$	3.5 GPa
$G_{23} = G_{TT'}$	2.5 GPa

**1. Calcul des constantes de souplesse  $S_{ij}$**

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} = \frac{1}{30} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{0.14}{30} & S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} = \frac{1}{2.5} = 0.4 \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} = \frac{1}{20} = 0.05 & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{0.3}{30} = -0.01 & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} = \frac{1}{3.5} = 0.2857 \\
 S_{33} &= \frac{1}{E_3} = \frac{1}{10} = 0.1 & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{0.32}{20} = -0.016 & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{4} = 0.25
 \end{aligned}$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0333 & -0.0046 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0046 & 0.05 & -0.016 & 0 & 0 & 0 \\ -0.01 & -0.016 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

## 2. Les constantes de rigidité $C_{ij}$

Les matrices  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  sont inverses l'une de l'autre, donc :

$$C_{ij} = S_{ij}^{-1}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{13} \nu_{31} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} = \frac{20}{30} 0.14 = 0.0933$$

$$\nu_{32} = \frac{E_3}{E_2} \nu_{23} = \left(\frac{10}{20}\right) 0.32 = 0.16$$

$$\nu_{31} = \frac{E_3}{E_1} \nu_{13} = \frac{10}{30} 0.3 = 0.1$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{13} \nu_{31} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} = 0.000149462$$

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{1 - (0.32)(0.16)}{(20)(10)(0.000149462)} = 37.7404$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{23} + \nu_{31} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{0.09333 + (0.1)(0.32)}{(20)(10)(0.000149462)} = 4.1926$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{1 - (0.3)(0.1)}{(30)(10)(0.000149462)} = 21.63309$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{0.16 + (0.14)(0.1)}{(30)(10)(0.000149462)} = 3.8805$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{0.1 + (0.09333)(0.16)}{(20)(10)(0.000149462)} = 3.8448$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{1 - (0.14)(0.09333)}{(30)(20)(0.000149462)} = 11.0053$$

$$C_{44} = G_{23} = 2.5$$

$$C_{55} = G_{13} = 3.5$$

$$C_{66} = G_{12} = 4$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 37.7404 & 4.1926 & 3.8448 & 0 & 0 & 0 \\ 4.1926 & 21.63309 & 3.8805 & 0 & 0 & 0 \\ 3.8448 & 3.8805 & 11.0053 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**Exercice 5.2**

Déterminer les constantes de rigidité et de souplesse pour un composite orthotrope réalisé en carbone/époxyde dont les caractéristiques sont portées sur le tableau suivant :

$E_1$	181 GPa
$E_2$	10.3 GPa
$E_3$	10.3 GPa
$\nu_{12}$	0.28
$\nu_{13}$	0.27
$\nu_{23}$	0.60
$G_{12}$	7.17 GPa
$G_{13}$	3.0 GPa
$G_{23}$	7.0 GPa

**1. Calcul des constantes de souplesse  $S_{ij}$**

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} = \frac{1}{181} = 0.0055 & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{0.28}{181} = -0.0015 & S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} = \frac{1}{7} = 0.1428 \\
 &= 0.0333 & & & & & \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} = \frac{1}{10.3} = 0.0970 & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{0.27}{181} = -0.0014 & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} = \frac{1}{3} = 0.3333 \\
 S_{33} &= \frac{1}{E_3} = \frac{1}{10.3} = 0.0970 & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{0.60}{10.3} = -0.0582 & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{7.17} = 0.1394
 \end{aligned}$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0055 & -0.0015 & -0.0014 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0015 & 0.0970 & -0.0582 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0014 & -0.0582 & 0.0970 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1428 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1394 \end{bmatrix}$$

**2. Les constantes de rigidité  $C_{ij}$**

Les matrices  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  sont inverses l'une de l'autre, donc :

$$C_{ij} = S_{ij}^{-1}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 185.4740 & 6.9911 & 6.8716 & 0 & 0 & 0 \\ 6.9911 & 16.3718 & 9.9240 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8716 & 9.9240 & 16.3628 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.0028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.1736 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{array}{lll}
 C_{11} = 185.4740 & C_{12} = 6.9911 & C_{22} = 16.3718 \\
 C_{23} = 9.9240 & C_{13} = 6.8716 & C_{33} = 16.3628 \\
 C_{44} = 7.0028 & C_{55} = G_{13} = 3.0003 & C_{66} = G_{12} = 7.1736
 \end{array}$$

### 5.3 Loi de comportement en dehors des axes d'orthotropie

Les matériaux composites stratifiés sont élaborés par superposition de couches successives (Figure 5.5). La direction des fibres (chaînes) peut être décalée d'une couche à l'autre avec un angle  $\theta$  dit angle d'orientation des fibres ou de la couche. Lors de l'étude du comportement élastique des stratifiés, il est indispensable de choisir un système d'axes de référence pour le stratifié entier. Le comportement élastique de toutes les couches sera ramené à ce système de référence. Considérons un composite constitué d'une couche unidirectionnelle de directions principales (Figure 5.6). Le plan (1,2) est confondu avec le plan de la couche, la direction 1 coïncide avec la direction des fibres sens chaîne. Dans le système d'axes de référence du stratifié ( $1',2',3$ ), la direction 1 des fibres forme avec la direction 1' un angle  $\theta$ . Le système de référence du stratifié ( $1',2',3$ ) est noté aussi ( $x,y,z$ ).

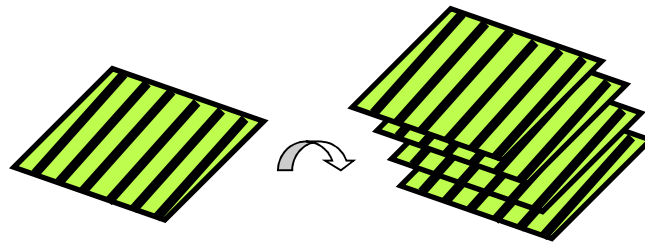


Fig. 5.5 Composite stratifié (empilement de couches successives)

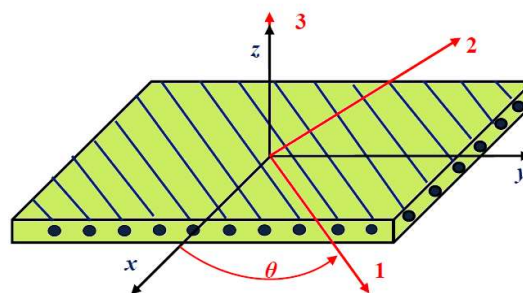


Fig. 5.6 Axes principaux (1,2,3) d'une couche et référentiel ( $1',2',3'$ ) du stratifié

### 5.4 Matrices de rigidité et de souplesse

La loi de comportement d'une couche unidirectionnelle par rapport au système d'axes principaux (1,2,3) s'écrit :

$$\sigma = C.\varepsilon \quad (5.49)$$

Ou bien :

$$\varepsilon = S.\sigma \quad (5.50)$$

Soit en écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Et :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Et pour une couche orthotrope constituée d'un tissu :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Et :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$



### 5.5 Rappel sur les changements de base

Soient deux systèmes de coordonnées cartésiennes définis dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , le premier système (R) muni d'une base  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ . Tout changement de base de ce système de coordonnées est défini par une matrice de changement de base  $A = a_{ij}$  qui permet d'exprimer les vecteurs de la nouvelle base  $\bar{e}' = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$  en fonction de l'ancienne base  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ .

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + a_{13}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{23}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_3 = a_{31}\bar{e}_1 + a_{32}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3 \end{cases} \quad (5.55)$$

Ou bien :

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

La relation inverse permet d'exprimer les vecteurs de la base  $\bar{e}_i$  en fonction des vecteurs de la base  $\bar{e}'_i$  :

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

Dans le cas des bases orthonormées directes, la matrice de passage  $[A]$  est symétrique, son déterminant vaut 1 et son inverse est confondu avec sa transposée  $[A]^T$ , donc on peut écrire :

$$[A]^T = [A]^{-1} \quad (5.59)$$

Et :

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Soit une base orthogonale  $\bar{e}_i$ , une deuxième base  $\bar{e}'_i$  est obtenue par rotation d'un angle  $\theta$  autour de la direction  $\bar{e}_3$  (Figure 5.5). Les vecteurs  $\bar{e}_3$  et  $\bar{e}'_3$  sont dans ce cas confondus. La relation de passage entre les deux systèmes s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_3 \end{cases} \quad (5.61)$$

La matrice de passage [A] est définie comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Si on calcule le déterminant de cette matrice, on obtient :

$$\det A = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (5.63)$$

La matrice de passage inverse  $[A]^{-1}$  ou bien  $[A]^T$  est définie comme suit :

$$[A]^T = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Et les relations du passage inverse s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Finalement :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \cos \theta \vec{e}'_1 - \sin \theta \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_2 = -\sin \theta \vec{e}'_1 + \cos \theta \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_3 = \vec{e}'_3 \end{cases} \quad (5.66)$$

Sous forme matricielle :

$$\vec{e}'_i = A \cdot \vec{e}_i \quad (5.67)$$

Et :

$$\vec{e}_i = A^T \cdot \vec{e}'_i = A^{-1} \cdot \vec{e}'_i \quad (5.68)$$

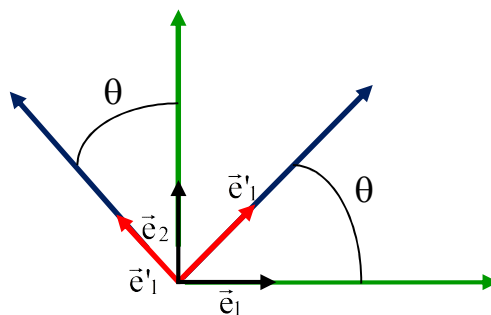


Fig.5.7 Changement de bases

### 5.5.1 Tenseurs d'ordre deux

Un tenseur d'ordre deux est désigné par  $T_{kl}$  dans la base  $\bar{e}_i$  ( $k,l=1,2,3$ ) et s'exprime dans la base  $\bar{e}'_i$  par :

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (5.69)$$

Dans l'expression (5.69), ( $i,j,k,l=1,2,3$ ) et  $a_{ij}$  et  $a_{kl}$  sont les éléments des matrices de changement de base. Dans une base orthonormée directe, la relation de changement de base s'écrit :

$$T'_{ij} = a_{ij} T_{kl} a_{lk} \quad (5.70)$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$T' = A \cdot T \cdot A^T \quad (5.71)$$

Et la relation inverse s'écrit :

$$T = A^T \cdot T' \cdot A \quad (5.72)$$

### 5.5.2 Notation de l'ingénieur

En élasticité linéaire, les tenseurs de contrainte  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\varepsilon_{ij}$  qui sont symétriques, peuvent être d'une façon compacte et simplifiée. Cette représentation qui s'appelle notation de l'ingénieur est basée sur une représentation vectorielle des tenseurs de contrainte et de déformation. Ainsi, le tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

Et le tenseur de déformation  $\varepsilon_{ij}$  s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

Dans cette représentation les indices doubles sont contractés en indices simples avec la convention suivante :

$$\begin{array}{llll} 11 & \Rightarrow & 1 & 23 \text{ ou } 32 & \Rightarrow & 4 \\ 22 & \Rightarrow & 2 & 13 \text{ ou } 31 & \Rightarrow & 5 \\ 33 & \Rightarrow & 3 & 12 \text{ ou } 21 & \Rightarrow & 6 \end{array}$$

En notation indicielle :

$$\sigma_{ii} = \sigma_{\alpha} \text{ et } \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{\alpha} \text{ pour } \alpha=1,2,3 \text{ si } i=j \quad (5.75)$$

Et :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\phi} \text{ et } 2\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\beta} \text{ pour } \beta=9-i-j \text{ si } i \neq j \quad (5.76)$$

### 5.5.3 Changement de base cas d'une rotation autour de la direction $\vec{e}_3$

Si on emploie la notation de l'ingénieur, la relation entre les contraintes  $\sigma_i$  exprimées dans la base  $\vec{e}_i$  et  $\sigma'_i$  dans la base  $\vec{e}'_i$ , obtenue par rotation autour de la direction  $\vec{e}_3$ , s'écrit en se basant sur la relation de changement de bases :

$$\sigma' = A \cdot \sigma \cdot A^T \quad (5.77)$$

Avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et :

$$[A]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc la relation (5.77) devient :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Après calcul et identification, on trouve :

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2 \sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta$$

$$\sigma'_{33} = \sigma_{33}$$

$$\sigma'_{23} = -\sigma_{13} \sin \theta + \sigma_{23} \cos \theta$$

$$\sigma'_{13} = \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta$$

$$\sigma'_{12} = -\sigma_{11} \sin \theta \cos \theta - \sigma_{12} \sin^2 \theta + \sigma_{12} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin \theta \cos \theta$$

En utilisant la notation de l'ingénieur :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Ou bien :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Et sous forme condensée :

$$\sigma' = T_{\sigma} \cdot \sigma \quad (5.81)$$

$T_{\sigma}$  représente la matrice de changement de base de contraintes ou matrice de passage de la base  $\bar{e}_i$  vers la base  $\bar{e}'_i$ . Le changement de base inverse s'obtiennent en inversant la relation (5.81) :

$$\sigma = T_{\sigma}^{-1} \cdot \sigma' \quad (5.82)$$

### Remarque

Pour une rotation d'un angle  $\theta$  autour de la direction  $\bar{e}_3$ , la matrice inverse  $T_{\sigma}^{-1}$  est obtenue en effectuant un changement de l'angle  $\theta$  avec  $-\theta$ .

## 5.6 Loi de comportement d'une couche hors axes principaux

Pour le cas d'une couche hors axes principaux, les matrices de rigidité  $[C']$  et de souplesse  $[S']$  exprimées dans la base  $(1', 2', 3)$  du stratifié sont obtenues en effectuant un changement de base sur les matrices de rigidité  $[C]$  et de souplesse  $[S]$ , rapportées à la base  $(1, 2, 3)$  du système d'axes principaux. Le changement de base  $(1, 2, 3)$  vers  $(1', 2', 3)$  se fait par rotation d'un angle  $-\theta$ . Par rapport à la base  $(1, 2, 3)$ , la loi de comportement élastique s'écrit :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad (5.83)$$

Et par rapport à la base (1',2',3) :

$$\sigma' = C'.\varepsilon' \quad (5.84)$$

D'après la relation (5.81), l'expression de la formule de changement de base des contraintes est définie comme suit :

$$\sigma' = T_\sigma.\sigma$$

Et celle des déformations :

$$\varepsilon' = T_\varepsilon.\varepsilon \quad (5.85)$$

$T_\sigma$  et  $T_\varepsilon$  représentent les matrices de passage

$T^{-1}_\sigma$  et  $T^{-1}_\varepsilon$  représentent les matrices de passage inverse

La combinaison des relations (5.81) et (5.83) conduit à :

$$\sigma' = T_\sigma.C.\varepsilon \quad (5.86)$$

Et en tenant compte de l'inversion de la relation (5.85), la relation (5.86) devient :

$$\sigma' = T_\sigma.C. T^{-1}_\varepsilon.\varepsilon' = C'.\varepsilon' \quad (5.87)$$

Ce qui permet de déduire l'expression de la matrice de rigidité  $C'$ , exprimée dans la base (1',2',3) du stratifié:

$$C' = T_\sigma.C. T^{-1}_\varepsilon \quad (5.88)$$

De la même manière, on peut déduire l'expression de la matrice de souplesse  $S'$ , exprimée dans la base (1',2',3) du stratifié:

$$S' = T_\varepsilon.S. T^{-1}_\sigma \quad (5.89)$$

Dans le cas d'une couche d'un composite unidirectionnel ou orthotrope hors axes principaux, le passage se fait par une rotation d'un angle  $(-\theta)$  et les relations (5.88) et (5.89) deviennent :

$$C' = T^{-1}_\sigma .C. T_\varepsilon \quad (5.90)$$

Et :

$$S' = T^{-1}_\varepsilon .S. T_\sigma \quad (5.91)$$

Les matrices de passage  $T_\sigma$  et  $T_\varepsilon$  et passage inverse  $T^{-1}_\sigma$  et  $T^{-1}_\varepsilon$  sont données grâce aux relations suivantes :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

$$T_{\sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

$$T_{\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

La combinaison des relations (5.90) et (5.91) avec les relation (5.92),(5.93), (5.94) et (5.95) permet de déterminer l'expression finale de la matrice de rigidité [C'] et celle de la matrice de souplesse [S'] exprimées dans la base (1',2',3) du stratifié:

Matrice de rigidité [C'] exprimée dans la base (1',2',3) du stratifié

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Matrice de souplesse [S'] exprimée dans la base (1',2',3) du stratifié

$$\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

La relation d'élasticité (5.84) par rapport à la base (1',2',3), en fonction des constantes de rigidité s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

La forme inverse des équations d'élasticité par rapport à la base (1',2',3), en fonction des constantes de souplesse s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

### 5.6.1 Constantes de rigidité dans le cas d'un composite unidirectionnel

Pour un composite unidirectionnel, l'expression des constantes de rigidité  $C'_{ij}$  exprimées dans la base (1',2',3) du stratifié sont obtenues grâce à la relation (5.42) :

$$C' = T^{-1}_{\sigma} \cdot C \cdot T_{\varepsilon}$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Donc, les constantes de rigidité  $C'_{ij}$  d'un composite unidirectionnel dont la direction des fibres (chaîne) fait un angle  $\theta$  avec la direction (x) ou bien (1') de la base (1',2',3) ou bien (x,y,z) sont données dans le tableau qui suit:



**Tableau 5.1** Constantes de rigidité d'un composite unidirectionnel dont la direction des fibres fait un angle  $\theta$  avec la direction (x)

$C'_{11} = C_{11}\cos^4\theta + C_{22}\sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$C'_{14} = 0$
$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	$C'_{15} = 0$
$C'_{13} = C_{12}\cos^2\theta + C_{23}\sin^2\theta$	$C'_{24} = 0$
$C'_{22} = C_{11}\sin^4\theta + C_{22}\cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$C'_{25} = 0$
$C'_{23} = C_{12}\sin^2\theta + C_{23}\cos^2\theta$	$C'_{33} = C_{22}$
$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta$	$C'_{34} = 0$
$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta$	$C'_{34} = 0$
$C'_{36} = (C_{12} - C_{23})\sin\theta\cos\theta$	$C'_{35} = 0$
$C'_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\cos^2\theta + C_{66}\sin^2\theta$	$C'_{46} = 0$
$C'_{45} = \left(C_{66} - \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\right)\sin\theta\cos\theta$	$C'_{56} = 0$
$C'_{55} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\sin^2\theta + C_{66}\cos^2\theta$	
$C'_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66}))\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	

### 5.6.2 Constantes de souplesse dans le cas d'un composite unidirectionnel

Pour un composite unidirectionnel, l'expression des constantes de souplesse  $S'_{ij}$  exprimées dans la base  $(1', 2', 3)$  du stratifié sont obtenues grâce à la relation (5.91) :

$$S' = T^{-1} \varepsilon . S . T \sigma$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

Les constantes de souplesse  $S'_{ij}$  d'un composite unidirectionnel dont la direction des fibres (chaîne) fait un angle  $\theta$  avec la direction (x) ou bien  $(1')$  de la base  $(1', 2', 3)$  ou bien  $(x, y, z)$  sont données dans le tableau qui suit:

**Tableau 5.2** Constantes de souplesse d'un composite unidirectionnel dont la direction des fibres fait un angle  $\theta$  avec la direction (x)

$S'_{11} = S_{11}\cos^4\theta + S_{22}\sin^4\theta + 2(S_{12} + 2S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$S'_{14} = 0$
$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	$S'_{15} = 0$
$S'_{13} = S_{12}\cos^2\theta + S_{23}\sin^2\theta$	$S'_{24} = 0$
$S'_{22} = S_{11}\sin^4\theta + S_{22}\cos^4\theta + 2(S_{12} + 2S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$S'_{25} = 0$
$S'_{23} = S_{12}\sin^2\theta + S_{23}\cos^2\theta$	$S'_{33} = S_{22}$
$S'_{16} = (2(S_{11} - S_{12}) - S_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (2(S_{12} - S_{22}) + S_{66})\sin^3\theta\cos\theta$	$S'_{34} = 0$
$S'_{26} = (2(S_{11} - S_{12}) - S_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (2(S_{12} - S_{22}) + S_{66})\sin\theta\cos^3\theta$	$S'_{35} = 0$
$S'_{36} = 2(S_{12} - S_{23})\sin\theta\cos\theta$	$S'_{46} = 0$
$S'_{44} = 2(S_{22} - S_{23})\cos^2\theta + S_{66}\sin^2\theta$	$S'_{56} = 0$
$S'_{45} = (S_{66} - 2(S_{22} - S_{23}))\sin\theta\cos\theta$	
$S'_{55} = 2(S_{22} - S_{23})\sin^2\theta + S_{66}\cos^2\theta$	
$S'_{66} = 2((S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	

### 5.6.3 Constantes de rigidité dans le cas d'un composite orthotrope

Dans le cas d'un composite orthotrope, l'expression des constantes de rigidité  $C'_{ij}$  exprimées dans la base  $(1', 2', 3)$  du stratifié sont obtenues à partir de la relation (5.42) :

$$C' = T^{-1} \cdot C \cdot T$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Donc, les constantes de rigidité  $C'_{ij}$  d'un composite orthotrope dont la direction des fibres (chaîne) fait un angle  $\theta$  avec la direction (x) ou bien  $(1')$  de la base  $(1', 2', 3)$  ou bien  $(x, y, z)$  sont données dans le tableau qui suit:

**Tableau 6.3** Constantes de rigidité d'un composite orthotrope dont la direction des fibres fait un angle  $\theta$  avec la direction (x)

$C'_{11} = C_{11}\cos^4\theta + C_{22}\sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$C'_{14} = 0$
$C'_{12} = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	$C'_{15} = 0$
$C'_{13} = C_{13}\cos^2\theta + C_{23}\sin^2\theta$	$C'_{24} = 0$
$C'_{22} = C_{11}\sin^4\theta + C_{22}\cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$C'_{25} = 0$
$C'_{23} = C_{13}\sin^2\theta + C_{23}\cos^2\theta$	$C'_{33} = C_{33}$
$C'_{16} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta$	$C'_{34} = 0$
$C'_{26} = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta$	$C'_{34} = 0$
$C'_{36} = (C_{13} - C_{23})\sin\theta\cos\theta$	$C'_{35} = 0$
$C'_{44} = C_{44}\cos^2\theta + C_{55}\sin^2\theta$	$C'_{46} = 0$
$C'_{45} = (C_{55} - C_{44})\sin\theta\cos\theta$	$C'_{56} = 0$
$C'_{55} = C_{44}\sin^2\theta + C_{55}\cos^2\theta$	
$C'_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66}))\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	

#### 5.6.4 Constantes de souplesse dans le cas d'un composite orthotrope

Pour un composite orthotrope, l'expression des constantes de souplesse  $S'_{ij}$  exprimées dans la base (1',2',3) du stratifié sont obtenues à partir de la relation (5.43) :

$$S' = T^{-1}_{\varepsilon} \cdot S \cdot T_{\sigma}$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

Les constantes de souplesse  $S'_{ij}$  d'un composite orthotrope dont la direction des fibres (chaîne) fait un angle  $\theta$  avec la direction (x) ou bien (1') de la base (1',2',3) ou bien (x,y,z) sont données dans le tableau qui suit:

**Tableau 5.4** Constantes de souplesse d'un composite orthotrope dont la direction des fibres forme un angle  $\theta$  avec la direction (x)

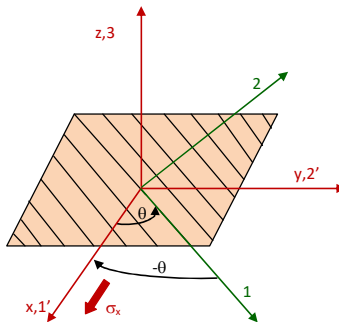
$S'_{11} = S_{11}\cos^4\theta + S_{22}\sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$S'_{14} = 0$
$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	$S'_{15} = 0$
$S'_{13} = S_{13}\cos^2\theta + S_{23}\sin^2\theta$	$S'_{24} = 0$
$S'_{22} = S_{11}\sin^4\theta + S_{22}\cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	$S'_{25} = 0$
$S'_{23} = S_{13}\sin^2\theta + S_{23}\cos^2\theta$	$S'_{33} = S_{33}$
$S'_{16} = (2(S_{11} - S_{12}) - S_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (2(S_{12} - S_{22}) + S_{66})\sin^3\theta\cos\theta$	$S'_{34} = 0$
$S'_{26} = (2(S_{11} - S_{12}) - S_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (2(S_{12} - S_{22}) + S_{66})\sin\theta\cos^3\theta$	$S'_{35} = 0$
$S'_{36} = 2(S_{12} - S_{23})\sin\theta\cos\theta$	$S'_{46} = 0$
$S'_{44} = S_{44}\cos^2\theta + S_{55}\sin^2\theta$	$S'_{56} = 0$
$S'_{45} = (S_{55} - S_{44})\sin\theta\cos\theta$	
$S'_{55} = S_{44}\sin^2\theta + S_{55}\cos^2\theta$	
$S'_{66} = 2(2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$	

### 5.6.5 Expression des modules de l'ingénieur hors axes principaux

#### 5.6.5.1 Essai de traction suivant la direction x

Dans cet essai l'effort de traction est appliqué suivant la direction (x) du composite. Dans ce cas toutes les contraintes sont nulles sauf  $\sigma_{xx}$

$$\sigma_{xx} = \sigma'_{11} \neq 0, \quad \sigma'_{ii} = 0, \quad i \neq 1 \quad (5.100)$$



**Fig.5.8** Traction suivant la direction x (composite orthotrope)

Pour le cas d'un composite unidirectionnel, en fonction des constantes de souplesse  $S'_{ij}$ , les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = S'_{11}\sigma_{xx} \quad (5.101)$$

$$\varepsilon_{yy} = S'_{12}\sigma_{xx} \quad (5.102)$$

$$\varepsilon_{zz} = S'_{13}\sigma_{xx} \quad (5.103)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (5.104)$$

$$\gamma_{xy} = S'_{16} \sigma_{xx} \quad (5.105)$$

Le module de Young  $E_x$  dans la direction (x) est déduit de la relation (5.101) :

$$E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{1}{S'_{11}} \quad (5.106)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S_{ij}$  et en utilisant les valeurs portées sur le (Tableau 5.1) pour un composite unidirectionnel et les valeurs portées sur le (Tableau 5.2) pour un composite orthotrope la relation (5.106) devient :

$$\frac{1}{E_x} = S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (5.107)$$

Cette expression peut être exprimée en fonction des modules d'élasticité mesurée suivant les axes principaux (1,2,3) et selon le cas, composite unidirectionnel ou orthotrope, sachant que :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}} \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad E_T = \frac{1}{S_{22}} \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}}$$

Alors (5.107) devient:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_L} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_T} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (5.108)$$

Les déformations  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{zz}$  dans les directions transversales sont reliées à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  par combinaison des relations (5.101),(5.102) et (5.103) :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{S'_{12}}{S'_{11}} \varepsilon_{xx} \quad (5.109)$$

Et :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{S'_{13}}{S'_{11}} \varepsilon_{xx} \quad (5.110)$$

De ces deux relations (5.109) et (5.110), on peut déduire les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{xz}$  :

$$\nu_{xy} = -\frac{S'_{12}}{S'_{11}} \quad (5.111)$$

Et :

$$\nu_{xz} = -\frac{S'_{13}}{S'_{11}} \quad (5.112)$$

En fonction des modules de l'ingénieur, ces mêmes relations, s'expriment comme suit :

$$\nu_{xy} = E_x \left( \frac{\nu_{LT}}{E_L} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) \quad (5.113)$$

Et :

$$\nu_{xz} = E_x \left( \frac{\nu_{LT'}}{E_L} \cos^2 \theta + \frac{\nu_{TT'}}{E_L} \sin^2 \theta \right) \quad (5.114)$$

Pour le cas d'un composite unidirectionnel :

$$\nu_{LT} = \nu_{LT'} \quad (5.115)$$

### 5.8.2 Essai de traction suivant la direction y

Cet essai permet de déterminer le module de Young  $E_y$  suivant la direction (y) ou bien (2'), qui relie la contrainte  $\sigma_{yy}$  à la déformation  $\varepsilon_{yy}$ . Dans ce cas le chargement  $\sigma_{yy}$  est obtenu si on fait tourner l'axe (x) d'un angle  $\frac{\pi}{2} + \theta$ . Dans la relation (5.108),  $\theta$  est remplacée par  $\frac{\pi}{2} + \theta$

$$\frac{1}{E_y} = S'_{22} = \frac{1}{E_L} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_T} \cos^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{LT}} - 2 \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (5.116)$$

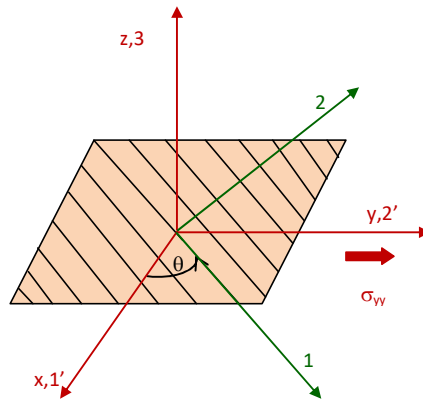


Fig.5.9 Traction suivant la direction y (composite orthotrope)

### 5.6.5.2 Essai de cisaillement transverse

L'essai de cisaillement transverse permet de déterminer le module de cisaillement transverse  $G_{xz}$  dans le plan (x,z) ou bien (1',3). Cet essai correspond à l'état de contraintes suivant :

$$\sigma_{xz} = \sigma'_{31} \neq 0, \quad \sigma'_{i1} = 0, \quad i \neq 3 \quad (5.117)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S'_{ij}$ , les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad (5.118)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (5.119)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (5.120)$$

$$\gamma_{yz} = S'_{45} \sigma_{xz} \quad (5.121)$$

$$\gamma_{xz} = S'_{55} \sigma_{xz} \quad (5.122)$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (5.123)$$

L'essai de cisaillement transverse engendre des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ . Le module de cisaillement transverse  $G_{xz}$  est déduit à partir de la relation (5.122) :

$$G_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\gamma_{xz}} = \frac{1}{S'_{55}} \quad (5.124)$$

Pour un composite orthotrope et en considérant les valeurs portées sur le (Tableau 5.2) la composante  $S'_{55}$  de la matrice de souplesse peut être exprimée en fonction des modules de l'ingénieur et la relation (5.124) devient :

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{1}{G_{TT'}} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta \quad (5.125)$$

Pour le cas d'un composite unidirectionnel et en considérant les valeurs portées sur le tableau 5.1 et en prenant en considération la relation :

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})} \quad (5.126)$$

L'expression du module cisaillement transverse  $G_{xz}$  devient :

$$\frac{1}{G_{xz}} = \frac{2(1 + \nu_{TT'})}{E_T} \sin^2 \theta + \frac{1}{G_{LT'}} \cos^2 \theta \quad (5.127)$$

### 5.6.6 Etat de contraintes planes

Un état de contraintes planes est un état de contraintes à deux dimensions pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée (z). Les plaques composites sont généralement de faible épaisseur, la direction 3 est abandonnée dans ce cas et les équations établies précédemment dans le cas général se simplifient d'une façon remarquable et on peut adopter par exemple dans le plan (x,y), l'hypothèse suivante :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (5.128)$$

Le tenseur de contraintes s'écrit dans ce cas, et en utilisant la notation de l'ingénieur, le vecteur de contrainte dans le plan (1,2) s'exprime par :

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

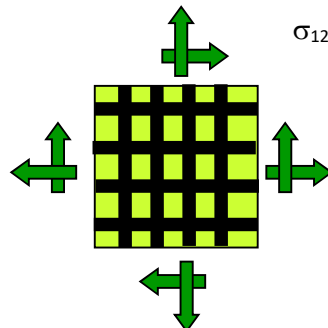


Fig. 5.10 Etat de contraintes planes dans le plan (1,2)

Cet état de état de contraintes correspond à :

$$\begin{aligned} \sigma'_i &\neq 0 & i &= 1,2,6 \\ \sigma'_i &= 0 & i &= 3,4,5 \end{aligned} \quad (5.130)$$

En fonction des constantes de souplesse  $S'_{ij}$ , les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Donc :

$$\varepsilon'_1 = S'_{11} \sigma'_1 + S'_{12} \sigma'_2 + S'_{16} \sigma'_6 \quad (5.132)$$

$$\varepsilon'_2 = S'_{12} \sigma'_1 + S'_{22} \sigma'_2 + S'_{26} \sigma'_6 \quad (5.133)$$

$$\varepsilon'_3 = S'_{13} \sigma'_1 + S'_{23} \sigma'_2 + S'_{36} \sigma'_6 \quad (5.134)$$

$$\varepsilon'_4 = 0 \quad (5.135)$$

$$\varepsilon'_5 = 0 \quad (5.136)$$

$$\varepsilon'_6 = S'_{16} \sigma'_1 + S'_{26} \sigma'_2 + S'_{66} \sigma'_6 \quad (5.137)$$

A partir de la relation (5.134), on peut déduire l'existence d'une déformation suivant la direction 3 :

$$\varepsilon'_3 = S'_{13} \sigma'_1 + S'_{23} \sigma'_2 + S'_{36} \sigma'_6$$

Ou bien :

$$\varepsilon_{zz} = S'_{13} \sigma_{xx} + S'_{23} \sigma_{yy} + S'_{36} \sigma_{xy}$$

En fonction des constantes de rigidité  $C'_{ij}$ , les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

Soit :

$$\sigma'_1 = C'_{11} \varepsilon'_1 + C'_{12} \varepsilon'_2 + C'_{13} \varepsilon'_3 + C'_{16} \varepsilon'_6 \quad (5.139)$$

$$\sigma'_2 = C'_{12} \varepsilon'_1 + C'_{22} \varepsilon'_2 + C'_{23} \varepsilon'_3 + C'_{26} \varepsilon'_6 \quad (5.140)$$

$$0 = C'_{13} \varepsilon'_1 + C'_{23} \varepsilon'_2 + C'_{33} \varepsilon'_3 + C'_{36} \varepsilon'_6 \quad (5.141)$$

$$\sigma'_6 = C'_{16} \varepsilon'_1 + C'_{26} \varepsilon'_2 + C'_{36} \varepsilon'_3 + C'_{66} \varepsilon'_6 \quad (5.142)$$

De la relation (5.141), on tire :

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}} (C'_{13} \varepsilon'_1 + C'_{23} \varepsilon'_2 + C'_{36} \varepsilon'_6) \quad (5.143)$$



Si on substitue (5.143) dans la relation (5.141), on obtient :

$$\sigma'_1 = C'_{11} \varepsilon'_1 + C'_{12} \varepsilon'_2 + C'_{13} \left( -\frac{1}{C'_{33}} (C'_{13} \varepsilon'_1 + C'_{23} \varepsilon'_2 + C'_{36} \varepsilon'_6) \right) + C'_{16} \varepsilon'_6 \quad (5.144)$$

Soit après arrangement :

$$\sigma'_1 = \left( C'_{11} - \frac{C'^2_{13}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( C'_{12} - \frac{C'_{13} C'_{23}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( C'_{16} - \frac{C'_{13} C'_{36}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_6 \quad (5.145)$$

De la même manière, on peut déterminer les expressions de  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$

$$\sigma'_2 = \left( C'_{12} - \frac{C'_{13} C'_{23}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( C'_{22} - \frac{C'^2_{23}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( C'_{16} - \frac{C'_{23} C'_{36}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_6 \quad (5.146)$$

Et :

$$\sigma'_6 = \left( C'_{16} - \frac{C'_{13} C'_{36}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( C'_{26} - \frac{C'_{23} C'_{36}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( C'_{16} - \frac{C'^2_{36}}{C'_{33}} \right) \varepsilon'_6 \quad (5.147)$$

En posant :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}} \quad (5.148)$$

$$i, j = 1, 2, 6$$

Par raison de symétrie du tenseur  $C'_{ij}$ :

$$Q'_{ij} = Q'_{ji} \quad (5.149)$$

Les trois relations (5.145), (5.146) et (5.147) peuvent être regroupées et réécrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix} \quad (5.150)$$

Les facteurs  $Q'_{ij}$  sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contraintes planes et la matrice  $[Q']$  est appelée matrice de rigidité réduite.

### Récapitulation:

$$\begin{aligned} \sigma'_i &\neq 0 & i &= 1, 2, 6 \\ \sigma'_i &= 0 & i &= 3, 4, 5 \\ \varepsilon'_i &\neq 0 & i &= 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon'_i &= 0 & i &= 4, 5 \end{aligned} \quad (5.151)$$

Les relations de l'élasticité en fonction des coefficients de souplesses s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} \quad (5.152)$$

Les relations de l'élasticité en fonction des coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix} \quad (5.153)$$

Les constantes de rigidité réduites  $Q'_{ij}$  sont exprimées en fonction des constantes de rigidité  $C'_{ij}$  par la relation suivante :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}} \quad (5.154)$$

$i, j = 1, 2, 6$

Les matrices  $Q'_{ij}$  et  $S'_{ij}$  sont inverses l'une de l'autre.

### 5.6.7 Matrice de rigidité réduite d'un composite orthotrope par rapport à ces axes principaux

Par rapport aux axes principaux (1,2,3), les constantes de rigidité  $C_{ij}$  sont calculées à partir du Tableau (5,2) en annulant la valeur de l'angle  $\theta$  ( $\theta=0$ ). Compte tenu de la relation (5.154), les composantes  $Q'_{ij}$  de la matrice de rigidité réduite exprimées dans les axes principaux (1,2,3) sont données comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \\ Q_{26} &= 0 & Q_{66} &= C_{66} & Q_{16} &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un composite unidirectionnel :

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{13} \\ C_{33} &= C_{22} \end{aligned}$$

La matrice de rigidité réduite dans les axes principaux s'écrit de la forme suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.155)$$

**Tableau 5.5** Coefficients  $C'_{ij}$  exprimés en fonction des coefficients  $C_{ij}$

$C'_{11} = C_{11}$	$C'_{14} = 0$
$C'_{12} = C_{12}$	$C'_{15} = 0$
$C'_{13} = C_{13}$	$C'_{24} = 0$
$C'_{22} = C_{22}$	$C'_{25} = 0$
$C'_{23} = C_{23}$	$C'_{33} = C_{22}$
$C'_{16} = 0$	$C'_{34} = 0$
$C'_{26} = 0$	$C'_{34} = 0$
$C'_{36} = 0$	$C'_{35} = 0$
$C'_{44} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta$	$C'_{46} = 0$
$C'_{45} = 0$	$C'_{56} = 0$
$C'_{55} = C_{55}$	$C'_{66} = C_{66}$

### Récapitulation

Par rapport aux axes principaux (1,2,3), l'état de contrainte planes est définie comme suit :

$$\sigma_i \neq 0 \quad i = 1, 2, 6$$

$$\sigma_i = 0 \quad i = 3, 4, 5$$

$$\varepsilon_i \neq 0 \quad i = 1, 2, 3, 6$$

Les relations de l'élasticité en fonction des coefficients de souplesses s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\varepsilon_3 = S_{13} \sigma_1 + S_{23} \sigma_2$$

Les relations de l'élasticité en fonction des coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13} \varepsilon_1 + C_{23} \varepsilon_2)$$

Les constantes de rigidité réduites  $Q_{ij}$  sont exprimées en fonction des constantes de rigidité  $C_{ij}$  par la relation suivante :

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (5.156)$$

Les matrices  $Q_{ij}$  et  $S_{ij}$  sont inverses l'une de l'autre, on peut déduire les composantes de la matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  en fonction de celles de la matrice de souplesse  $S_{ij}$  :

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

Et si on exprime les constantes de la matrice de souplesse  $S_{ij}$  en fonction des modules de l'ingénieur on obtient :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \quad Q_{66} = G_{LT}$$

**Tableau 5.6** Coefficients  $Q'_{ij}$  exprimés en fonction des coefficients  $Q_{ij}$

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

**Exercice 5.2**

Un composite unidirectionnel est soumis à un état de déformations dans le plan (x,y) (figure). Les fibres sont orientées à  $\theta=30^\circ$  par rapport à la direction (x). Les caractéristiques mécaniques de ce de composite sont données comme suit :

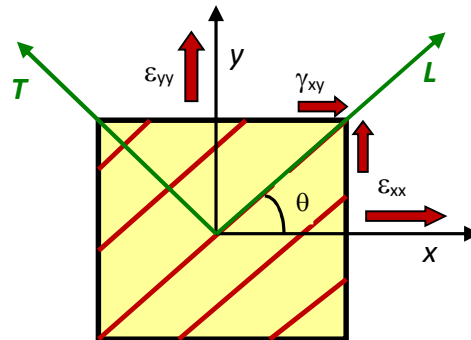
$E_L = E_1$	40 GPa
$E_T = E_2$	10 GPa
$\nu_{LT} = \nu_{12}$	0.32
$G_{LT} = G_{12}$	4.5 GPa

Si on suppose que le composite est en état de contraintes, déterminer :

1. Les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y)
2. Les contraintes dans le système des axes principaux du composite (L,T)

On donne :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 10^{-2} \\ \epsilon_{yy} &= -5 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{xy} &= 2 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$



**1- Calcul de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y)**

**Matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  par rapport axes principaux du composite (L,T) ( $\theta=0$ )**

Pour un pli unidirectionnel avec des fibres orientées à  $0^\circ$ , la matrice de rigidité (par rapport aux axes principaux) est donnée par la relation :

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{40}{1 - (0.32)^2 \frac{10}{40}} = 41.051 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11} = \frac{10}{40} (41.051) = 10.263 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = \nu_{12} Q_{22} = (0.32) 10.263 = 3.284 \text{ GPa}$$

$$Q_{66} = G_{LT} = G_{12} = 4.5 \text{ GPa}$$

Finalemment :

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Calcul des matrices de rigidité réduites  $Q'_{ij}$  hors axes principaux

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux ( $\theta = 30^\circ$ )

$\theta = 30^\circ$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$	$\sin^3 \theta = \frac{1}{8}$	$\sin^4 \theta = \frac{1}{16}$
$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$	$\cos^3 \theta = \frac{\sqrt{3}}{8}$	$\cos^4 \theta = \frac{9}{16}$

$Q'_{11} = 28.339 \text{ GPa}$	$Q'_{22} = 12.945 \text{ GPa}$	$Q'_{66} = 9.515 \text{ GPa}$
$Q'_{12} = 8.299 \text{ GPa}$	$Q'_{16} = 9.561 \text{ GPa}$	$Q'_{26} = 3.77 \text{ GPa}$

Donc :

$$[Q']_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 28.339 & 8.299 & 9.561 \\ 8.299 & 12.945 & 3.77 \\ 9.561 & 3.77 & 9.515 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$

Contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes  $(x,y)$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{1} \\ \sigma'_{2} \\ \sigma'_{6} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{1} \\ \varepsilon'_{2} \\ \varepsilon'_{6} \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 28.339 & 8.299 & 9.561 \\ 8.299 & 12.945 & 3.77 \\ 9.561 & 3.77 & 9.515 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} 10^{-3} = \begin{pmatrix} 433 \\ 94 \\ 267 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xx} = 433 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 94 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = 267 \text{ MPa}$$

## 2- Calcul de contraintes $\sigma_L$ , $\sigma_T$ et $\sigma_{LT}$ dans le système d'axes principaux (L,T)

On utilise les formules de changement de bases pour les contraintes, pour ce cas, on effectue une rotation  $\theta=30^\circ$  par rapport à l'axe (x) :

$$\sigma' = T_\sigma \cdot \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

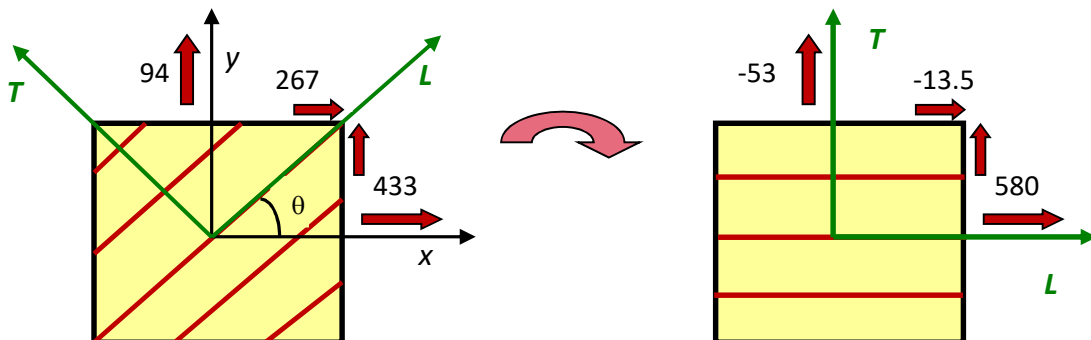
Soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 433 \\ 94 \\ 267 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 580 \\ -53 \\ -13.5 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = 580 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = -53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{LT} = -13.5 \text{ MPa}$$



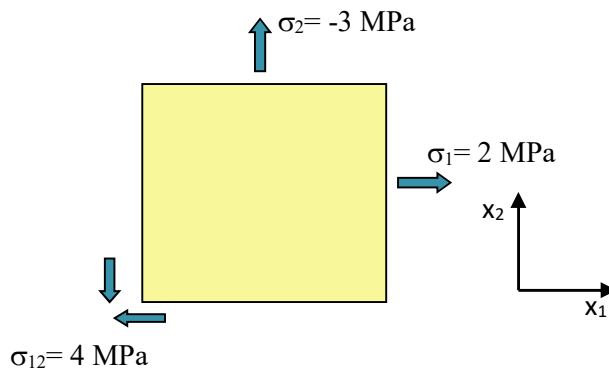
**Exercice 5.3**

Un composite unidirectionnel (carbone/époxyde), réalisé en fibres de carbone et d'une matrice époxyde et dont les caractéristiques sont portées sur le tableau suivant est soumis à un état de contraintes planes :

$E_f$	$E_m$	$\nu_{12}$	$G_{12}$
181 GPa	10.3 GPa	0.28	7.17

- 1) Déterminer la matrice de souplesse
- 2) Le Coefficient de Poisson  $\nu_{21}$
- 3) La matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$
- 4) Le champ de déformation  $\epsilon_{ij}$  correspondant à l'état de contraintes donné est représenté sur la figure

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_{12}$
2 MPa	-3 MPa	4 MPa



**Solution**

1. Calcul la matrice de souplesse  $S_{ij}$  dans le plan  $(x_1, x_2)$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{1}{181} = 0.0055 \qquad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{0.28}{181} = -0.0015$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2} = \frac{1}{10.3} = 0.0970 \qquad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{7.17} = 0.1394$$

Soit :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0055 & -0.0015 & 0 \\ -0.0015 & 0.0970 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1394 \end{bmatrix}$$



## 2. Calcul du coefficient de Poisson $\nu_{21}$

D'après la relation :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$$

Nous avons :

$$\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \nu_{12} = \frac{10.3}{181} (0.28) = 0.01593$$

## 3. Calcul de la matrice de rigidité réduite $Q_{ij}$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{181}{1 - (0.28)^2 \frac{10.3}{181}} = 181.8112 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11} = \frac{10.3}{181} (181.8112) = 10.3461 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22} = (0.28) 10.3461 = 2.8969 \text{ GPa}$$

$$Q_{66} = G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$$

Donc:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 181.8112 & 2.8969 & 0 \\ 2.8969 & 10.3461 & 0 \\ 0 & 0 & 7.17 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité peut être calculée directement en inversant la matrice de souplesse  $S_{ij}$

$$Q_{ij} = S_{ij}^{-1}$$

## 4. Calcul du champ de déformation $\epsilon_{ij}$

D'après la loi de Hooke, nous avons :

$$\epsilon = S \cdot \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0055 & -0.0015 & 0 \\ -0.0015 & 0.0970 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1394 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} 10^{-3} = \begin{pmatrix} 0.0155 \\ -0.2940 \\ 0.5576 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

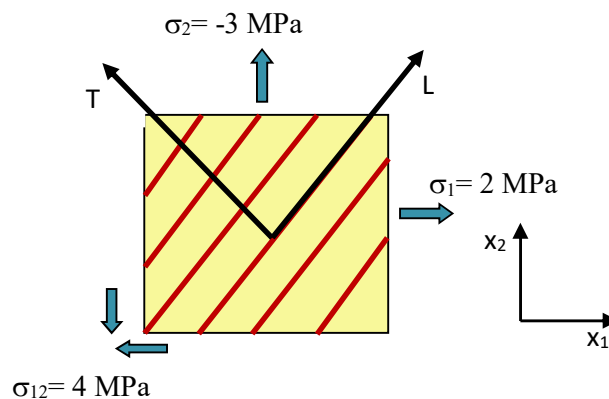
### Exercice 5.4

Un composite unidirectionnel (carbone/époxyde), réalisé en fibres de carbone et d'une matrice époxyde et dont les caractéristiques sont portées sur le Tableau 1, est soumis à un état de contraintes planes (Tableau 2). Si les fibres sont orientées à un angle  $\theta=60^\circ$  par rapport à la direction (x) (figure).

- 1) Déterminer la matrice de souplesse  $S'_{ij}$  hors axes principaux
- 2) La matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux
- 3) Le champ de déformation  $\varepsilon_{ij}$  hors axes principaux, correspondant à l'état de contraintes donné est représenté sur la figure

$E_f$	$E_m$	$\nu_{12}$	$G_{12}$
181 GPa	10.3 GPa	0.28	7.17

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_{12}$
2 MPa	-3 MPa	4 MPa



**Solution**

**1. Calcul la matrice de souplesse  $S'_{ij}$  hors axes principaux**

D'après l'exercice 7.2, la matrice de souplesse  $S_{ij}$  par rapport aux axes principaux est :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0055 & -0.0015 & 0 \\ -0.0015 & 0.0970 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1394 \end{bmatrix}$$

Sachant que  $\theta=60^\circ$ ,  $\cos\theta=0.500$  et  $\sin\theta=0,866$

Les composantes de la matrice de souplesse  $S'_{ij}$  hors axes principaux sont calculées grâce aux formule de passage entre les deux systèmes principaux et du composite.

$S'_{11} = S_{11}\cos^4\theta + S_{22}\sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$
$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$
$S'_{22} = S_{11}\sin^4\theta + S_{22}\cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$
$S'_{66} = 2(2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$
$S'_{26} = (2(S_{11} - S_{12}) - S_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (2(S_{12} - S_{22}) + S_{66})\sin\theta\cos^3\theta$

$$S'_{11} = 0.0055(0.5)^4 + 0.097(0.866)^4 + (2(-0.0015) + (0.1394))(0.866)^2(0.5)^2 = 0.0804$$

$$S'_{12} = (0.0055 + 0.097 - 0.1394)(0.866)^2(0.5)^2 + (-0.0015)((0.5)^4 + (0.866)^4) = -0.0078$$

$$S'_{22} = 0.0055(0.866)^4 + 0.097(0.5)^4 + (2(-0.0015) + (0.1394))(0.866)^2(0.5)^2 = 0.0347$$

$$S'_{66} = 2(2(0.0055 + 0.097 - 2(-0.0015)) - 0.1394)(0.866)^2(0.5)^2 + 0.1394((0.5)^4 + (0.866)^4) = 0.1139$$

$$S'_{26} = (2(0.0055 - (-0.0015)) - 0.1394)(0.866)^3(0.5) + (2((-0.0015) - 0.097) + 0.1394)(0.866)(0.5)^3 = -0.0469$$

Soit :

$$S'_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0804 & -0.0078 & 0 \\ -0.0078 & 0.0347 & -0.0469 \\ 0 & -0.0469 & 0.1139 \end{bmatrix}$$

**2. Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  hors axes principaux**

La matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  par rapport aux axes principaux

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{181}{1 - (0.28)^2 \frac{10.3}{181}} = 181.8112 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11} = \frac{10.3}{181} (181.8112) = 10.3461 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22} = (0.28) 10.3461 = 2.8969 \text{ GPa}$$

$$Q_{66} = G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$$

### Calcul des matrices de rigidité réduites $Q'_{ij}$ hors axes principaux

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

### Calcul de la matrice de rigidité réduite $Q'_{ij}$ hors axes principaux ( $\theta = 30^\circ$ )

$\theta = 60^\circ$

$\cos \theta = \frac{1}{2}$	$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$	$\cos^3 \theta = \frac{1}{8}$	$\cos^4 \theta = \frac{1}{16}$
$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$	$\sin^3 \theta = \frac{\sqrt{3}}{8}$	$\sin^4 \theta = \frac{9}{16}$

$Q'_{11} = 23.6467 \text{ GPa}$	$Q'_{22} = 109.3793 \text{ GPa}$	$Q'_{66} = 36.7357 \text{ GPa}$
$Q'_{12} = 32.4626 \text{ GPa}$	$Q'_{16} = 20.0535 \text{ GPa}$	$Q'_{26} = 54.1930 \text{ GPa}$

Donc :

$$[Q']_{60^\circ} = \begin{bmatrix} 23.6467 & 32.4626 & 20.0535 \\ 32.4626 & 12.945 & 54.1930 \\ 20.0535 & 54.1930 & 36.7357 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$

### 3. Calcul du champ de déformation $\varepsilon_j$

Le champ de déformation  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\gamma_{12}$  dans le système d'axes (x,y) est donné d'après la loi de Hooke par la relation:

$$\varepsilon = S \cdot \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0804 & -0.0078 & 0 \\ -0.0078 & 0.0347 & -0.0469 \\ 0 & -0.0469 & 0.1139 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0804 & -0.0078 & 0 \\ -0.0078 & 0.0347 & -0.0469 \\ 0 & -0.0469 & 0.1139 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} 10^{-3} = \begin{pmatrix} 0.1842 \\ -0.3073 \\ 0.5963 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

### Exercice 5.5

Une plaque constituée d'un composite unidirectionnel est soumise à un état de contraintes planes dans le plan (x,y) comme montré sur la figure. Les fibres sont orientées respectivement à  $\theta=0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction (x). Les caractéristiques mécaniques de ce de composite sont données comme suit :

$E_L = E_1$	40 GPa
$E_T = E_2$	10 GPa
$\nu_{LT} = \nu_{12}$	0.32
$G_{LT} = G_{12}$	4.5 GPa

Si on suppose que le composite est en état de contraintes, déterminer :

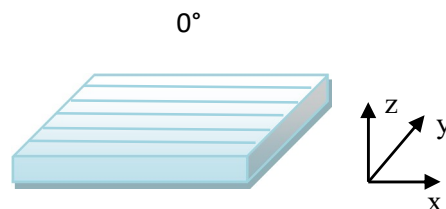
1. Les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y)
2. Les contraintes dans le système des axes principaux du composite (L,T)

On donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 10^{-1} \\ \varepsilon_{yy} &= 0 \\ \varepsilon_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

### Solution

#### 1<sup>er</sup> cas : $\theta=0^\circ$



**1- Calcul de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y)**

Matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  par rapport axes principaux du composite (L,T) ( $\theta=0$ )

En supposant que la plaque est dans un état de contraintes planes, pour déterminer les contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ , il faut déterminer au préalable la matrice de rigidité réduite rapportée aux axes principaux (L,T):

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{40}{1 - (0.32)^2 \frac{10}{40}} = 41.051 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11} = \frac{10}{40} (41.051) = 10.263 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} = \nu_{12} Q_{22} = (0.32) 10.263 = 3.284 \text{ GPa}$$

$$Q_{66} = G_{LT} = G_{12} = 4.5 \text{ GPa}$$

Finalemment :

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes (x,y) est ensuite calculée à partir des expression suivante :

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux ( $\theta = 0^\circ$ )

$\sin \theta = 0$	$\sin^2 \theta = 0$	$\sin^3 \theta = 0$	$\sin^4 \theta = 0$
$\cos \theta = 1$	$\cos^2 \theta = 1$	$\cos^3 \theta = 1$	$\cos^4 \theta = 0$

$Q'_{11} = 41.051 \text{ GPa}$	$Q'_{22} = 10.263 \text{ GPa}$	$Q'_{66} = 4.5 \text{ GPa}$
$Q'_{12} = 3.284 \text{ GPa}$	$Q'_{16} = 0 \text{ GPa}$	$Q'_{26} = 0 \text{ GPa}$

Donc :

$$[Q']_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$

Contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes  $(x,y)$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4105.1 \\ 328.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

2- Calcul de contraintes  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  dans le système d'axes principaux  $(L,T)$

On utilise les formules de changement de bases pour les contraintes, pour ce cas, on effectue une rotation  $\theta=30^\circ$  par rapport à l'axe  $(x)$  :

$$\sigma' = T_\sigma \cdot \sigma$$

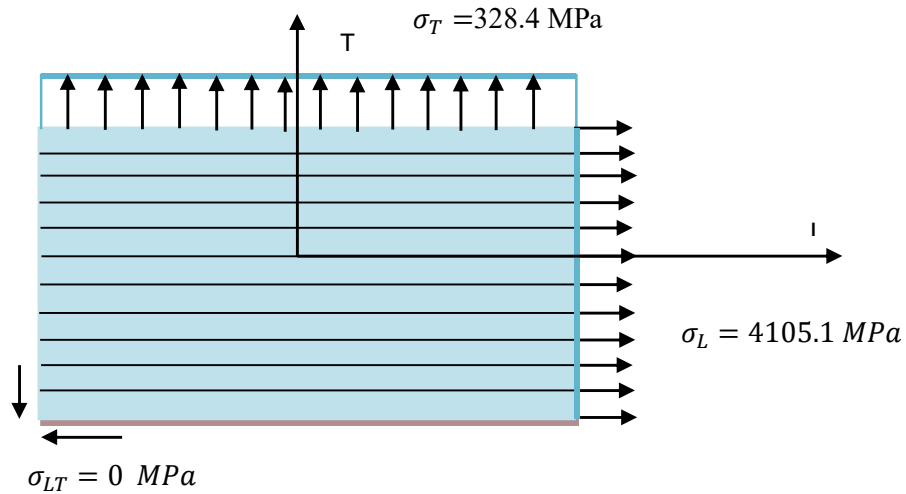
$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4105.1 \\ 328.4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4105.1 \\ 328.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

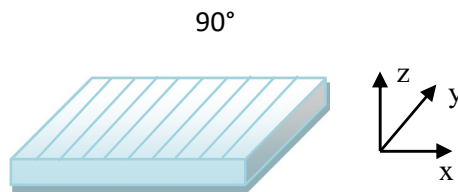
$$\begin{aligned} \sigma_L &= 4105.1 \text{ MPa} \\ \sigma_T &= 328.4 \text{ MPa} \\ \sigma_{LT} &= 0 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Ces résultats sont représentés sur la figure suivante :



2<sup>ème</sup> cas :  $\theta=90^\circ$

Les fibres sont supposées orientées dans la direction inverse de l'application de l'effort de traction. La direction des fibres fait un angle de  $90^\circ$  avec la direction  $x$ .



**1- Calcul de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes  $(x,y)$**

Matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  par rapport axes principaux du composite  $(L,T)$  ( $\theta=0^\circ$ )

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes  $(x,y)$  est ensuite calculée à partir des expression suivante :

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$



Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux ( $\theta = 90^\circ$ )

$\sin \theta = 1$	$\sin^2 \theta = 1$	$\sin^3 \theta = 1$	$\sin^4 \theta = 1$
$\cos \theta = 0$	$\cos^2 \theta = 0$	$\cos^3 \theta = 0$	$\cos^4 \theta = 0$

$$[Q']_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.263 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 41.051 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$

Contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes  $(x,y)$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{66} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{66} \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10.263 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 41.051 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1026.3 \\ 328.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

2- Calcul de contraintes  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  dans le système d'axes principaux  $(L,T)$

On utilise les formules de changement de bases pour les contraintes, pour ce cas, on effectue une rotation  $\theta=30^\circ$  par rapport à l'axe  $(x)$  :

$$\sigma' = T_\sigma \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Soit :

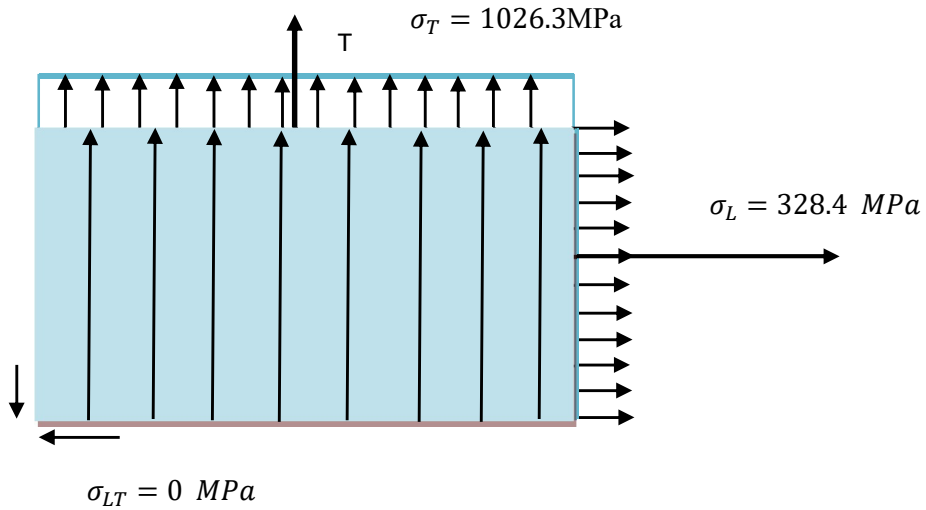
$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1026.3 \\ 328.4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1026.3 \\ 328.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = 328.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = 1026.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{LT} = 0 \text{ MPa}$$

Ces résultats sont représentés sur la figure suivante :



**Exercice 5.6**

Une plaque constituée d'un composite unidirectionnel est soumise à un état de contraintes planes dans le plan  $(x,y)$  comme montré sur la figure. Les fibres sont orientées respectivement à  $\theta= 30^\circ$  et  $45^\circ$  par rapport à la direction  $(x)$ . Les caractéristiques mécaniques de ce de composite sont données comme suit :

$E_L = E_1$	40 GPa
$E_T = E_2$	10 GPa
$\nu_{LT} = \nu_{12}$	0.32
$G_{LT} = G_{12}$	4.5 GPa

Si on suppose que le composite est en état de contraintes, déterminer :

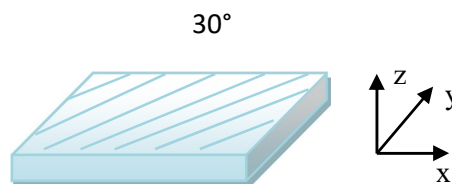
1. Les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes  $(x,y)$
2. Les contraintes dans le système des axes principaux du composite  $(L,T)$

On donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 10^{-1} \\ \varepsilon_{yy} &= 54 \cdot 10^{-2} \\ \varepsilon_{xy} &= 3 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

**1<sup>er</sup> cas :  $\theta=30^\circ$**

La direction des fibres fait un angle de  $30^\circ$  avec la direction  $x$ .



**1- Calcul de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y)**

Matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  par rapport axes principaux du composite (L,T) ( $\theta=0^\circ$ )

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes (x,y) est ensuite calculée à partir des expression suivante :

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux ( $\theta = 90^\circ$ )

$\sin \theta = \frac{1}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$	$\sin^3 \theta = \frac{1}{8}$	$\sin^4 \theta = \frac{1}{16}$
$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$	$\cos^3 \theta = \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\cos^4 \theta = \frac{9}{16}$

$$[Q']_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 28.339 & 8.299 & 9.561 \\ 8.299 & 12.945 & 3.770 \\ 9.561 & 3.770 & 9.515 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

Contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y) :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{66} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{66} \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 28.339 & 8.299 & 9.561 \\ 8.299 & 12.945 & 3.770 \\ 9.561 & 3.770 & 9.515 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-1} \\ 5.4 \times 10^{-2} \\ 3 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3568.876 \\ 1642.03 \\ 1445.13 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

2- Calcul des contraintes  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  dans le système d'axes principaux (L,T)

On utilise les formules de changement de bases pour les contraintes, pour ce cas, on effectue une rotation  $\theta=30^\circ$  par rapport à l'axe (x) :

$$\sigma' = T_\sigma \cdot \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Soit :

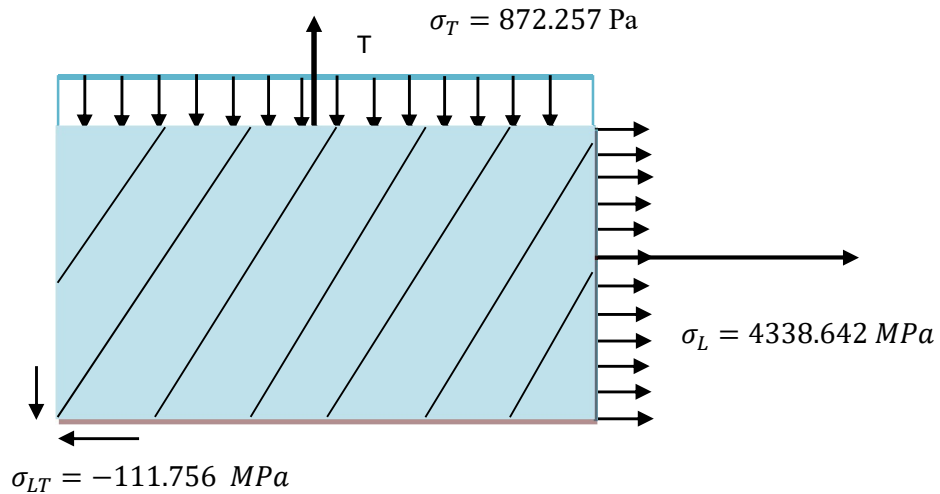
$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3568.876 \\ 1642.03 \\ 1445.13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4338.642 \\ 872.257 \\ -111.756 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = 4338.642 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = 872.257 \text{ MPa}$$

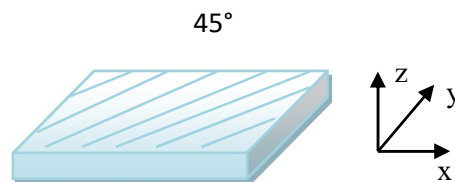
$$\sigma_{LT} = -111.756 \text{ MPa}$$

Ces résultats sont représentés sur la figure suivante :



2<sup>ème</sup> cas :  $\theta=45^\circ$

La direction des fibres fait un angle de  $30^\circ$  avec la direction x.



**1- Calcul de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y)**

Matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$  par rapport axes principaux du composite (L,T) ( $\theta=0^\circ$ )

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 41.051 & 3.284 & 0 \\ 3.284 & 10.263 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité réduite, rapportée aux axes (x,y) est ensuite calculée à partir des expression suivante :

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux ( $\theta = 45^\circ$ )

$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$	$\sin^3 \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$\sin^4 \theta = \frac{1}{4}$
$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$	$\cos^3 \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$\cos^4 \theta = \frac{1}{4}$

$$[Q']_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 18.970 & 9.970 & 7.697 \\ 9.970 & 18.970 & 7.697 \\ 7.697 & 7.697 & 11.186 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

Contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans le système d'axes (x,y) :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 18.970 & 9.970 & 7.697 \\ 9.970 & 18.970 & 7.697 \\ 7.697 & 7.697 & 11.186 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-1} \\ 5,4 \times 10^{-2} \\ 3 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2666.290 \\ 2252.290 \\ 1520.928 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

2- Calcul de contraintes  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  dans le système d'axes principaux (L,T)

On utilise les formules de changement de bases pour les contraintes, pour ce cas, on effectue une rotation  $\theta=30^\circ$  par rapport à l'axe (x) :

$$\sigma' = T_\sigma \sigma$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Soit :

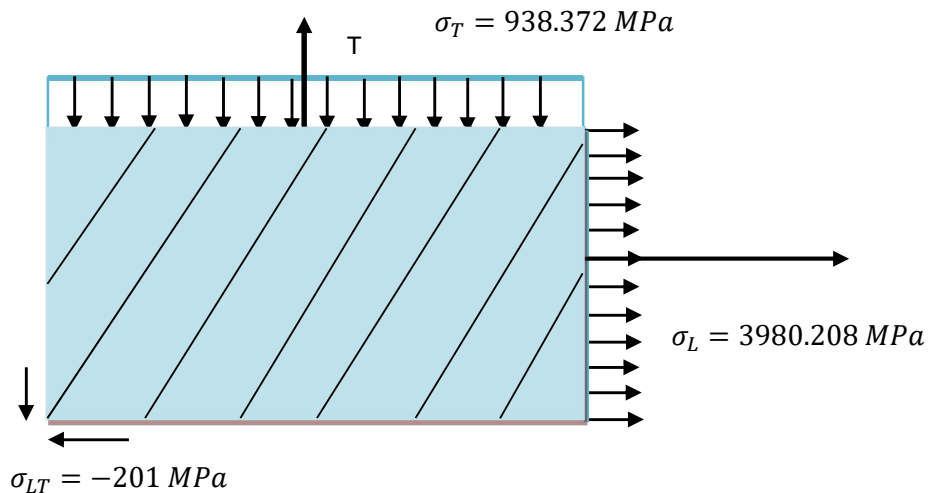
$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2666.290 \\ 2252.290 \\ 1520.928 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3980.208 \\ 938.372 \\ -201 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = 3980.208 \text{ MPa}$$

$$\sigma_T = 938.372 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{LT} = -201 \text{ MPa}$$

Ces résultats sont représentés sur la figure suivante :



## Comportement en flexion des stratifiés composites

### 6.1 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide délimité par deux plans parallèles distants l'un de l'autre d'une distance  $h(x,y)$  petite par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur), notée  $h(x,y)$  (Figure 6.1). Le plan  $(O,x,y)$  est dit plan de référence. L'axe  $Oz$  correspond à la direction de l'épaisseur. En fonction de l'ordre de grandeur de  $h(x,y)$  par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur  $h(x,y)$  varie en sens inverse de l'influence du de cisaillement transversal CT. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène (composite) ou non (isotrope).

### 6.2 Classification des plaques

Les éléments de plaques en flexion du type déplacement peuvent être classés en deux catégories : les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff (cisaillement transversal négligé) et les éléments basés sur la théorie de Hencky- Mindlin-Reissner (avec cisaillement transversal).

### 6.3 Champ de déplacement

La théorie générale des plaques est basée sur l'expression des déplacements en tout point  $M(x,y,z)$ , sous la forme d'un polynôme limité généralement au troisième degré. Le champ de déplacement s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y) \end{cases} \quad (6.1)$$

Le déplacement d'un point quelconque  $M(x,y,z)$  est écrit sous la forme d'une série de la variable  $(z)$  à coefficients en  $(x,y)$  à partir d'un point de référence  $M_0(x,y,0)$  appartenant au plan de référence  $(O,x,y)$ . Le champ de déplacement du point  $M_0(x,y,0)$  est désigné par :

$$\begin{cases} u_0 = u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ v_0 = v(x, y, 0) = v_0(x, y) \\ w_0 = w(x, y, 0) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (6.2)$$

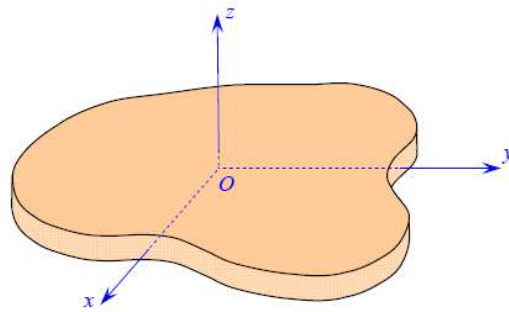


Fig. 6.1 Élément de plaque

#### 6.4 Schémas du premier ordre

Les schémas du premier ordre sont basés sur l'hypothèse de Kirchhoff qui stipule que les sections droites restent droites après chargement. L'expression mathématique de cette hypothèse consiste à développer les déplacements de tout point  $M(x, y, z)$  de la plaque, notés  $u, v$  et  $w$  en polynômes du premier degré en  $z$  en fonctions des déplacements d'un point de référence du plan de référence  $M_0(x, y, 0)$ , notés  $u_0, v_0$  et  $w_0$ . Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement selon la variable  $z$ . Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y, 0) \end{cases} \quad (6.3)$$

Ou bien :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (6.4)$$

Dans la relation (6.4) :

$u_0, v_0$  : déplacement en membrane

$w_0$  : déplacement transversal (flèche)

$\varphi_x, \varphi_y$  : rotations des sections droites respectivement dans les plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$



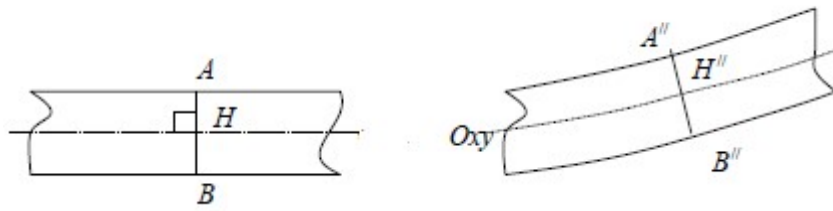


Fig. 6.2 Déformation d'une section dans le cas d'un schéma du premier degré

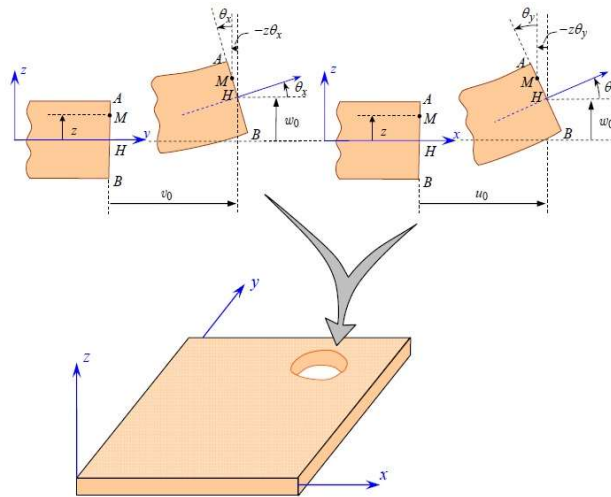


Fig. 6.3 Schématisation des déformations dans le cas des théories du premier ordre

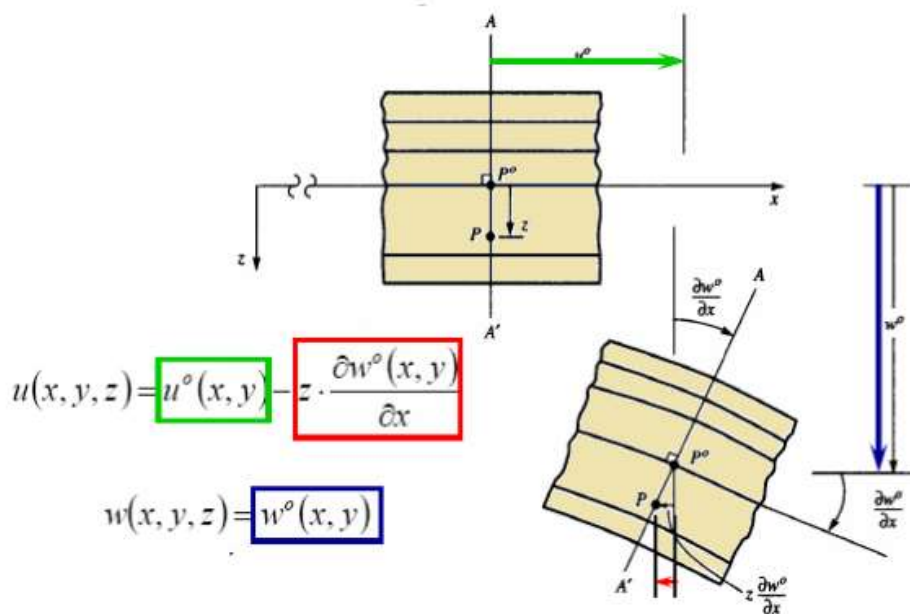


Fig. 6.4 Composantes de déplacement par rapport à la direction (x) dans un schéma du premier degré

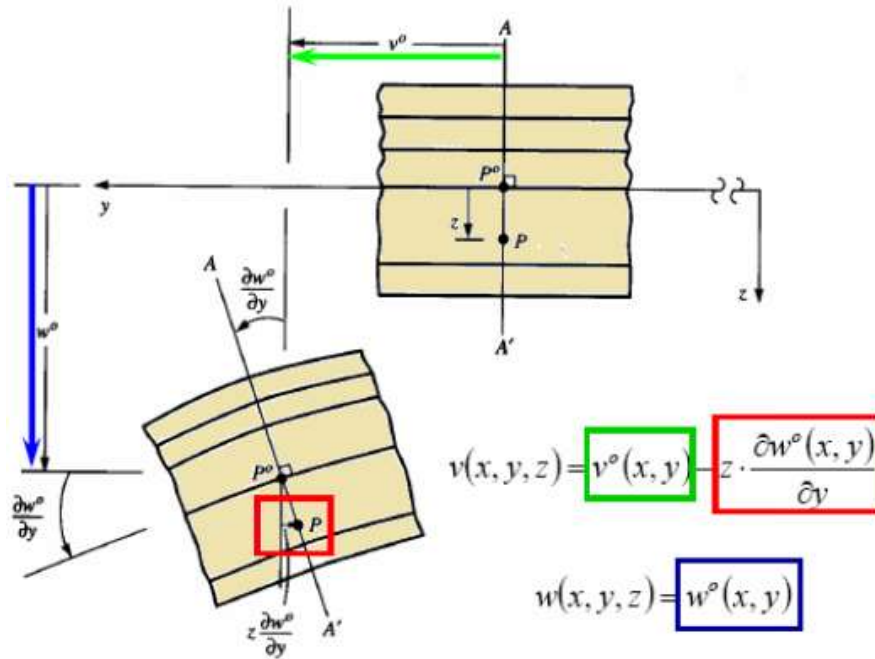


Fig. 6.5 Composantes de déplacement par rapport à la direction (y) dans un schéma du premier degré

### 6.5 Champ de déformation

Dans le cas d'un schéma du troisième ordre, le champ de déformation est déduit du champ de déplacement grâce à la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (6.5)$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} + \varphi_x(x, y) + 2z\psi_x(x, y) \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( 2\psi_y + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3\varphi_y + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \left( 2\psi_x + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3\varphi_x + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Et dans le cas d'un schéma du premier ordre les équations (6.6) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (6.7)$$

### 6.6 Champ de contraintes

Pour le cas d'un stratifié unidirectionnel ou orthotrope constitué de (k) couches, la relation qui lie les contraintes aux déformations dans la couche, rapportée au référentiel du stratifié s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$C'_{ij}$  représentent les coefficients de rigidité de la couche (k) du stratifié. Les déformations sont exprimées en fonction de la variable (z), ceci implique que l'expression des contraintes est aussi un polynôme en (z). La théorie des plaques est basée sur la simplification du problème de l'analyse du comportement mécanique d'une plaque en 3D (x,y,z) à un problème à deux dimensions (x,y). Cette hypothèse stipule que les contraintes normales au plan de la couche ( $\sigma_{zz}$ ) sont négligeables dans la plaque par rapport aux autres composantes ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ ) :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{33} = 0 \quad (6.9)$$

En tenant compte de cette hypothèse les équations de l'élasticité (6.7) deviennent :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Cette relation peut être réécrite en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse des plans (x,z) et (y,z) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{16} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{26} & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & C'_{36} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & C'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Dans cette relation l'état de contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  et celui des déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$  et  $\varepsilon_{zz}$  correspond à un état de contraintes planes. Si on applique les résultats liés à cet état de contraintes, on peut exprimer les contraintes dans la couche (k) en fonction des coefficients de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Avec :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C'_{33}} (C'_{13}\varepsilon_{xx} + C'_{23}\varepsilon_{yy} + C'_{36}\gamma_{xy}) \quad (6.13)$$

Et :

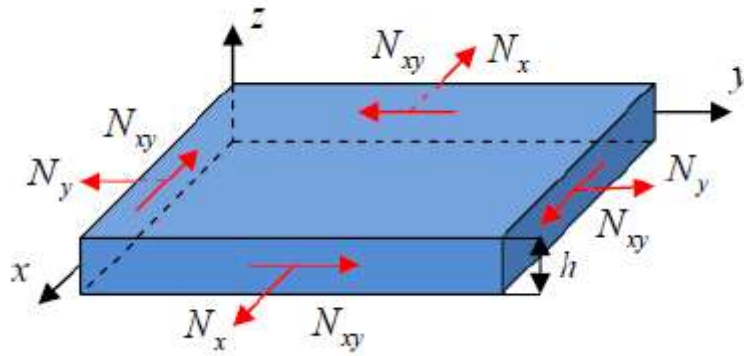
$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}C'_{j3}}{C'_{33}} ; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (6.14)$$

Sachant que le tenseur  $[Q']$  est symétrique :

$$Q'_{ij} = Q'_{ji} \quad (6.15)$$

### 6.7 Résultantes et moments

Soient  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  les composantes qui représentent les résultantes par unité de longueur de la plaque des contraintes normales suivant les directions (x) et (y) et des contraintes de cisaillement dans le plan (x,y) comme illustré sur la (Figure 6.6) :



**Fig. 6.6** Résultantes en membrane par unité de longueur de la plaque des actions exercées sur un élément de plaque

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x,y)$  est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (6.16)$$

Ou bien :

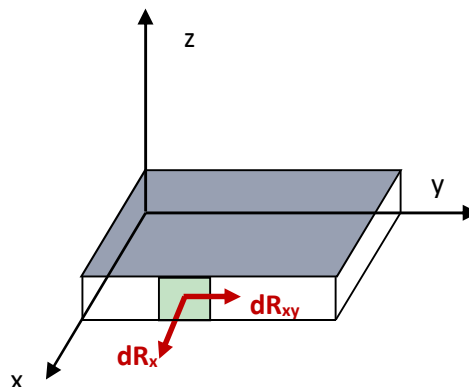
$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (6.17)$$

Ces résultantes sont relatives à l'unité de longueur d'une section droite du stratifié. La résultante de l'action exercée sur un élément de surface de la plaque de longueur ( $dy$ ) et normal à la direction  $x$  est la superposition d'une résultante normale:

$$dR_x = N_x \cdot dy \quad (6.18)$$

Et d'une résultante de cisaillement :

$$dR_{xy} = N_{xy} \cdot dy \quad (6.19)$$



**Fig. 6.7** Résultantes par unité de longueur de la plaque

En passant d'une couche à une autre du stratifié, les contraintes sont discontinues, la relation (6.17) devient :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (6.20)$$

### 6.8 Résultantes en cisaillement

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par la relation suivante :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (6.21)$$

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié (Figure 6.8).

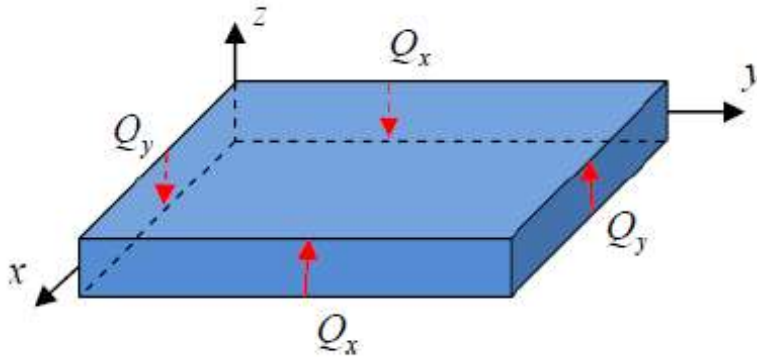


Fig. 6.8 Représentation schématisée des résultantes en cisaillement

### 6.9 Moments de flexion-torsion

Les contraintes de traction et de cisaillement exercées sur un élément de plaque du stratifié génèrent des moments résultants de flexion et de torsion qui sont définis par unité de longueur.

Ces moments sont donnés par la relation suivante :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (6.22)$$

Dans la relation (6.22),  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions x et y,  $M_{xy}$  représente le moment de torsion (Figure 6.9).

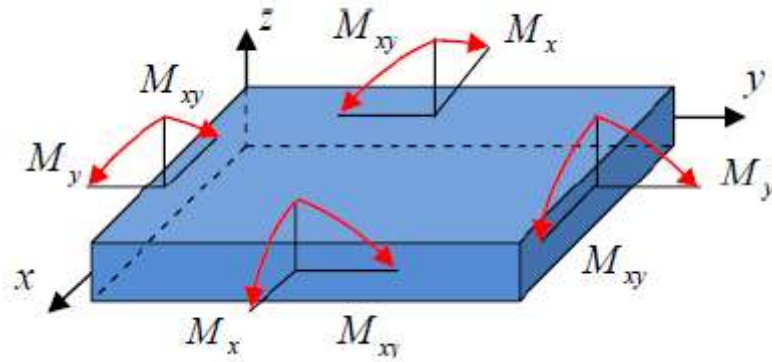


Fig. 6. 9 Représentation schématique des moments de flexion et de torsion

## 6.10 Relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier ordre

### 6.10.1 Equations du mouvement

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre des plaques sont données par la forme élémentaire des équations de mouvement. Si le repère choisi est galiléen et si on suppose que les efforts de volume exercés sur la plaque (champ de gravité, champ magnétique...) ne sont pas négligées, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit localement suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.23)$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (6.24)$$

$f_x$ ,  $f_y$  et  $f_z$ : sont les forces volumiques appliquées

$a_x$ ,  $a_y$  et  $a_z$ : sont les composantes du vecteur d'accélération et  $\rho$  la masse volumique

### 6.10.2 Equations de mouvement relatives aux résultantes en membranes

Les relations fondamentales relatives à un élément de plaque sont obtenues par intégration des équations (6.24) sur l'épaisseur du stratifié. L'intégration de la première équation du mouvement conduit à :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz \quad (6.25)$$

D'après la relation (6.16) :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (6.26)$$

De même :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (6.27)$$

Et :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad (6.28)$$

Ces contraintes représentent les contraintes de cisaillement exercées sur les faces extérieures et inférieures du stratifié. Ces contraintes sont souvent négligées. Dans le cas où c'est nécessaire de considérer ces contraintes, on note :

$$\sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) = \tau_{1x} \quad (6.29)$$

Et :

$$\sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \tau_{2x} \quad (6.30)$$

Donc la relation (6.28) devient :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (6.31)$$

Le dernier terme de la première équation du mouvement est :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_x dz = F_x \quad (6.32)$$

Le second membre de l'équation (6.25) fait intervenir les composantes du vecteur déplacement (u,v,w) en fonction de (x,y,z) et du temps (t). Pour le cas d'un schéma du premier ordre :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases}$$

Nous avons :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x, y, z) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) dz = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz \quad (6.33)$$



Donc, on peut noter :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (6.34)$$

Avec :

$$\rho_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \quad (7.35)$$

Et :

$$R = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz \quad (6.36)$$

L'expression finale de la première équation de mouvement devient :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (6.37)$$

De la même manière, l'intégration de la deuxième équation de mouvement conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (6.38)$$

Avec :

$$\sigma_{yz} \left( \frac{h}{2} \right) = \tau_{1y} \quad (6.39)$$

$$\sigma_{yz} \left( -\frac{h}{2} \right) = \tau_{2y} \quad (6.40)$$

Et :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_y dz = F_y \quad (6.41)$$

### 6.10.3 Equations de mouvement relatives aux résultantes de cisaillement

L'intégration suivant de la troisième équation de mouvement conduit à :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_z dz \quad (6.42)$$

Dans cette relation (6.42) le second terme s'écrit comme suit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \quad (6.43)$$

Or, l'expression de l'effort tranchant  $Q_y$  est donné par :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz = Q_y \quad (6.44)$$

Alors, la relation (6.43) devient :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (6.45)$$

De même, le troisième terme s'écrit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (6.46)$$

Quand au premier terme, il s'écrit comme suit :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad (6.47)$$

Les contraintes  $\sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right)$  et  $\sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right)$ , représentent les composantes de pression exercées sur les faces inférieure et supérieure de la plaque. Soit en utilisant la notation suivante :

$$q = q(x, y) = \sigma_{zz} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad (6.48)$$

Ainsi :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = q \quad (6.49)$$

Le dernier terme de l'équation (6.42), s'écrit en prenant en considération la relation (6.35):

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho a_z dz = \rho_s a_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (6.50)$$

Si on substitue les relations (6.45), (6.46), (6.49) et (6.50) dans la relation (6.42), on obtient :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (6.51)$$

Avec :

$$F_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_z dz \quad (6.52)$$

#### 6.10.4 Equations de mouvement relatives aux moments

Les équations de mouvement relatives aux moments sont obtenues en multipliant par (z) les deux premières équations de la relation (6.24), et en intégrant suivant l'épaisseur du stratifié.

Considérons la première équation :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \rho a_x dz \quad (6.53)$$

Or, les expressions des moments de flexion et de torsion sont données par :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz = M_x \quad (6.54)$$

Et :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz = M_{xy} \quad (6.55)$$

Si on substitue les relations (6.54) et (6.55) dans la relation (6.53), on aboutit à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \rho a_x dz \quad (6.56)$$

Si on utilise la méthode d'intégration par parties, le troisième terme de cette relation se calcule de la manière suivante :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left( \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left( -\frac{h}{2} \right) - Q_x = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \quad (6.57)$$

De même, le second membre de l'équation ( ) :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \rho a_x dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right) dz = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (6.58)$$

D'après la relation (6.36), nous avons :

$$R = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z dz$$

Et si on pose :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = I_{xy} \quad (6.59)$$

Alors, le second terme de l'équation (6.56) devient :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \rho a_x dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (6.60)$$

$I_{xy}$  est le moment d'inertie par rapport au plan (O,x,y). Finalement la relation (6.56) devient :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x + P_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (6.61)$$

Avec :

$$P_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_x dz \quad (6.62)$$

$P_x$  représente la composante des moments des forces volumiques exercées. De la même manière, la deuxième équation de la relation (6.24) devient :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) - Q_y + P_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (6.63)$$

Avec :

$$P_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z f_y dz \quad (6.64)$$

Les relations (6.37),(6.38),(6.51),(6.61) et (6.63) constituent les équations d'équilibre ou équations du mouvement dans le cas de la théorie classique des plaques. Elles s'appliquent aussi bien à des plaques homogènes (isotropes) qu'à des stratifiés (composites).

Finalement on obtient les équations de mouvement

1 <sup>ière</sup>	$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$
2 <sup>ième</sup>	$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$
3 <sup>ième</sup>	$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$
4 <sup>ième</sup>	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x + P_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$
5 <sup>ième</sup>	$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) - Q_y + P_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$

La combinaison des trois dernières relations d'équilibre permet d'écrire une nouvelle équation du mouvement indépendante des résultantes de cisaillement :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \quad (6.65)$$

## 6.11 Loi de comportement d'un stratifié multicouches

### 6.11.1 Hypothèses de la théorie des stratifiés <sup>xy</sup>

La théorie classique des stratifiés est basée sur l'utilisation d'un schéma du premier ordre. Elle s'appuie sur l'hypothèse de base qui consiste à négliger le cisaillement transverse:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (6.66)$$

Dans le cadre d'un schéma du premier ordre, les composantes nulles du cisaillement transverse deviennent :

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (6.67)$$

Et :

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (6.68)$$

Alors :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (6.69)$$

Et :

$$\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (6.70)$$

Pour le cas d'un schéma du premier ordre Le champ de déplacement est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (6.71)$$

Si on substitue les relations (6.69) et (6.70) dans la relation (6.71), on obtient :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (6.72)$$

Dans le cadre de cette théorie et dans le cadre d'un schéma du premier ordre, la déformée de la normale au plan moyen (O,x,y) est un segment de droite [AB], normal à la déformée de ce plan moyen.

### 6.11.2 Champ de déformations

Le champ de déformation s'écrit en tenant en considération les relations (6.66), (6.69), (6.70) et (6.72) :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right. \quad (6.73)$$

Le tenseur de déformation en un point quelconque (M) est donné par l'expression suivante :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

Ou bien en notation matricielle (notation de Voigt) :

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

D'après la relation (6.73), le champ de déformation est composé de la superposition de déformations en membrane qui s'expriment en fonction des déplacements  $(u_0, v_0)$  dans le plan  $(x, y)$  et de déformations en flexion et torsion qui sont notées respectivement :

$$\varepsilon_m = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

Et :

$$\varepsilon_f = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment par :

$$\varepsilon_f = z \cdot \kappa(x, y) \quad (6.78)$$

Avec :

$$\kappa(x, y) = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

La matrice  $[\kappa(x, y)]$  est appelée matrice des courbures de la plaque stratifiée sollicitée en flexion. Les angles de rotations sont exprimés en fonction du déplacement transversal  $w_0(x, y)$  en utilisant la notation suivante :

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (6.80)$$

Et :

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (6.81)$$

Si on substitue (6.80) et (6.81) dans (6.71), le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\theta_y \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\theta_x \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (6.82)$$

Finalement, le champ de déformation s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_m \quad (6.83)$$

Ou bien en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

Ou bien encore :

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + \varepsilon_f(x, y) = \varepsilon_m(x, y) + z\kappa(x, y) \quad (6.85)$$

### 6.11.3 Champ de contraintes

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, le champ de contraintes pour une couche (k) est donné par la relation :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (6.86)$$

Or, d'après la relation (6.66), nous avons :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Alors, la relation (6.86), devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

Ce qui conduit à :

$$\sigma_{xx} = Q'_{11} \varepsilon_{xx} + Q'_{12} \varepsilon_{yy} + Q'_{16} \gamma_{xy} \quad (6.88)$$

$$\sigma_{yy} = Q'_{12} \varepsilon_{xx} + Q'_{22} \varepsilon_{yy} + Q'_{26} \gamma_{xy} \quad (6.89)$$

$$\sigma_{xy} = Q'_{16} \varepsilon_{xx} + Q'_{26} \varepsilon_{yy} + Q'_{66} \gamma_{xy} \quad (6.90)$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (6.91)$$

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (6.92)$$

Sous forme matricielle, les équations (6.88)-(6-90), deviennent :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

Avec :

$$Q'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \quad (6.94)$$

$Q'_k$  est la matrice de rigidité réduite de la couche (k). Si on combine les relations (6.94), (6.95) et (6.85), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

Ou bien :

$$\sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k \kappa(x, y) \quad (6.96)$$

$\sigma_k$  représente les contraintes dans la couche (k)

Z varie dans la zone :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$

$h_k$  et  $h_{k-1}$  représentent les bornes supérieure et inférieure de la couche (k)

La matrice de rigidité réduite  $Q'_k$  varie d'une couche à l'autre ce qui engendre une discontinuité du champ de contraintes entre les différentes couches.

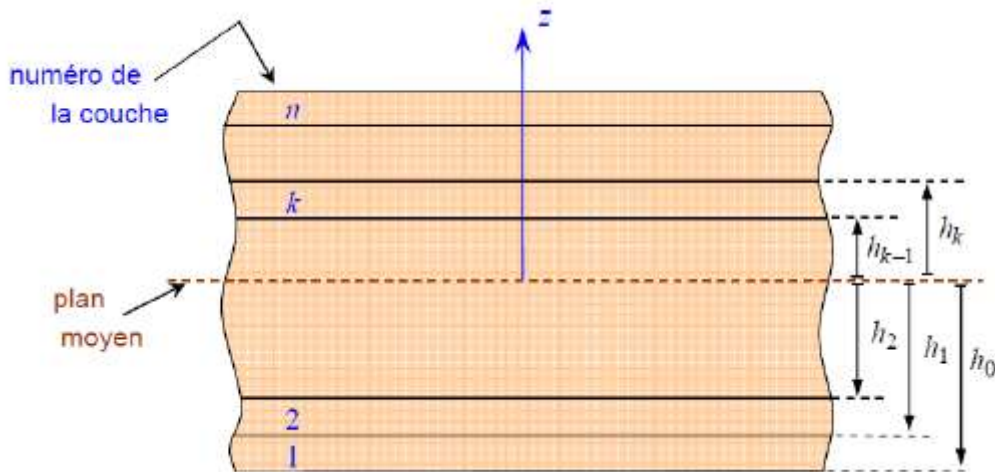


Fig.6.10 Numérotation des couches d'un stratifié



### 6.11.4 Expressions des résultantes et moments

#### 6.11.4.1 Résultantes en membranes

L'expression des résultantes en membranes est donnée par la relation :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (6.98)$$

La substitution de la relation (6.97) dans (6.98), conduit à :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + Q'_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \end{aligned} \quad (6.99)$$

Et en intégrant par rapport à l'épaisseur :

$$N(x, y) = \left( \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right) \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n (h^2_k - h^2_{k-1}) \right) \kappa(x, y) \quad (6.100)$$

Si on introduit les matrices suivantes :

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \quad (6.101)$$

Ou bien en notation indicielle :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (6.102)$$

Et :

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^2_k - h^2_{k-1}) Q'_k \quad (6.103)$$

Ou bien en notation indicielle :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^2_k - h^2_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (6.104)$$

L'expression finale des résultantes en membrane devient :

$$N(x, y) = A \cdot \varepsilon_m(x, y) + B \cdot \kappa(x, y) \quad (6.105)$$

Et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}_{k_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

### 6.11.4.2 Moments de flexion et de torsion

Le champ des moments est donné par la relation :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (6.107)$$

Si on substitue la relation (6.97) dans (6.107), on obtient :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \cdot Q'_k \cdot \varepsilon_m(x, y) + z^2 \cdot Q'_k \cdot \kappa(x, y)] dz \quad (6.108)$$

Le développement de cette relation (6.108), conduit au résultat suivant :

$$M_f(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h^2_k - h^2_{k-1}) (Q'_{ij})_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^3_k - h^3_{k-1}) (Q'_{ij})_k \right] \kappa(x, y) \quad (6.109)$$

En notant:

$$D = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^3_k - h^3_{k-1}) Q'_k \right] \quad (6.110)$$

Ou bien en notation indicielle :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^3_k - h^3_{k-1}) (Q'_{ij})_k \right] \quad (6.111)$$

Sachant que d'après la relation (6.104), nous avons :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^2_k - h^2_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

Alors, l'expression finale des moments devient :

$$M_f(x, y) = B \cdot \varepsilon_m(x, y) + D \cdot \kappa(x, y) \quad (6.122)$$

Et sous forme matricielle :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}_{k_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.113)$$

Les moments de flexion et de torsion sont exprimés en fonction des courbures en flexion et en torsion et des déformations en membrane.

### 6.11.5 Equation constitutive d'un stratifié

L'équation constitutive d'un stratifié permet d'exprimer les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient par regroupement des relations (6.106) et (6.113), ce qui ramène à une seule expression matricielle écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

Et sous forme compactée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

### 6.11.5.1 Calcul des contraintes et des déformations

L'équation de constitutions permet d'exprimer les résultantes en membrane ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) et les moments de flexion et de torsion ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ), en fonction des déformations en membrane ( $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ ) et des courbures ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ). Dans le calcul de structures composites stratifiées, on est souvent amené à déterminer les déformations en membrane ainsi que les moments de flexion et de torsion.

### 6.11.5.2 Calcul des déformations en membrane

En partant des relations (6.105) et (6.112) :

$$N = A. \varepsilon_m + B. \kappa$$

Et :

$$M_f = B. \varepsilon_m + D. \kappa$$

En inversant la première équation, nous aurons :

$$\varepsilon_m = A^{-1}. N + A^{-1}. B. \kappa \quad (6.116)$$

Si on substitue la relation (6.116) dans la seconde relation, on obtient :

$$M_f = B. A^{-1}. N + (D - B. A^{-1}. B). \kappa \quad (6.117)$$

Si on introduit les notations suivantes :

$$A^* = A^{-1}$$

$$B^* = -A^{-1}. B$$

$$C^* = B. A^{-1} = -B^{*T}$$

$$D^* = D - B. A^{-1}. B = D + B. B^*$$

(6.118)

Ce qui permet d'écrire :

$$\varepsilon_m = A^*. N + B^*. \kappa \quad (6.119)$$

Et :

$$M_f = C^*. N + D^*. \kappa \quad (6.120)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (6.121)$$

A partir de la relation (6.120), nous avons :

$$\kappa = D^{*-1} \cdot M_f - D^{*-1} \cdot C^* \cdot N \quad (6.122)$$

Et en substituant (6.122) dans (6.119), on obtient :

$$\varepsilon_m = A^* \cdot N + B^* (D^{*-1} \cdot M_f - D^{*-1} \cdot C^* \cdot N) = (A^* - B^* \cdot D^{*-1} \cdot C^*) \cdot N + B^* \cdot D^{*-1} \cdot M_f \quad (6.123)$$

Les deux expressions (6.123) et (6.122) sont regroupées et écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\sim & B^\sim \\ C^\sim & D^\sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} \quad (6.124)$$

Avec :

$$A^\sim = A^* - B^* \cdot D^{*-1} \cdot C^* \quad (6.125)$$

$$B^\sim = B^* \cdot D^{*-1}$$

$$C^\sim = -D^{*-1} \cdot C^*$$

$$D^\sim = D^{*-1}$$

### 6.11.6 Modes de stratification particuliers

Selon la séquence d'empilement, on distingue :

#### 6.11.6.1 Stratifié équilibré (Angle ply laminate)

Ce stratifié comporte autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$ .

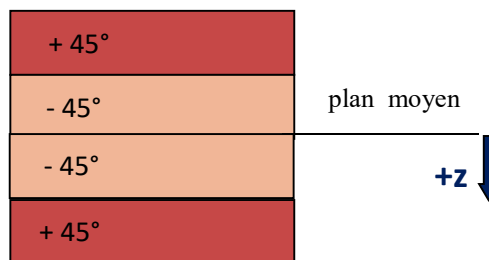


Fig. 6.2 Stratifié équilibré

#### 6.11.6.2 Stratifié symétrique (Symetric laminate)

Le plan moyen du stratifié est un plan de symétrie. La notation dans ce cas se limite à la moitié des plis en commençant d'une face et en s'arrêtant au plan moyen à coté du quel on ajoute le symbole (s).

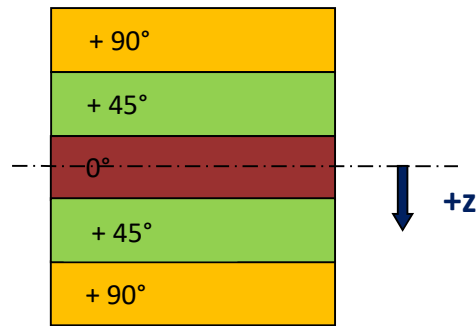


Fig. 6.3 Stratifié symétrique :  $[90^\circ/45^\circ/0]_s$

### 6.11.6.3 Stratifié croisé (Cross ply laminate)

Ce stratifié est constitué exclusivement de la séquence  $[0/90^\circ]$  qui se répète (n) fois.



Fig. 6.4 Stratifié croisé

### 6.11.6.3 Stratifié orthogonal

Ce stratifié comporte autant de couches orientées suivant la direction  $0^\circ$  que de couches orientées suivant la direction  $90^\circ$ .

#### Exercice 6.1

Déterminer les matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$  pour le cas d'un stratifié croisé comportant deux couches orientées à  $0^\circ$  et  $90^\circ$   $[0/+90]$ , de même épaisseur ( $h=1\text{mm}$ ). On donne la matrice de rigidité réduite dans les axes principaux:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 126.68 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 11.07 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}^3$$

#### Solution

Calcul des matrices de rigidité réduites  $Q'_{ij}$  hors axes principaux (couche à  $90^\circ$ )

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

$$\theta = 90^\circ$$

$\sin \theta = 1$	$\sin^2 \theta = 0$	$\sin^3 \theta = 1$	$\sin^4 \theta = 1$
$\cos \theta = 0$	$\cos^2 \theta = 0$	$\cos^3 \theta = 0$	$\cos^4 \theta = 0$



Alors :

$$[Q']_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 11.07 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 126.68 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$

$$h_1 = -1 \text{ mm} = -0.001 \text{ m}$$

$$h_0 = 0$$

$$h_2 = +1 \text{ mm} = +0.001 \text{ m}$$

$n$  : nombre de couche ( $n=2$ )

Première couche :

$$k = 1 \quad Q'_1 = Q'_{0^\circ}$$

Deuxième couche :

$$k = 2 \quad Q'_2 = Q'_{90^\circ}$$

La matrice  $[A]$  est donnée par la relation :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$A_{ij} = (h_1 - h_0) Q'_{+45^\circ} + (h_2 - h_1) Q'_{-45^\circ}$$

$$A_{ij} = (0 - (-0.001)) Q'_{0^\circ} + (0.001 - 0) Q'_{90^\circ}$$

$$A_{ij} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 126.68 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 11.07 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{bmatrix} 11.07 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 126.68 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 137.75 & 6.2 & 0 \\ 6.2 & 137.75 & 0 \\ 0 & 0 & 13.2 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}$$

La matrice  $[B]$  est donnée par la relation :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^2_k - h^2_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (h^2_1 - h^2_0) Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2} (h^2_2 - h^2_1) Q'_{90^\circ}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (0^2 - (-0.001)^2) Q'_{0^\circ} + \frac{1}{2} (0.001^2 - 0^2) Q'_{90^\circ} = \frac{1}{2} 10^{-6} (Q'_{+45^\circ}) + \frac{1}{2} 10^{-6} (Q'_{-45^\circ})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} 10^{-6} \begin{bmatrix} 126.68 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 11.07 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} 10^{-6} \begin{bmatrix} 11.07 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 126.68 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 68.875 & 3.10 & 0 \\ 6.2 & 68.875 & 0 \\ 3.10 & 0 & 6.6 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}^2$$

La matrice  $[D]$  est donnée par la relation :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} (h_1^3 - h_0^3) Q'_{0^\circ} + \frac{1}{3} (h_2^3 - h_1^3) Q'_{90^\circ}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} (0^3 - (-0.001)^3) Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{3} ((0.001)^3 - 0^3) Q'_{-45^\circ} = \frac{1}{3} 10^{-9} (Q'_{+45^\circ}) + \frac{1}{3} 10^{-9} (Q'_{-45^\circ})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} 10^{-9} \begin{bmatrix} 126.68 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 11.07 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} 10^{-9} \begin{bmatrix} 11.07 & 3.10 & 0 \\ 3.10 & 126.68 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} 10^{-9} \begin{bmatrix} 137.75 & 6.2 & 0 \\ 6.2 & 137.75 & 0 \\ 0 & 0 & 13.2 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = 10^{-9} \begin{bmatrix} 45.9166 & 2.0666 & 0 \\ 2.0666 & 45.9166 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \end{bmatrix} \text{ en } GPa.m^3$$

### Exercice 6.2

Déterminer les matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$  pour les cas suivants :

- Un stratifié  $[+45/-45]$
- Un stratifié symétrique  $[+45/-45]_s$
- Un stratifié asymétrique  $[+45/0/-45]$

Chaque couche à une épaisseur de 6 mm et contient 60 % en fraction volumique de fibres de carbone et 40 % en fraction volumique de résine époxyde.

(Les fibres et la matrice sont supposées des matériaux isotropes).

On donne :

$E_f = 220 \text{ GPa}$	$\nu_f = 0.2$
$E_m = 3.6 \text{ GPa}$	$\nu_m = 0.35$

### Solution

On applique la loi de mélange pour déterminer les caractéristiques mécaniques du composite à partir de celles de ses constituants.

Module de Young longitudinal :

$$E_L = E_1 = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$$E_L = E_1 = 220(0.6) + 3.6(0.4) = 133.44 \text{ GPa}$$

Module de Young transversal :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1 - V_f)}{E_m}$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_2} = \frac{0.6}{220} + \frac{0.4}{3.5} = 0.1138$$

$$E_T = E_2 = 8.78 \text{ GPa}$$

**Module de cisaillement :**

Pour un matériau isotrope, nous avons :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

**Module de cisaillement des fibres :**

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = \frac{220}{2(1 + 0.2)} = 91.66 \text{ GPa}$$

**Module de cisaillement de la matrice :**

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} = \frac{3.6}{2(1 + 0.35)} = 1.33 \text{ GPa}$$

**Module de cisaillement dans la plan (L,T)/(1,2) :**

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{(1 - V_f)}{G_m} = \frac{0.6}{91.66} + \frac{0.4}{1.33} = 0.30729$$

$$G_{LT} = 3.254 \text{ GPa}$$

**Coefficient de Poisson dans la plan (L,T)/(1,2) :**

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = 0.2(0.6) + 0.35(0.4) = 0.26$$

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} = \frac{8.78}{133.44} (0.26) = 0.017$$

**Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q_{ij}$**

Pour un pli unidirectionnel avec des fibres orientées à  $0^\circ$ , la matrice de rigidité (par rapport aux axes principaux) est donnée par la relation :

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{133.44}{1 - (0.26)^2 \frac{8.78}{133.44}} = 134.03 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} = \frac{E_2}{E_1} Q_{11} = \frac{8.78}{133.44} (134.03) = 8.82 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{11} = \nu_{12} Q_{11} = (0.26) 8.82 = 2.29 \text{ GPa}$$



$$Q_{66} = G_{LT} = G_{12} = 3.254 \text{ GPa}$$

Finalemment :

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 134.03 & 2.29 & 0 \\ 2.29 & 8.82 & 0 \\ 0 & 0 & 3.254 \end{bmatrix}$$

Calcul des matrices de rigidité réduites  $Q'_{ij}$  hors axes principaux

$Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^3 \theta - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$
$Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
$Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$
$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$

1 cas : stratifié [+45°/-45°]

1. Calcul de la matrice de rigidité réduite  $Q'_{ij}$  hors axes principaux ( $\theta = 45^\circ$ )

$$\theta = 45^\circ$$

$$\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

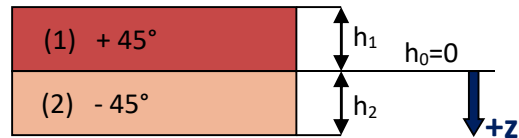
$$\sin^2 \theta = \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin^3 \theta = \cos^3 \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^4 \theta = \cos^4 \theta = \frac{1}{4}$$

Alors :

$$[Q']_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & 31.3 \\ 33.61 & 40.11 & 31.3 \\ 31.3 & 31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$



$$\theta = -45^\circ$$

$$\sin \theta = \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin^3 \theta = \cos^3 \theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^4 \theta = \cos^4 \theta = \frac{1}{4}$$

Alors :

$$[Q']_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ en GPa}$$

$$h_1 = -0.006 \text{ m}$$

$$h_0 = 0$$

$$h_2 = +0.006 \text{ m}$$

$n$  : nombre de couche ( $n=2$ )

Première couche :

$$k = 1 \quad Q'_1 = Q'_{+4^\circ}$$

Deuxième couche :

$$k = 2 \quad Q'_2 = Q'_{-4^\circ}$$

**La matrice [A] est donnée par la relation :**

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$A_{ij} = (h_1 - h_0)Q'_{+45^\circ} + (h_2 - h_1)Q'_{-45^\circ}$$

$$A_{ij} = (0 - (-0.006))Q'_{+45^\circ} + (0.006 - 0)Q'_{-45^\circ}$$

$$A_{ij} = 6 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 6 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 481.32 & 403.32 & 0 \\ 403.32 & 481.32 & 0 \\ 0 & 0 & 474.84 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}$$

**La matrice [B] est donnée par la relation :**

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^2_k - h^2_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (h^2_1 - h^2_0)Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2} (h^2_2 - h^2_1)Q'_{-4^\circ}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (0^2 - (-0.006)^2)Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2} (0.006^2 - 0^2)Q'_{-45^\circ} = -18 \cdot 10^{-6} (Q'_{+45^\circ}) + 18 \cdot 10^{-6} (Q'_{-45^\circ})$$

$$B_{ij} = -18 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 18 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1126.8 \\ 0 & 0 & -1126.8 \\ -1126.8 & -1126.8 & 0 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}^2$$

**La matrice [D] est donnée par la relation :**

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h^3_k - h^3_{k-1}) (Q'_{ij})_k \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} (h^3_1 - h^3_0)Q'_{+4^\circ} + \frac{1}{3} (h^3_2 - h^3_1)Q'_{-4^\circ}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}(0^3 - (-0.006)^3)Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{3}((0.006)^3 - 0^3)Q'_{-45^\circ} = 72 \cdot 10^{-9}(Q'_{+45^\circ}) + 72 \cdot 10^{-9}(Q'_{-45^\circ})$$

$$D_{ij} = 72 \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 72 \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = 10^{-9} \begin{bmatrix} 5775.84 & 4839.84 & 0 \\ 4839.84 & 5775.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } GPa \cdot m^3$$

**2 cas : stratifié [+45/-45]<sub>s</sub>**

$$-h_1 = h_3 = 0.006 \text{ m}$$

$$-h_0 = h_4 = 0.012 \text{ m}$$

$$h_2 = 0$$

$n$  : nombre de couche ( $n=4$ )

Première couche :

$$k = 1 \quad Q'_1 = Q'_{+45^\circ}$$

Deuxième couche :

$$k = 2 \quad Q'_2 = Q'_{-45^\circ}$$

Troisième couche :

$$k = 3 \quad Q'_3 = Q'_{-45^\circ}$$

Quatrième couche :

$$k = 4 \quad Q'_4 = Q'_{+45^\circ}$$

**La matrice [A] est donnée par la relation :**

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$A_{ij} = (h_1 - h_0)Q'_{+45^\circ} + (h_2 - h_1)Q'_{-45^\circ} + (h_3 - h_4)Q'_{-45^\circ} + (h_4 - h_3)Q'_{+45^\circ}$$

$$A_{ij} = (-0.006 - (-0.012))Q'_{+45^\circ} + (0 - (-0.006))Q'_{-45^\circ} + (0.006 - 0)Q'_{-45^\circ} + (0.012 - (0.006))Q'_{+45^\circ}$$

$$A_{ij} = 0.012Q'_{+45^\circ} + 0.012Q'_{-45^\circ} = 12 \cdot 10^{-3}(Q'_{+45^\circ} + Q'_{-45^\circ})$$

$$A_{ij} = 12 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 12 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 962.64 & 806.64 & 0 \\ 806.64 & 962.64 & 0 \\ 0 & 0 & 829.68 \end{bmatrix} \text{ en } GPa \cdot m$$

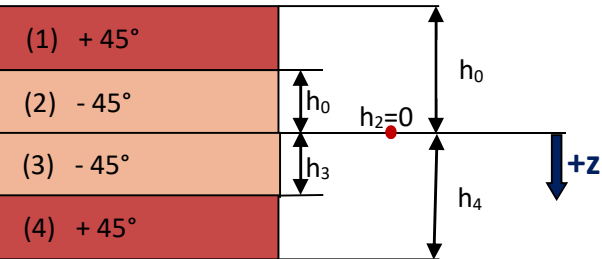
**La matrice [B] est donnée par la relation :**

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(h^2_k - h^2_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(h^2_1 - h^2_0)Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2}(h^2_2 - h^2_1)Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{2}(h^2_3 - h^2_2)Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{2}(h^2_4 - h^2_3)Q'_{+45^\circ}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}((0.006)^2 - (-0.012)^2)Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2}(0^2 - (-0.006)^2)Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{2}((-0.006)^2 - 0^2)Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{2}((0.012)^2 - (-0.006)^2)Q'_{+45^\circ}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(-108 \cdot 10^{-6})Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2}(-36 \cdot 10^{-6})Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{2}(36 \cdot 10^{-6})Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{2}(108 \cdot 10^{-6})Q'_{+45^\circ} = 0$$



$$B_{ij} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour un stratifié symétrique :  $[B] = 0$

La matrice  $[D]$  est donnée par la relation :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} (h_1^3 - h_0^3) Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{3} (h_2^3 - h_1^3) Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{3} (h_3^3 - h_2^3) Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{3} (h_4^3 - h_3^3) Q'_{+45^\circ}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} ((-0.006)^3 - (-0.012)^3) \cdot 10^{-9} Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{3} (0^3 - (0.006)^3) \cdot 10^{-9} Q'_{-45^\circ} \\ + \frac{1}{3} ((0.006)^3 - 0^3) \cdot 10^{-9} Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{3} ((0.012)^3 - (0.006)^3) \cdot 10^{-9} Q'_{+45^\circ}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} (-216 + 1728) \cdot 10^{-9} Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{3} (216) \cdot 10^{-9} Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{3} (216) \cdot 10^{-9} Q'_{-45^\circ} + \frac{1}{3} (1512) \cdot 10^{-9} Q'_{+45^\circ}$$

$$D_{ij} = 504 \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 72 \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \\ + 72 \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 504 \cdot 10^{-9} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 46.21 & 38.72 & 27.04 \\ 38.72 & 46.21 & 27.04 \\ 27.04 & 27.04 & 39.82 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}^3$$

### 3 cas : stratifié [+45/0/-45]

$$-h_0 = h_3 = 0.003 + 0.006 = 0.009 \text{ m}$$

$$-h_1 = h_2 = 0.003 \text{ m}$$

$n$  : nombre de couche ( $n=3$ )

Première couche :

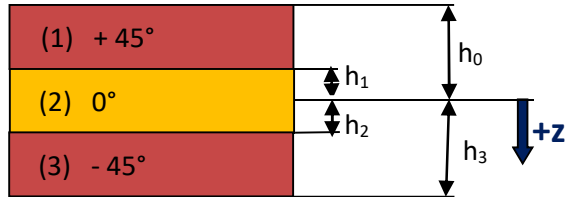
$$k = 1 \quad Q'_1 = Q'_{+45^\circ}$$

Deuxième couche :

$$k = 2 \quad Q'_2 = Q'_{0^\circ}$$

Troisième couche :

$$k = 3 \quad Q'_3 = Q'_{-45^\circ}$$



La matrice  $[A]$  est donnée par la relation :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$A_{ij} = (h_1 - h_0) Q'_{+45^\circ} + (h_2 - h_1) Q'_{0^\circ} + (h_3 - h_4) Q'_{-45^\circ}$$

$$A_{ij} = (-0.003 - (-0.009)) Q'_{+45^\circ} + (0.003 - (-0.003)) Q'_{0^\circ} + (0.009 - 0.003) Q'_{-45^\circ}$$

$$A_{ij} = 6 \cdot 10^{-3} Q'_{+45^\circ} + 6 \cdot 10^{-3} Q'_{0^\circ} + 6 \cdot 10^{-3} Q'_{-45^\circ}$$

$$A_{ij} = 6.10^{-3} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & 31.3 \\ 33.61 & 40.11 & 31.3 \\ 31.3 & 31.3 & 34.57 \end{bmatrix} + 6.10^{-3} \begin{bmatrix} 134.03 & 2.29 & 0 \\ 2.29 & 8.82 & 0 \\ 0 & 0 & 3.254 \end{bmatrix} \\ + 6.10^{-3} \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}$$

$$A_{ij} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1285.5 & 417.06 & 0 \\ 417.06 & 534.24 & 0 \\ 0 & 0 & 434.36 \end{bmatrix}$$

La matrice [B] est donnée par la relation :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} (h_1^2 - h_0^2) Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{2} (h_2^2 - h_1^2) Q'_{0^\circ} + \frac{1}{2} (h_3^2 - h_2^2) Q'_{-45^\circ}$$

$$B_{ij} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2253.6 \\ 0 & 0 & -2253.6 \\ -2253.6 & -2253.6 & 0 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}^2$$

La matrice [D] est donnée par la relation :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} (h_1^3 - h_0^3) Q'_{+45^\circ} + \frac{1}{3} (h_2^3 - h_1^3) Q'_{0^\circ} + \frac{1}{3} (h_3^3 - h_2^3) Q'_{-45^\circ}$$

$$D_{ij} = 10^{-9} \begin{bmatrix} 22183.84 & 15770.7 & 0 \\ 15770.7 & 18930.24 & 0 \\ 0 & 0 & 16237.33 \end{bmatrix} \text{ en GPa.m}^3$$

## Rupture et endommagement des composites unidirectionnel

### 8.1 Endommagement des composites

La dégradation dans les matériaux composites est un phénomène complexe qui résulte de différents modes d'endommagements souvent couplés, comme la fissuration matricielle, le délaminage entre les couches, la rupture des fibres, etc... (Figure 8.1). L'origine de l'endommagement est la création de microfissures ou de vide dans la structure du matériau. L'apparition de ses microfissures affecte et influence le comportement du pli unidirectionnel. Un matériau est dit vierge s'il est dépourvu des micro-défauts. L'accumulation de ces défauts conduit à une rupture de la couche du composite. La théorie de l'endommagement permet de décrire l'évolution de l'état structural du composite entre l'état vierge et l'amorce de la fissure macroscopique (Figure 8.2).

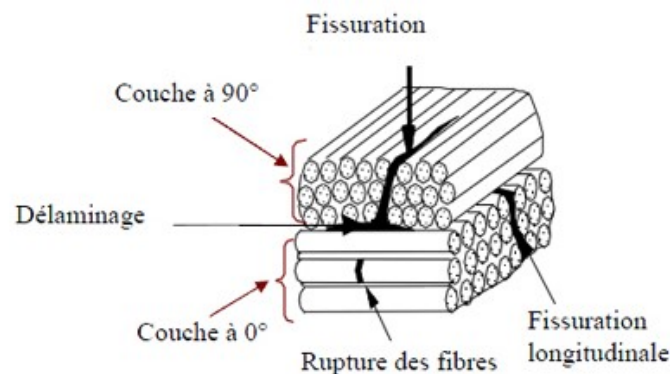


Figure 8.1 Différents modes d'endommagements d'un composite

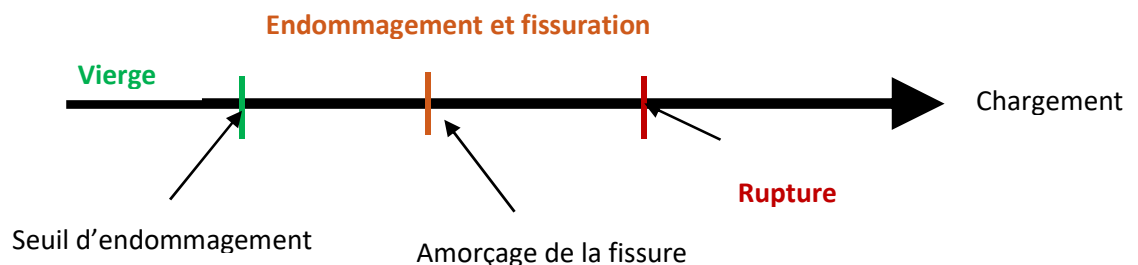


Figure 8.2 Evolution de l'endommagement d'un composite

## 8.2 Mécanismes d'endommagement et de rupture dans les composites

Dans un composite stratifié, sous l'effet de sollicitations mécaniques ou thermomécaniques, monotones ou cycliques, les principaux modes d'endommagement qui peuvent apparaître, sont généralement classés en quatre catégories:

### 8.2.1 Fissuration transverse

Dans un stratifié à fibres longues, la fissuration transverse est en général le premier mode d'endommagement observé dans la matrice du pli le plus désorienté par rapport à l'axe de sollicitation. Ainsi des fissures transverses peuvent apparaître et constituer des zones d'amorçage pour d'autres mécanismes d'endommagement plus dangereux. Ce type de fissures traversent toute l'épaisseur des couches. Des micro-défauts au sein du matériau (comme des vides, des fibres cassées, le décollement fibre/matrice ou des microfissures de la matrice) peuvent être à l'origine de ces fissures amorcées par une forte concentration de contrainte locale. Ces fissures sont assez rectilignes et généralement perpendiculaires aux interfaces entre les couches adjacentes (Figure 8.3).

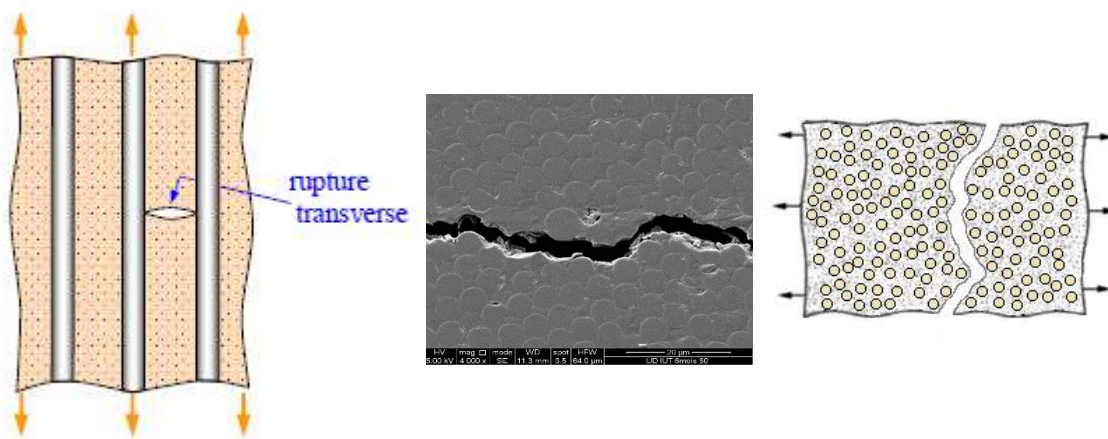


Figure 8.3 Exemples de fissuration transverse d'un composite

### 8.2.2 Fissuration longitudinale

Il s'agit de fissures qui sont analogues aux précédentes et qui apparaissent toujours dans la matrice, elles sont perpendiculaires aux interfaces des couches (Figure 8.4), mais traversent toute l'épaisseur des couches orientées à  $0^\circ$  par rapport à l'axe de sollicitation.

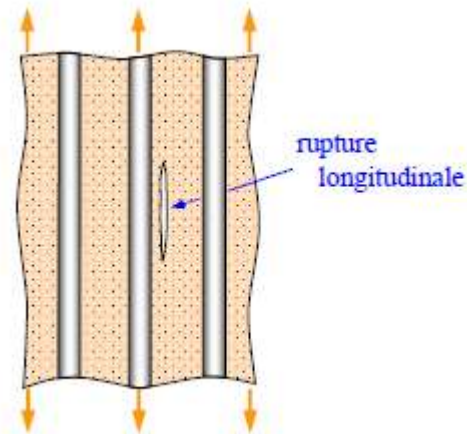


Figure 8.4 Fissuration longitudinale d'un composite

### 8.2.3 Délaminage entre couches

C'est un mécanisme de décohésion entre les couches qui apparaissent sur le bord libre ou/et à l'intérieur de la structure (Figure 8.5). A cause des contraintes inter laminaires élevées près des bords, le délaminage s'amorce généralement à cet endroit, puis progresse en séparant les couches.

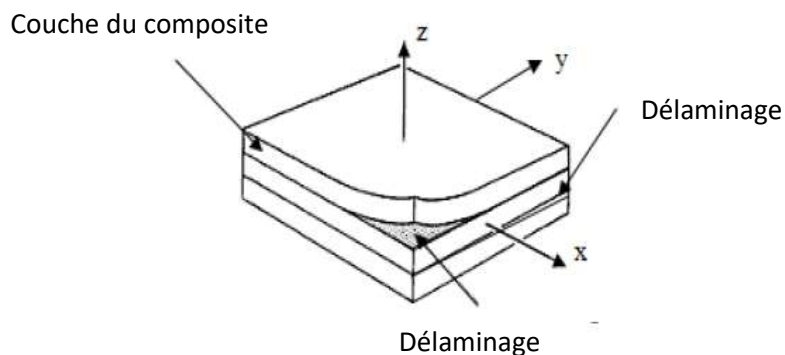


Figure 8.5 Délaminage des plis d'un matériau composite stratifié

### 8.2.4 Rupture des fibres

C'est le dernier mécanisme dans son apparition et qui va généralement conduire à la rupture finale de la structure composite (Figure 8.6). La rupture finale d'un composite est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes:

- la rupture des fibres
- la rupture transverse de la matrice



- la rupture longitudinale de la matrice
- la rupture de l'interface fibre-matrice

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

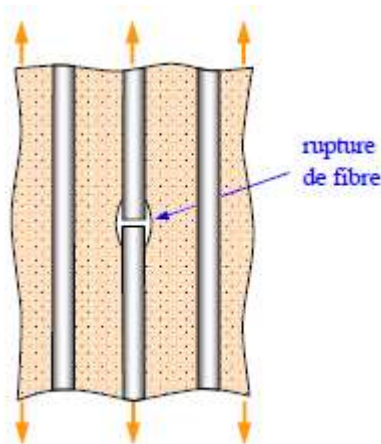


Figure 8.6 Rupture de la fibre d'un matériau composite

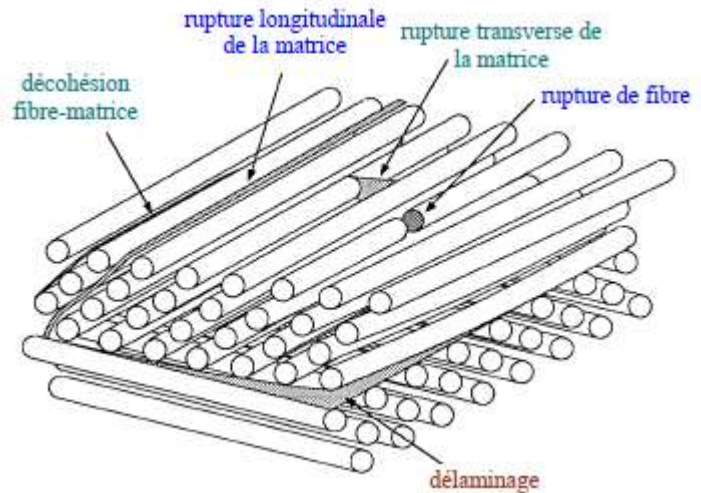


Figure 8.7 Différents mécanismes d'endommagement dans un matériau composite

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres surgit lorsque la contrainte de traction  $\sigma_f$  dans une fibre atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{fu}$  de la fibre. La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture. La redistribution de ces contraintes, et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement : de la contrainte à la rupture des fibres, de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée, des propriétés de l'interface fibre-matrice, etc. La Figure 8.8 présente les différents mécanismes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre. La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration transverse lorsque la contrainte en traction  $\sigma_m$  dans la matrice atteint la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, soit par fissuration longitudinale lorsque la contrainte de cisaillement  $\tau_m$  dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture  $\tau_{mu}$ , généralement au voisinage d'une fibre.

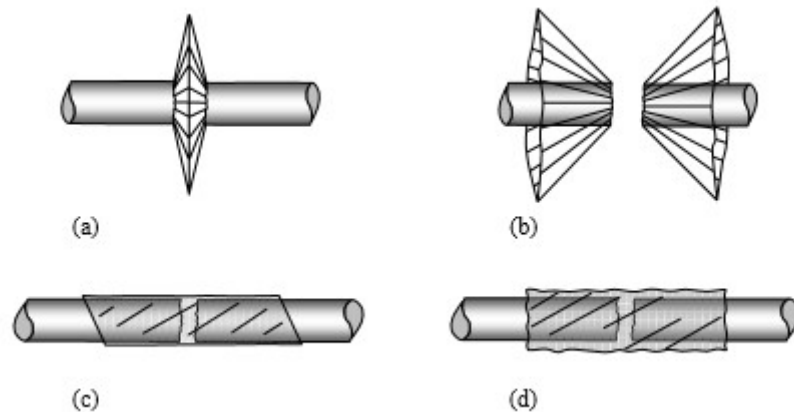


Figure 8.8 Différents mécanismes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre

### 8.2.5 Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale

Considérons un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice ( $\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu}$ ) (Figure 8.9), soit par rupture transverse de la matrice dans le cas contraire ( $\varepsilon_{fu} > \varepsilon_{mu}$ ) (Figure 8.10). En admettant l'égalité des déformations dans la fibre et dans la matrice (iso strain), la loi des mélanges s'écrit au moment de la rupture :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}(1 - V_f) \quad (8.1)$$

Avec :

$\sigma_{cu}$  est la contrainte à la rupture du composite,  $\sigma_{fu}$  la contrainte à la rupture des fibres et  $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$  la contrainte dans la matrice pour une déformation égale à la déformation  $\varepsilon_{fu}$  à la rupture des fibres. La contrainte  $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$  est inférieure à la contrainte à la rupture  $\sigma_{mu}$  de la matrice, donc :

$$\sigma_{cu} \leq \sigma_{fu}V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \quad (8.2)$$

L'expression retenue pour la contrainte à la rupture du composite est :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \quad (8.3)$$

Dans le cas où la déformation à la rupture de la matrice est inférieure à celle des fibres (Figure 8.9), la contrainte à la rupture est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cu} = (\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}} V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \quad (8.4)$$

$(\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}}$  est la contrainte dans la fibre au moment de la rupture de la matrice.

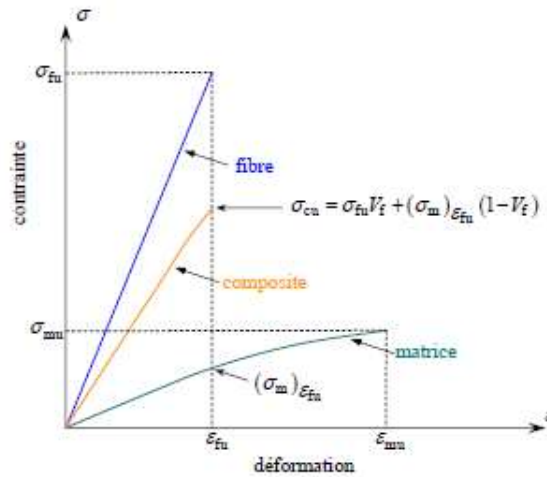


Figure 8.9

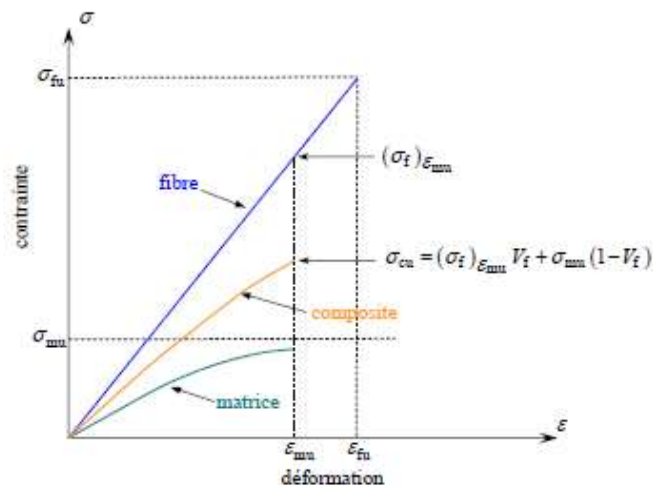


Figure 8.10

### 8.3 Moyen de contrôle de l'endommagement des composites

Les méthodes de détection et quantification de l'endommagement d'un stratifié composite sont généralement classées en deux grandes classes, les méthodes de caractérisation directes, qui permettent de suivre l'endommagement en l'observant directement et les méthodes de caractérisations indirectes.

#### 8.3.1 Méthodes de caractérisation directes

##### 8.3.1 Microscopie optique

C'est une méthode de caractérisation très simple, basée sur son l'observation directe de l'endommagement à l'aide d'un microscope optique. Cette observation peut être faite à la fin de l'essai après démontage de l'éprouvette. Elle peut être également effectuée in/situ, c'est-à-dire au cours de l'essai, sans l'interrompre. Dans ce cas, une caméra munie d'un

microscope optique à faible grossissement est utilisée. Cette dernière méthode peut être affinée par la première. Cette technique présente cependant l'inconvénient de ne donner qu'une représentation 2D des endommagements.

### **8.3.2 Radiographie X**

La radiographie aux rayons X est en général utilisée pour visualiser directement les fissures transverses et évaluer les surfaces de délaminage. Afin de faire apparaître ceux-ci, il est nécessaire d'utiliser un opacifiant aux rayons X. Ce dernier est déposé sur les bords libres de l'éprouvette et pénètre par capillarité dans les endommagements. La tomographie haute résolution (high Resolution Computed Tomography) est une technique très intéressante, elle-même basée sur des rayonnements X. Elle permet d'acquérir des images 3D de l'ordre du micron ou inférieur au micron, des caractéristiques internes du matériau et de sa structure. Cette technique a démontré ses preuves en ce qui concerne la mise en évidence d'endommagements dans des structures composites fibre de carbone / époxy.

### **8.3.2 Méthodes indirectes de caractérisation**

#### **8.3.2.1 Emission acoustique**

L'émission acoustique est une technique sensible à la croissance et la multiplication de défauts dans un matériau soumis à une sollicitation mécanique. Cette détection est possible au moment de la relaxation des contraintes, durant laquelle naît l'émission. Elle ne permet en aucun cas la détection de défauts statiques ou non évolutifs initialement présents dans le matériau. La détection est effectuée à l'aide de capteurs piézoélectriques qui transforment les ondes mécaniques du matériau en signaux électriques. Ce signal est ensuite amplifié avant d'être analysé (Figure 8.8). Un couplant est en général utilisé entre le matériau et le capteur pour assurer une bonne transmission des ondes.

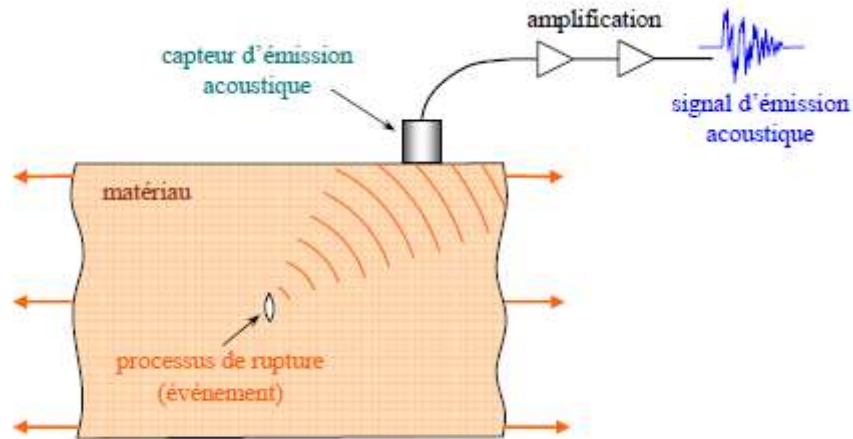


Figure 8.11 Contrôle de l'endommagement des composites par émission acoustique

### 8.4 Critères de rupture

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre l'évaluation de la résistance mécanique des stratifiés. D'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible : soit à la rupture réelle du matériau si le matériau est fragile, soit à la limite du domaine élastique s'il est ductile (Figure 8.12). Dans le cas des matériaux composites, la limite du domaine élastique est généralement liée à l'apparition de la microfissuration : micro ruptures dans la matrice, ruptures de fibres, décohésion fibres-matrice, etc. Les critères de rupture d'une couche d'un stratifié peuvent être classés suivant :

- des critères en contraintes maximales,
- des critères en déformations maximales,
- des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques.

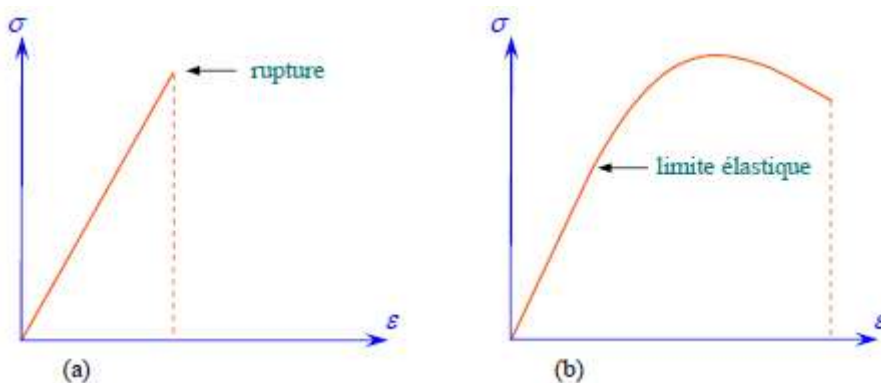


Figure 8.12 Critères de rupture des matériaux : a) matériau fragile b) matériau ductile

### 8.4.1 Critères en contraintes maximales

#### 8.4.1.1 Critères dans les axes principaux

Les critères en contraintes maximales sont basés sur les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal en traction et en compression notées respectivement :  $X_t$ ,  $X_c$  et les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal en traction en compression respectivement :  $Y_t$ ,  $Y_c$  , la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche  $S$  . L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (Figure 8.13). Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement. Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes  $(\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT})$  dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme :

$$-X_c < \sigma_L < X_t \quad (8.5)$$

$$-Y_c < \sigma_T < Y_t \quad (8.6)$$

$$-S < \sigma_{LT} < S \quad (8.7)$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas. Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

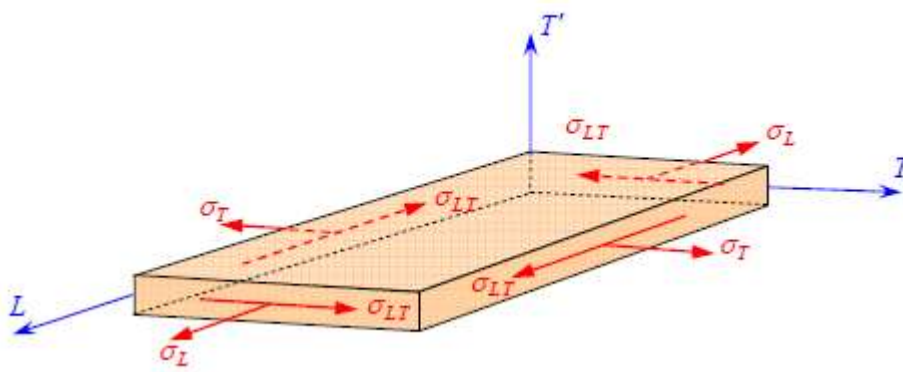


Figure 8.13 Couche soumise à un état de contraintes planes  $(\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT})$  dans les axes des matériaux

### 8.4.1.2 Critères de rupture en-dehors des axes principaux

Dans le cas où l'état de contraintes est exprimé dans des axes de référence  $(x,y,z)$  comme montré sur la Figure 8.14 , il est nécessaire de se ramener aux axes principaux par une rotation d'angle  $(\theta)$ . Les contraintes exprimées dans les axes principaux sont alors données par la relation :

$$\sigma_L = \sigma_{xx}(\cos\theta)^2 + \sigma_{yy}(\sin\theta)^2 + 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (8.8)$$

$$\sigma_T = \sigma_{xx}(\sin\theta)^2 + \sigma_{yy}(\cos\theta)^2 - 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad (8.9)$$

$$\tau_{LT} = (\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}(\cos\theta)^2 - \sigma_{xy}(\sin\theta)^2 \quad (8.10)$$

Les critères (8.5), (8.6) et (8.7) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$-X_c < \sigma_{xx}(\cos\theta)^2 + \sigma_{yy}(\sin\theta)^2 + 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta < X_t \quad (8.11)$$

$$-Y_c < \sigma_{xx}(\sin\theta)^2 + \sigma_{yy}(\cos\theta)^2 - 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta < Y_t \quad (8.12)$$

$$-S < (\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}(\cos\theta)^2 - \sigma_{xy}(\sin\theta)^2 < S \quad (8.13)$$

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes principaux, les relations des contraintes (8.11), (8.12) et (8.13) se réduisent par:

$$-X_c < \sigma_{xx}(\cos\theta)^2 < X_t \quad (8.14)$$

$$-Y_c < \sigma_{yy}(\cos\theta)^2 < Y_t \quad (8.15)$$

$$-S < \sigma_{xy}(\cos\theta)^2 < S \quad (8.16)$$

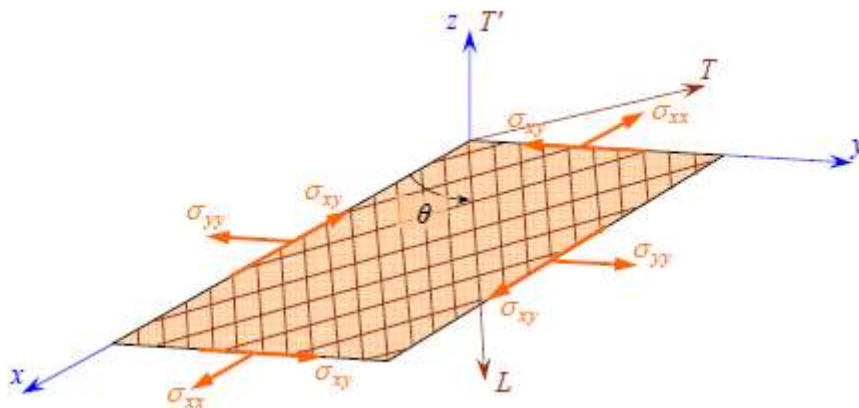


Figure 8.13 Couche soumise à un état de contraintes planes  $(\sigma_L, \sigma_T, \tau_{LT})$  hors- axes principaux



## • *Bibliographie*

- [1] J.M. BERTHELOT, Matériaux Composites Comportement Mécanique et Analyse des Structures, 3rd Edition.
- [2] S.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER, History of strength materials, Edition McGRAW HILL, (1953).
- [3] P.CHADWICK, Continuum Mechanics Theory and Problems, Edition ALLEN & UNWIN,(1976).
- [4] C.TRUESDELL, A First Course in Continuum Mechanics Vol 1 General Concepts, N.Y ACADEMIC PRESS.
- [5] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3<sup>rd</sup> edition.
- [6] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 2: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3<sup>rd</sup> edition.
- [7] Y.C.FUNG, P. HALL, A first course in continuum mechanics, University of New Jersey, 3rd edition,(1977).
- [8] Y.DEBARD, Résistance des Matériaux Elasticité Plane, Université du Maine, Le Mans.
- [9] S.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER, Theory of elasticity, Edition McGRAW HILL, (1951).
- [10] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3<sup>rd</sup> edition.
- [11] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 2: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3<sup>rd</sup> edition.
- [12] Y.C.FUNG, P. HALL, A first course in continuum mechanics, University of New Jersey, 3rd edition,(1977).