



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ LARBI TEBESSI DE TEBESSA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



DOMAINE DE FORMATION : Science et Technologie

Plasticité et Endommagement

Matière : Plasticité et Endommagement
Spécialité : Structures - Génie Civil
Niveau : Master II

Nom et prénom : BOUTAGOUGA Djamel

Année universitaire : 2020/2021

AVANT- PROPOS

Lorsqu'on procède aux dimensionnement et vérification des ouvrages en génie civil, il est nécessaire de connaître leur résistance aux déformations et à la rupture pour assurer la stabilité des charges qu'ils auront à supporter. Il faudra définir les propriétés mécaniques des matériaux et des sections critiques pour que les charges qui y seront appliquées ne provoquent pas la rupture.

L'objectif de ce cours est de définir le comportement plastique des milieux continus solides. La plasticité définie dans ce cours est isotrope c.-à-d. le milieu continu solide dont la matière ne comporte pas de direction matérielle privilégiée. On se limite aussi aux modèles de comportement de la plasticité classique "sans dépendance avec le temps, ni vitesse de déformation (visco-plasticité, fluage, fatigue, plasticité dynamique), ou gradient de température".

Ce cours est rédigé à l'intention des élèves de 2ème année Master Structures et VOA. Il s'agit d'une présentation des notions de bases et des principaux résultats de la théorie de plasticité. Les informations contenues dans ce cours ont été choisies et organisées de la meilleure façon possible afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours. Une organisation particulière a été mise sur la forme de ce cours en respectant le canevas officiel de notre tutelle préconisée par le référentiel du CPND-ST.

TABLE DES MATIÈRES

<u>AVANT- PROPOS</u>	<u><i>i</i></u>
<u>TABLE DES MATIÈRES</u>	<u><i>ii</i></u>
<u>LISTE DES FIGURES</u>	<u><i>vii</i></u>
<u>LISTE DES TABLEAUX</u>	<u><i>x</i></u>
<u>CHAPITRE I: RHEOLOGIE DES MATERIAUX SOLIDES</u>	<u><i>1</i></u>
I-1. GENERALITES	2
I-2. LES ESSAIS MECANIQUES	3
I-3. L'ESSAI DE TRACTION	7
<i>I-3-1. Limite d'Elasticité ou Seuil d'Ecoulement</i>	<i>10</i>
<i>I-3-2. La réduction de la ductilité</i>	<i>11</i>
<i>I-3-3. Le travail des déformations plastiques</i>	<i>11</i>
<u>CHAPITRE II: LA DEFORMATION PLASTIQUE</u>	<u><i>12</i></u>
II-1. MECANISME DE LA DEFORMATION PLASTIQUE	13
II-2. LES DEFAUTS DANS LES SOLIDES	14
II-3. MULTIPLICATION DES DISLOCATIONS	17
II-4. PHENOMENE D'ECROUISSAGE	18
<i>II-4-1. Ecouissage Isotrope</i>	<i>19</i>
<i>II-4-2. Ecouissage Cinématique</i>	<i>20</i>
<i>IV-4-3. Ecouissage Mixte</i>	<i>20</i>
II-5. SURFACE DE CHARGE ET CONTRAINTE EQUIVALENTE	21

II-6. EFFET D'UNE PRESSION ISOTROPE	22
<u>CHAPITRE III: LES MODELES RHEOLOGIQUES DE PLASTICITE UNIAXIALE</u>	<u>23</u>
III-1. MODELISATION DU COMPORTEMENT EN TRACTION – COMPRESSION	24
<i>III-1-1. Modèle rigide parfaitement plastique</i>	<i>24</i>
<i>III-1-2. Modèle élastique parfaitement plastique (élasto-plastique parfait)</i>	<i>25</i>
<i>III-1-3. Modèle rigide plastique avec écrouissage</i>	<i>25</i>
<i>III-1-4. Modèle élasto-plastique avec écrouissage</i>	<i>26</i>
<i>III-1-5. Modèle multilinéaire</i>	<i>26</i>
III-2. MODELES ANALOGIQUES DE L'ELASTOPLASTICITE	27
<i>III-2-1. Les modèles de base</i>	<i>27</i>
<i>III-2-2. Les modèles élasto-plastiques:</i>	<i>28</i>
<u>CHAPITRE IV: THEORIE INCREMENTALE DE PLASTICITE UNIAXIALE</u>	<u>29</u>
IV-1. CRITERE DE PLASTICITE	30
IV-2. ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE	31
IV-3. REGLE D'ECROUISSAGE	31
<i>IV-3-1. Ecrouissage Isotrope</i>	<i>31</i>
<i>IV-3-2. Ecrouissage cinématique</i>	<i>31</i>
<i>IV-3-3. Ecrouissage mixte</i>	<i>31</i>
IV-4. MODULE DE PLASTICITE	32
<u>CHAPITRE V: CRITERES D'ECOULEMENT PLASTIQUE</u>	<u>35</u>
V-1. CRITERE DE PLASTICITE	36

V-2. CRITERE DE MOHR-COULOMB	36
V-3. LOI COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE	41
V-4. LES CRITERES ISOTROPES DE LIMITE ELASTIQUE	42
<i>V-4-1. Critère de RANKINE</i>	<i>43</i>
<i>V-4-2. Critère de TRESCA</i>	<i>43</i>
<i>V-4-3. Critère de VON-MISES</i>	<i>44</i>
<i>V-4-4. Critère de Drucker-Prager</i>	<i>47</i>
<i>V-4-5. Critère de Mohr-Caquot</i>	<i>47</i>
V-5. LOIS D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE	48
<i>V-5-1. Principe du Travail Maximal (Hill)</i>	<i>48</i>
<i>V-5-2. Règle de Normalité</i>	<i>48</i>
<i>V-5-3. Loi d'écoulement associée au critère de Tresca</i>	<i>50</i>
<i>V-5-4. Loi d'écoulement associée au critère de Von-Misès</i>	<i>51</i>
V-6. PLASTICITE NON-ASSOCIEE	53
<u>CHAPITRE VI: PLASTICITE DES BARRES</u>	<u>54</u>
VI-1. PLASTICITE DES BARRES	55
<i>VI-1-1. Phase de comportement élastique</i>	<i>56</i>
<i>VI-1-2. Phase élasto-plastique</i>	<i>57</i>
<i>VI-1-3. Charge limite et ruine plastique</i>	<i>58</i>
<i>VI-1-4. Décharge de la structure</i>	<i>59</i>
<u>CHAPITRE VII: PLASTICITE DES POUTRES</u>	<u>61</u>

VII-1. CALCUL ELASTIQUE-PLASTIQUE "SECTION RECTANGULAIRE"	62
<i>VII-1-1. Phase du comportement élastique</i>	63
<i>VII-1-2. Phase du comportement élasto-plastique</i>	64
<i>VII-1-3. Ruine plastique</i>	66
<i>VII-1-4. La relation moment-courbure</i>	68
VII-2. DECHARGE ELASTIQUE ET CONTRAINTES RESIDUELLES	69
VII-3. CONCEPT DE ROTULE PLASTIQUE	70
<i>VII-3-1. Longueur de la rotule plastique</i>	71
<i>VII-3-2. Forme de la rotule plastique</i>	72
<i>VII-3-3. Pour une charge uniformément répartie</i>	72
VII-4. MOMENT PLASTIQUE DE SECTIONS TRANSVERSALES ARBITRAIRES	73
<i>VII-4-1. Sections à double symétrie</i>	73
<i>VII-4-2. Sections arbitraire</i>	74
VII-5. LE FACTEUR DE FORME	75
VII-6. LA RELATION MOMENT-COURBURE D'UNE SECTION EN BETON ARME	79
VII-7. COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE D'UNE POUTRE HYPERSTATIQUE	81
<i>VII-7-1. Phase élastique</i>	81
<i>VII-7-2. Phase élasto-plastique</i>	83
<i>VII-7-3. Ruine de la structure</i>	84
VII-3. COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE D'UN PORTIQUE	85
<u>CHAPITRE VIII: ANALYSE LIMITE D'UN SYSTÈME DE POUTRES</u>	<u>86</u>
VIII-1. INTRODUCTION	87

VIII-2. ANALYSE LIMIT PLASTIC	88
<i>VIII-2-1. Théorèmes de l'analyse limite plastique</i>	<i>88</i>
<i>VIII-2-2. Principes (Critères) de l'analyse limite plastique</i>	<i>88</i>
<i>VIII-2-3. Points importants à respecter dans l'analyser limite des poutres en flexion</i>	<i>90</i>
VIII-3. MECANISME DE RUINE	91
<i>VIII-3-1. Formation d'un mécanisme</i>	<i>91</i>
<i>VIII-3-2. Notion de mécanismes indépendants</i>	<i>91</i>
<i>VIII-3-3. Mécanismes combinés</i>	<i>92</i>
<i>VIII-3-4. Détermination du nombre de mécanismes indépendants</i>	<i>93</i>
VIII-4. THEOREME STATIQUE	94
VIII-5. THEOREME CINEMATIQUE	97
VIII-6. PORTIQUE PLAN ET DIAGRAMME D'INTERACTION	99
<i>VIII-6-1. Le chemin de chargement n'a aucune influence sur la charge de ruine et le type de mécanisme</i>	<i>101</i>
<i>VIII-6-2. Charge uniformément répartie</i>	<i>101</i>
Liste des références	104

LISTE DES FIGURES

<i>Figure I-1. Essai de traction</i>	3
<i>Figure I-2. Essai triaxial</i>	4
<i>Figure I-3. Essai de traction par flexion, fendage et direct</i>	4
<i>Figure I-4. Essai de torsion</i>	5
<i>Figure I-5. Essai de traction-compression-torsion</i>	5
<i>Figure I-6. Résultats de l'essai de traction-compression-torsion dans le plan (τ-σ)</i>	6
<i>Figure I-7. Courbe de repense (contrainte – déformation)</i>	8
<i>Figure I-8. Chargement $\sigma \leq \sigma_e$</i>	9
<i>Figure I-9. Déchargement $\sigma > \sigma_e$</i>	10
<i>Figure I-10. Evolution de la limite de l'élasticité</i>	11
<i>Figure I-11. Le travail des déformations</i>	11
<i>Figure II-1. Glissement des plans atomiques</i>	13
<i>Figure II-2. a- dislocation coin; b- dislocation vis</i>	15
<i>Figure II-3. Glissement macroscopique induit par le mouvement d'une dislocation</i>	15
<i>Figure II-4. Schémas de fonctionnement du moulin de Frank-Read</i>	17
<i>Figure II-5. Multiplication des dislocations : Marches superficielles sur une surface d'Aluminium polie électriquement résultant de l'émergence de deux dislocations vis</i>	18
<i>Figure II-7. Evolution de la limite de l'élasticité</i>	18
<i>Figure II-8. a- écrouissage isotrope; b- écrouissage cinématique</i>	19
<i>Figure II-9. Surface de charge pour un état de contrainte bi-dimensionnel</i>	22
<i>Figure III-1. Modèle rigide parfaitement plastique</i>	24
<i>Figure III-2. Modèle élastique parfaitement plastique</i>	25
<i>Figure III-3. Modèle rigide plastique avec écrouissage</i>	26
<i>Figure III-4. Modèle élasto-plastique avec écrouissage</i>	26
<i>Figure III-5. Modèle multi-linéaire</i>	26
<i>Figure IV-1. Module de plasticité</i>	32
<i>Figure IV-2. Ecrouissage cinématique et isotrope</i>	34
<i>Figure V-1. Modèle patin-ressort</i>	36
<i>Figure V-2. Le critère de Mohr-Coulomb dans le plan ($\tau - \sigma$)</i>	38
<i>Figure V-3. Le critère de Mohr-Coulomb dans l'espace de contraintes principales</i>	39
<i>Figure V-4. Forme des surfaces de charge pour les matériaux isotropes</i>	40

<i>Figure V-5. Représentation octaédrique du critère de Tresca</i>	43
<i>Figure V-6. Critères de Tresca, et Von-Mises en contraintes planes</i>	45
<i>Figure V-7. Représentation octaédrique du critère de Von-Mises et Tresca</i>	46
<i>Figure V-8. Représentation des critères de Von-Mises et de Tresca dans le plan ($\sigma_1 - \sigma_2$)</i>	46
<i>Figure V-9. Le critère de Drucker-Prager dans l'espace de contraintes principales</i>	47
<i>Figure V-10. Illustration de la règle de normalité</i>	49
<i>Figure V-11. Angle de dilatance</i>	53
<i>Figure VI-1. Système formé de de barres</i>	55
<i>Figure VI-2. Loi de comportement d'une barre</i>	55
<i>Figure VI-3 : Réponse de la structure en phase élastique et évolution des efforts dans les barres</i>	57
<i>Figure VI-4 : Phase élasto-plastique de comportement de la structure</i>	58
<i>Figure VI-5. Charge limite et mécanisme de ruine plastique de la structure</i>	59
<i>Figure VII-1. poutre isostatique soumise à de la flexion simple</i>	62
<i>Figure VII-2. Loi de comportement du matériau</i>	62
<i>Figure VII-3. Cinématique d'une poutre soumise à de la flexion simple</i>	62
<i>Figure VII-4. Section transversale : diagramme de contrainte</i>	64
<i>Figure VII-5. Section transversale : moment résultant</i>	65
<i>Figure VII-6. Formation d'une rotule plastique</i>	67
<i>Figure VII-7. Formation d'un mécanisme</i>	68
<i>Figure VII-8. Courbe de comportement moment-courbure</i>	68
<i>Figure VII-9. Contraintes résiduelles</i>	69
<i>Figure VII-10. Rotule plastique</i>	70
<i>Figure VII-11. Longueur d'une rotule plastique</i>	71
<i>Figure VII-12. sections à double symétrie</i>	73
<i>Figure VII-13. sections en T</i>	74
<i>Figure VII-14. sections arbitraire</i>	75
<i>Figure VII-15. Comportement moment-courbure et facteur de forme</i>	76
<i>Figure VII-16. a- Comportement des section en I, b- Comportement des section en H</i>	78
<i>Figure VII-17. sections en béton armé</i>	79
<i>Figure VII-18. Equilibre d'une sections en béton armé</i>	79
<i>Figure VII-19. Relation moment – courbure d'une section en béton armé</i>	80
<i>Figure VII-20. Diagramme du moment fléchissant</i>	81
<i>Figure VII-21. Comportement moment – courbure</i>	82
<i>Figure VII-22. Diagramme du moment fléchissant</i>	83

<i>Figure VII-23. Comportement charge-déplacement</i>	84
<i>Figure VII-24. Comportement élasto-plastique d'un portique</i>	85
<i>Figure VIII-1. Poutre hyperstatique</i>	87
<i>Figure VIII-2. Les mécanismes indépendants</i>	91
<i>Figure VIII-3. Mécanismes combinés</i>	92
<i>Figure VIII-4. Mécanisme de nœud</i>	92
<i>Figure VIII-5. Poutre hyperstatique</i>	95
<i>Figure VIII-6. Poutre hyperstatique avec deux rotules plastiques</i>	96
<i>Figure VIII-7. Poutre simplement supportée</i>	98
<i>Figure VIII-8. Poutre simplement supportée avec rotule plastique</i>	98
<i>Figure VIII-9. Les mécanismes de ruine possibles d'un portique plan</i>	99
<i>Figure VIII-10. Diagramme d'interaction d'un portique plan</i>	100
<i>Figure VIII-11. Contour d'écoulement d'un portique plan «charge concentrée»</i>	101
<i>Figure VIII-12. Contour d'écoulement d'un portique plan «Charge uniformément répartie»</i>	102

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I-1. Limite élastique théorique et expérimentale	16
Tableau I-2. Tableau de limite d'élasticité en traction de matériaux usuels	16
Tableau VII-1. Facteur de forme des profils métalliques	76
Tableau VII-2. Module résistant et facteur de forme	77
Tableau VIII-1. Critères de l'analyse limite plastique	90

CHAPITRE I: RHEOLOGIE DES MATERIAUX SOLIDES

I-1. GENERALITES

L'étude d'une loi de comportement d'un corps solide consiste en principe à corréler une grandeur mécanique Q (force, couple, pression, ...etc.) appliquée à ce corps en fonction d'une grandeur géométrique r (déplacement, rotation, variation de volume, ...etc.) à partir de résultats expérimentaux suffisamment nombreux. Cette étude permet de mettre en évidence les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau.

Il existe une grande variété de lois de comportements et de modèles permettant de décrire la variété des matériaux qu'ils soient issus de la nature ou de l'industrie. Dans ce cours, on se limite aux modèles de comportement de la plasticité classique "sans dépendance avec le temps, ni vitesse de déformation (viscoplasticité, fluage, fatigue, plasticité dynamique), ou gradient de température".

L'observation des caractéristiques expérimentales va permettre d'identifier en général trois classes de comportement mécanique principales:

- Elasticité:

L'application d'une force sur un objet est suivie d'une déformation. Le Matériau est dit élastique, si l'objet revient à sa forme initiale dès que la charge est relâchée.

- *Matériau élastique linéaire*: Dont la déformation est proportionnelle à la charge appliquée.

- *Matériau élastique non-linéaire*: Dont la relation entre contrainte et déformation est non-linéaire.

- Plasticité:

Si l'objet reste déformé même après éliminer la force, la déformation est dite plastique. La plus part des matériaux sont élastiques sous l'application de faibles charges et deviennent plastiques avec leur accroissement.

- Viscosité:

Le comportement visqueux uni-axial est celui d'un amortisseur dont la réponse dépend de la vitesse de sollicitation (mécanique des fluides, rhéologie des polymères, certains aciers dans un certain domaine de température, ...).

I-2. LES ESSAIS MECANQUES

Il y a une grande variété de comportements présentant des non-linéarités liées à la déformation ou au temps. Il est donc indispensable de les caractériser expérimentalement. Les essais mécaniques sur de petits spécimens, ou éprouvettes sont donc à la base de toutes les études. Il existe de multiples procédés expérimentaux qui permettent d'accéder au comportement des matériaux soumis à des sollicitations simples et même complexes.

Essai d'écroutissage: Un essai de traction ($\sigma > 0$) ou de compression ($\sigma < 0$) réalisé à vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ sur un matériau réel donne des résultats en termes d'efforts et de déplacement, que l'on cherche ensuite à convertir en une courbe contrainte-déformation (σ en fonction de ϵ).

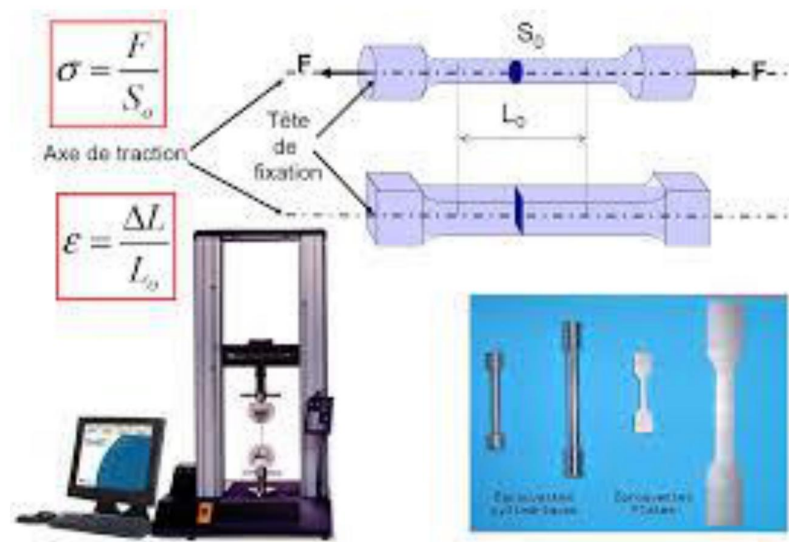


Figure I-1. Essai de traction

Essai de fluage: Lorsqu'une éprouvette est soumise à une contrainte, si, à partir d'un certain état, la contrainte est maintenue constante, des déformations différées (phénomène de viscosité) seront alors observées de façon à peu près systématique, pourvu qu'une période de temps suffisamment grande soit considérée.

Essai de relaxation: Une autre manière de caractériser la viscosité d'un matériau est de le soumettre à un essai de relaxation, dans lequel la déformation de l'éprouvette est maintenue constante après une pré-déformation initiale. Plus le comportement du matériau présente une composante visqueuse importante, et plus la contrainte chute rapidement, pour atteindre éventuellement une valeur nulle. Cet essai est essentiellement réalisé sur les métaux et les polymères.

Essai triaxial: Certains matériaux ne peuvent pas être testés simplement en traction, en raison de leur très faible résistance, ou de leur forte sensibilité aux décentrages des lignes d'amarrage (béton, céramique). Ils sont alors testés en compression, ou en flexion, mais il est parfois nécessaire d'avoir recours à un mode de sollicitation où les bords latéraux sont contenus (essai triaxial): l'échantillon est soumis latéralement à une pression hydrostatique qui assure son maintien, ce qui permet par exemple de tester des matériaux pulvérulents (argiles, sables).

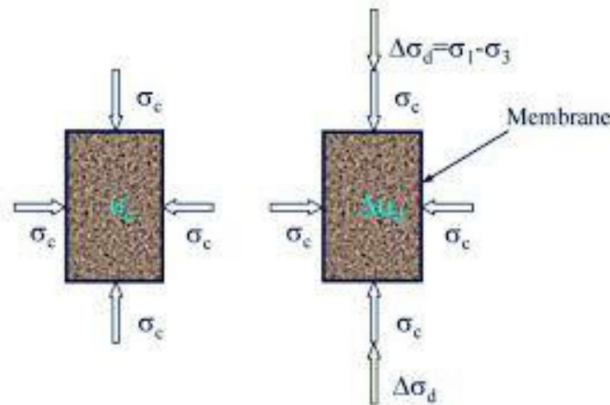


Figure I-2. Essai triaxial

Essai de flexion: Il est réalisé sur des barrettes, avec 3 ou 4 points d'appuis, ce dernier cas permettant de bénéficier d'une zone centrale dans laquelle le moment est uniforme. Il est essentiellement utilisé avec des matériaux fragiles, dont le comportement sera élastique. La plastification, associée au fait que le comportement en traction et en compression peut être différent, conduit à des redistributions de contraintes complexes dans l'éprouvette, si bien que le dépouillement de l'essai lui-même peut nécessiter un calcul de structure.

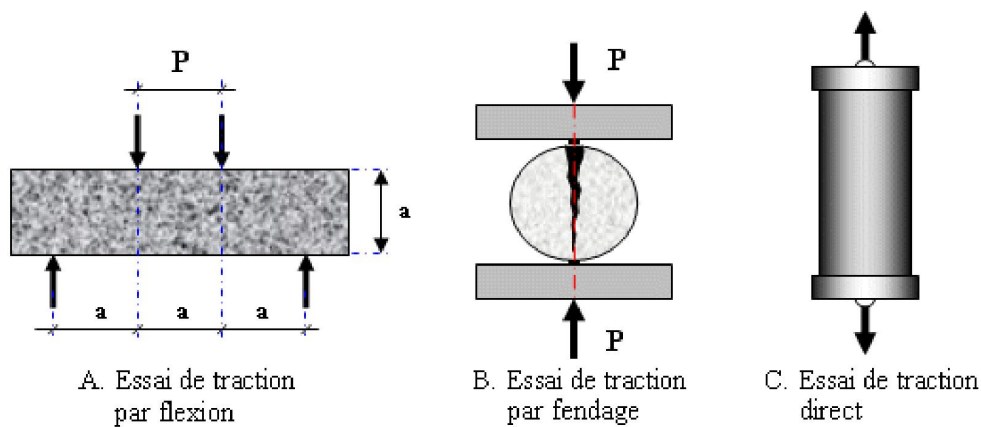


Figure I-3. Essai de traction par flexion, fendage et direct

Essai de torsion: Réalisé sur éprouvette pleine, cet essai est essentiellement utilisé à haute température pour connaître l'aptitude à la mise en forme des métaux. L'avantage de ce type d'essai est d'éviter la striction. Par contre, il est d'interprétation difficile, dans la mesure où l'état de contrainte et déformation n'est pas uniforme. Il est possible de remédier à ce dernier inconvénient, en adoptant comme éprouvettes des tubes minces, qui peuvent être instrumentés localement, à l'aide de jauges ou d'extensomètres.

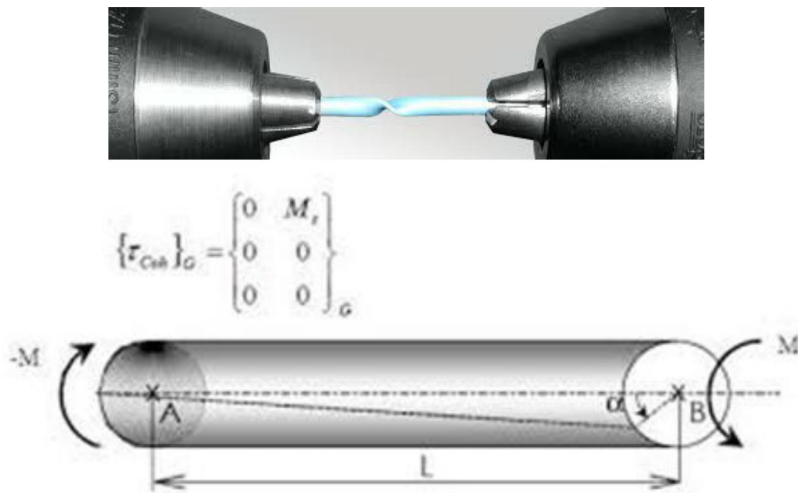


Figure I-4. Essai de torsion

Essais complexes: Outre les essais de traction-torsion sur tube, il existe d'autres moyens de générer des états de contraintes multiaxiales contrôlés dans des éprouvettes. C'est le cas d'essais de traction-pression interne sur tube, ou encore d'essais sur des éprouvettes cruciformes.

L'essai de "traction-compression-torsion" est employé pour tester des matériaux métalliques ou composites sous sollicitation de traction-compression-cission en exerçant sur un tube mince un effort axial de traction (compression) combiné à un couple de torsion.

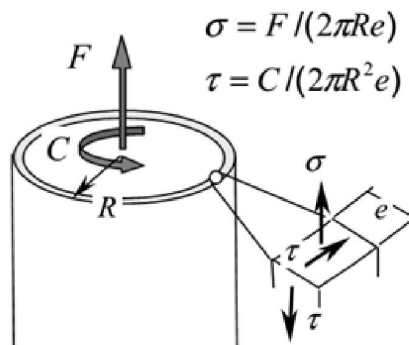


Figure I-5. Essai de traction-compression-torsion

La *figure I-6* ci-dessous représente dans le plan $(\tau-\sigma)$, un domaine de forme elliptique, déterminé expérimentalement à l'aide de ce dernier essai, à l'intérieur duquel le comportement du tube et donc localement du matériau, demeure élastique.

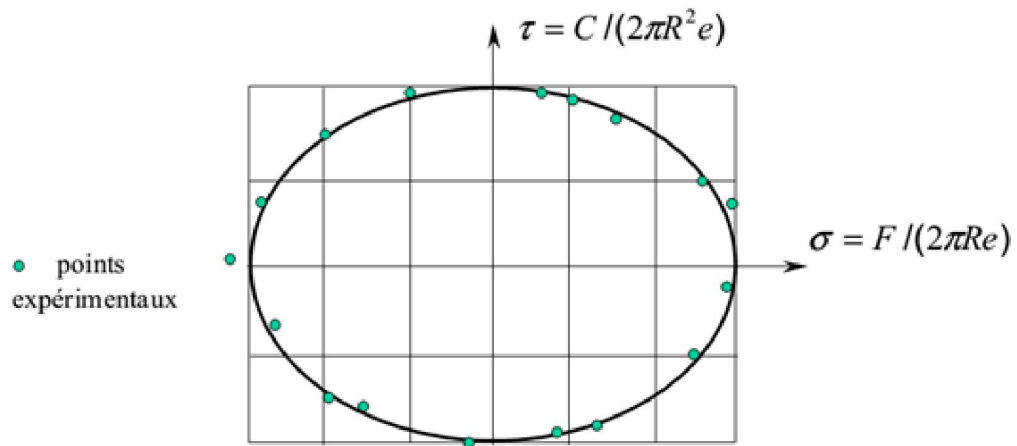


Figure I-6. Résultats de l'essai de traction-compression-torsion dans le plan $(\tau-\sigma)$

I-3. L'ESSAI DE TRACTION

L'essai de traction est le test le plus couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique d'un matériau, et donc établir sa "loi de comportement". Cet essai consiste le plus souvent à appliquer lentement et progressivement à une éprouvette de forme et dimensions normalisées, un effort de traction croissant dont l'intensité varie de 0 à F .

Considérons une éprouvette (de section transversale S_0 , de longueur l_0) soumise à un effort de traction F . L'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée), nous posons que: $\varepsilon = \Delta l / l_0$ et $\sigma = F / S_0$.

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante). Les courbes obtenues à l'aide de cet essai ont typiquement l'allure de la *figure I-7*. La courbe de charge présente une partie linéaire (élastique) suivie d'une partie non linéaire, au cours de laquelle la pente diminue dans le diagramme déformation–contrainte, au point de devenir éventuellement négative. La courbe peut présenter un palier horizontal, comme pour l'acier doux ou le cuivre à température ambiante, comme il peut être sans palier, le cas du cuivre recuit, de l'aluminium et des aciers hautement alliés.

La *figure I-7-a* représente la courbe-type d'un essai de traction simple d'une éprouvette d'acier, donnant l'évolution de l'effort de traction F (rapporté à la section initiale de l'éprouvette S_0) en fonction de l'allongement relatif $\Delta l / l_0$, mesuré dans la partie centrale de l'éprouvette (dite la partie utile). On peut distinguer:

Zone élastique OA : l'éprouvette se comporte élastiquement (comme un ressort) et revient toujours à sa longueur initiale dès que la charge est relâchée. Le point A , auquel correspond la limite élastique σ_e , marque la fin de cette zone. La proportionnalité entre la contrainte σ et la déformation ε se traduit par la loi de Hooke ($\sigma = E \cdot \varepsilon$). E : le module de Young, caractérise la pente de la droite **OA**.

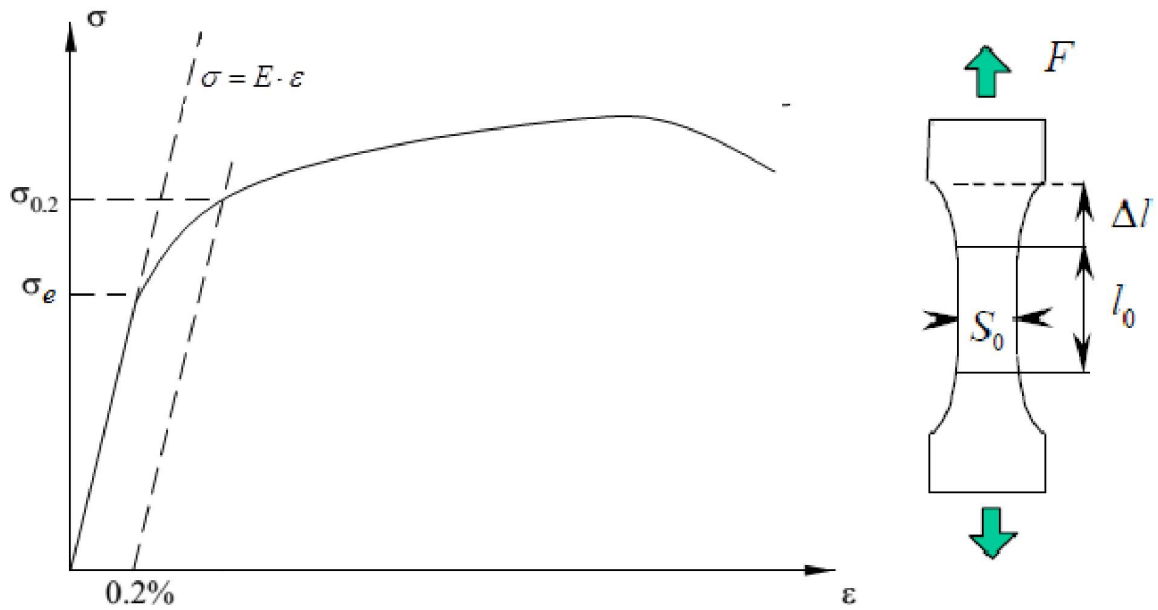


Figure I-7. Courbe de repense (contrainte – déformation): a- acier allié

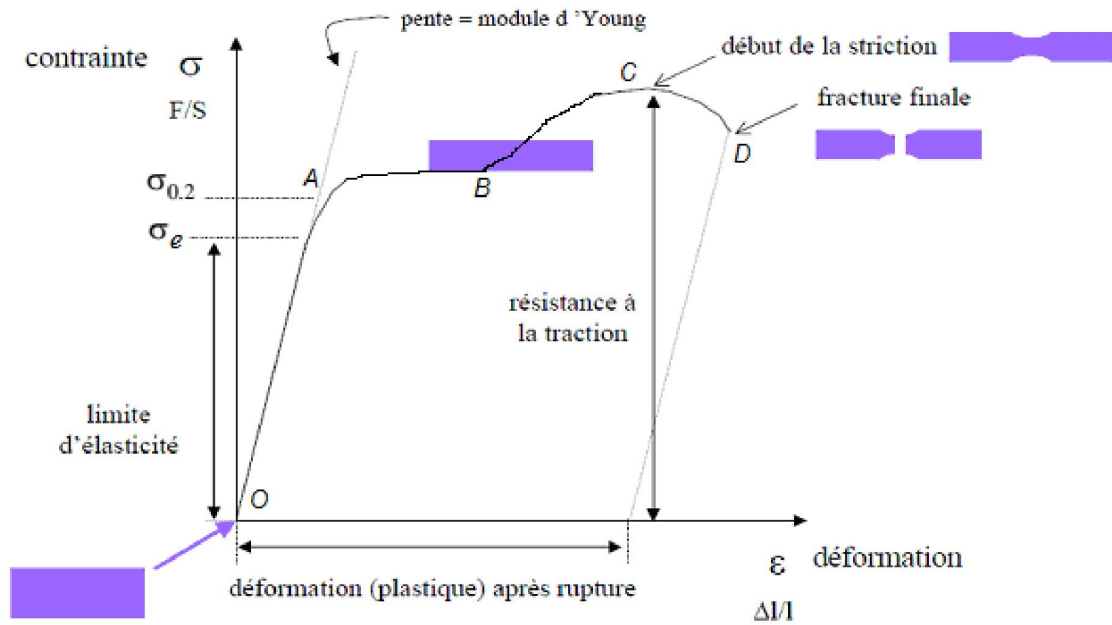


Figure I-7. Courbe de repense (contrainte – déformation): b- acier doux

Zone de déformation plastique AD : on distingue encore trois zones AB , BC et CD .

Dans la zone AB (comportement parfaitement plastique), la contrainte σ reste constante et l'allongement ε se poursuit jusqu'en B . Entre B et C (zone d'écroutissage), le matériau subit un changement de structure qui accroît sa résistance. Le point C , correspond à la résistance maximale σ_m . Enfin, entre C et D , l'éprouvette subit une striction "diminution de la section avec étranglement" (La déformation plastique provoque aussi l'apparition de petites cavités internes; Leur croissance et leur coalescence conduisent à la rupture). La rupture se produit au point D , auquel correspond la résistance à la rupture σ_r .

Sur les graphes de la *figure I-7*, selon le niveau de sollicitation appliqué lors du chargement nous obtenons les l'allure (σ, ε) suivantes:

Pour: $\sigma \leq \sigma_e$

On est dans le domaine élastique, le comportement du matériau est réversible.

Si on charge de O jusqu'au point E (un point au-dessous de σ_e), Puis on décharge, le déchargement s'effectue selon la courbe de chargement élastique jusqu'au point O ($\varepsilon = 0$).

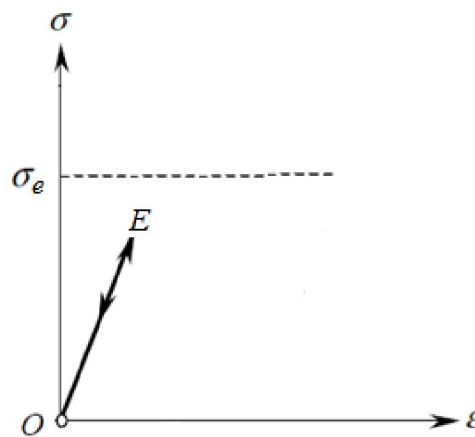


Figure I-8. Chargement $\sigma \leq \sigma_e$

Pour: $\sigma > \sigma_e$

Si on charge de O jusqu'au H , Puis on décharge à partir du point H , le déchargement s'effectue parallèlement à la courbe de chargement élastique jusqu'au point P ($\sigma = 0$), on parle de "décharge élastique", il ne reste que la déformation plastique ou déformation permanente ε^p définie par OP .

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

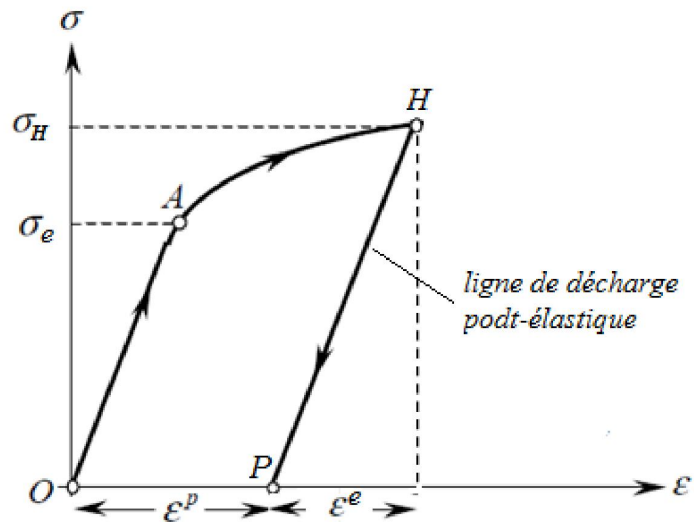


Figure I-9. Déchargement $\sigma > \sigma_e$

I-3-1. Limite d'Elasticité ou Seuil d'Ecoulement

Sur la figure I-10 ci-dessous on distingue les contraintes suivantes:

- σ_e : la limite d'élasticité "vraie", ou limite de proportionnalité; est la contrainte au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. Le point correspondant à σ_e caractérisé par un changement net de la courbe de charge ($F, \Delta l$) est difficile à situer.
- $\sigma_{0,2}$: la limite d'élasticité conventionnelle (apparente), correspond à une déformation inélastique de 0,2%, cette valeur classique étant relativement élevée, on utilise parfois $\sigma_{0,02}$;
- σ_H : la nouvelle limite d'élasticité apparaît après décharge post-élastique.

Si on charge de O en passant de A jusqu'au H , Puis on décharge en H jusqu'au P ; lorsqu'on charge à partir de P , on aura une nouvelle limite d'élasticité σ_H plus nette (augmentation ou diminution) de l'amplitude de la contrainte. Il y a alors (durcissement ou adoucissement) du matériau. L'ordonnée du point H représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé *seuil d'élasticité actuel*, au-delà duquel apparaît de nouveau la plasticité.

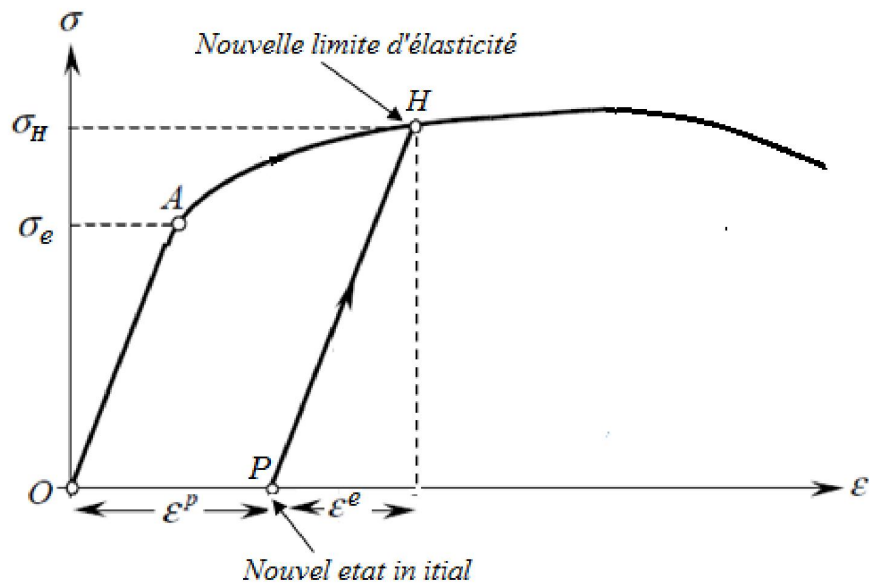


Figure I-10. Evolution de la limite de l'élasticité

I-3-2. La réduction de la ductilité

C'est la diminution de l'allongement possible avant rupture. Les décharges **HP**, Ces décharges ont pour effet de déplacer l'origine des déformations de **O** en **H** puis réduisant progressivement l'allongement restant à parcourir jusqu'à la rupture.

I-3-3. Le travail des déformations plastiques

Donnons une interprétation énergétique de la courbe d'écrouissage:

W : énergie totale (travail des efforts intérieurs pour arriver en H) ;

W^p : énergie de dissipation plastique ;

W^e : énergie de déformation élastique, restituée.

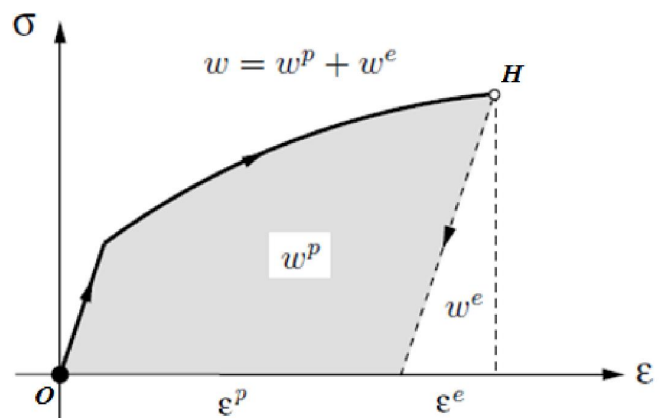


Figure I-11. Le travail des déformations

CHAPITRE II: LA DEFORMATION PLASTIQUE

II-1. MECANISME DE LA DEFORMATION PLASTIQUE

Observation 1: Lorsque l'on déforme un matériau cristallin au-delà de son domaine élastique, on voit apparaître à sa surface des lignes appelées traces de glissement. Ces traces traduisent le glissement des plans atomiques les uns par rapport aux autres.

Observation 2: Plusieurs essais de chargement multiaxial "sur des matériaux cristallins" ont confirmés que la courbe contrainte déformation n'est pas affectée par la pression hydrostatique. Cela semble confirmer de façon macroscopique que le matériau se déforme "déformation plastique" par glissement de plans atomique et que par conséquent la pression multiaxial n'a pas d'influence sur la plastification du matériau.

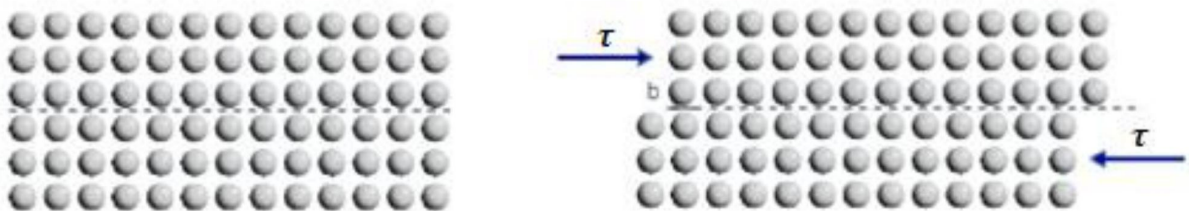


Figure II-1. Glissement des plans atomiques

Les déformations plastiques ont toujours pour origine des mécanismes de glissement, "décalage" sous cisaillement des liaisons entre les atomes de deux plans atomiques adjacents. Ce mécanisme de translation s'effectue par glissement d'une maille ou d'un nombre entier de mailles de part et d'autre d'un plan interatomique. Après glissement le réseau atomique retrouve sa disposition initiale mais le cristal s'est déformé de manière permanente.

II-2. LES DEFAUTS DANS LES SOLIDES

Les dislocations?

Le concept de dislocation a pour origine le profond désaccord entre la théorie et l'expérience concernant la déformation plastique par cisaillement.

Un simple calcul analytique basé sur l'extension des relations de l'élasticité cristalline indique que pour réaliser un tel glissement "plan sur plan" de façon rigide, il faudrait exercer une contrainte de cisaillement

théorique: $\tau_{th} = \frac{\mu \cdot b}{2\pi d} \approx \frac{\mu}{5}$.

où b représente la distance interatomique et d la distance interéculaire.

μ : le module de cisaillement.

Cependant, il existe une différence de plusieurs ordres de grandeur entre la limite élastique théorique de l'équation ci-dessus et celle mesurée expérimentalement (qui vaut de l'ordre de $\mu/10000$ à $\mu/1000$). Plusieurs auteurs établirent que:

- La présence d'imperfections cristallines à l'intérieur des matériaux pouvait expliquer cette divergence entre théorie et expérience.
- Ce désaccord indique qu'il existe un mécanisme qui facilite le glissement plan sur plan.

En 1934, Taylor a émis l'hypothèse que le glissement des plans atomiques ne s'effectue pas d'un bloc mais progressivement par propagation d'un défaut appelé dislocation dans l'arrangement des atomes.

Ce sont donc les dislocations, "défauts cristallins linéaires se formant lors de la phase de solidification des métaux et des alliages", qui véhiculent la déformation plastique. Les dislocations produisent au cours de leur mouvement un changement de forme définitif du cristal.

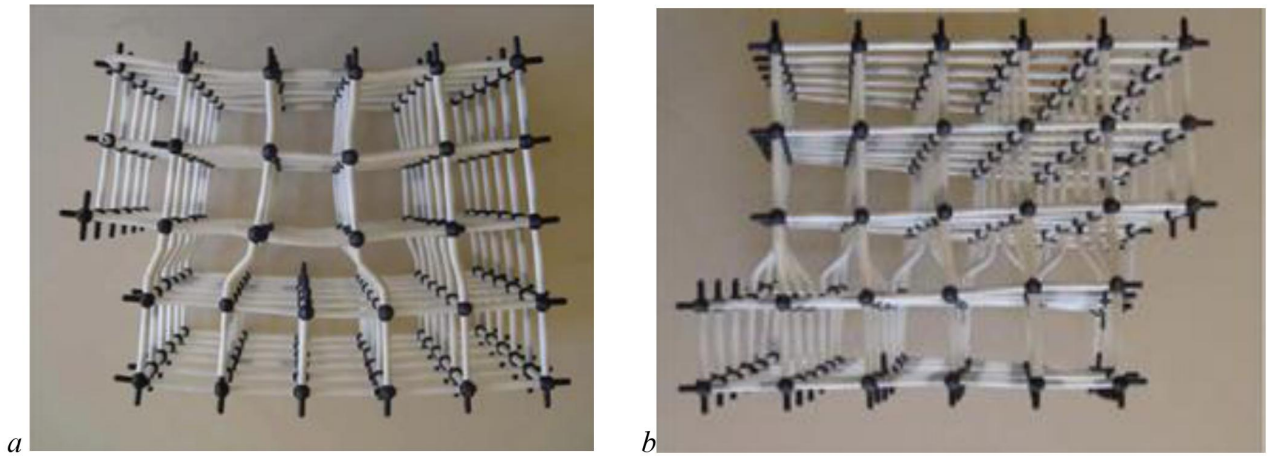


Figure II-2. a- dislocation coin; b- dislocation vis

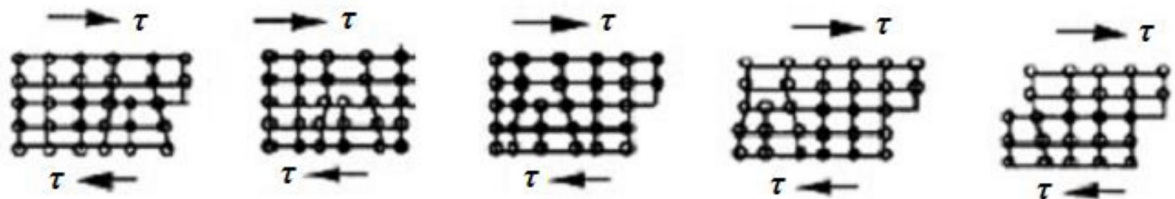


Figure II-3. Glissement macroscopique induit par le mouvement d'une dislocation

Les liaisons atomiques ne sont alors perturbées que localement autour de la ligne de dislocation. Son déplacement est plus aisé que le glissement en bloc car, il n'intéresse qu'un petit nombre d'atomes à la fois. Du point de vue de la déformation macroscopique, il aboutit au même résultat lorsque la ligne de dislocation a balayé tout le plan atomique, mais la contrainte nécessaire pour déplacer ce défaut est celle nécessaire pour déplacer une seule rangée atomique au lieu du basculement simultané de toutes les liaisons du plan de glissement. De ce fait, elle est nettement plus faible que l'énergie de basculement simultané.

	Module de cisaillement μ (Gpa)	Limite d'élasticité σ_e (Mpa)	$\frac{\mu}{\sigma_e}$
<i>Monocristaux</i>			
<i>Al monocristal</i>	25	0,4	60000
<i>Ag monocristal</i>	28	0,6	45000
<i>Polycristaux</i>			
<i>Al polycristal</i>	25	30	830
<i>Al polycristal écroui</i>	25	100	250
<i>Alliages</i>			
Dural (AU4G)	25	360	70
Acier	80	650	120
Acier <i>Cr - Ni</i>	80	1200	67

Tableau I-1. Limite élastique théorique et expérimentale

Matière	Nuance	σ_e (MPa)
Résineux courants	C18 à C30	18 à 30
Bois lamellé-collé	GL24 à GL32	24 à 32
Alliage d'aluminium	Série 1000 à série 7000	90 à 470
Acier de construction usuel non allié	S235 à S355	235 à 355
Acier au carbone trempé	XC 30 (C30)	350 à 400
Acier faiblement allié trempé	30 Cr Ni Mo 16 (30 CND 8)	700 à 1450
Alliage de titane	TA 6V	1200
Fibre de verre	"E", courant	2500
Fibre de verre	"R", haute performance	3200
Fibre de carbone	"HM", haut module de Young	2500
Fibre de carbone	"HR", haute résistance	3200
Composites Fibre/matrice	Verre ou carbone	1000 à 1800

Tableau I-2. Tableau de limite d'élasticité en traction de matériaux usuels

II-3. MULTIPLICATION DES DISLOCATIONS

Nous avons vu que la déformation plastique d'une pièce métallique se fait par le mouvement des dislocations. Néanmoins, les études montrent que la densité initiale de dislocations n'autorise pas une déformation plastique de grande amplitude, même en supposant que toutes les dislocations soient mobiles.

Au cours de la déformation plastique, les dislocations se multiplient généralement sous l'effet des contraintes mécaniques appliquées selon le mécanisme de Frank-Read. Le mécanisme de Frank et Read, également appelé moulin de Frank-Read, est un mécanisme de multiplication de dislocations intervenant dans la déformation plastique. Il permet d'expliquer comment la déformation plastique est possible alors que les cristaux contiennent peu de dislocations.

Moulin de Frank-Read

Le moulin de Frank-Read est un des mécanismes efficaces de multiplication des dislocations.

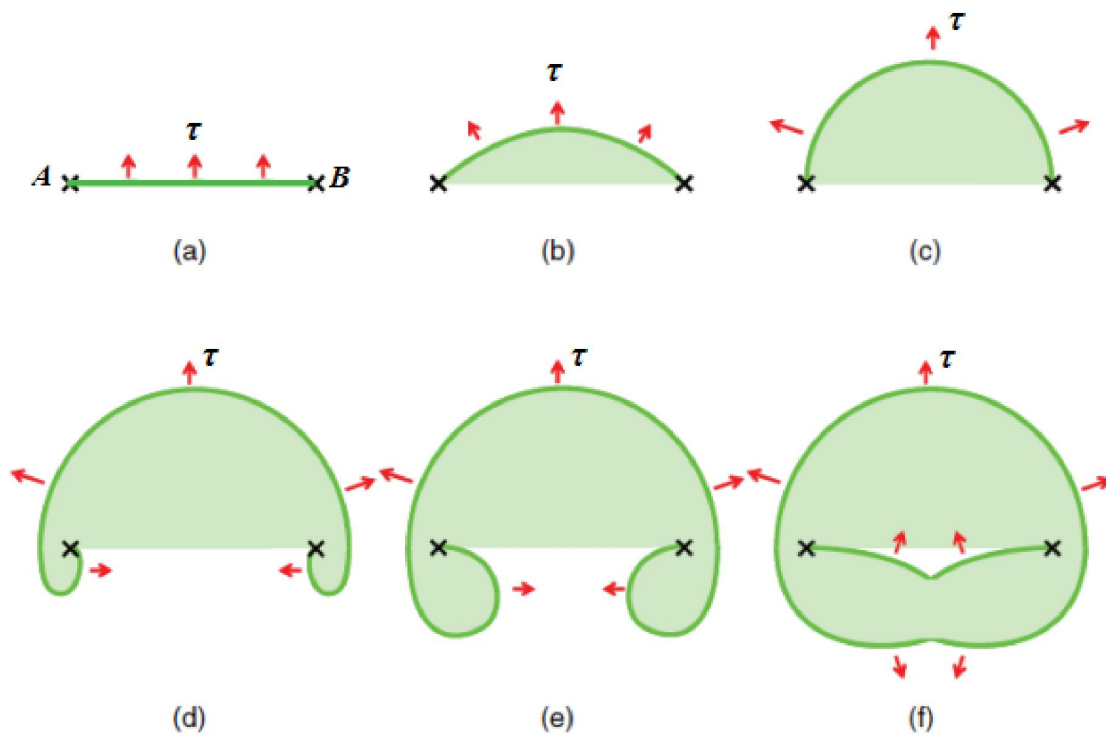


Figure II-4. Schémas de fonctionnement du moulin de Frank-Read

Sous l'effet de la cission τ qui s'exerce sur le plan de glissement la dislocation, ancrée en deux points A et B distants de L , se courbe. Lorsque τ augmente R diminue jusqu'à atteindre $L/2$ et l'arc devient instable, tourne autour des points A et B distants de L et la recombinaison des portions de signes opposés en regard éjecte une boucle qui se propage par glissement et recrée un nouveau segment AB qui démarre un nouveau cycle. Un moulin de Frank-Read peut ainsi produire jusqu'à 500 boucles.

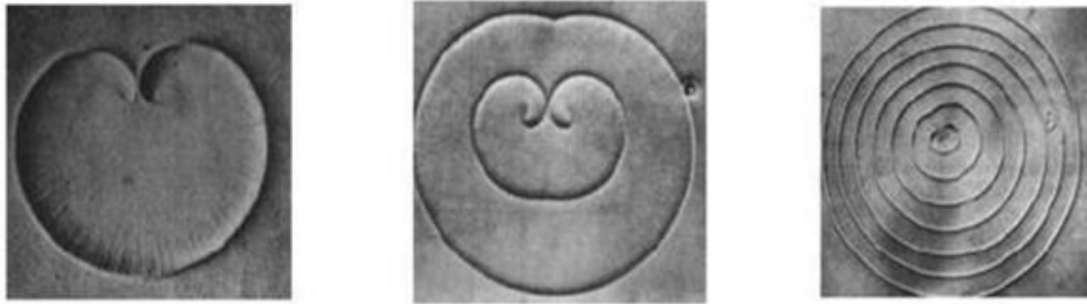


Figure II-5. Multiplication des dislocations : Marches superficielles sur une surface d'Aluminium polie électriquement résultant de l'émergence de deux dislocations vis

II-4. PHENOMENE D'ECROUISSAGE

On revient maintenant à l'essai de traction simple dans le cas des matériaux écrouissables, si nous effectuons une série de charges–décharges consécutives, nous obtenons l'allure de la courbe "contrainte-déformation" représentée sur la *figure II-7* ci-dessous. Nous nous observons:

- que l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité;
- une évolution de la limite d'élasticité due à l'écrouissage;
- la nouvelle limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone.

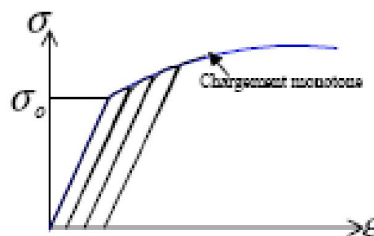


Figure II-7. Evolution de la limite de l'élasticité

Le phénomène d'écrouissage aussi appelé *consolidation* correspond à une augmentation de la limite d'élasticité et de la dureté des alliages métalliques lors de leur déformation plastique.

Ce phénomène est directement lié aux modifications qui subissent les matériaux lors de la déformation plastique. Ces modifications sont d'ordre métallurgique (modification de la structure interne du métal à l'échelle des grains du polycristal) créant des obstacles au glissement des dislocations par une augmentation du nombre de point de blocage des dislocations.

II-4-1. Ecrouissage Isotrope

Soit σ_0 est la limite d'élasticité initiale du matériau non déformé. Généralement σ_0 est la même en traction et en compression. Effectuons maintenant un cycle de chargement qui suit le trajet : $OA-AB-BC$, comme représenté sur la *figure II-8-a*. Lors du chargement suivant OA on obtient une nouvelle valeur de la limite d'élasticité σ_A . Après décharge suivant AO' on sollicite la même éprouvette en compression à partir du point O' , l'écoulement plastique commencera au point B de contrainte $\sigma_B = -\sigma_A$.

On constate alors que la limite d'élasticité en compression (qui a été initialement σ_0) augmente comme celle de traction. Dans ce cas la marge élastique " $2\sigma_y$ " subit une expansion isotrope symétrique de centre O fixe.

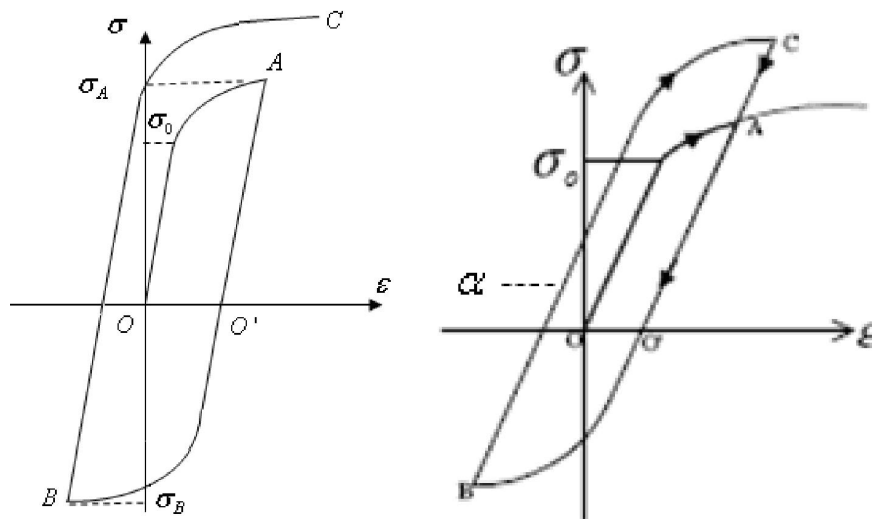


Figure II-8. a- écrouissage isotrope; b- écrouissage cinématique

II-4-2. Ecrouissage Cinématique

La plus part des aciers présentent un phénomène connu sous le nom d'effet Bauschinger. Cet effet est la principale manifestation de l'écrouissage cinématique. Soit σ_0 est la limite d'élasticité initiale du matériau non déformé. Généralement σ_0 est la même en traction et en compression. Dans ce cas, Si nous effectuons un cycle de chargement qui suit le trajet: $OA-AB-BC$, comme représenté sur la *figure II-8-b*. Lorsqu'on inverse la charge à partir du point O' l'écoulement plastique commencera au point B de contrainte $|\sigma_B| = \sigma_A - \alpha < \sigma_0$.

On constate alors que la limite d'élasticité en compression, initialement égale à $(-\sigma_0)$, se trouve ramenée à la valeur (σ_B) , inférieur (en valeur absolue) à (σ_0) . Autrement dit, l'écrouissage en traction qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression et vis-versa. Cela veut dire que la marge élastique de $2\sigma_y$ garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance $\alpha = \sigma_0 - \sigma_A$ qui sera l'ordonnée du centre du segment.

IV-4-3. Ecrouissage Mixte

L'effet de Bauschinger est complètement ignoré dans l'écrouissage isotrope, et maximal dans l'écrouissage cinématique. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales. L'écrouissage mixte est une combinaison des deux, la marge élastique subit une expansion et une transformation au même temps.

II-5. SURFACE DE CHARGE ET CONTRAINTE EQUIVALENTE

L'essai de traction simple correspond à un état de contrainte uni-axial. L'état de contrainte est donc représenté par un unique scalaire σ ; le seuil de plasticité s'écrit: $\sigma = \sigma_e$ (le critère de plasticité)

L'écroûissage correspond à une élévation de la limite d'élasticité σ_e .

Dans le cas d'un état de contrainte bi- ou triaxial, le seuil de plasticité est remplacé par une surface appelée la surface de charge ou surface d'écoulement caractérisée par une fonction scalaire appelée contrainte équivalente σ_{eqv} qui est un scalaire calculé à partir des composantes du tenseur des contraintes. On utilise en général deux contraintes équivalentes:

- la contrainte de Tresca, ou contrainte de cisaillement maximale:

$$\sigma_{eqv} = \max(|\sigma_i - \sigma_j|); \text{ avec } i \neq j$$

- la contrainte de von Mises, ou contrainte d'énergie de distorsion :

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}$$

Le critère de plasticité s'écrit alors: $\sigma_{eqv} = \sigma_e$

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la frontière $\sigma_{eqv} = \sigma_e$ est une surface appelée la surface de charge (surface d'écoulement):

- dans le cas de la contrainte de Tresca, c'est un prisme à base hexagonale et de longueur infinie;
- dans le cas de la contrainte de von Mises, c'est un cylindre de révolution et de longueur infinie.

Pour $\sigma_{eqv} < \sigma_e$: C'est l'intérieur de la surface, ce domaine est élastique.

Pour $\sigma_{eqv} = \sigma_e$: Plastification.

Pour $\sigma_{eqv} > \sigma_e$: Est un état de contraintes physiquement impossibles en élasto-plasticité.

L'écroûissage correspond alors à une déformation de cette surface frontière.

Dans le cas d'un état de contrainte bi-axial, on peut se contenter d'une représentation bi-dimensionnelle (σ_1, σ_2) , la frontière est alors une courbe: un hexagone pour Tresca, une ellipse pour von Mises.

Pour un écrouissage isotrope, l'écrouissage correspond à une dilatation de la surface frontière par une homothétie centrée en $(0, 0, 0)$. Cela signifie qu'il y a un durcissement quelle que soit la direction de déformation.

Pour l'écrouissage cinématique, la surface frontière ne se déforme pas mais est translatée. Cela signifie qu'il y a un durcissement dans certaine direction, mais un adoucissement dans d'autres directions. Cela correspond à l'effet Bauschinger.

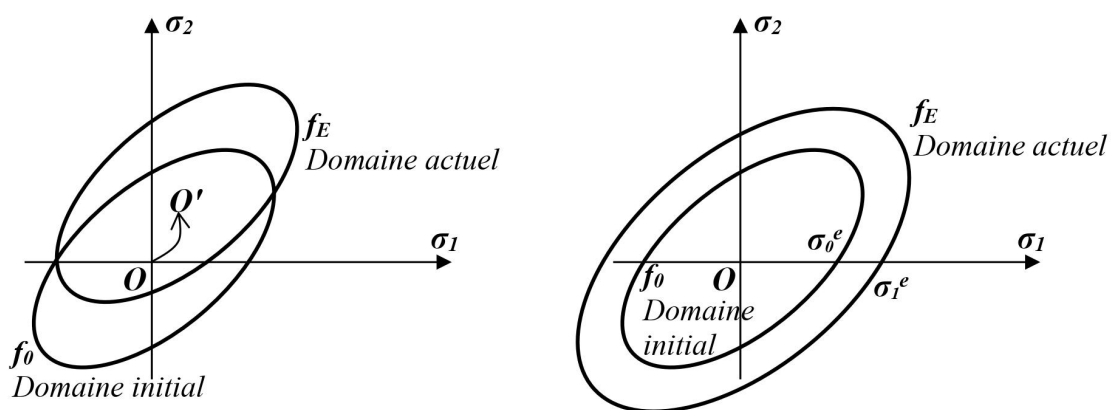


Figure II-9. Surface de charge pour un état de contrainte bi-dimensionnel

II-6. EFFET D'UNE PRESSION ISOTROPE

Pour un corps homogène et sans vides le domaine des déformations plastiques contenues s'étend indéfiniment du côté des pressions (contrainte négative) sur l'axe $\Delta(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$. La plastification s'effectue par changement de forme à volume constant et ne dépend que du déviateur des contraintes σ^D . Cela correspond à une résistance limite du matériau au cisaillement à volume constant (déformation isotrope nulle). Une compression hydrostatique, quelle que soit son amplitude, ne produit ni rupture ni écoulement plastique comme l'ont démontrées les expériences de Bridgmann et Cook.

Cependant ce résultat est mis en défaut pour les corps présentant des vides ou de graves défauts d'homogénéité. Une pression hydrostatique peut alors induire des déformations plastiques importantes voire même la rupture. Ainsi:

- Les métaux frittés et le béton sec répondent à un critère fermé du côté des pressions avec une résistance à la traction faible (liée à la faible cohésion du matériau).
- Les textiles tissés présentent au contraire une très faible résistance à la compression (liée au flambement des fils) comparée à leur résistance en traction.

*CHAPITRE III: LES MODELES RHEOLOGIQUES DE
PLASTICITE UNIAXIALE*

III-1. MODELISATION DU COMPORTEMENT EN TRACTION – COMPRESSION

La formulation la plus simple permettant de prendre en compte le phénomène de plasticité est la modélisation de la courbe de l'essai de traction (compression) obtenue pour un chargement monotone en utilisant un modèle construit à partir de segments de droite.

III-1-1. Modèle rigide parfaitement plastique

Dans le cas où les déformations élastiques étant très faibles devant les déformations plastiques (les problèmes de mise en forme par exemple), on peut ignorer la phase élastique. Le modèle de loi de comportement devient alors le modèle rigide parfaitement plastique. Le comportement rigide parfaitement plastique uni-axial se caractérise par l'existence d'un seuil de contrainte (seuil de plasticité) au-dessous duquel aucune déformation n'est observée et pour laquelle une déformation permanente quelconque est possible, il y aura écoulement libre du matériau (perte d'équilibre). Ce modèle est le plus simple car il ne nécessite aucun calcul de type élastique.

- Pour ces modèles, la déformation avant écoulement est négligée.
- Pour ces modèles on néglige l'écroutissage du matériau (Le seuil de plasticité σ_0 demeure constant).
- Le modèle rigide parfaitement plastique est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites.

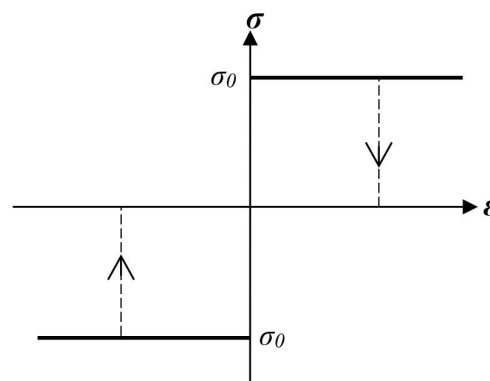


Figure III-1. Modèle rigide parfaitement plastique

Formulation incrémentale:

$$|\sigma| < \sigma_{e0} \Rightarrow \epsilon = 0; d\epsilon = 0$$

$$\sigma = \sigma_{e0} \Rightarrow d\sigma = 0; d\epsilon = d\epsilon^p$$

III-1-2. Modèle élastique parfaitement plastique (élasto-plastique parfait)

Ce modèle bilinéaire est caractérisé par l'existence d'un domaine d'élasticité où le comportement du matériau est élastique linéaire tant que les contraintes n'atteignent pas la limite d'élasticité. Quand la limite d'élasticité est atteinte, des déformations plastiques sont susceptibles d'apparaître ou d'évoluer, il y aura écoulement libre du matériau.

Ce modèle présente d'une part l'avantage d'être sécurisant par rapport à la réalité, d'autre part il traduit relativement bien le cas des matériaux présentant un palier d'écoulement. Ce modèle est généralement utilisé pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés.

- Pour ce modèle le seuil de plasticité demeure constant $\sigma_e = \sigma_0$.

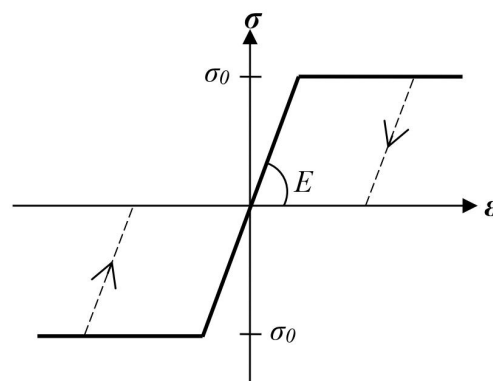


Figure III-2. Modèle élastique parfaitement plastique

Formulation incrémentale:

$$|\sigma| < \sigma_{e0} \Rightarrow d\epsilon = d\epsilon^e = \frac{d\sigma}{E}$$

$$|\sigma| = \sigma_{e0} \Rightarrow d\sigma = 0; d\epsilon = d\epsilon^p$$

III-1-3. Modèle rigide plastique avec écrouissage

Dans ce modèle, le matériau est capable de se durcir par "écrouissage" avec la déformation plastique; la pente de la courbe contrainte-déformation pour des contraintes supérieures à σ_{e0} s'appelle le module élasto-plastique tangent, $E_T = d\sigma/d\epsilon$.

Formulation incrémentale:

$$|\sigma| \leq \sigma_{e0} \Rightarrow \varepsilon = 0; d\varepsilon = 0$$

$$|\sigma| > \sigma_{e0} \Rightarrow d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p; \Rightarrow d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E_T}$$

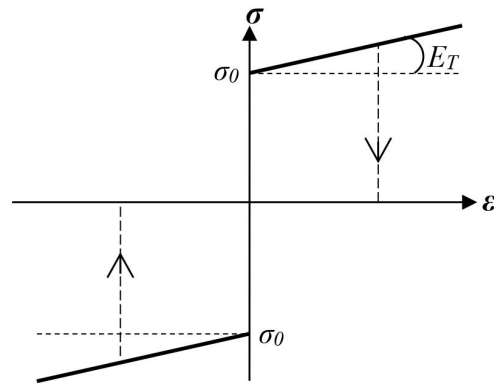


Figure III-3. Modèle rigide plastique avec écrouissage

III-1-4. Modèle élasto-plastique avec écrouissage

Ce modèle donne une courbe bi-linéaire.

Formulation incrémentale:

$$|\sigma| \leq \sigma_{e0} \Rightarrow d\varepsilon = d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E}$$

$$|\sigma| > \sigma_{e0} \Rightarrow d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p; \Rightarrow d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E_T}$$

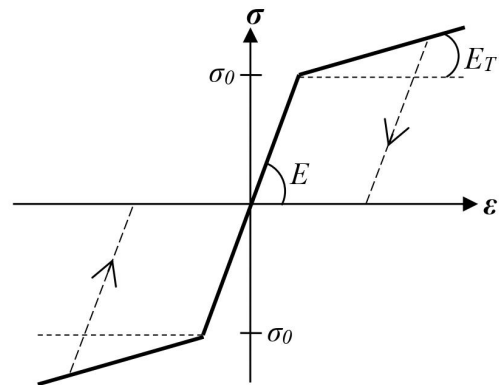


Figure III-4. Modèle élasto-plastique avec écrouissage

III-1-5. Modèle multi-linéaire

La figure III-5 représente un modèle multi-linéaire.

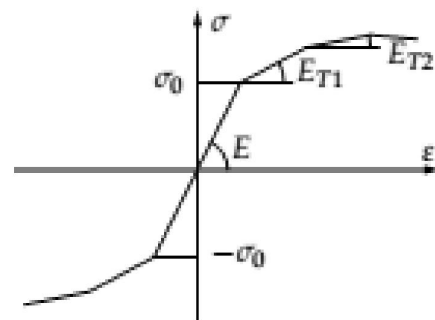


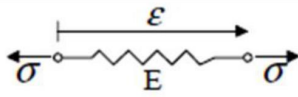
Figure III-5. Modèle multi-linéaire

III-2. MODELES ANALOGIQUES DE L'ELASTOPLASTICITE

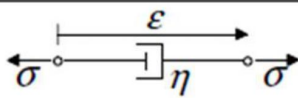
III-2-1. Les modèles de base

Les trois classes de comportement mécanique principales "qui sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité", peuvent être représentées par des systèmes mécaniques élémentaires:

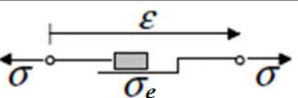
1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation proportionnel entre la charge et la déformation.

Ressort :		Élasticité linéaire parfaite	$\sigma = E\varepsilon$
-----------	---	------------------------------	-------------------------

2. L'amortisseur, qui schématise la viscosité. Si la relation entre la charge et la vitesse de déformation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.

Amortisseur :		Viscosité linéaire newtonienne	$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$
---------------	---	--------------------------------	----------------------------------

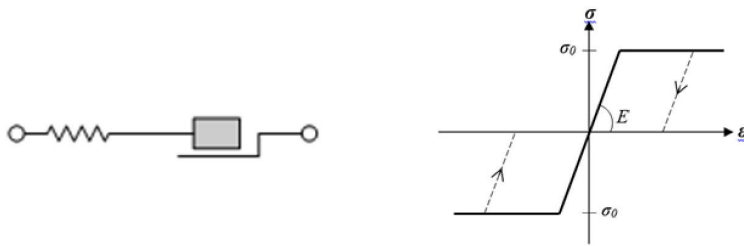
3. Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge atteint le seuil de plasticité "comportement rigide parfaitement plastique".

Patin :		Modèle rigide plastique parfait	$ \sigma \leq \sigma_e$
---------	---	---------------------------------	--------------------------

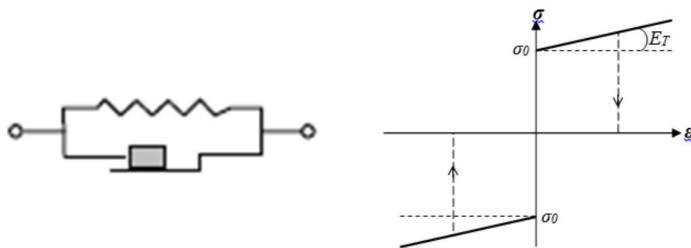
III-2-2. Les modèles élasto-plastiques

Ces systèmes élémentaires peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques de comportements plus complexes effectivement rencontrés dans la pratique (élasto-plasticité, visco-élasticité, visco-plasticité, et élasto-visco-plasticité, ...).

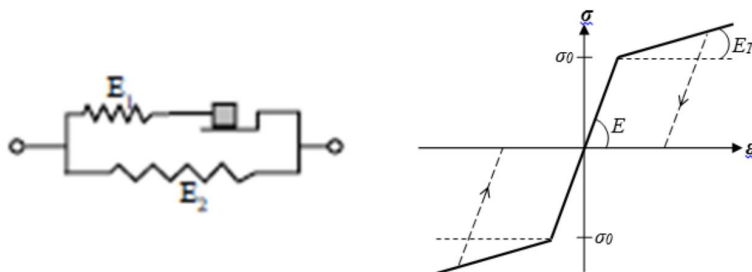
1- *modèle élastique parfaitement plastique*, constitué par un ressort linéaire et un patin en série. Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que σ_{e0} .



2- *modèle rigide plastique écrouissable* (avec écrouissage), constitué par un ressort linéaire et un patin en parallèle. L'écrouissage linéaire est défini par le module tangent E_T .



3- *modèle élastique-plastique écrouissable*, constitué par un patin et un ressort linéaire E_1 en série et un ressort linéaire en parallèle. $E = E_1 + E_2$; $E_T = E_2$



*CHAPITRE IV: THEORIE INCREMENTALE DE PLASTICITE
UNIAXIALE*

IV-1. CRITERE DE PLASTICITE

Lors d'un essai de traction–compression, le suivi d'un trajet de chargement, au cours duquel la limite d'élasticité initiale représenté par $\sigma_e(0)$ est franchie, va engendrer des déformations plastiques. Il en résulte également une évolution (modification) du domaine d'élasticité en fonction des paramètres d'écroutissage (H), appelé limite d'élasticité actuelle $\sigma_e(H)$.

Il est alors commode de caractériser ce domaine par la donnée d'une fonction de charge, notée $f(\sigma, H)$, telle que, pour un état d'écroutissage donné H .

- $f(\sigma, H) < 0$ si σ est à l'intérieur du domaine élastique;
- $f(\sigma, H) = 0$ si σ est situé sur la frontière du domaine élastique;

Un état extérieur au domaine d'élasticité est physiquement impossible à obtenir, le domaine d'élasticité représente donc l'ensemble des états de contraintes admissibles, c'est à-dire que le point représentatif de l'état de contrainte ne peut jamais être extérieur au domaine d'élasticité actuel.

Pour l'essai de traction–compression, le domaine d'élasticité est défini par:

$$\{\sigma \in \mathfrak{R}; f(\sigma, H) = |\sigma| - \sigma_e(H) \leq 0\}$$

IV-2. ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE

- **Décomposition additive**

Considérons un incrément de déformation: $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$

- La décomposition de la partie élastique et plastique de la déformation est une partie importante de l'analyse élasto-plastique.
- Seule les déformations élastiques contribuent au contraintes (mais nous ne savons pas quelle part de la déformation totale correspond à la déformation élastique).
- La déformation élastique augmente la contrainte par la quantité: $\Delta \boldsymbol{\sigma} = E \times \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e$.
- La contrainte élastique disparaît lorsque la charge est relâchée ou changer sa direction.
- La déformation plastique reste constante pendant (et après) le déchargement.
- La limite d'élasticité est déterminée à partir de l'amplitude de la déformation plastique.
- Pour une contrainte donnée, la déformation ne peut pas être déterminée.
- l'historique complet de chargement est nécessaire.
- L'effet de l'historique de charge est stocké dans la déformation plastique.

IV-3. REGLE D'ECROUISSAGE.

La définition d'une règle d'écrouissage nous permettra de définir l'évolution du seuil de plasticité $\sigma_e(H)$ au cours de la déformation plastique.

IV-3-1. Ecrouissage Isotrope

Dans ce cas, le segment de charge (initialement $2\sigma_0$) subit une expansion symétrique par rapport à l'axe $\sigma = 0$, cela s'exprime par: $f(\sigma, H) = |\sigma| - \sigma_e(H) = 0$.

où $\sigma_e(H)$ est la limite élastique actuelle (dépend de la déformation plastique ε_p)

$$\sigma_e(H) = \sigma_0 + \int |H \cdot d\varepsilon^p|$$

avec: H est le dit module d'écrouissage (caractéristique déterminé expérimentalement).

- Si H est constant donc: $\sigma_e(H) = \sigma_0 + |H \times \varepsilon_p|$

IV-3-2. Ecrouissage cinématique

Il se peut que la limite élastique soit plus faible en compression qu'en extension. Nous n'avons plus un écrouissage isotrope, c'est ce qu'on appelle l'effet Bauschinger.

L'écrouissage cinématique modifie la position du domaine élastique mais pas l'amplitude du domaine élastique ($2\sigma_0$). Cela signifie que le segment de charge garde la même dimension mais subit une translation de son centre d'une distance $\alpha = \int H \cdot d\varepsilon^p$.

$$\text{Donc: } \sigma_e(H) = \sigma_0 - \int H \cdot d\varepsilon^p$$

- Si H est constant donc: $\sigma_e(H) = \sigma_0 - H \times \varepsilon_p$

IV-3-3. Ecrouissage mixte

La combinaison d'un écrouissage cinématique et isotrope permet de reproduire certaines caractéristiques rhéologiques importantes des matériaux. Dans ce cas on peut dire que le segment de charge subit une expansion et une translation en même temps, ceci s'exprime par:

$$\sigma_e(H) = \sigma_0 + M \int |H_{iso} \cdot d\varepsilon^p| + (1-M) \int H_{cin} \cdot d\varepsilon^p$$

Où M : est le coefficient de mixité tel que $0 \leq M \leq 1$, dans ce cas les modules d'écrouissage cinématique et isotrope sont différents $H_{iso} \neq H_{cin}$.

IV-4. MODULE DE PLASTICITE

Représentons la courbe d'écroutissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire. Ce modèle est caractérisé par σ_0 , la limite d'élasticité initiale, E , le module d'élasticité et E_T , le module tangent. Soit un incrément de charge $\Delta\sigma$ pris à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité. Nous avons:

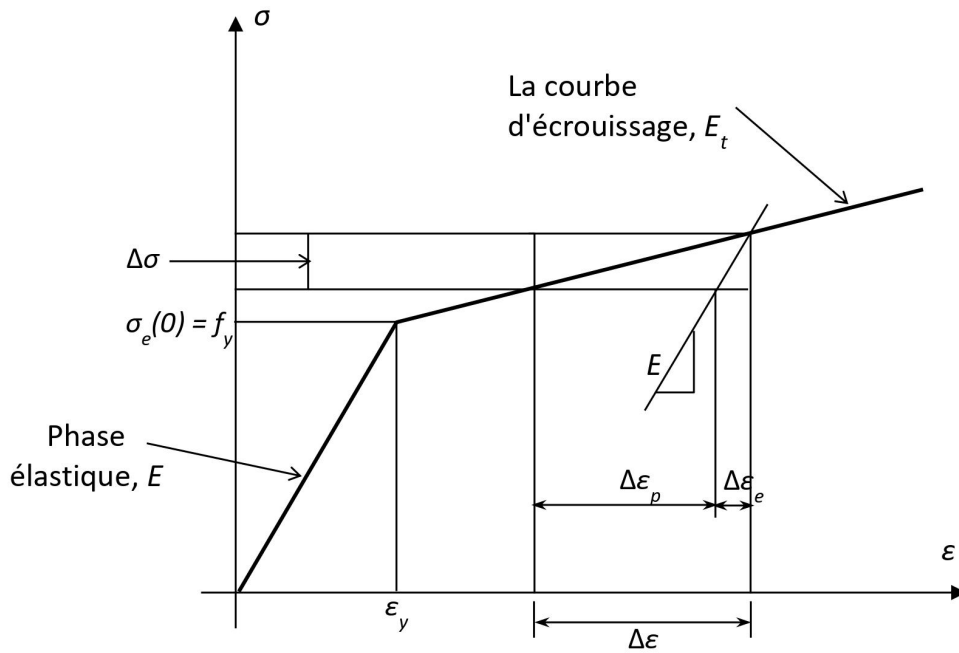
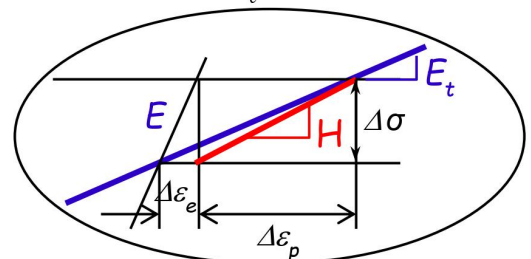


Figure IV-1. Module de plasticité

- Soit un incrément de contrainte: $\Delta\sigma = E_T \cdot d\epsilon$
- L'incrément total de déformation se compose en deux parties: $d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p$
- D'autre part $\Delta\sigma$ est dû aux déformations élastiques et donc: $\Delta\sigma = E \cdot d\epsilon_e$

$$\text{Or: } \Delta\sigma = E_T \cdot \left(\frac{1}{E} \Delta\sigma + \Delta\epsilon_p \right) \Rightarrow \Delta\sigma = \left(\frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \right) d\epsilon_p$$



- D'où: $\Delta\sigma = H \cdot \Delta\epsilon_p$ avec: $H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}}$ est le module d'écroutissage (de plasticité).

- **Relation entre les modules**

Le module de plasticité: $H = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon_p}$

$$\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon_e = H \cdot \Delta\varepsilon_p = E_T \cdot \Delta\varepsilon$$

$$\frac{\Delta\sigma}{E_T} = \frac{\Delta\sigma}{E} + \frac{\Delta\sigma}{H} \Rightarrow \frac{1}{E_T} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$$

$$H = \frac{E \cdot E_T}{E - E_T}; \quad E_T = \frac{E \cdot H}{E + H} = E \left(1 - \frac{E}{E + H} \right)$$

- **Procédure d'analyse**

- L'analyse est effectuée avec un incrément de contrainte donné
- un calcul itératif donnera : $\Delta\mathbf{u} \Rightarrow \Delta\varepsilon$
- mais, nous ne savons pas : $\Delta\varepsilon_e$ ou $\Delta\varepsilon_p$

- Lorsque le matériau se trouve dans la phase élastique initiale, une d'analyse élastique usuelle peut être utilisée.

- Lorsque le matériau est dans la phase plastique, nous devons déterminer la déformation plastique incrémentale (l'incrément de la déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$), comme suit:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \frac{\Delta\sigma}{E} + \Delta\varepsilon_p = \frac{H\Delta\varepsilon_p}{E} + \Delta\varepsilon_p \\ &= \Delta\varepsilon_p \left(\frac{H}{E} + 1 \right) \\ \Rightarrow \quad \Delta\varepsilon_p &= \frac{\Delta\varepsilon}{1 + H/E} \end{aligned}$$

Remarque:

Le cas de la plasticité parfaite correspond à la situation où le domaine d'élasticité est fixe, de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer les domaines d'élasticité initial et actuel. La fonction de charge n'est plus alors argumentée par des paramètres d'écrouissage.

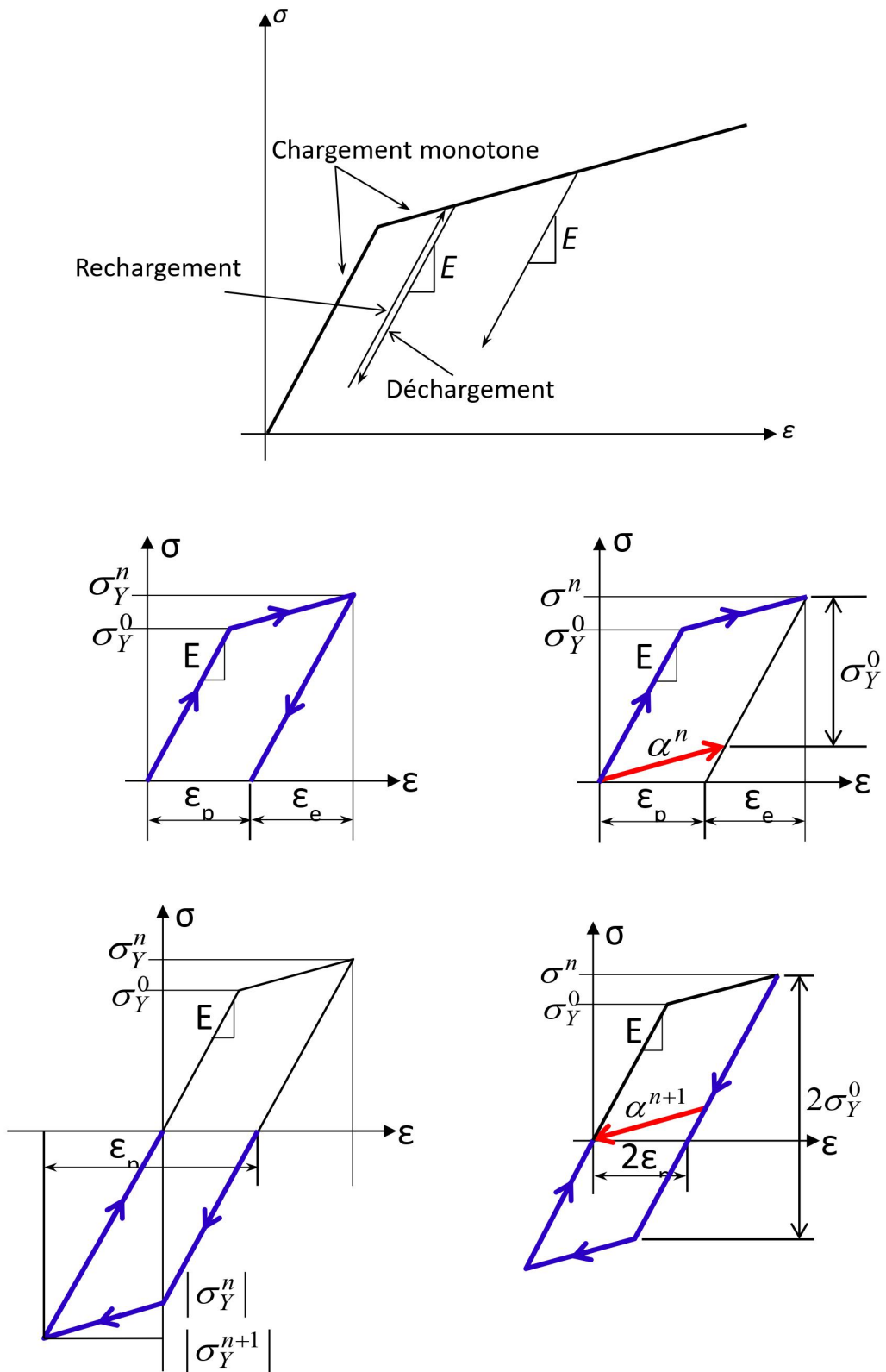


Figure IV-2. Ecroûissage cinématique et isotrope

CHAPITRE V: CRITERES D'ECOULEMENT PLASTIQUE

V-1. CRITERE DE PLASTICITE

Lors d'un essai de traction–compression, le suivi d'un trajet de chargement, au cours duquel la limite d'élasticité initiale représenté par $\sigma_e(0)$ est franchie, va engendrer des déformations plastiques. Il en résulte également une évolution (modification) du domaine d'élasticité en fonction des paramètres d'écroutissage (H), appelé limite d'élasticité actuelle $\sigma_e(H)$.

Il est alors commode de caractériser ce domaine par la donnée d'une fonction de charge, notée $f(\sigma, H)$, telle que, pour un état d'écroutissage donné H .

- $f(\sigma, H) < 0$ si σ est à l'intérieur du domaine élastique;
- $f(\sigma, H) = 0$ si σ est situé sur la frontière du domaine élastique;

Un état extérieur au domaine d'élasticité est physiquement impossible à obtenir, le domaine d'élasticité représente donc l'ensemble des états de contraintes admissibles, c'est à-dire que le point représentatif de l'état de contrainte ne peut jamais être extérieur au domaine d'élasticité actuel.

Pour l'essai de traction–compression, le domaine d'élasticité est défini par:

$$\{\sigma \in \mathfrak{R}; f(\sigma, H) = |\sigma| - \sigma_e(H) \leq 0\}$$

V-2. CRITERE DE MOHR-COULOMB

L'interprétation la plus simple de «plasticité» est le modèle «patin-ressort» de la *figure V-1*. Dans cette formulation, sous l'action du système (V, H) , tout le déplacement horizontal du point (A) est initialement causé par la déformation (allongement) du ressort, car, pour des niveaux de force faibles, l'adhérence et le frottement entre le patin et la surface plane empêchent tout glissement du patin.

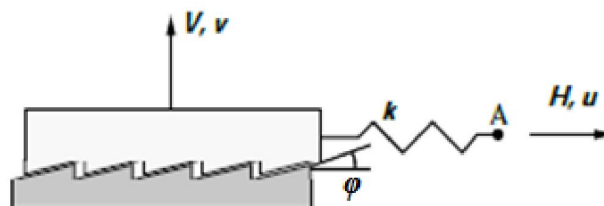


Figure V-1. Modèle patin-ressort

Seulement lorsque la force de cisaillement maximale qui peut être exercée par l'adhérence et le frottement entre le patin et la surface est épuisée, le patin commencera à glisser. A partir de ce moment, le déplacement horizontal total du point (A) est composé d'une contribution de la déformation du ressort

et d'une contribution du glissement entre le patin et la surface. Le déplacement horizontal total du point (A) est donné par: $u = u^e + u^p$

Nous devons maintenant avoir un critère qui définit la limite entre les déplacements purement "élastiques" et le moment où le bloc commence à glisser, c'est-à-dire lorsque des déplacements "plastiques" se produisent. Pour notre système actuel de la *figure V-1* nous avons seulement deux composants de force, à savoir, H et V . L'hypothèse adoptée est que le glissement commence lorsque la friction de Coulomb augmentée avec une certaine adhérence est entièrement épuisée, c'est-à-dire:

$$H + V \tan(\varphi) - C = 0$$

Avec " $\tan(\varphi)$ " est le coefficient de frottement et C l'adhérence. Pour mobiliser le frottement entre le bloc et la surface, la force V doit agir vers le bas, et donc $V < 0$.

Une caractéristique importante de ce modèle de glissement simple, et aussi de la théorie de la plasticité, est que lorsque la condition représentée dans l'équation ci-dessus n'est plus satisfaite, "c'est-à-dire l'inégalité stricte est encore une fois valable", nous avons de nouveau un comportement purement élastique. Donc, le déchargement est un processus purement élastique. Si l'inégalité est à nouveau satisfaite, les déformations permanentes "plastiques" se produisent à nouveau.

Ce concept peut être étendu à la mécanique des milieux continus dans laquelle nous traitons les contraintes plutôt qu'avec les forces, c'est-à-dire que le glissement survient lorsque la contrainte de cisaillement τ sur un plan dépasse la contrainte normale σ multipliée par un coefficient de frottement plus une certaine adhérence. Si nous adoptons ce concept, nous devons rechercher le plan sur lequel la combinaison de contrainte normale σ et contrainte de cisaillement τ est critique dans le sens où la condition: $\tau + \sigma \times \tan(\varphi) - c = 0$ est satisfaite.

φ signifie maintenant l'angle de frottement interne du matériau. Pour un matériau tel que le sable, la signification physique est évidente, car elle est liée au frottement entre les particules.

c représente la cohésion du matériau. Pour les métaux, il est égal à la moitié de la limite d'élasticité, tandis que pour le sable sec, la cohésion est presque nulle.

Cependant, trouver ce plan (le plan sur lequel la combinaison de la contrainte normale σ et de la contrainte de cisaillement τ est critique) pose un problème. Alors on doit utiliser les contraintes principales.

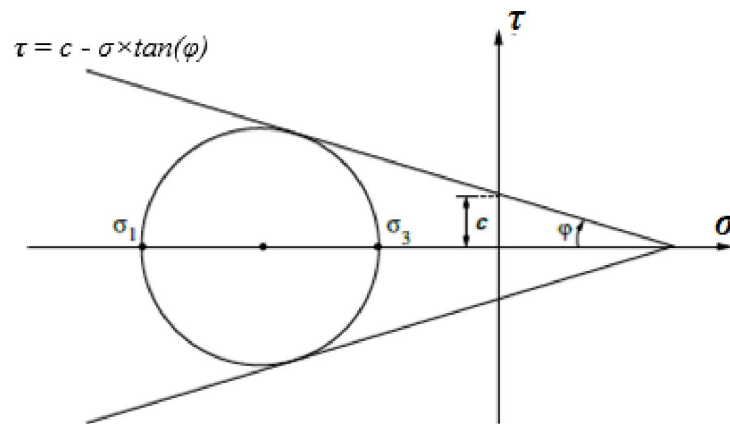


Figure V-2. Le critère de Mohr-Coulomb dans le plan $(\tau - \sigma)$

En considérant d'abord un état de contrainte bidimensionnel, nous pouvons relier σ et τ aux contraintes principales à l'aide du cercle de Mohr.

$$\sigma = 1/2(\sigma_3 + \sigma_1) + 1/2(\sigma_3 - \sigma_1) \sin(\varphi)$$

$$\tau = 1/2(\sigma_3 - \sigma_1) \cos(\varphi)$$

avec σ_1 et σ_3 la contrainte principale la plus petite et la plus grande, respectivement ($\sigma_1 \leq \sigma_3$).

Par substitution de ces expressions de σ et τ dans l'équation (1) et après multiplication par $\cos(\varphi)$:

$$1/2(\sigma_3 - \sigma_1) + 1/2(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

Cette équation est la représentation bidimensionnelle du critère d'écoulement de Mohr-Coulomb (Mohr 1900). Ce modèle est bien adapté pour décrire les caractéristiques de résistance des sols, des roches, du béton et des céramiques.

Nous observons que l'équation (2) est valable aussi longtemps que $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Si ce n'est pas le cas, par exemple si $\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1$, σ et τ seront reliées aux contraintes principales par:

$$\sigma = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) + 1/2(\sigma_1 - \sigma_2) \sin(\varphi)$$

$$\tau = 1/2(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\varphi)$$

La condition d'écoulement est alors formulée en termes de σ_1 et σ_2 au lieu de σ_3 et σ_1 , comme suit:

$$1/2(\sigma_1 - \sigma_2) + 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0$$

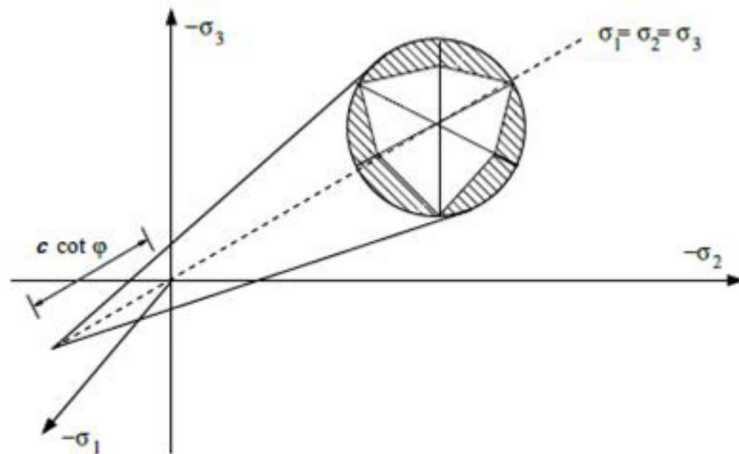


Figure V-3. Le critère de Mohr-Coulomb dans l'espace de contraintes principales

Finalement, nous obtenons par permutation successive que le critère d'écoulement de Mohr-Coulomb dans l'espace de contraintes principal est exprimé par les six conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
 1/2(\sigma_3 - \sigma_1) + 1/2(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varphi - c \cos \varphi &= 0 \\
 1/2(\sigma_1 - \sigma_2) + 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - c \cos \varphi &= 0 \\
 1/2(\sigma_2 - \sigma_3) + 1/2(\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi &= 0 \\
 1/2(\sigma_1 - \sigma_3) + 1/2(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi &= 0 \\
 1/2(\sigma_2 - \sigma_1) + 1/2(\sigma_2 + \sigma_1) \sin \varphi - c \cos \varphi &= 0 \\
 1/2(\sigma_3 - \sigma_2) + 1/2(\sigma_3 + \sigma_2) \sin \varphi - c \cos \varphi &= 0
 \end{aligned}$$

Lorsqu'elles sont représentées graphiquement dans l'espace de contraintes, chacune de ces équations représente un plan. Ensemble, ils forment un cône à six facettes qui se rencontrent au sommet de la surface d'écoulement à $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = c \cot(\varphi)$ et qui s'ouvre dans la direction négative de la diagonale spatiale $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Cette surface à six facettes peut être considérée comme une surface limite, qui agit comme une enveloppe de tous les états de contrainte possibles. Les états de contrainte à l'intérieur de ce contour provoquent des déformations élastiques, tandis que les états de contrainte sur cette surface d'écoulement peuvent donner lieu à des déformations élasto-plastiques

La fonction de charge de Mohr-Coulomb, s'écrit:

$$f(\sigma) = 1/2(\sigma_3 - \sigma_1) + 1/2(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varphi - c \cos \varphi$$

Les cinq autres fonctions de charge sont obtenues par permutation cyclique.

De nombreux critères d'écoulement bien connus peuvent être considérés comme des approximations ou des améliorations du critère de plasticité de Mohr-Coulomb. Un exemple simple est le critère d'écoulement de (Tresca 1868). Tresca a postulé que les métaux commencent à écouler lorsque, dans une certaine direction, la résistance au cisaillement a été épuisée:

$$1/2 (\sigma_3 - \sigma_1) = \tau_{max}$$

Il est évident qu'il s'agit d'un cas particulier de la fonction de Mohr-Coulomb dans laquelle l'angle de frottement interne est nul. La fonction d'écoulement de Tresca est la suivante:

$$f(\sigma) = (\sigma_3 - \sigma_1) - \sigma^*$$

avec la limite d'élasticité en traction uniaxiale, σ^* , égale à deux fois la cohésion: $\sigma^* = 2c$.

Par permutation cyclique, on obtient un cylindre à six facettes dans l'espace de contrainte principal, qui s'étend à l'infini le long de l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ dans les directions positive et négative. Une telle fonction d'écoulement, dont la forme et la taille ont la même section dans chaque plan qui est orthogonal à la diagonale spatiale $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, est appelée insensible à la pression. Les métaux satisfont cette propriété tant que le niveau de contraintes sphériques ne devient pas trop élevé. Les fonctions d'écoulement sont souvent représentées dans le plan π , qui est perpendiculaire à la diagonale spatiale $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ et passe par l'origine. Pour les fonctions d'écoulement insensibles à la pression, une telle représentation est complète.

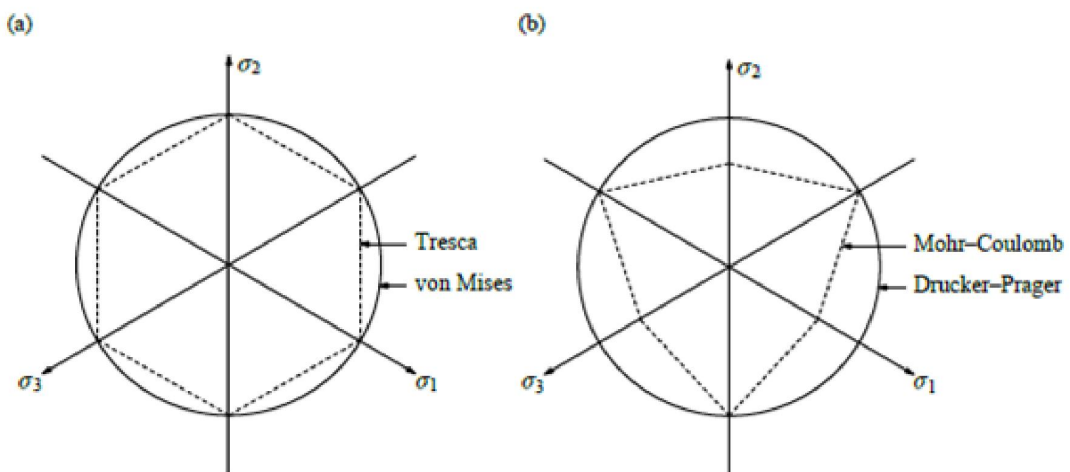


Figure V-4. Forme des surfaces de charge pour les matériaux isotropes

V-3. LOI COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

Un modèle comportement élasto-plastique est caractérisé par:

- L'existence d'un domaine d'élasticité où le comportement du matériau est élastique linéaire tant que les contraintes n'atteignent pas la limite d'élasticité.
- La limite d'élasticité peut être atteinte, mais en aucun cas dépassée. Quand elle est atteinte, des déformations plastiques sont susceptibles d'apparaître ou d'évoluer sous l'effet d'évolutions ultérieures du chargement.
- La création ou l'évolution des déformations plastiques s'accompagne d'énergie dissipée en chaleur, et le comportement est *irréversible*.

La construction d'une loi de comportement élasto-plastique nécessite la définition de trois éléments constitutifs suivants :

- Une loi élastique qui donne l'état de contrainte du matériau en fonction de son état de déformation élastique.
- Un seuil qui sépare un domaine élastique d'un domaine élasto-plastique dans lequel se produit des transformations irréversibles. Elle est définie par un des critères de plasticité
- Une loi d'écoulement qui, lorsque le seuil est dépassé, caractérise la direction de l'écoulement du matériau et son intensité dans le cas général, une partie de la déformation totale étant réversible, la loi d'écoulement ne décrit que l'évolution de la partie irréversible de la déformation.

Enfin La définition d'un *domaine d'élasticité* dans l'espace des contraintes, se fait à l'aide d'une fonction $f(\sigma)$ de sorte que :

- *Le domaine d'élasticité est l'ensemble des contraintes telles que $f(\sigma) < 0$.*

Cette fonction permet de définir le point de chargement à partir duquel une déformation plastique peut avoir lieu. Elle sert par conséquent à caractériser la frontière existant entre les comportements élastique (réversible) et plastique (irréversible).

Les déformations inélastiques subies altèrent généralement la taille et la forme du seuil. Pour rendre compte de cette modification, la fonction de charge est écrite grâce à des variables supplémentaires (variable d'écrouissage χ). Il est alors nécessaire de spécifier des lois d'évolution pour ces variables.

V-4. LES CRITERES ISOTROPES DE LIMITE ELASTIQUE:

Le problème de la définition d'un critère de limite élastique est aujourd'hui encore un problème non entièrement résolu. Plusieurs critères sont exposés dans plusieurs ouvrages.

Principalement en trouve plusieurs idées de base :

- des critères basés sur les valeurs des déformations. Historiquement, ce sont les premiers apparus, ils sont abandonnés aujourd'hui ;
- Des critères basés sur les valeurs des contraintes (Rankine, Mohr-columb, Tresca);
- Des critères basés sur les valeurs de l'énergie de déformation (Beltrami, Von-Mises);
- Des critères expérimentaux (Caquot).
- Des critères réglementaires (ou normes). Ils n'ont pas toujours les fondements théoriques souhaitables, mais ils prennent en compte une certaine "expérience".

La manière la plus commode d'exprimer un critère de plasticité est de l'écrire sous la forme de l'équation $f(\sigma, \chi) = 0$; elle est choisie de façon que :

$f < 0 \Leftrightarrow$ comportement élastique

$f = 0 \Leftrightarrow$ limite d'élasticité initiale du matériau.

Avec :

χ : représentant un paramètre (scalaire, vecteur, ou tenseur) dont la valeur n'est modifiée que lors des déformations plastiques.

f : fonction scalaire appelée fonction de charge, la fonction de charge sert en quelque sorte, à mesurer l'intensité de la sollicitation subie.

Pour le matériau isotrope, la fonction de charge f s'exprime donc en fonction du tenseur de contraintes $[\sigma]$, de façons équivalentes:

- soit comme une fonction symétrique des contraintes principales,
- soit comme une fonction des invariants de σ ,
- soit, compte tenu des relations entre les invariants de σ et ceux de déviateur des contraintes, comme une fonction de I_1 et des invariants J_2 et J_3 de s . Cette expression est indépendante de l'orientation de l'élément de matière dans l'espace et est intrinsèque au matériau.

V-4-1. Critère de RANKINE

Le critère de Rankine (1851) énonce simplement que pour rester dans le domaine élastique, aucune contrainte principale ne doit dépasser la limite d'élasticité:

$$\text{Max} (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_e(\chi).$$

Dans le cas de contraintes planes, la frontière dessine un carré dans le plan (σ_1, σ_2) .

V-4-2. Critère de TRESCA

Ce critère fut introduit par H. Tresca en 1864. La fonction de charge correspondante s'écrit:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| \leq 2\tau_e(\chi)$$

τ_e la contrainte tangentielle de limite d'élasticité (dépendant d'un paramètre scalaire κ représente l'écroutissage). $\tau_e = \frac{\sigma_e(\chi)}{2} \rightarrow \max |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_e(\chi)$

Physiquement cela signifie que le comportement du matériau demeure élastique tant que la contrainte de cisaillement sur une facette d'orientation quelconque ne dépasse pas la valeur $\sigma_0/2$. Ceci explique son nom de "critère de scission maximale" donné au critère de Tresca.

Dans l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ le point représentatif est à l'intérieur d'un prisme hexagonal.

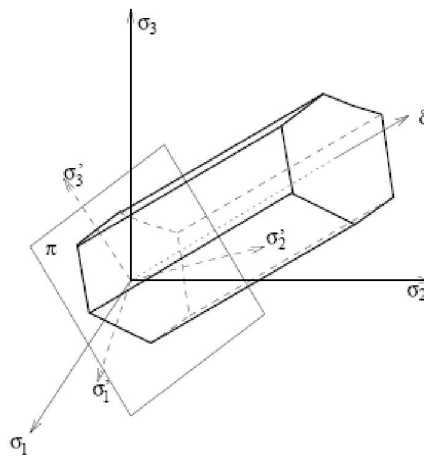


Figure V-5. Représentation octaédrique du critère de Tresca

Le contour de la surface de charge du critère de Tresca forme des coins aux endroits où ils se rencontrent. En de tels endroits, le gradient de la surface de charge n'est plus défini de manière unique,

ce qui, comme nous le verrons, donne lieu à des difficultés lors de la formulation des relations de contrainte-déformation incrémentales. Par conséquent, des approximations lisses ont été proposées. L'approximation lisse du critère d'écoulement de Tresca est le critère d'écoulement de Von-Mises, qui est un cylindre circulaire dans l'espace de contrainte principal, et un cercle dans le plan π .

V-4-3. Critère de VON-MISES

Ce critère fut proposé indépendamment par Beltrami (1903), Huber (1904), Von-Mises (1913) et Hencky (1924). L'un des critères de limite élastique les plus utilisés pour les matériaux métalliques ductiles. Le critère de von Mises est un critère énergétique (critère de l'énergie de distorsion élastique).

Si on décompose le tenseur de contraintes et le tenseur de déformations en parties sphérique et déviatorique, l'énergie de déformation élastique isotrope en petit déplacements peut se séparer en deux termes: $U = U_s + U_d$

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^s + \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^d$$

Avec:

U_s : énergie due au changement de volume sans changement de forme, ou énergie d'extension élastique.

$$U_s = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\sigma}}^s] \cdot [\underline{\underline{\varepsilon}}^s] = \frac{1}{2} tr([\underline{\underline{\sigma}}^s] \cdot [\underline{\underline{\varepsilon}}^s]) = \frac{1}{6} \sigma_{ii} \cdot \varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_{ii})^2 = \frac{1-2\nu}{6E} (I_1)^2$$

U_d : énergie due au changement de forme sans changement de volume, ou énergie de distorsion élastique.

$$U_d = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\sigma}}^d] \cdot [\underline{\underline{\varepsilon}}^d] = \frac{1}{2} tr([\underline{\underline{\sigma}}^d] \cdot [\underline{\underline{\varepsilon}}^d])$$

Comme indiqué précédemment, la dilatation/compression isotrope n'est pas susceptible de provoquer un écoulement plastique, le critère de plasticité ne porte donc que sur U_d . On peut écrire:

$$U_d = \frac{1}{12G} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \right)$$

$$= \frac{1}{12G} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) = \frac{J_2}{2G}$$

où J_2 est le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes et G est le module de cisaillement. Cette énergie ne doit pas dépasser une valeur limite critique de l'énergie en prenant comme référence la

traction uni-axiale ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = \sigma_e$): $U_d^{cr} = \frac{1}{6G} \sigma_e^2$

C'est à dire: $U_d \leq U_d^{cr} \quad \Rightarrow \quad J_2 \leq \frac{1}{3} \sigma_e^2$

La fonction de charge de Von-Mises (f) est définie dans un repère de contrainte orthonormé quelconque par l'expression suivante :

$$f = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 2\sigma_e^2(\chi)$$

(avec le paramètre scalaire χ représente l'érouissage)

Elle peut aussi s'écrire sous la forme d'une fonction symétrique des contraintes principales

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_e^2(\chi)$$

Ceci peut également s'écrire:

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} - \sigma_e(\chi)$$

La surface limite est un cylindre dont l'axe est la trissectrice des trois axes ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

En contraintes planes, le critère de von Mises s'écrit:

$$f = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} - \sigma_e(\chi). \text{ Ce qui est l'équation d'une ellipse.}$$

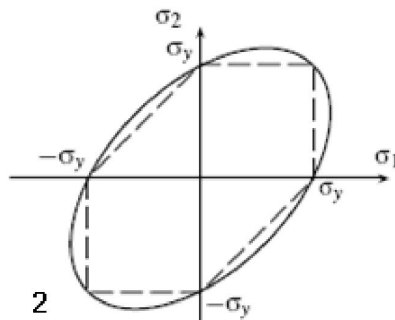


Figure V-6. Critères de Tresca, et Von-Mises en contraintes planes

La fonction de charge de Von-Mises est aussi le fondement de la notion de contrainte équivalente (de Von-Mises) à un état de contrainte quelconque donné. Il s'agit de la quantité: $\sigma_{eq} = \sqrt{3 J_2}$

Le critère de Von-Mises peut également être considéré comme un critère de cisssion effective. En effet, pour ce critère, cette cisssion n'est rien d'autre que la "cisssion octaédrique" et on a $\sigma_{eq} = 3 \cdot |\tau_{oct}| / \sqrt{2}$.

L'écoulement ne se produit donc que si la cisssion octaédrique a atteint une valeur critique.

* Les résultats d'expériences effectuées sur les métaux, par exemple en traction-compression et torsion, indiquent que le critère de limite d'élasticité initiale pour ces matériaux est plus proche du critère de Von-Mises que de celui de Tresca.

Il est remarquable que la représentation dans le plan déviateur de la surface limite de ce critère est le cylindre enveloppant le prisme de Tresca.

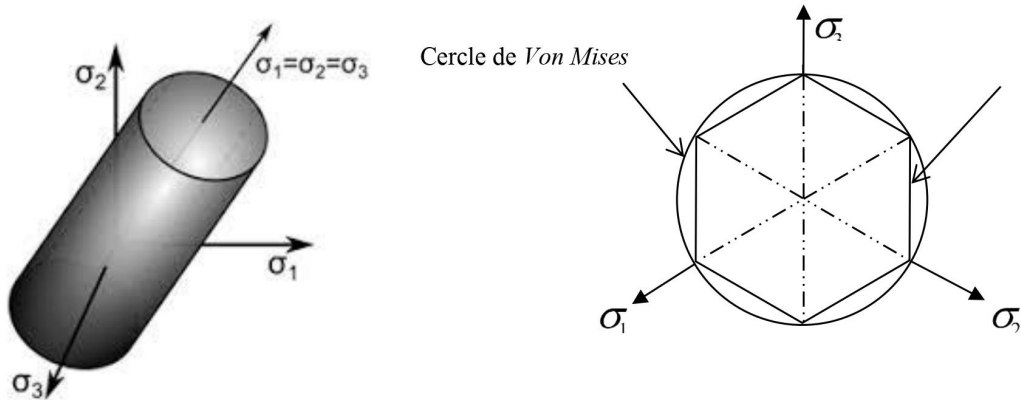


Figure V-7. Représentation octaédrique du critère de Von-Mises et Tresca

Comparaison

Pour Tresca: $\tau_{12\max} = \frac{\sigma_e}{2}$

Pour Von-Mises:

$$\sqrt{3}\tau_{12\max} = \sigma_e$$

$$\rightarrow \tau_{12\max} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$$

13% différence.

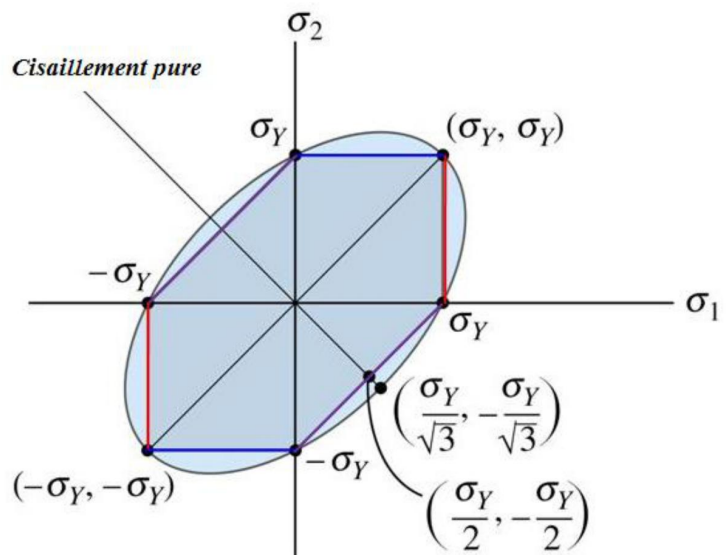


Figure V-8. Représentation des critères

de Von-Mises et de Tresca dans le plan $(\sigma_1 - \sigma_2)$

V-4-4. Critère de Drucker-Prager

De la même manière que Von-Mises a approximé le critère de Tresca non lisse, Drucker et Prager (1952) ont approximé le contour du critère de Mohr-Coulomb par un cône circulaire. Tout en conservant la dépendance linéaire au niveau de contrainte hydrostatique, tout comme le contour de Mohr-Coulomb, la forme angulaire des lignes pointillées π est remplacée par un cercle. Le critère d'écoulement de Drucker-Prager est défini en terme de la pression p et les constantes de matériau α et k par: $f(\sigma) = q + \alpha p - k$.

En raison de la dépendance à la pression, le cercle ne peut pas traverser tous les coins. On choisit souvent l'approximation qui passe par les trois coins les plus externes, et les constantes α et k sont alors

reliées à c et φ par: $\alpha = \frac{6 \sin(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)}$ et $k = \frac{6c \cos(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)}$

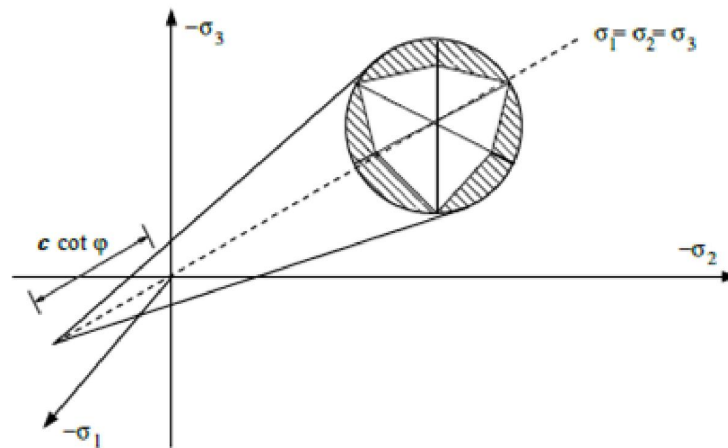


Figure V-9. Le critère de Drucker-Prager dans l'espace de contraintes principales

V-4-5. Critère de Mohr-Caquot

Le critère de Mohr-Caquot est un critère de rupture pour les matériaux fragiles; c'est donc un critère de limite d'élasticité, mais pas de plasticité (puisque'il n'y a pas de domaine plastique pour les matériaux concernés).

L'accroissement de la pression isostatique σ_m diminue l'amplitude des cercles de Mohr critiques. Pour les matériaux fragiles, les courbes enveloppes des cercles de Mohr sont deux droites. La valeur de cisaillement à ne pas dépasser, $\tau_{max, c}$, s'exprime par: $\tau_{max, c} = a + k \times \sigma_m$.

où a et k sont des constantes.

V-5. LOIS D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE

Ce sont les règles qui vont permettre de définir l'intensité de l'incrément de déformation plastique lorsqu'on n'est plus en élasticité. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la *direction* de l'écoulement. Cette direction doit être définie par un tenseur dans l'espace vectoriel de dimension 6 des tenseurs du second ordre symétriques.

Pour obtenir des déformations plastiques, le point de contrainte ne doit pas seulement être sur le contour de la surface de charge, il doit également rester là pour une «courte période». Lorsque le point de contrainte ne touche que la surface d'écoulement et se déplace immédiatement de nouveau vers l'intérieur, l'écoulement plastique ne se produit pas. Les déformations plastiques auront lieu si et seulement si la fonction de charge f soit nulle : $f = 0$.

ainsi que sa dérivée par rapport au temps: $\dot{f} = 0$.

Cette dernière équation est appelée condition de cohérence de "Prager". Elle exprime que la fonction de charge f doit rester nulle pendant au moins un petit «incrément de temps» afin que l'écoulement plastique puisse avoir lieu.

V-5-1. Principe du Travail Maximal (Hill)

Il stipule que, pour les matériaux cristallins, l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ qui provoque un écoulement plastique donné est celui qui y développe le plus grand travail plastique comparé à tout état de contrainte virtuel ne violant pas le critère de plasticité. C-à-d pour un $d\varepsilon^p$ réel donné, le travail des contraintes réelles $\underline{\underline{\sigma}}$ est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible $\underline{\underline{\sigma'}}$ associé à $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. Il s'écrit:

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma'}}) \otimes d\underline{\underline{\varepsilon}}^p > 0$$

Il n'est pas vérifié par tous les matériaux, en particulier par les sols. Il a des conséquences importantes concernant la direction d'écoulement plastique, la forme de la surface de charge.

V-5-2. Règle de Normalité

Des essais multiaxiaux sur des métaux mettent en évidence le fait que, quand le chargement est poursuivi à partir d'une contrainte située sur la surface seuil, les variations de déformation plastique s'opèrent selon des directions géométriquement orthogonales à la surface d'écoulement et vers l'extérieur de cette surface.

Le critère de travail maximal permet de démontrer la règle de normalité: Pour tout incrément > 0 de contrainte, la direction ($d\varepsilon$) d'écoulement est perpendiculaire à la surface de charge et colinéaire au gradient maximum. La direction d'écoulement dépend essentiellement du trajet de chargement qui précède le prochain incrément.

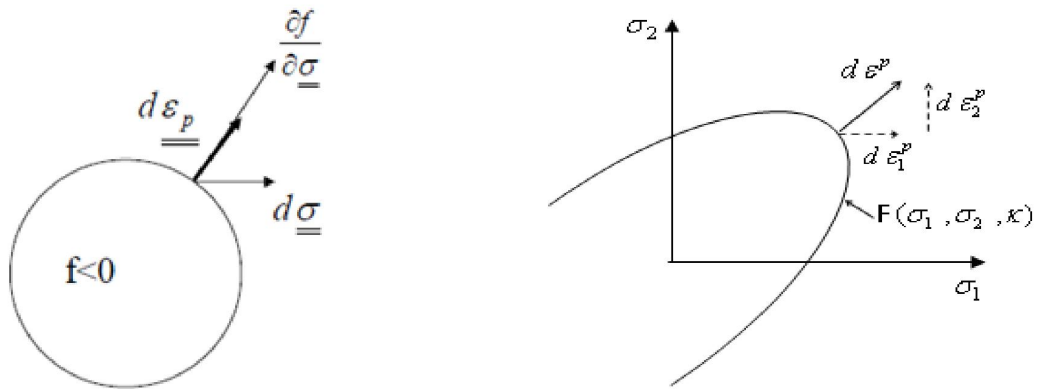


Figure V-10. Illustration de la règle de normalité

Les observations expérimentales indiquent que la condition de normalité est une hypothèse acceptable pour les métaux, on parle de la plasticité associée.

Dans le cas de la Plasticité non associée qui s'appliquent pour les matériaux, tels les matériaux géologiques (sol, roche), la direction d'écoulement est définie par référence à une autre fonction, et la direction de l'écoulement n'est pas normale à la surface d'écoulement.

La règle de normalité implique la convexité de la surface de charge, et l'unicité de la solution aux frontières, cela amène à postuler que l'évolution de la déformation plastique est gouvernée par la *règle de normalité* :

- L'incrément de déformation plastique est nul lorsque les contraintes sont dans le domaine d'élasticité ($f(\underline{\sigma}) < 0$). Lorsqu'elles sont sur le seuil de plasticité ($f(\underline{\sigma}) = 0$), la vitesse cinématique de déformation plastique est normale extérieure au domaine de plasticité.

La formulation mathématique de la règle de normalité couvrant les deux cas est :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{df}{d\underline{\underline{\sigma}}} \Rightarrow d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \\ \lambda \geq 0 \\ f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \\ \lambda \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{array} \right.$$

Avec λ : un scalaire positif appelé multiplicateur plastique représentant l'amplitude de l'écoulement plastique.

Le *multiplicateur plastique* $d\lambda$ est un scalaire *a priori* indéterminé, il constitue donc une des inconnues introduites par le modèle de comportement.

La condition complémentaire $\lambda \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ sert à exprimer le fait que la déformation plastique n'est susceptible d'évoluer qu'à partir d'une situation telle que l'état de contrainte est sur le seuil de plasticité.

V-5-3. Loi d'écoulement associée au critère de Tresca

Cette formulation est relativement complexe car le critère de Tresca se représente avec des points anguleux et il faut distinguer les faces des arêtes.

* faces du critère Par exemple pour la face $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Dans ce cas le critère nous donne: $f = (\sigma_I - \sigma_{III}) - \sigma_0 = 0$

On en déduit alors :

$$\delta\varepsilon_I = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_I} = \lambda_p$$

$$\delta\varepsilon_{II} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{II}} = 0$$

$$\delta\varepsilon_{III} = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{III}} = -\lambda_p$$

Avec: $\delta\varepsilon_I + \delta\varepsilon_{II} + \delta\varepsilon_{III} = 0$ (l'incompressibilité est bien vérifiée)

* angles du critère Par exemple pour l'angle $\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Le critère peut alors prendre deux formes équivalentes qui sont la superposition des deux formes associées aux deux convergentes vers l'arête. On a donc :

$$\delta \varepsilon_I = \lambda_p + 0$$

$$\delta \varepsilon_{II} = 0 + \lambda_p'$$

$$\delta \varepsilon_{III} = -\lambda_p - \lambda_p'$$

La loi d'incompressibilité est bien vérifiée.

V-5-4. Loi d'écoulement associée au critère de Von-Misès

L'expression du critère de Von-Misès en contrainte principale est :

$$f = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 2\sigma_0^2$$

On peut donc en déduire :

$$\delta \varepsilon_I = 2 \lambda_p (2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III})$$

$$\delta \varepsilon_{II} = 2 \lambda_p (2\sigma_{II} - \sigma_{III} - \sigma_I) \quad (\text{incompressibilité vérifiée})$$

$$\delta \varepsilon_{III} = 2 \lambda_p (2\sigma_{III} - \sigma_I - \sigma_{II})$$

La formule précédente peut être modifiée en introduisant les composantes du tenseur déviateur des contraintes données par : $s_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}$

On a alors :

$$\delta \varepsilon_I = 6 \lambda_p s_I = \lambda_p' s_I$$

$$\delta \varepsilon_{II} = 6 \lambda_p s_{II} = \lambda_p' s_{II} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\delta \varepsilon} = \lambda_p' \overline{\delta s}$$

$$\delta \varepsilon_{III} = 6 \lambda_p s_{III} = \lambda_p' s_{III}$$

Mais d'autre part, le tenseur déviateur de contraintes vérifie aussi le critère de plasticité :

$$f = s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 - \frac{2}{3} \sigma_0^2 = 0$$

$$\text{On peut donc écrire : } \delta \varepsilon_I^2 + \delta \varepsilon_{II}^2 + \delta \varepsilon_{III}^2 = \frac{2 \lambda_p'^2}{3} \sigma_0^2$$

Expression de laquelle nous pouvons sortir la valeur du coefficient λ_p' .

Par ailleurs, nous pouvons calculer **la puissance dissipée par déformation plastique** par unité de volume: $\delta W = \overline{\sigma} : \overline{\delta \varepsilon} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$

Cette puissance nous permet d'établir une équivalence entre notre sollicitation et une sollicitation de traction dans le domaine plastique :

$$W = \sigma_0 \varepsilon_{axiale}$$

On peut donc introduire la **vitesse de déformation équivalente** :

$$\dot{\varepsilon}_{axiale} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\varepsilon}_I^2 + \dot{\varepsilon}_{II}^2 + \dot{\varepsilon}_{III}^2}$$

Ces dernières relations nous permettent de donner une forme importante de la loi d'écoulement:

$$s = \frac{2\sigma_0}{3\dot{\varepsilon}_{axiale}} \dot{\varepsilon}$$

Ainsi, avec le critère de Von-Misès, la loi d'écoulement se traduit par une proportionnalité entre le tenseur déviateur des contraintes et le tenseur des taux de déformation.

Dans le cas d'un état plan de déformation, on montre que le critère de Von Misès prend la forme :

$$\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 - \frac{1}{3}\sigma_0^2 = 0$$

V-6. PLASTICITE NON-ASSOCIEE

Les règles d'écoulement qui n'obéissent pas à la règle de normalité sont appelées non-associées. Une sous-classe importante de règles de flux non associées, qui couvre de loin la majorité des applications, sont celles pour lesquelles une fonction des contraintes g , souvent appelée fonction de potentiel plastique, existe, telle que:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{dg}{d\underline{\underline{\sigma}}}$$

Selon cette équation, le vecteur d'écoulement plastique est maintenant coaxial avec le gradient à la surface $g = 0$.

La dilatance

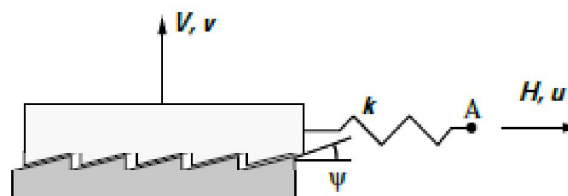


Figure V-11. Angle de dilatance

Si la surface entre le patin et la surface plane n'est pas parfaitement lisse, mais macroscopiquement rugueuse, tout glissement horizontal entraînera généralement également un déplacement vertical du bloc, soit un soulèvement, soit un mouvement vers le bas. Cette composante de déformation plastique est désigné par v^p .

Le vecteur de déplacements plastiques s'écrit: $d^P = \begin{Bmatrix} u^P \\ v^P \end{Bmatrix}$

Nous supposons que le rapport entre l'incrément de la déformation plastique horizontale u^p et celle de déformation plastique verticale v^p est régi par l'angle de dilatance ψ .

CHAPITRE VI: PLASTICITE DES BARRES

VI-1. PLASTICITE DES BARRES

Considérons le système réticulé, représenté par la *figure VI-1*, formé de trois barres verticales identiques (de longueur l), numérotées de 1 à 3, articulés à leur extrémité supérieure aux points A' , B' et C' , et reliées entre elles en partie inférieure à un barreau rigide aux articulations A , B et C . Le chargement est constitué d'une force verticale d'intensité Q , comptée positivement vers le bas, appliquée au point D milieu de BC , et croissant progressivement à partir de zéro.

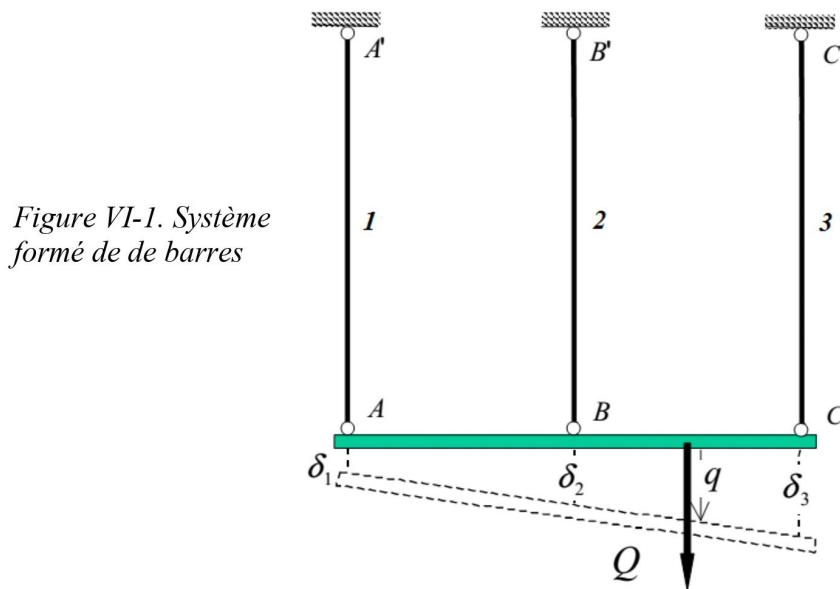


Figure VI-1. Système formé de de barres

Pour simplifier, supposons que le matériau soit parfaitement plastique (pas d'écrouissage). La courbe d'écrouissage du matériau est représentée ci-dessous.

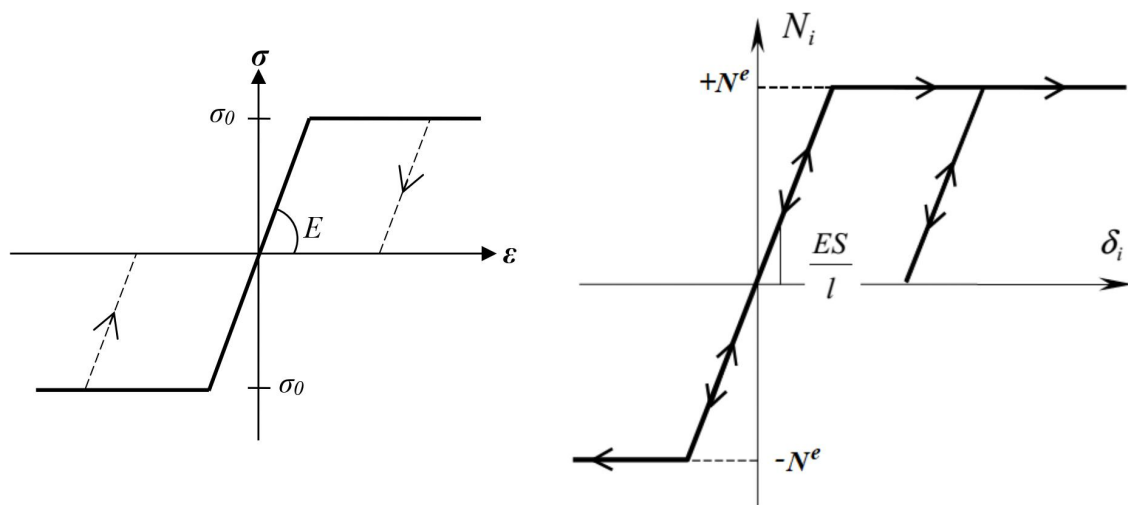


Figure VI-2. Loi de comportement d'une barre

Les trois barres ont la même section transversale S , et sont fabriqués du même matériau (de module d'élasticité E , et limite d'élasticité σ_0). Les seules contraintes "généralisées" du système sont donc les efforts normaux $N_i = S \times \sigma_i$ pour $i = 1, 2, 3$ de traction-compression dans les barres.

Considérons la limite d'élasticité généralisées "dans chaque barre" en traction-compression: $N^e = S \times \sigma_0$, et la rigidité généralisée: ES/l . De ce fait, les trois barres ont un comportement élastique parfaitement plastique schématisé par le diagramme $N-\delta$ de la figure VI-2.

VI-1-1. Phase de comportement élastique

Les inconnues du problème sont les efforts normaux N_1, N_2 et N_3 . Le système est hyperstatique de degré 1 (trois inconnues pour deux équations d'équilibre).

* Les équations d'équilibre: En appliquant les équations d'équilibre des forces verticales (N_i et Q) et des moments de ses forces par rapport au point d'application de la charge Q , on obtient:

$$Q = N_1 + N_2 + N_3$$

$$N_3 = N_2 + 3N_1$$

* Les relations de compatibilité géométrique des taux d'allongement: les points A, B, C doivent rester alignés (barreau rigide). Nous avons donc: $\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = 0$

En se plaçant dans le domaine d'élasticité des barres, l'allongement de la barre (i) s'écrit :

$$\delta_i = \frac{N_i l}{ES} \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

Nous avons donc une troisième équation:

$$\frac{N_1 l}{ES} - 2 \frac{N_2 l}{ES} + \frac{N_3 l}{ES} = 0 \Rightarrow N_1 - 2N_2 + N_3 = 0$$

La résolution donne alors:

$$N_1 = Q/12 ; N_2 = Q/3 ; N_3 = 7Q/12 \quad (1)$$

$$\delta_1 = \frac{Q \cdot l}{12ES} ; \delta_2 = \frac{Q \cdot l}{3ES} ; \delta_3 = \frac{7Q \cdot l}{12ES} \quad (2)$$

Le déplacement vertical (q) du point d'application du chargement est:

$$q = \frac{(\delta_2 + \delta_3)}{2} = \frac{11Q \cdot l}{24ES} \quad (3)$$

Nous avons: $N_3 > N_2 > N_1$

Le comporte du système demeure élastique linéaire tant que le comportement des barres demeure élastique, c'est-à-dire tant que: $N_{max} = N_3 < N^e$, (N^e est la limite d'élasticité généralisée $N^e = S \times \sigma_0$).

$$\text{Soit: } N_3 = \frac{7Q}{12} < N^e \Rightarrow Q < Q^e = \frac{12N^e}{7}$$

Q^e représente la limite d'élasticité initiale de la structure. Elle correspond à la plastification en traction de la barre n°3. La réponse globale de la structure, représentée sous la forme d'une courbe donnant l'effort Q en fonction du déplacement q de son point d'application est représenté sur la figure VI-3-a, tandis que l'évolution des efforts normaux dans chacun des trois barres est donnée sur la figure VI-3-b.

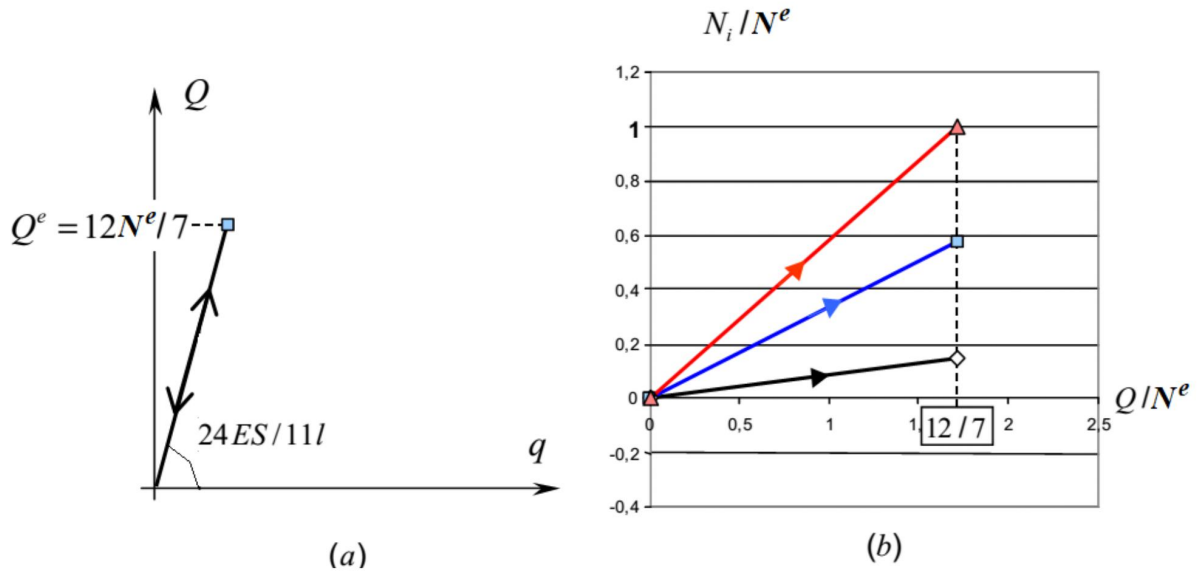


Figure VI-3 : Réponse de la structure en phase élastique et évolution des efforts dans les barres

VI-1-2. Phase élastoplastique

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité du système " $Q \geq Q^e$ " en considérons que «la barre n°3 reste plastifiée en traction $\rightarrow N_3 = N^e$ ». Cette hypothèse nous permet alors de déterminer les efforts dans les deux autres barres à partir des équations d'équilibre:

$$N_3 = N^e ; N_1 = -Q/2 + N^e ; N_2 = 3Q/2 - 2N^e$$

Le comportement des barres 1 et 2 restant élastique tant que $N_1, N_2 < N^e$, c-à-d:

$$N_1 = -Q/2 + N^e \leq N^e ; \text{ et } N_2 = 3Q/2 - 2N^e \leq N^e. \text{ ce qui signifie que:}$$

$$Q \leq 2L$$

En utilisant $\delta_i = \frac{N_i l}{ES}$, on obtient:

$$\delta_1 = \left(-\frac{Q}{2} + N^e \right) \frac{l}{ES}, \quad \delta_2 = \left(\frac{3Q}{2} - 2N^e \right) \frac{l}{ES}$$

d'où en tenant compte de la relation de compatibilité géométrique $\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = 0$:

$$\delta_3 = \left(\frac{7Q}{2} - 5N^e \right) \frac{l}{ES}$$

La valeur $Q = +2N^e$ correspond à la plastification de la barre n°2 en traction ($N_2 = +N^e$), l'effort dans la barre n°1 s'annulant pour cette valeur du chargement (voir figure VI-4-b).

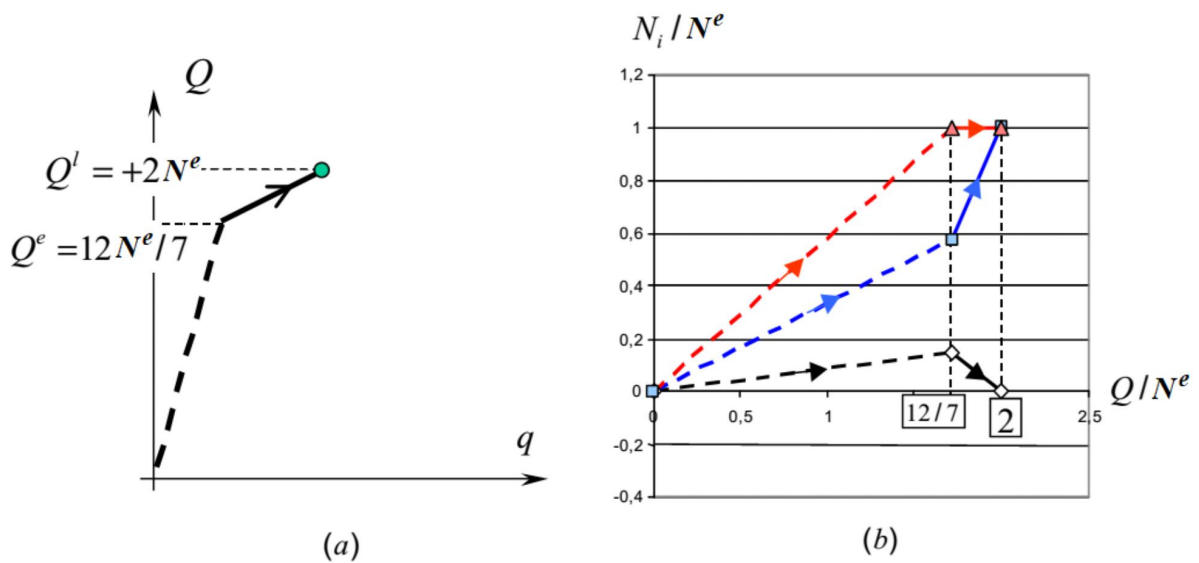


Figure VI-4 : Phase élasto-plastique de comportement de la structure

VI-1-3. Charge limite et ruine plastique

Dès la plastification de la barre n°2, il est impossible de poursuivre le chargement au-delà de la valeur $Q = 2N^e$. Le raisonnement est le suivant:

L'équilibre des moment par rapport au point A donne:

$$Q = 2/3 N_2 + 4/3 N_3 = 2/3 N^e + 4/3 N^e = 2N^e.$$

Les valeurs des efforts dans les barres 2 et 3 étant astreintes à demeurer inférieures ou égales à la limite d'élasticité en traction ($+N^e$), il résulte nécessairement que le système ne peut pas équilibrer une force au-delà de $2N^e$. Par conséquent, il n'est pas possible de dépasser la valeur $Q=2N^e$.

Si l'on maintient la charge à la valeur: $Q=+2N^e$. L'évolution correspondante des efforts dans les barres est dans ce cas " $dQ = 0$ ":

$$N_1 = 0; N_2 = N_3 = N^e. \implies dN_i = 0$$

d'où d'après la loi de comportement:

$$d\delta_1 = d\delta_1^e = 0; d\delta_2 = d\delta_2^p = \dot{\lambda} \geq 0; d\delta_3 = d\delta_3^p = \dot{\mu} \geq 0$$

Les multiplicateurs plastiques $\dot{\lambda}$ et $\dot{\mu}$ étant reliés entre eux par la relation de compatibilité géométrique:

$$\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = 0 \implies \dot{\mu} = 2\dot{\lambda}$$

$$\text{D'où: } \dot{q} = \frac{\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3}{2} = \frac{3\dot{\lambda}}{2} \geq 0$$

Les barres 2 et 3 s'allongent plastiquement sous charge constante, tandis que la barre n°1 restant de longueur invariable, le barreau rigide est animé d'un mouvement de rotation autour du point A (voire figure VI-5).

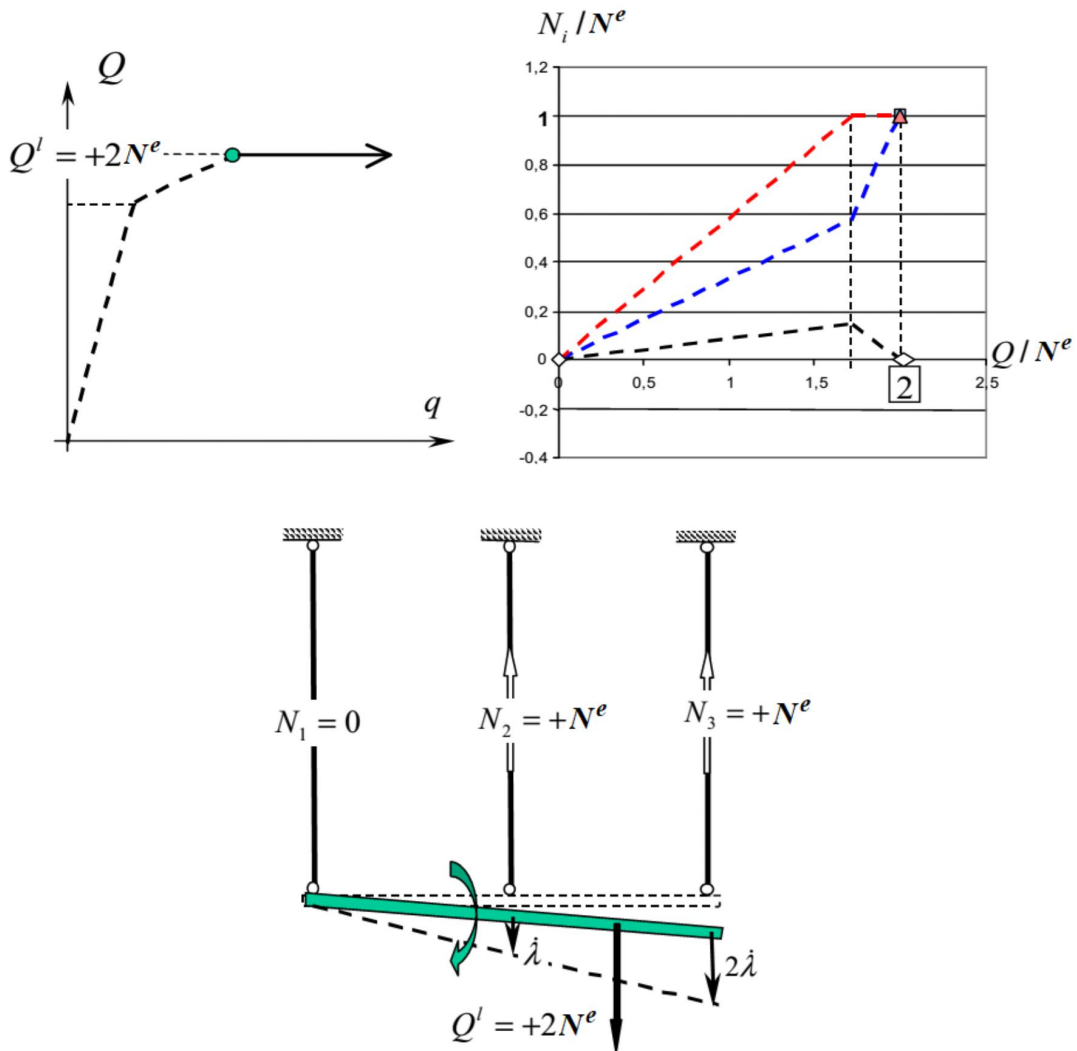


Figure VI-5. Charge limite et mécanisme de ruine plastique de la structure

VI-1-4. Décharge de la structure

Supposons que la structure soit chargée jusqu'à la charge limite $Q' = 2N^e$. Quand à un certain moment immédiatement avant que ne se produise l'écoulement plastique libre de la structure la charge est réduite jusqu'il est complètement supprimée, la structure réagit d'une manière élastique.

Pour un incrément de décharge élastique, nous avons:

$$\begin{cases} Q = Q' + \Delta Q, \quad \Delta Q < 0; & N_i = N_i(Q') + \Delta N_i \\ \delta_i = \delta_i(Q') + \Delta \delta_i; & q = q(Q') + \Delta q \end{cases}$$

Il apparaît immédiatement que les accroissements (algébriques) ΔN_i , $\Delta \delta_i$ et Δq , sont donnés par les équations (1), (2) et (3) dans lesquelles Q est remplacé par ΔQ . D'où immédiatement :

$$N_1 = N_1 + \Delta N_1 = \Delta Q / 12 ; N_2 = N_2 + \Delta N_2 = N^e + \Delta Q / 3 ; N_3 = N_3 + \Delta N_3 = N^e + 7\Delta Q / 12.$$

$$\delta_1 = \frac{l \cdot \Delta Q}{12ES} ; \delta_2 = \frac{l \cdot (N^e + \Delta Q / 3)}{ES} ; \delta_3 = \frac{l \cdot (2N^e + 7\Delta Q / 12)}{ES}$$

$$q = \frac{l \cdot (3N^e / 2 + 11\Delta Q / 24)}{ES}$$

L'état résiduel de la structure, est obtenu dans le cas de la décharge totale: $Q = 0 \rightarrow \Delta Q = -2N^e$. Il vient alors:

$$\begin{cases} N_1^r = -N^e / 6, & N_2^r = N^e / 3, & N_3^r = -N^e / 6 \\ \delta_1^r = -lN^e / 6ES, & \delta_2^r = lN^e / 3ES, & \delta_3^r = 5lN^e / 6ES \\ q^r = 7lN^e / 12ES \end{cases}$$

L'hypothèse de décharge élastique est bien vérifiée, les efforts dans les barres restant toujours à l'intérieur du domaine d'élasticité. On remarque bien évidemment que les efforts résiduels N_i^r forment un système auto-équilibré (c'est-à-dire satisfaisant les équations d'équilibre $Q=0$), tandis que les allongements résiduels δ_i^r respectent la condition de compatibilité géométrique. Par contre les allongements plastiques δ_i^p acquis par les barres au cours de la phase de chargement valent:

$$\delta_1^p = \delta_2^p = 0 ; \delta_3^p = \frac{N^e \cdot l}{ES}$$

Ils ne sont donc pas géométriquement compatibles, et c'est précisément cette incompatibilité géométrique qui est à l'origine de l'apparition d'efforts résiduels. En effet, intégrant sur l'ensemble du cycle charge-décharge la loi de comportement de chacune des barres :

$$\Delta \delta_i = \Delta \delta_i^e + \Delta \delta_i^p = \frac{\Delta N_i \cdot l}{ES} + \Delta \delta_i^p$$

$$\text{Il vient: } \Delta \delta_i^r = \frac{N_i^r \cdot l}{ES} + \Delta \delta_i^p$$

Cette dernière relation fait clairement apparaître que ce sont les déformations élastiques dues aux efforts résiduels qui, en se superposant aux déformations plastiques, rétablissent la compatibilité géométrique de la structure.

CHAPITRE VII: PLASTICITE DES POUTRES

VII-1. CALCUL ELASTIQUE-PLASTIQUE "SECTION RECTANGULAIRE"

Considérons la poutre simplement supportée de section rectangulaire constituée d'un matériau élastique parfaitement plastique de la *Figure VII-1* ci-dessous. La poutre est soumise à de la flexion sous l'effet d'un système de chargement Q .

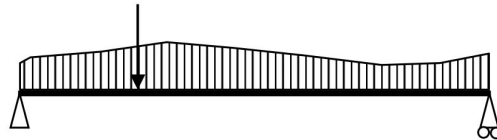


Figure VII-1. poutre isostatique soumise à de la flexion simple

La loi de comportement de la poutre sera déduite entre le moment de flexion et la courbure résultante.

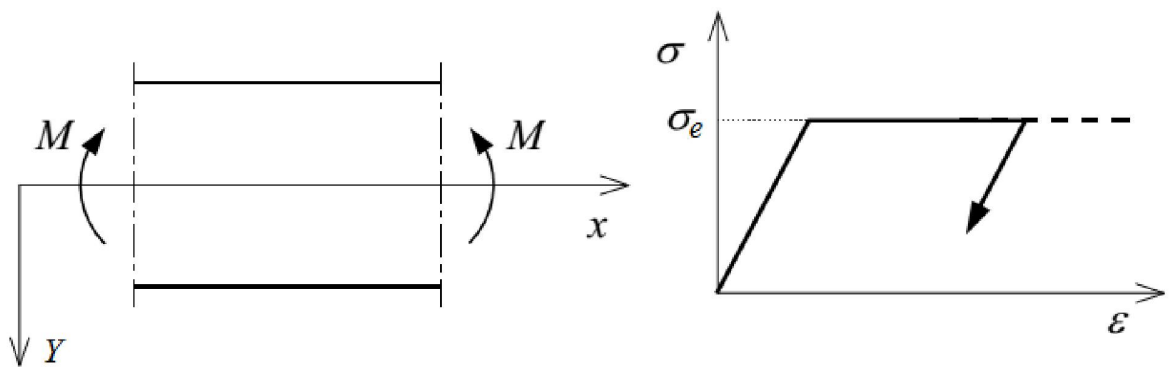


Figure VII-2. Loi de comportement du matériau

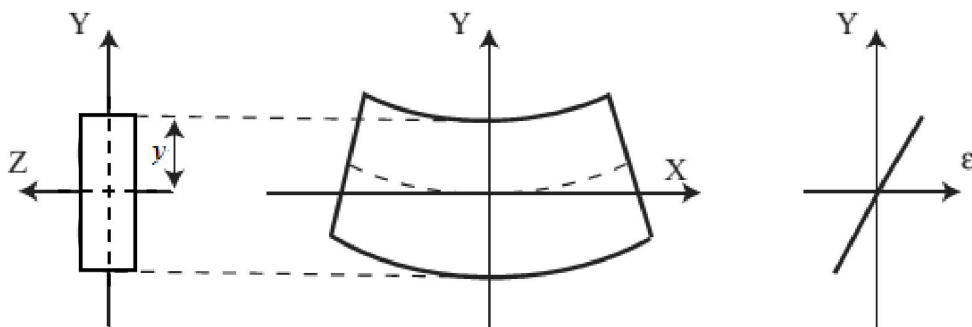


Figure VII-3. Cinématique d'une poutre soumise à de la flexion simple

Les différentes étapes de l'évolution élasto-plastique de la structure sont:

VII-1-1. Phase du comportement élastique

Partant d'un état initial ($Q = 0$), on augmente progressivement la valeur du chargement. Le comportement de la poutre est alors en tout point élastique, soit:

$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}$ équation constitutive

$\varepsilon_{xx} = \chi \cdot y$ équation cinématique (poutre de Bernoulli)

$M = \int_A y \cdot \sigma_{xx} dA$ équation d'équilibre

Pour des petites courbures, le matériau répond élastiquement et la relation entre le moment et la courbure peut être dérivée comme suit: $M(x) = EI \chi(x) = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$

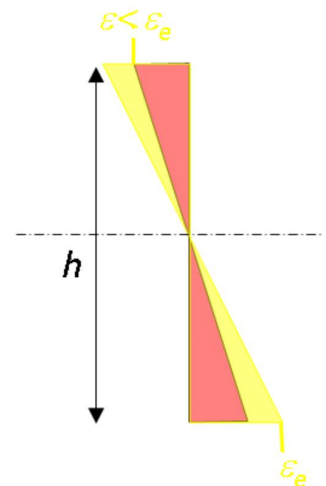
où $v(x)$ désigne la flèche au point x , comptée positivement dans le sens de l'axe Y , et $\chi(x)$ désigne la courbure. Nous pouvons écrire la relation suivante entre la contrainte et le moment fléchissant :

$\sigma_{xx} = \frac{M \cdot y}{I}$, et $\varepsilon_{xx} = \frac{M \cdot y}{EI}$

La déformation est proportionnelle à la distance à la fibre neutre, et il en est de même pour la contrainte en raison du comportement linéaire du matériau. Au niveau des fibres extrêmes ($y=h/2$), nous avons: $\sigma_{xx} = \frac{M}{W}$ et

$\varepsilon_{xx} = \frac{M}{EW}$.

Avec $W = I/(h/2)$ le module de flexion élastique de la section considérée.



Lorsque le chargement est augmentée, le moment de flexion à chaque section augmente et les contraintes augmentent également. Dans une section où le moment de flexion est maximal (pas forcément à mi- portée), les contraintes dans les fibres extrêmes atteignent la limite d'élasticité. Le moment correspondant à cet état s'appelle le moment de première plastification ou moment résistant élastique Me , de la section transversale. Mais, cela n'implique pas la ruine, car la poutre peut continuer à supporter une charge supplémentaire.

Moment résistant élastique

Lorsque la contrainte dans la fibre extrême atteint la limite d'élasticité:

$$\sigma(y = h/2) = \sigma_e = \frac{M_e}{W}$$

d'où $M_e = W \cdot \sigma_e$.

La courbure élastique maximum vaut alors $\chi_e = \frac{M_e}{EI}$ et la déformation élastique $\varepsilon_e = \chi_e \frac{h}{2}$.

Pour une section rectangulaire ($b \times h$).

$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_e; \quad \text{et} \quad \chi_e = \frac{2\sigma_e}{hE}$$

VII-1-2. Phase du comportement élasto-plastique (plastification progressive de la section $M > M_e$)

Le chargement étant poursuivi au-delà de la charge limite élastique Q_e . Quand le moment est encore augmenté, on suppose que l'hypothèse de Bernoulli reste valable. La distribution de la déformation sur la hauteur de la section transversale reste bi-triangulaire comme donnée par la *Figure VII-4* (1) et (3). Au fur et à mesure que le moment continue d'augmenter, de plus en plus de fibres atteignent la limite d'élasticité. Naturellement, pendant la phase plastique, l'équilibre est également satisfait. Ce qui change, cependant, c'est la relation contrainte-déformation, il est donné par:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{pour} \quad |\varepsilon| < \varepsilon_e$$

$$\sigma = \pm \sigma_e \quad \text{pour} \quad |\varepsilon| \geq \varepsilon_e$$

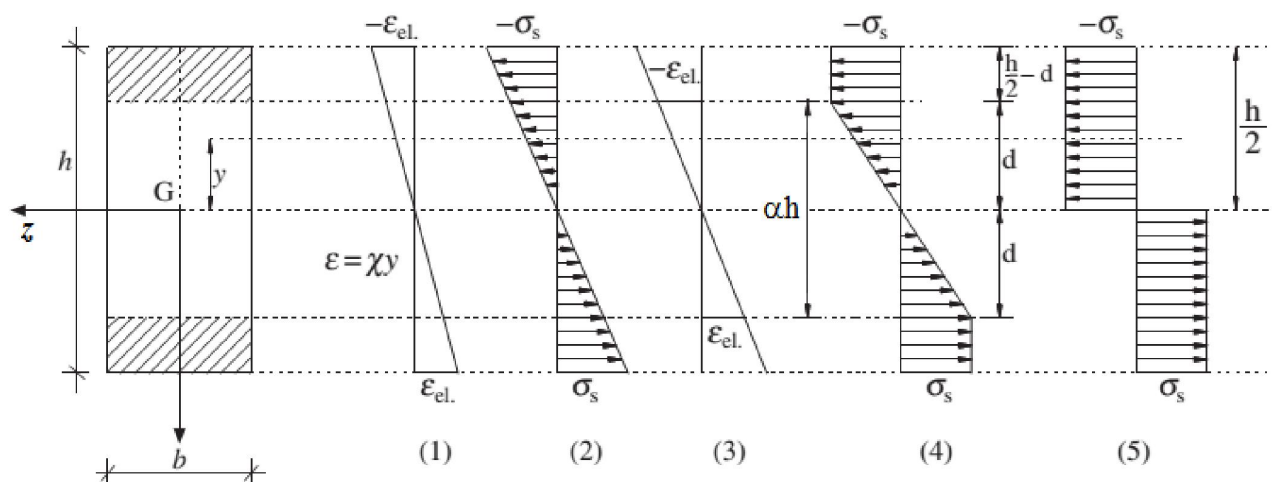


Figure VII-4. Section transversale : diagramme de contrainte

Dû à la symétrie de la section et de la courbe de comportement du matériau, l'axe neutre reste à mi-hauteur. La répartition des contraintes est illustrée sur la *Figure VII-4 (4)*. De ce comportement matériel, il est possible de déterminer les contraintes et les moments pour une distribution de déformation donnée.

Supposons que plus en plus de fibres sont plastifiées de tel sort que la zone interne élastique sera réduite à (αh) . La répartition des contraintes est alors donnée par:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{pour } |y| < d = \frac{1}{2} \alpha h$$

$$\sigma = \pm \sigma_e \quad \text{pour } |y| \geq d = \frac{1}{2} \alpha h$$

Moment élasto-plastique

Le moment résultant des contraintes agissant dans la section transversale est composé de d'une composante élastique et une composante plastique: $M = \bar{M}_e + \bar{M}_p$.

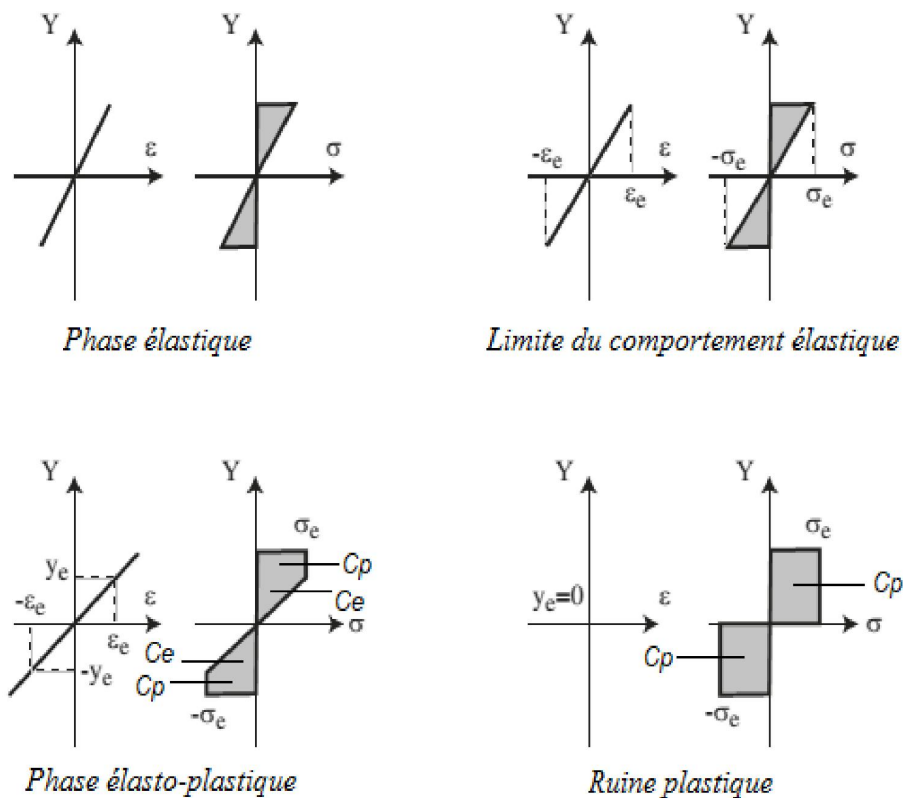


Figure VII-5. Section transversale : moment résultant

En utilisant l'équation d'équilibre: $M = \int_A y \cdot \sigma_{xx} \cdot dA$, à savoir la force résultante en compression et la force résultante en traction sur cette section sont égales, on obtient:

La composante élastique:

$$\bar{M}_e = C_e \cdot s_e$$

$$\bar{M}_e = b \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha h}{2} \sigma_e \right) \left(\frac{2}{3} \alpha h \right)$$

$$\bar{M}_e = \alpha^2 \left(\frac{bh^2}{6} \sigma_e \right)$$

La composante plastique:

$$\bar{M}_p = C_p \cdot s$$

$$C_p = b \left(\frac{h - \alpha h}{2} \right) \sigma_e$$

$$s = \alpha h + \frac{h - \alpha h}{2} = \frac{h}{2} (1 + \alpha)$$

Donc:

$$\bar{M}_p = \frac{bh^2}{4} (1 - \alpha^2) \sigma_e$$

Le moment élasto-plastique vaut:

$$M_{ep} = \alpha^2 \left(\frac{bh^2}{6} \sigma_e \right) + \frac{bh^2}{4} (1 - \alpha^2) \sigma_e = M_{ep} = (W_e \sigma_e) \alpha^2 + W_p \sigma_e (1 - \alpha^2)$$

$$M_{ep} = \frac{bh^2}{6} \frac{(3 - \alpha^2)}{2} \sigma_e$$

VII-1-3. Ruine plastique ($M=M_p$; notion de rotule plastique)

Finalement, la totalité de la section transversale atteint la limite d'élasticité et la répartition des contraintes correspondante est indiquée sur la *Figure VII-4 (5)*. Le moment correspondant à cet état est appelé moment plastique de la section transversale et est noté M_p .

Moment plastique

Lorsque la section est entièrement plastifiée, la contrainte normale vaut:

- $-h/2 \leq y < 0 : \sigma_{xx} = \sigma_e ;$
- $0 < y \leq h/2 : \sigma_{xx} = -\sigma_e.$

Pour trouver le moment entièrement plastique d'une section de poutre, nous utilisons l'équation d'équilibre $M = \int_A y \cdot \sigma_e \cdot dA$:

$$M_p = C_p \cdot \frac{h}{2}$$

$$C_p = \frac{bh}{2} \sigma_e$$

Le moment fléchissant vaut:

$$M_p = \left(\frac{bh}{2} \sigma_e \right) \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_e;$$

$$\Rightarrow M_p = W_p \cdot \sigma_e$$

où W_p est le module de flexion plastique: $W_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \cdot dA$

Notons que l'on a: $W_p = S$; où S est le moment statique de la section.

A ce stade-là, La section transversale n'est pas capable de résister à un moment supplémentaire mais peut maintenir ce moment pour une certaine rotation. Dans ce cas, elle agit comme une rotule plastique.

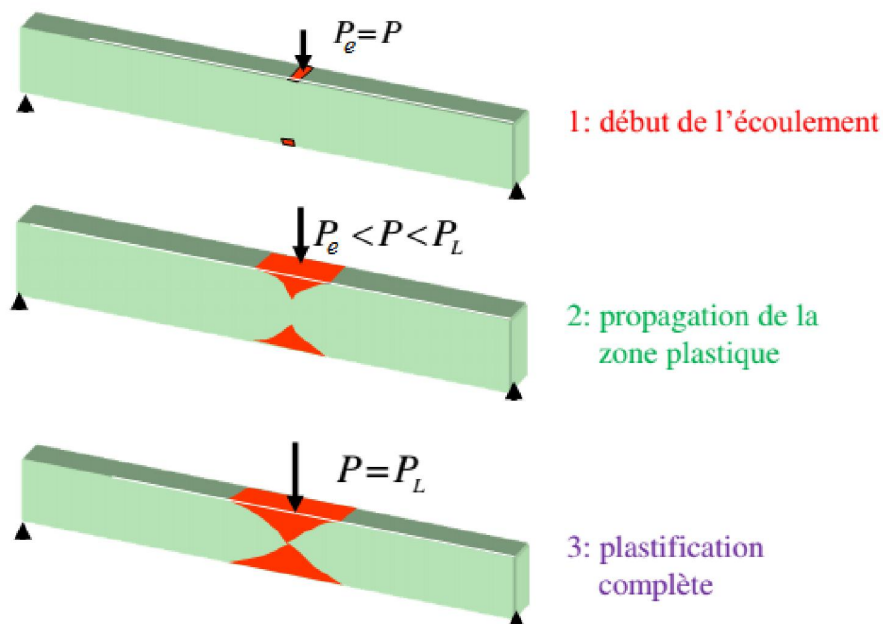


Figure VII-6. Formation d'une rotule plastique

L'effondrement de cette poutre se produit lors de la formation de la rotule plastique dans la travée, étant donné que cette rotule supplémentaire transforme la poutre isostatique en un mécanisme (système statiquement indéterminé c-à-d le degré d'hyperstaticité est égale -1). La charge d'effondrement est atteinte lorsque le moment maximum atteint la valeur du moment limite plastique.



Figure VII-7. Formation d'un mécanisme

On définit le «réserve ou gain» de résistance par plastification comme étant: $G = 100(M_p/M_e - 1)$.
 Ce qui donne pour une section rectangulaire, $G=50\%$.

VII-1-4. La relation moment-courbure

- * La relation entre le moment sollicitant M et la courbure χ dans la phase élastique est: $M = EI \cdot \chi$
- * La relation entre le moment sollicitant M et la courbure χ dans la phase élasto-plastique, avec $\chi_e/\chi = \alpha$ peut être écrite sous la forme:

$$M = M_p \left(1 - \frac{1}{3} \alpha^2 \right) = M_p \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right) \quad \text{pour } \chi \geq \chi_e$$

Si $\chi = \chi_e$ le moment M est égal à $2M_p / 3$

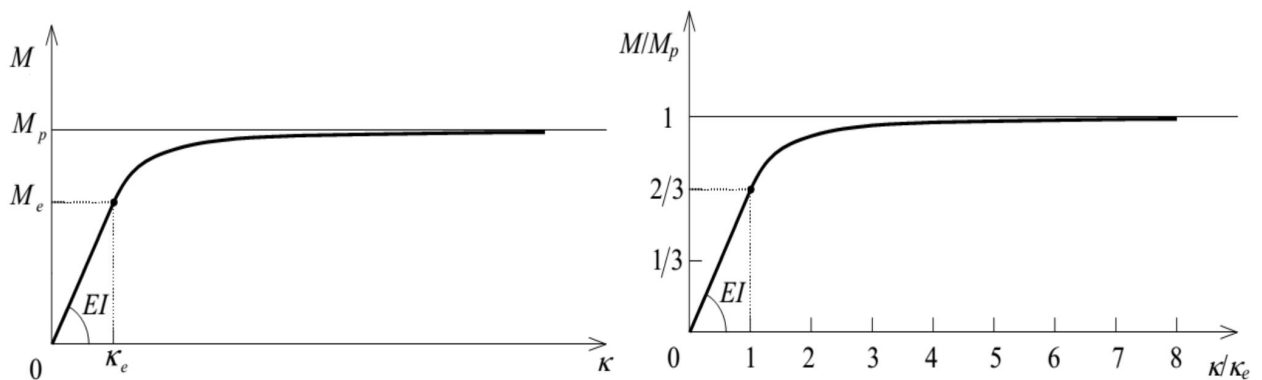


Figure VII-8. Courbe de comportement moment-courbure

VII-2. DECHARGE ELASTIQUE ET CONTRAINTES RESIDUELLES

Supposons que la section transversale soit chargée jusqu'à M_p , Quand à un certain moment immédiatement avant que ne se produise l'écoulement plastique libre de la structure le moment est réduit jusqu'il est complètement supprimé, la section transversale réagit d'une manière élastique. La *Figure VII-9* indique ce qui va arriver.

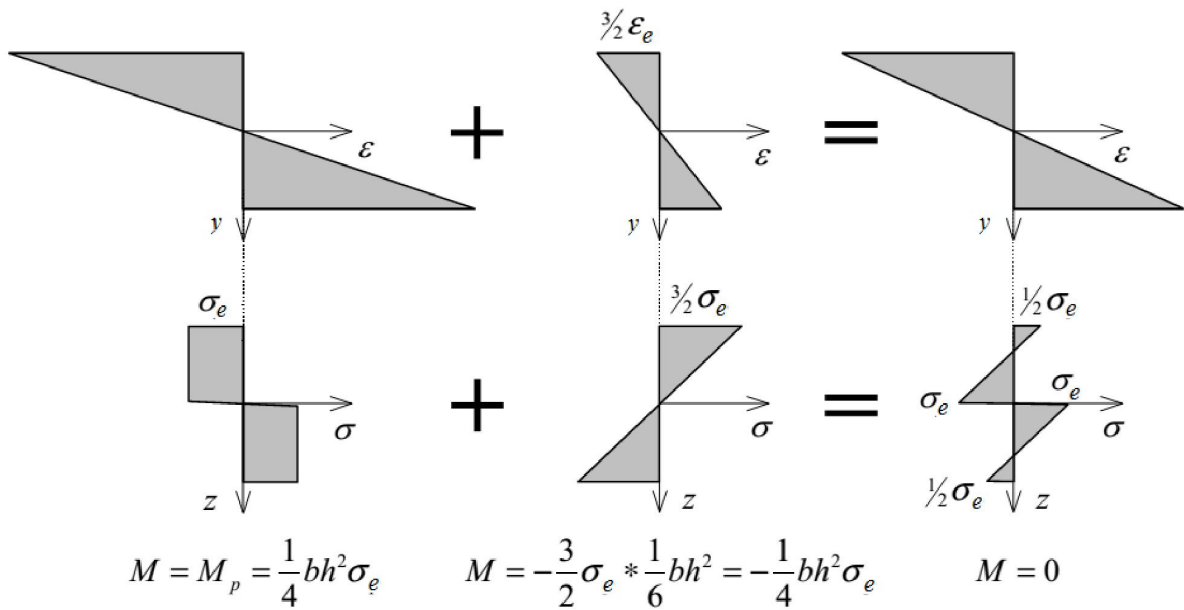


Figure VII-9. Contraintes résiduelles

Une distribution de moment élastique avec une contrainte maximale dans la fibre extrême de $3\sigma_e/2$ est superposée à une répartition de contrainte entièrement plastique. Le résultat est une distribution dite "contraintes résiduelles", dont le moment résultant et la force normale résultante sont égaux à zéro.

Notez qu'une contrainte de compression demeure dans la partie inférieure de la poutre, alors que la déformation est positive, de même, une contrainte de traction demeure dans la partie supérieure de la poutre, alors que la déformation est négative (la relation contrainte-déformation n'est pas unique, elle est également déterminée par l'historique complet de la charge).

VII-3. CONCEPT DE ROTULE PLASTIQUE

Lorsque le moment dans une section atteint la valeur du moment limite plastique, la section transversale n'est pas capable de résister à un moment supplémentaire mais peut maintenir ce moment pour une certaine rotation. Dans ce cas, elle agit comme une rotule plastique.

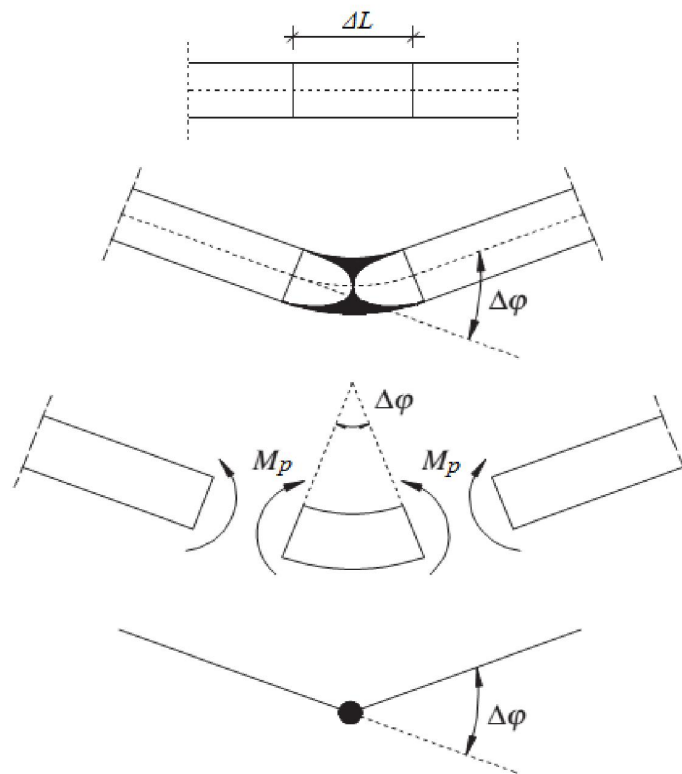


Figure VII-10. Rotule plastique

Remarques

* M_p est une idéalisation parce que:

- La courbure ne peut atteindre le pliage.
- La déformation dans les fibres extrêmes finit par être telle qu'on entre dans le domaine de l'écroutissage jusqu'à atteindre la déformation de rupture.

* Rotule plastique = articulation «à frottement» concentrée en une section (celle où M_p est atteint), à savoir :

- Reste rigide tant que $M < M_p$
- Ne peut tourner que si M_p est atteint

VII-3-1. Longueur de la rotule plastique

Théoriquement, la rotule plastique est supposée se former au point où se trouve le moment max. Ainsi, la longueur d'une rotule plastique est considérée comme nulle. Cependant, la valeur de moment, au niveau des sections adjacentes de la zone d'écoulement, est supérieure au moment de la limite élastique M_e jusqu'à une certaine longueur ΔL . Cette longueur ΔL est appelée longueur articulée. La longueur articulée dépend du type de chargement et de la géométrie de la section transversale.

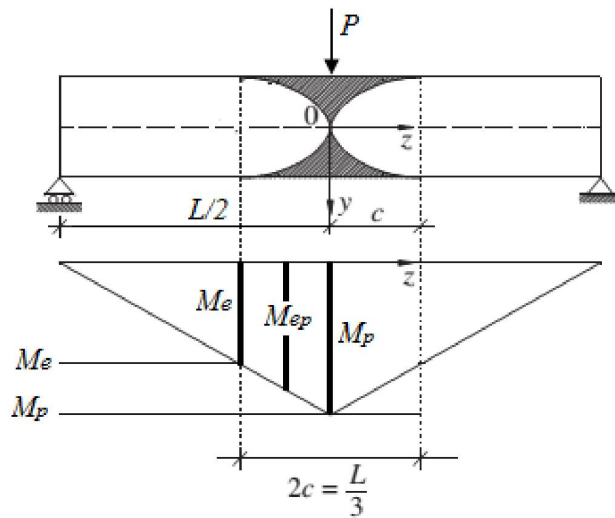


Figure VII-11. Longueur d'une rotule plastique

Prenant l'exemple d'une charge concentrée appliquée à mi-portée d'une poutre rectangulaire simplement supportée. Le moment de flexion maximum se produit à mi-portée de la poutre. Lorsque ce moment atteint le moment limite plastique de la section transversale M_p , une rotule plastique est formée au centre. Nous nous intéressons à la zone de flexion élasto-plastique. Comme on peut le voir sur le diagramme du moment fléchissant à l'effondrement, les zones du comportement plastique s'étendent du centre jusqu'au point où le moment est égal au moment élastique M_e .

Soit ΔL , la longueur de la zone plastique. A partir du diagramme du moment fléchissant, nous avons:

$$\frac{M_p}{L/2} = \frac{M_e}{(L/2 - c)} \rightarrow c = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{M_e}{M_p} \right) = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right).$$

Pour une section rectangulaire: $\Delta L = 2c = \frac{L}{3}$

VII-3-2. Forme de la rotule plastique

A partir du diagramme du moment fléchissant, nous avons:

$$\frac{M_p}{L/2} = \frac{M_p - M_e}{c} = \frac{M_p - M_{ep}}{x}$$

Avec: M_{ep} est le moment élasto-plastique à une distance (x) comptée à partir de la rotule plastique.

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2M_p} (M_p - M_{ep})$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M_{ep}}{M_p} \right)$$

Par substitution des équations de M_{ep} et M_p dans cette dernière équation, on obtient pour le cas d'une section rectangulaire:

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_e \left(\frac{bd^2}{6} \right) \frac{1}{2} (3 - \alpha^2)}{\sigma_e \left(\frac{bd^2}{4} \right)} \right)$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1}{2} (3 - \alpha^2) \right)$$

$x = \frac{L}{6} \alpha^2 \Rightarrow$ La région plastique autour de la rotule plastique a une forme parabolique.

VII-3-3. Pour une charge uniformément répartie



La longueur de la rotule plastique est: $\Delta L = \frac{L}{\sqrt{3}}$

La rotule plastique a une forme linéaire: $x = 2\sqrt{3} L \alpha$

VII-4. MOMENT PLASTIQUE DE SECTIONS TRANSVERSALES ARBITRAIRES

VII-4-1. Sections à double symétrie

On considérera d'abord les sections à double symétrie, avec flexion autour d'un de ces axes de symétrie. La procédure pour ce type de profil est presque identique à celle pour les sections rectangulaires. Lorsque le moment atteint M_p , toute la zone ($z > 0$) se plastifie en traction et la zone ($z < 0$) se plastifie en compression.

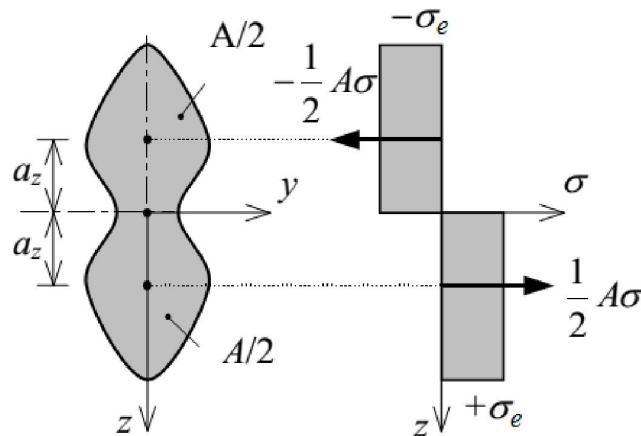


Figure VII-12. sections à double symétrie

Le moment plastique M_p peut alors être calculé comme suit:

$$M_p = \int_A y \cdot \sigma_e \cdot dA = \sigma_e \int_{y>0} y \cdot dA + (-\sigma_e) \int_{y<0} y \cdot dA$$

$$M_p = W_p \cdot \sigma_e$$

Comme la section transversale est symétrique:

$$W_p = 2 \int_{y>0} y \cdot dA = 2S$$

Avec: $S = \int_{y>0} y \cdot dA$ est le moment statique de la moitié de la section transversale.

$$W_p = a_z \cdot A$$

A : est l'aire de toute la section transversale, et a_z la distance entre le centre de gravité de la moitié supérieure de la section transversale et le centre de gravité de toute la section transversale.

VII-4-2- Sections arbitraire

L'analyse effectuée dans la section précédente peut être appliquée à toute section transversale de forme arbitraire. Pour la détermination du module plastique W_p . Cependant, le comportement des sections asymétriques est plus compliqué.

Prenant l'exemple de la section en T de la Figure VII-13, où $t \ll a$.

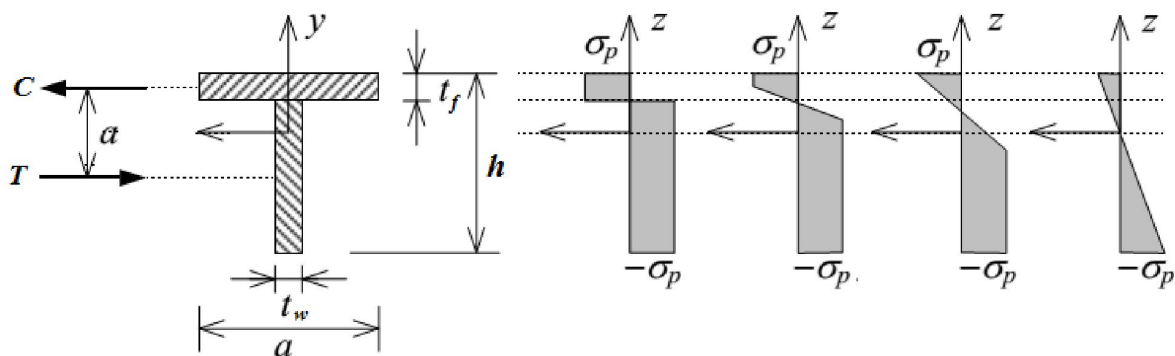


Figure VII-13. sections en T

Dans la phase élastique, l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section transversale. Les contraintes en bas sont plus grandes qu'en haut (pour ces dimensions spécifiques). Si le chargement est augmenté au-delà de Me , c'est seulement la partie inférieure qui subit la plastification des fibres éloignées de l'axe neutre, et la semelle reste élastique. Dans ce cas, l'axe neutre se déplace vers la semelle pour équilibrer l'augmentation non contrebalancée des forces équivalentes de compression et de traction. Une augmentation supplémentaire du moment entraîne l'écoulement dans la semelle. Après cela, les zones plastiques se développent des deux côtés. Lorsque les deux zones plastiques sont presque rapprochées l'une de l'autre, le moment plastique M_p est atteint.

La détermination du diagramme $M-\chi$ est une procédure très laborieuse. Dans la plupart des cas, on s'intéresse seulement à la valeur du moment plastique M_p , qui peut être trouvé assez facilement.

La clé est que la position de l'axe neutre est telle que l'axe neutre doit diviser la section transversale en deux parties de section égale, afin de satisfaire l'équilibre des efforts internes.

Pour une section asymétrique arbitraire, le moment plastique peut alors être déterminé comme suit:

$$M_p = W_p \cdot \sigma_e$$

$$W_p = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} A (a_1 + a_2)$$

S_1 et S_2 sont les valeurs absolues des moments statiques des parties supérieures et inférieures (par rapport à la ligne bissectrice "passant par le centre de gravité" de la section transversale).

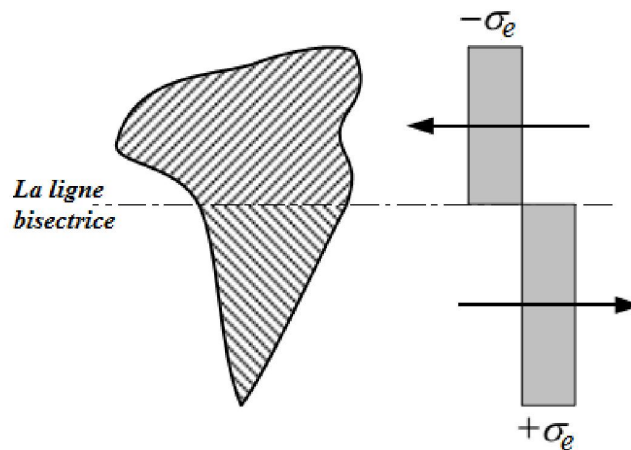


Figure VII-14. sections arbitraire

VII-5. LE FACTEUR DE FORME

Le facteur de forme d'une section transversale est le rapport entre la charge limite plastique et la charge élastique: $\eta = \frac{Q_p}{Q_e} = \frac{M_p}{M_e}$. Pour une section rectangulaire il vaut: $\frac{M_p}{M_e} = 1.5$.

C'est un facteur de forme: il ne dépend que de la forme de la section droite.

Le facteur de forme de différentes sections est représenté sur le Tableau ci-dessous. Le facteur de forme dépend fortement du choix de forme de la section transversale. Un grand facteur de forme se produit par exemple pour les sections circulaires ($\eta = 1,70$) et un faible facteur pour les sections en I ($\eta = 1,15$).

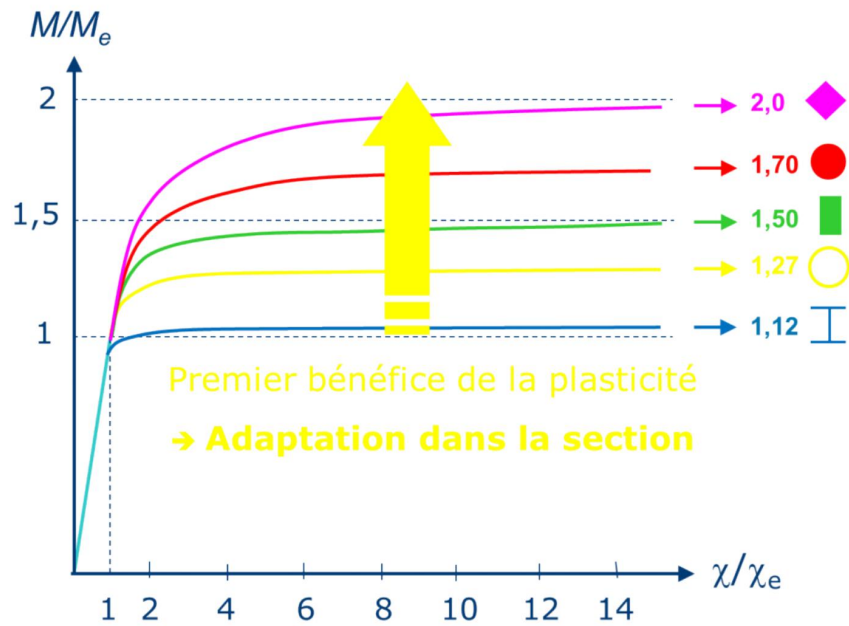


Figure VII-15. Comportement moment-courbure et facteur de forme

La section en *I* a un faible facteur de forme. Ceci est lié à la distribution effective du matériau. Dès que le moment dépasse M_e , l'écoulement se produit presque immédiatement dans les semelles supérieure et inférieure. Par conséquent, la rigidité EI de toute la section se réduit à la rigidité de l'âme seul, et le diagramme $M-\chi$ montre une discontinuité de pente. Avec l'augmentation de χ , la valeur du moment plastique M_p est bientôt atteinte. Cela conduit à l'idée d'approximer le comportement ($M-\chi$) par un modèle bilinéaire.

Profil	IPN	IPE	HEA	HEB	UPN	UAP
H	1.18	1.15	1.15	1.16	1.19	1.18

Tableau VII-1. Facteur de forme des profils métalliques

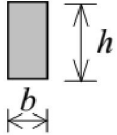
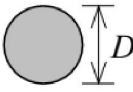
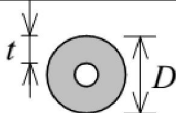
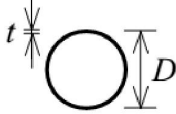
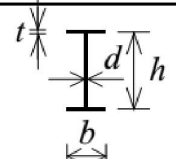
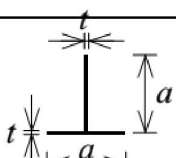
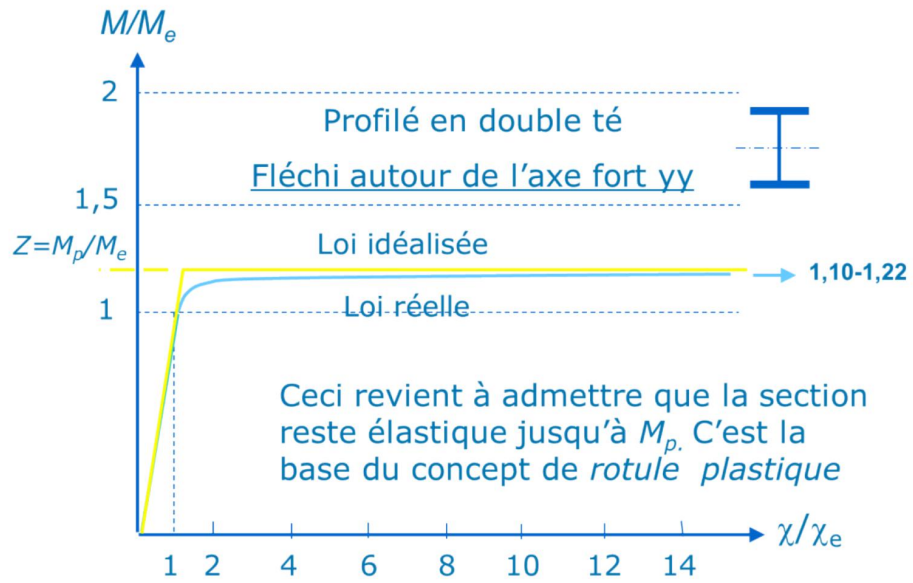
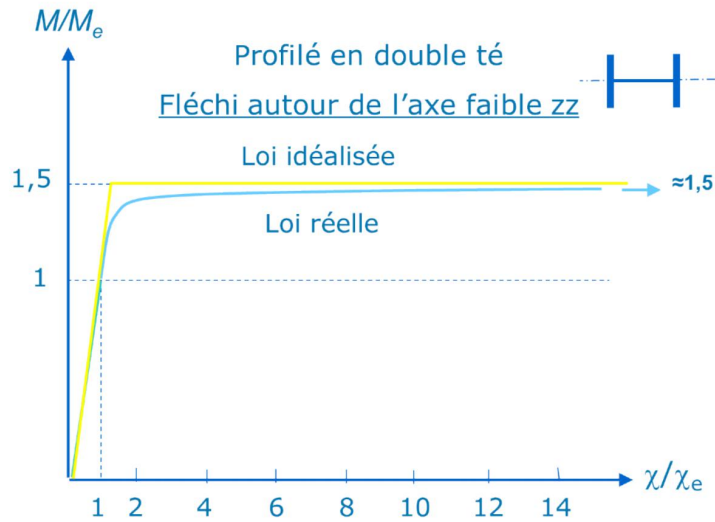
<i>Section transversale</i>	W_e	W_p	η
<i>Rectangulaire</i> 	$\frac{1}{6}bh^2$	$\frac{1}{4}bh^2$	1.50
<i>Circulaire</i> 	$\frac{\pi}{32}D^3$	$\frac{1}{6}D^3$	1.70
<i>Tube à paroi épaisse</i> 	$\frac{\pi}{32}D^3 \left[1 - \left(1 - \frac{2t}{D} \right)^4 \right]$	$\frac{1}{6}D^3 \left[1 - \left(1 - \frac{2t}{D} \right)^3 \right]$	± 1.50
<i>Tube à paroi mince</i> 	$\frac{\pi}{4}tD^2$	tD^2	1.27
<i>Section en I</i> 	$bht + \frac{1}{6}dh^2$	$bht + \frac{1}{4}dh^2$	± 1.15
<i>Section en T</i> 	$\frac{5}{18}ta^2$	$\frac{1}{2}ta^2$	1.80

Tableau VII-2. Module résistant et facteur de forme



a



b

Figure VII-16. *a*- Comportement des section en I, *b*- Comportement des section en H

VII-6. LA RELATION MOMENT-COURBURE D'UNE SECTION EN BETON ARME

Considérons une poutre en béton armé, soumise à l'action d'un moment fléchissant M . La poutre a une section transversale rectangulaire de largeur b et hauteur h , renforcée par une nappe des armatures longitudinales inférieure de section A_s . Les modèles des lois de comportement de l'acier et du béton sont représentées sur la *Figure VII-17*.

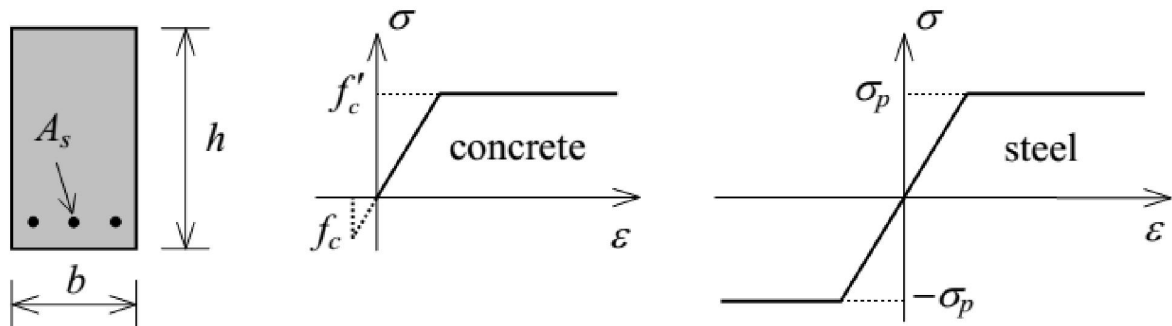


Figure VII-17. sections en béton armé

Lorsque le moment fléchissant est progressivement augmentée de $M = 0$, la section transversale se comporte initialement de manière élastique. L'axe neutre est situé au-dessous du centre de gravité la section, car la rigidité (module de Young E) de l'acier est plus élevé que celle du béton. La répartition des contraintes est donnée sur la *Figure VII-18 (a)*. Ensuite, la résistance à la traction du béton est atteinte dans partie inférieure de la poutre conduisant la fissuration du béton, *Figure VII-18 (b)*.

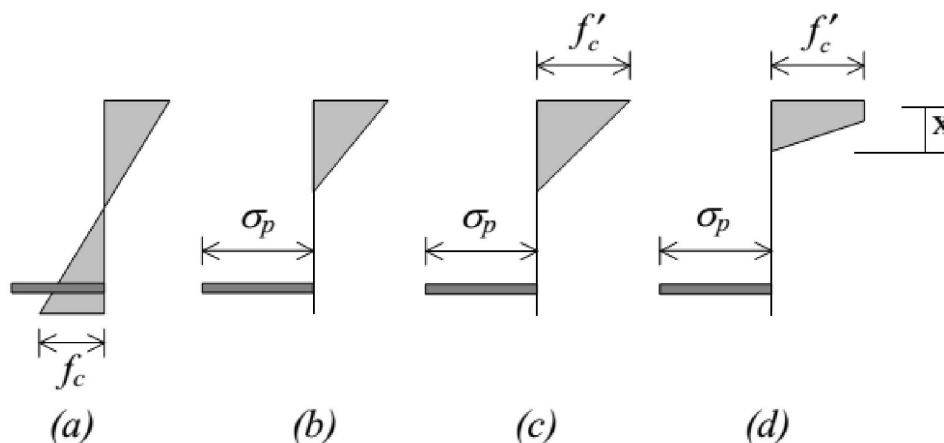


Figure VII-18. Equilibre d'une sections en béton armé

Au cours de l'augmentation du moment fléchissant, la zone fissurée s'évolue vers le haut de la section (c). Ensuite, pour une section transversale bien conçue, les contraintes dans les armatures atteignent la

limite d'élasticité. Cependant, le moment peut augmenter encore, puisque l'axe neutre se déplace plus haut, augmentant le bras de levier de l'effort dans les armatures. Enfin, quand la capacité maximale de la zone de compression du béton est atteinte, l'axe neutre arrête son mouvement ascendant. La capacité de charge limite M_p est atteinte avec la répartition des contraintes représenté sur la *Figure VII-18 (d)*.

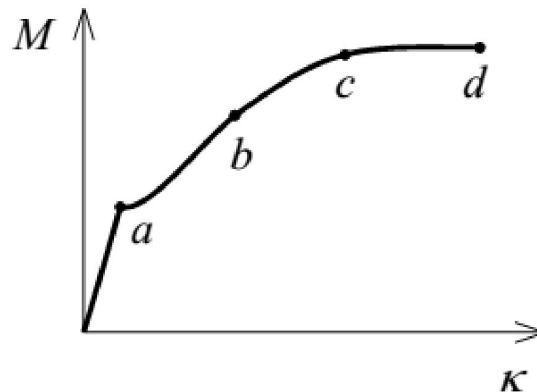


Figure VII-19. Relation moment – courbure d'une section en béton armé

Si la contrainte de traction du béton est négligée et la contrainte de béton dans toute la zone de compression est supposée constante et égale à f_{cb} , Le moment ultime M_u est:

$$M_u = A_s \cdot \sigma_s (d - 0.5y)$$

Où d est la distance entre les barres d'armature et la fibre supérieur de la section transversale, y est la hauteur du béton comprimé. y peut être déterminé à partir de l'équilibre des forces horizontales:

$$A_s \cdot \sigma_s = b \cdot y \cdot f_{cb}$$

$$\text{Alors: } M_u = A_s \cdot \sigma_s \cdot h \left(1 - \frac{1}{2}c \right)$$

$$\text{Ou bien: } M_u = c \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cb} \left(1 - \frac{1}{2}c \right)$$

$$\text{Avec: } c = \frac{A_s \cdot \sigma_s}{b \cdot h \cdot f_{cb}}$$

VII-7. COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE D'UNE POUTRE HYPERSTATIQUE

Soit la poutre hyperstatique constituée d'une travée AB de longueur L , encastrée en A et simplement appuyée en B , chargée par une charge verticale uniformément répartie d'intensité Q . La poutre a une section rectangulaire et supposée constituée d'un matériau élastique parfaitement plastique

Partant d'un état initial ($Q = 0$), on augmente progressivement la valeur du chargement.

VII-7-1. Phase élastique

Au début de chargement, le comportement de la poutre est alors en tout point élastique.

Le degré d'hyperstaticité est égal à 1. Choisissons M_B comme inconnue hyperstatique:

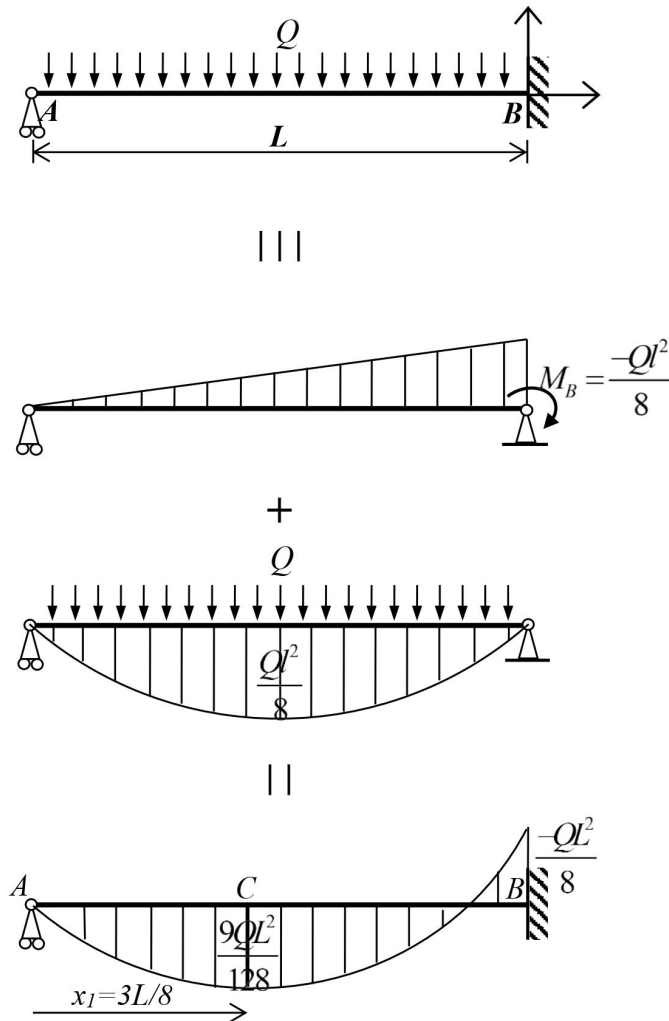


Figure VII-20. Diagramme du moment fléchissant

Après calcul, nous avons: $R_A = \frac{3QL}{8}$, $R_B = \frac{5QL}{8}$, et $M_B = -\frac{QL^2}{8}$

Nous savons que le moment maximum se produit en B: $M_{max} = M_B = -\frac{QL^2}{8}$; et que le moment fléchissant au point C est: $M_C = \frac{9QL^2}{128}$.

La flèche maximale est: $\delta_{max} = \frac{QL^4}{185EI}$, se produit au point C' de coordonnée $x = 0.422 \times L$. La

rotation maximale se produit au point A tel que: $\theta_A = \frac{5QL^3}{348EI}$.

On augmente la charge Q jusqu'à une valeur où le moment maximum M_B atteint la valeur du moment élastique M_e (moment de première plastification). Cependant, En se basant sur le concept de rotule plastique, on adoptera un modèle idéalisé du diagramme moment courbure ($M-\chi$), de type élastique parfaitement plastique. En accepte que:

- La longueur de la zone élasto-plastique reste toujours assez limitée (dans notre exemple: seule la section située à l'encastrement B se plastifiée).
- La courbure de la partie élastique reste faible mais celle de la partie élasto-plastique croît rapidement dans la zone partiellement plastifiée et ce d'autant qu'on se rapproche de la section totalement plastifiée.
- Théorie de flexion pure généralisée au cas de flexion simple ($M+V$) et de flexion composée ($M+N$) car N et V influencent peu le moment plastique.

Par conséquent, On accepte que le comportement de l'élément de poutre demeure élastique tant que le moment de flexion est inférieur à la valeur limite M_p . On suppose alors que le diagramme $M-\chi$ peut être supposé bilinéaire pour chaque section.

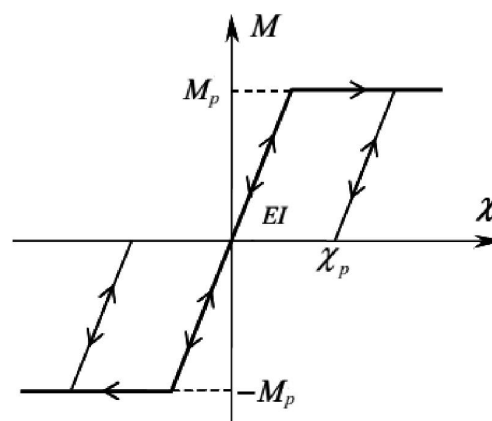


Figure VII-21. Comportement moment – courbure

Alors, même après la 1^{ère} plastification lorsque le moment maximum atteint la valeur du moment résistant élastique M_e , conformément au concept de rotule plastique, le comportement est supposé élastique jusqu'à la formation de la rotule plastique. Dans ce cas, jusqu'à ce que:

$$M_B = \frac{-QL^2}{8} = -M_p; \text{ donc pour: } Q_e = \frac{8M_p}{L^2}.$$

La flèche varie proportionnellement à Q , donc: $8M_e/L^2$

VII-7-2. Phase élasto-plastique (à la formation d'une rotule plastique à l'encastrement "point B")

La limite d'élasticité du système correspond à la plastification de l'encastrement. Le moment en B est maintenant égal à M_p et donc la section en B a complètement plastifiée. Ainsi, une rotule plastique s'est formée en B et donc aucun moment supplémentaire ne peut être pris en B , mais B peut tourner librement avec un moment constant de valeur M_p .

Notez que la structure ne s'effondre pas car il n'y a pas encore suffisamment de rotule pour qu'elle soit un mécanisme de ruine. Elle agit maintenant comme une poutre simplement appuyée avec une articulation en B (la rotule plastique) et appuis simple en A .

En domaine élasto-plastique, la flèche n'est plus proportionnelle à P

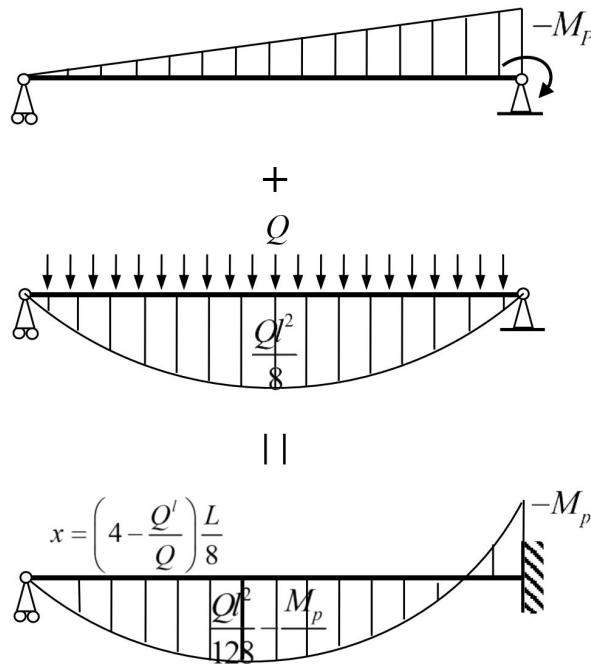


Figure VII-22. Diagramme du moment fléchissant

VII-7-3. Ruine de la structure (par apparition d'un mécanisme d'écoulement plastique libre)

On augmente encore la charge Q . Le moment dans la travée croît jusqu'à atteindre M_p .

Attention M_{max} se produit au point E de coordonnée x_2 , d'où:

$$M_E = \frac{Q' L x_2}{2} - \frac{Q' x_2^2}{2} - M_p \frac{x_2}{L} = M_p ; \text{ le maximum se produit au point où: } \frac{\partial M_E}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{Q' L}{2} - Q' x_2 - \frac{M_p}{L} = 0$$

$$x_2 = 0.414L$$

$$\text{Soit: } Q' = 11.656 M_p / L^2$$

Cette valeur de la charge Q correspond à la formation d'un mécanisme de ruine. C-à-d qu'il n'est pas possible d'équilibrer une valeur du chargement supérieure à: Q_l

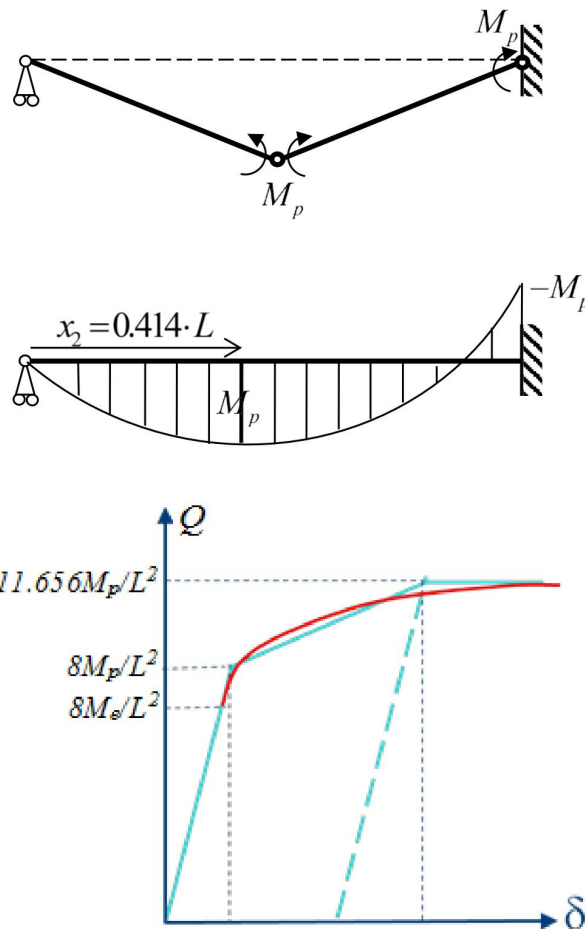


Figure VII-23. Comportement charge-déplacement

VII-3. COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE D'UN PORTIQUE

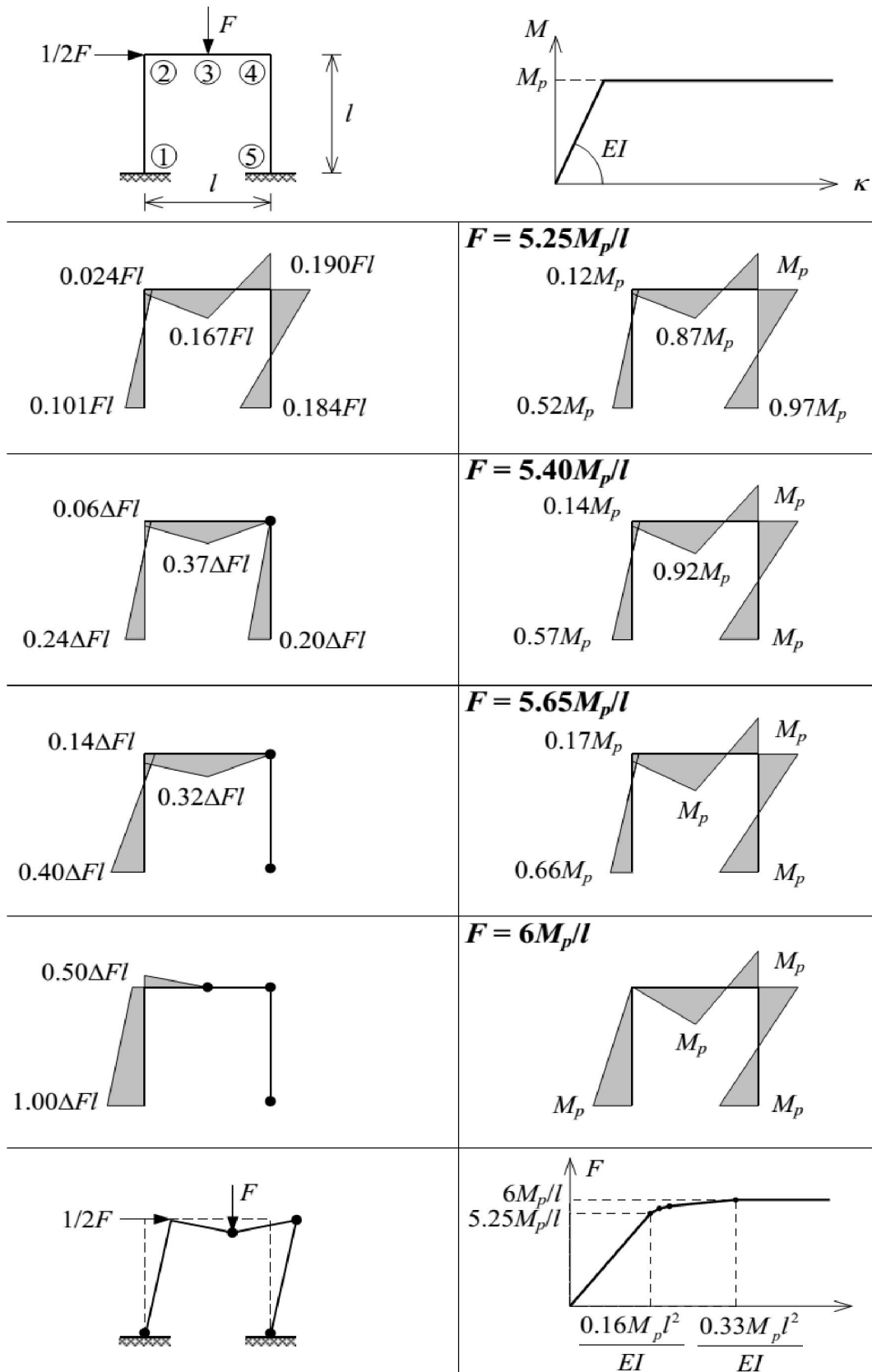


Figure VII-24. Comportement élasto-plastique d'un portique

CHAPITRE VIII: ANALYSE LIMITE D'UN SYSTÈME DE POUTRES

VIII-1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé l'analyse élasto-plastique incrémentale pour le calcul de la charge limite plastique. Prenant l'exemple de l'analyse élasto-plastique du portique étudié dans le chapitre précédent. Initialement, le portique était 3 fois statiquement indéterminé. A la formation de chaque rotule plastique, le degré d'hyperstaticité diminue de un. Après la formation de la troisième rotule, la structure devient statiquement déterminée, et la quatrième rotule la transformer en un mécanisme.

Pour un mécanisme, la distribution complète des moments fléchissant à la ruine peut facilement être déterminée, et la charge limite peut directement être obtenue indépendamment de l'historique de chargement, ni de la séquence de la formation des rotules plastique. La conséquence importante est qu'il n'est pas nécessaire de suivre l'historique du chargement afin d'obtenir la charge limite. Le problème consiste alors à étudier les mécanismes de ruine possibles.

Dans l'exemple de la poutre appuyée encastrée, on peut aller directement au diagramme des moments correspondant au mécanisme de ruine. On peut directement déduire:

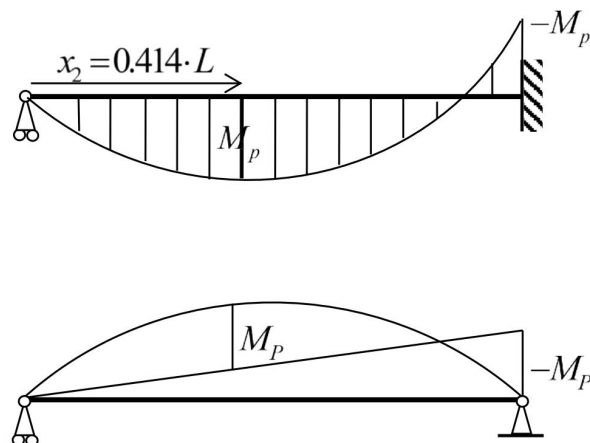


Figure VIII-1. Poutre hyperstatique

$$M_E = \frac{Q^l L x_2}{2} - \frac{Q^l x_2^2}{2} - M_P \frac{x_2}{L} = M_P ;$$

M_{max} se produit au point $x_2 = 0.414L$.

Nous avons: $Q^l = 11.656 M_P / L^2$

VIII-2. ANALYSE LIMIT PLASTIC

Dans le cadre de l'analyse limite, la charge limite peut être déterminée directement à partir du théorème statique (de la borne inférieure) et du théorème cinématique (de la borne supérieure) de la théorie de la plasticité.

VIII-2-1. Théorèmes de l'analyse limite plastique

Soit une structure de poutres soumise au chargement extérieur Q . Sous l'hypothèse d'un comportement moment courbure élastique parfaitement plastique (diagramme $M-\chi$ bilinéaire). Cette structure sera mise en ruine par l'apparition d'un nombre suffisant de rotules plastiques transformant la structure en mécanisme lorsque la charge atteint la charge limite Q' .

Charge limite (charge de ruine) Q' :

C'est la valeur minimale du chargement qui provoque la ruine de la structure. Elle s'écrit: $Q' = \lambda \cdot Q$. Avec λ appelé facteur de charge.

Facteur de charge:

Le facteur de charge est le rapport entre la charge limite plastique et la charge appliquée. Pour une analyse élasto-plastique on aura un accroissement proportionnel de toutes les charges par le facteur de

charge λ jusqu'à $Q' \rightarrow \lambda = \frac{Q'}{Q}$.

VIII-2-2. Principes (Critères) de l'analyse limite plastique

Dans l'analyse limite plastique, pour identifier le facteur de charge correct, il y a trois critères à respecter:

1. Condition de l'équilibre: les moments fléchissant internes doivent être en équilibre avec le chargement externe.

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

2. Condition de Mécanisme: La charge ultime ou d'effondrement est atteinte lorsqu'un mécanisme est formé (à l'effondrement, la structure, ou une partie d'elle, peut se déformer en tant que mécanisme).

Le nombre de rotules plastique développées devrait être juste suffisant pour former un mécanisme.

3. Condition de moment plastique (Critère de plasticité): aucun point dans la structure ne peut avoir un moment supérieur au moment plastique de la section à laquelle elle est appliquée. Autrement dit : « Le moment fléchissant dans toute section de la structure ne doit pas être supérieur au moment plastique de la section ».

Sur la base de ces critères, pour la détermination du facteur de charge λ , nous avons les approches suivants:

1. Théorème statique (théorème de la borne inférieure) ou aussi (la méthode d'équilibre):

Une charge calculée sur la base d'une distribution du moment fléchissant statiquement admissible (où le moment ne dépasse en aucun point le moment plastique M_p), vérifiant les conditions cinématiques (conditions au limites, et moment plastique de même sens que les rotations plastiques au droit des rotules) est inférieure (ou égale) à la vraie charge limite plastique.

Le facteur de charge correspondant est : $\lambda \leq \lambda^l$.

2. Théorème cinématique (théorème de la borne supérieure) ou aussi (la méthode de mécanisme):

Une charge calculée sur la base d'un mécanisme de ruine arbitraire est supérieure (ou égale) à la vraie charge limite plastique.

Le facteur de charge correspondant est : $\lambda \geq \lambda^l$.

- Dans cette méthode appelée aussi la méthode du travail virtuel, on établit l'égalité suivante: le travail des charges extérieures (travail développé par les charges extérieures) est égale au travail interne des rotules plastiques (travail absorbé par les rotules plastiques).
- Si les charges de ruine sont déterminées pour tous les mécanismes possibles, la charge de ruine réelle sera la plus faible de celles-ci (Théorème de la borne supérieure);

3. Théorème d'unicité:

La charge calculée sur la base d'une distribution du moment fléchissant satisfaisant: l'équilibre, le mécanisme, et le critère de plasticité, est la vraie charge limite plastique.

Le facteur de charge correspondant est : $\lambda = \lambda^l$.

- La charge de ruine est indépendante des contraintes initiales et de l'ordre de formation des rotules plastiques.

Critère	cinématique $\lambda \geq \lambda'$	Statique $\lambda \leq \lambda'$	d'unicité $\lambda = \lambda'$
Mécanisme	X		X
Equilibre	X	X	X
Critère de plasticité		X	X

Tableau VIII-1. Critères de l'analyse limite plastique

VIII-2-3. Points importants à respecter dans l'analyse limite des poutres en flexion:

- L'effet de l'effort normal et l'effort tranchant est négligé au cas de flexion simple ($M+V$) et de flexion composée ($M+N$) car ils influencent peu le moment plastique.
- On suppose que les éléments ont une capacité de déformation suffisante.
- En-dehors de la rotule, les éléments sont élastiques et leur courbure est négligée devant la courbure naissant dans la rotule plastique. Tout se passe donc comme si des tronçons rigides étaient articulés les uns aux autres au droit des sections pleinement plastifiées.
- Il est impératif de poser M_p dans le bon sens.
- Comme la charge est augmentée, il y a une redistribution du moment, car la rotule plastique ne peut supporter aucun moment supplémentaire.
- Apparition d'une rotule dans une section revient à réduire d'une unité le degré d'hyperstaticité.
- Les rotules plastiques se forment en des sections où M atteint un maximum. Il sont appelées les sections potentiellement critiques:
 - Point d'application des charges ponctuelles.
 - point de moment maximum pour les charges réparties.
 - Nœuds et assemblage.
 - Extrémités des barres "encastrement".

VIII-3. MECANISME DE RUINE

Un mécanisme est un ensemble de barres reliés par des rotules et formant un système déformable à un degré de liberté. Ce système est statiquement instable, il s'effondre sous une charge constante. Cette charge (ou combinaison de charges) est la charge limite (ultime) de la structure.

VIII-3-1. Formation d'un mécanisme

Théoriquement, il existe une infinité de façon de placer des rotules pour transformer une structure stable en un mécanisme. Cependant, pour une combinaison de charge donnée, la ruine d'une structure se fera par la formation d'un mécanisme unique et bien précis.

VIII-3-2. Notion de mécanismes indépendants

Le nombre de mécanismes possibles croit rapidement lorsque le nombre de sections critiques augmente et il devient très difficile de relever tous ces mécanismes, sans risquer d'en omettre.

Il existe plusieurs systèmes de mécanismes indépendants dans une structure. On peut distinguer quatre types de mécanismes:

- Mécanismes de poutre;
- Mécanisme de panneau: Déformation latérale parallélépipédique d'un cadre;
- Mécanisme de portique: affaissement et déformation latérale d'un cadre a deux versants;
- Mécanisme de nœud: rotation d'un nœud à trois branches ou plus.

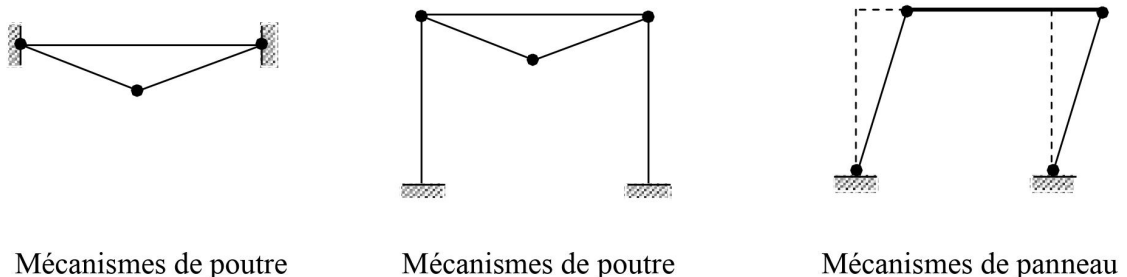


Figure VIII-2. Les mécanismes indépendants

VIII-3-3. Mécanismes combinés

Diverses combinaisons de mécanismes indépendants peuvent être réalisées selon que le cadre est constitué d'une combinaison de poutre forte et de poteau faible ou de poutre faible et de poteau fort. Ainsi, la ruine peut être partielle ou plus que complète selon que la ruine est atteinte pour un nombre de rotules inférieur ou supérieur au degré d'hyperstaticité.

Exemple : Mécanisme de poutre + mécanisme de panneau = mécanisme combiné

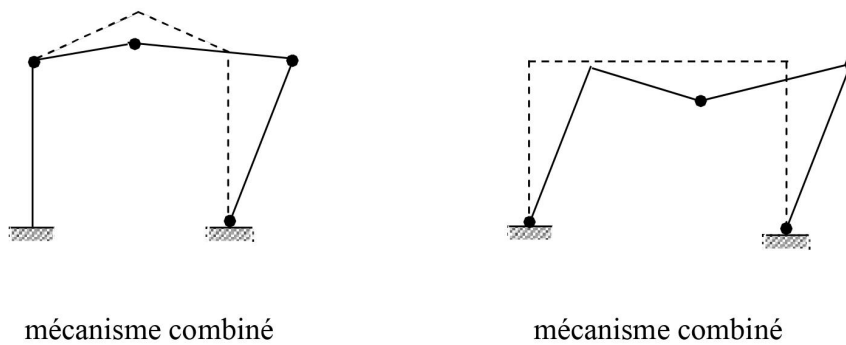


Figure VIII-3. Mécanismes combinés

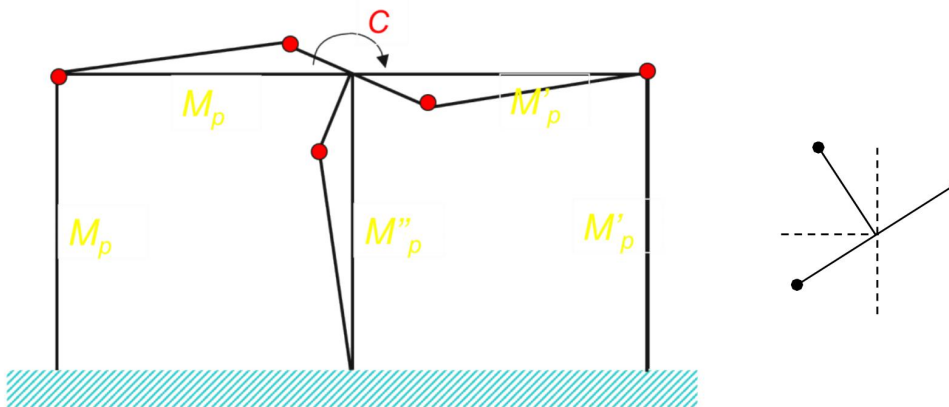
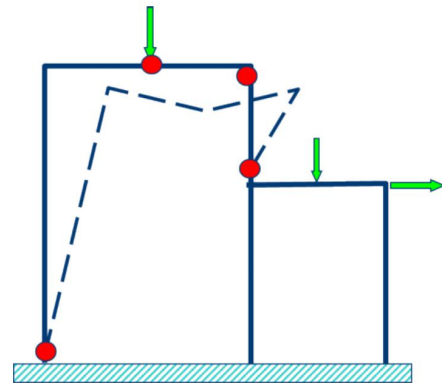
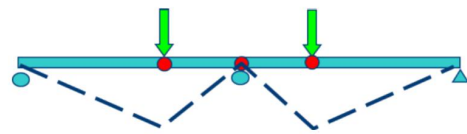


Figure VIII-4. Mécanisme de nœud

Ruine partielle du portique ($h=6$) par mécanisme dans la seule partie gauche ($h=3$) avec 4 rotules plastiques



Ruine plus que complète de la poutre continue ($h=1$) par mécanisme avec 3 rotules plastiques



VIII-3-4. Détermination du nombre de mécanismes indépendants

* A partir des exemples ci-dessus, on voit que le nombre de rotules nécessaires pour former un mécanisme est égal degré d'hyperstaticité (h) de la structure plus un.

* A chaque structure, comprend (m) mécanismes, le nombre de mécanismes indépendants (m) peut être relié au degré d'hyperstaticité (h) de la structure et le nombre de rotules plastiques possibles (n) comme étant: $m = n - h$.

* Le nombre de mécanismes combinés est donné par le nombre de permutations possibles de mécanismes indépendants:

VIII-4. THEOREME STATIQUE

“Chaque distribution arbitraire du moment, qui est en équilibre avec les charges externes et pour laquelle la condition d'élasticité n'est violée, donne une borne inférieure pour la charge limite”

$$\lambda_{stat} \leq \lambda_u$$

Pour calculer la charge ultime d'une structure, on est obligé de partir de deux des conditions énoncées précédemment, et de satisfaire la troisième par étalonnement. Le théorème statique consiste à trouver un diagramme des moments statiquement admissibles qui transforme la structure en un mécanisme. Pour cela, on procédera comme suit:

- Rendre la structure isostatique.
- Tracer le diagramme des moments de la structure fondamentale isostatique chargée par les charges effectives.
- Tracer le diagramme des moments pour chaque grandeur hyperstatique (dont la valeur est encore inconnue).

Combiner ces diagrammes des moments de telle façon à atteindre mais à ne pas dépasser, la valeur le plus souvent possible.

Soit déduire la valeur de la charge P_u

EXEMPLE

Soit la structure de la figure ci-dessous

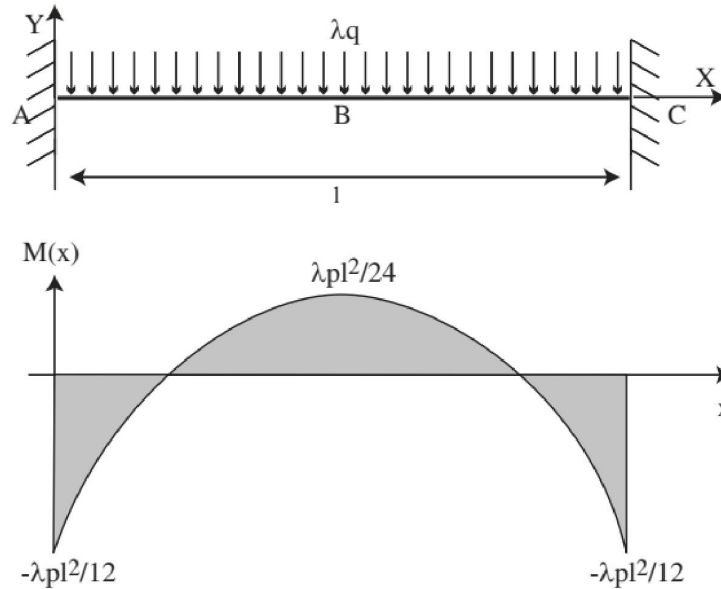


Figure VIII-5. Poutre hyperstatique

- On calcule le moment M dans la structure et on trace le diagramme associé.
- On suppose que $\pm M_p$ est atteint en un point de la structure (point de moment maximum) pour $\lambda = \lambda_1$.

On a donc $\frac{\lambda_1 (ql^2)}{12} = M_p$, soit $\lambda_1 = \frac{12M_p}{ql^2}$.

- On place deux rotules en A et C (voir Figure VIII-6) qui reprennent alors un moment égal à M_p et on vérifie que $|M_p| < |M_p|$ pour toute la structure.

Ici, $M_B = \frac{\lambda (ql^2)}{8} - M_p$

avec : $\lambda > \lambda_1 \implies M_B = \frac{\lambda (ql^2)}{8} > \frac{\lambda_1 (ql^2)}{8} = \frac{3M_p}{2} > M_p$

on a donc bien $M_B > 0$ et $|M_B| \leq M_p$

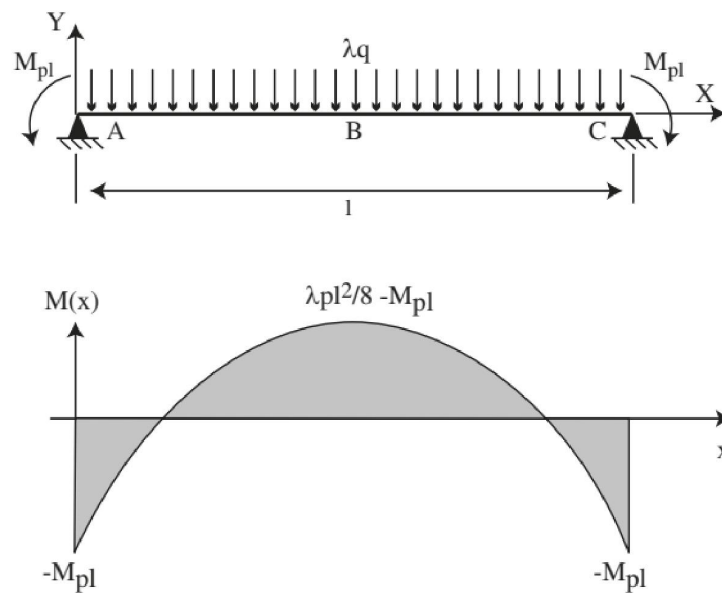


Figure VIII-6. Poutre hyperstatique avec deux rotules plastiques

On continue jusqu'à la ruine de la structure qui correspond à la formation de (n) rotules où $n = H + 1$.

Ici, λ croît jusqu'à avoir $M_B = M_p$. Ce qui donne $\frac{\lambda_{stat} (ql^2)}{8} - M_p = M_p$ soit $\lambda_{stat} = \frac{16M_p}{ql^2}$.

On obtient alors le mécanisme de la Figure VIII-6.

VIII-5. THEOREME CINEMATIQUE

La méthode cinématique consiste à envisager successivement tous les mécanismes de ruine possible. D'après le théorème cinématique, la véritable charge limite est la plus petite des charges trouvées. Nous pouvons appliquer le principe des travaux virtuels à un mécanisme qui se de forme sous charge constante.

Pour l'ensemble de la structure, l'équation s'écrit:
$$\sum_{i=1}^n \lambda P_i \delta_i + \int P \delta dx = \sum_{j=1}^m M_{pi} |\theta_i|$$

Cette équation est fondée sur les hypothèses suivantes:

- Les rotules sont ponctuelles "de longueur négligeable".
- Une fois le mécanisme formé seules les rotules plastiques fournissent un travail intérieur.
- Le travail fourni par l'effort normal est l'effort tranchant est négligé.
- Les déplacements virtuels et angles de rotation des rotules sont infiniment faibles.
- A priori le mécanisme de ruine n'est pas connu. A un tel mécanisme, on peut associer un multiplicateur plastique λ_i .
- Parmi tous les mécanismes possibles, un seul est le mécanisme réel de ruine, auquel correspond λ^{lim}
- Tout multiplicateur cinématique est supérieur ou égal au multiplicateur limite : $\lambda \geq \lambda^l$

EXEMPLE

Soit la structure de la figure ci-dessous.

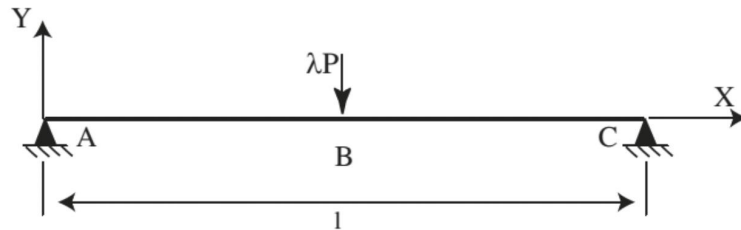


Figure VIII-7. Poutre simplement supportée

On imagine un mécanisme de ruine, par exemple celui de la figure ci-dessous.

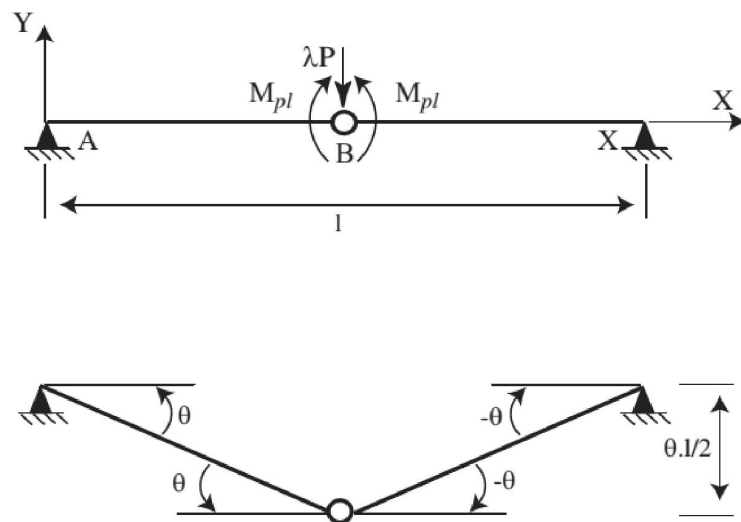


Figure VIII-8. Poutre simplement supportée avec rotule plastique

Pour chacun des mécanismes on applique le PTV. Dans notre exemple, cela donne:

$$-2M_{pl}\theta + \lambda P\theta \frac{l}{2} = 0 \text{ soit: } \lambda = \frac{4M_{pl}}{Pl}.$$

On aurait pu placer la rotule en une section quelconque $\rightarrow \lambda_i$. Le théorème cinématique nous dit alors que $\lambda_{\min} \leq \min(\lambda_i)$.

VIII-6. PORTIQUE PLAN ET DIAGRAMME D'INTERACTION

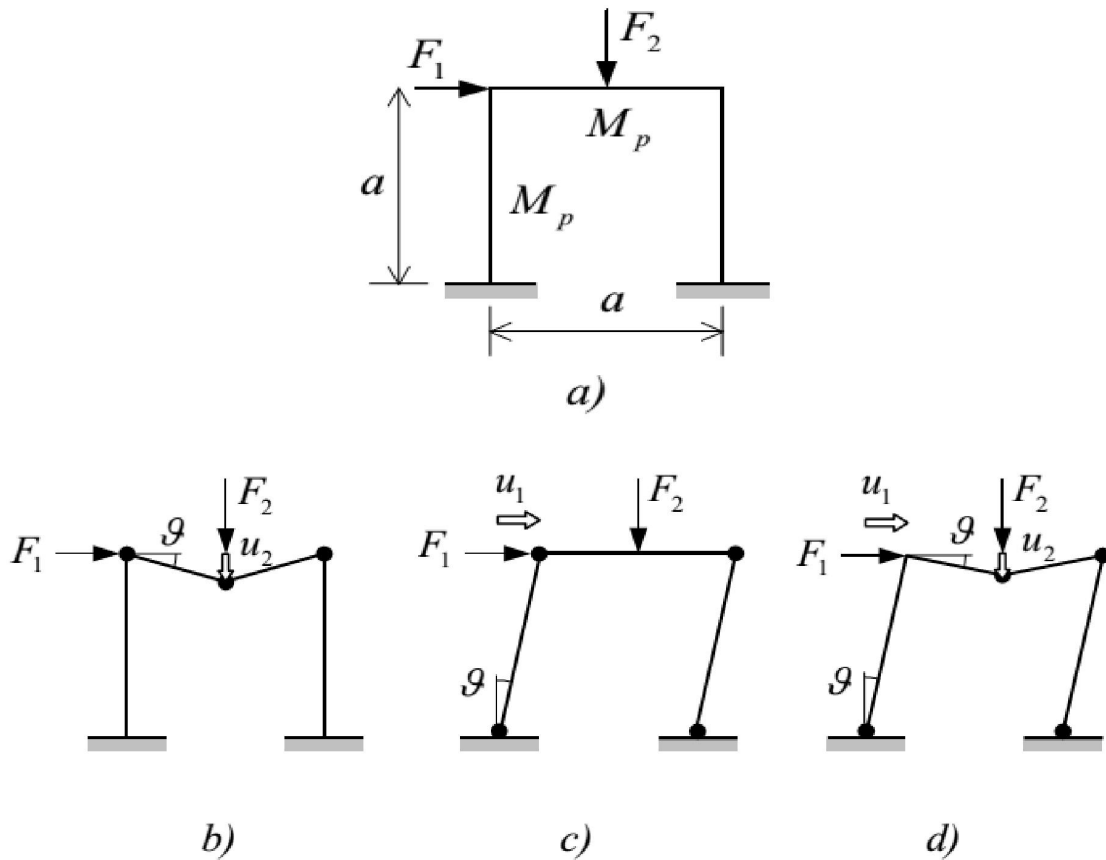


Figure VIII-9. Les mécanismes de ruine possibles d'un portique plan

Mécanisme de poutre: $F_2 \times u_2 = 4M_p \theta$ avec: $u_2 = \theta \times a/2$ $\rightarrow F_2 = 8M_p / a.$

Mécanisme de panneau: $F_1 \times u_1 = 4M_p \theta$ avec: $u_1 = \theta \times a$ $\rightarrow F_1 = 4M_p / a.$

Mécanisme combiné: $F_1 \times u_1 + F_2 \times u_2 = 6M_p \theta.$ $\rightarrow F_1 \times a + F_2 \times a/2 = 6M_p \theta.$

Puisque nous ne connaissons pas les valeurs relatives de F_1 et F_2 , nous ne pouvons pas déterminer le mode d'effondrement correct. Cependant, nous pouvons identifier ces modes d'effondrement si nous traçons les trois équations de charges limites (ou de facteurs de charge) calculées ci-dessus sur un diagramme d'interaction.

Notez que seules les valeurs positives de F_1 et F_2 sont considérées. Les trois mécanismes trouvés peuvent être représentés dans un diagramme F_1 - F_2 (Figure VIII-6). Un contour est créé à l'intérieur duquel sont situées les combinaisons admissibles de F_1 et F_2 . Les combinaisons de charges situées à l'extérieur du contour sont impossibles.

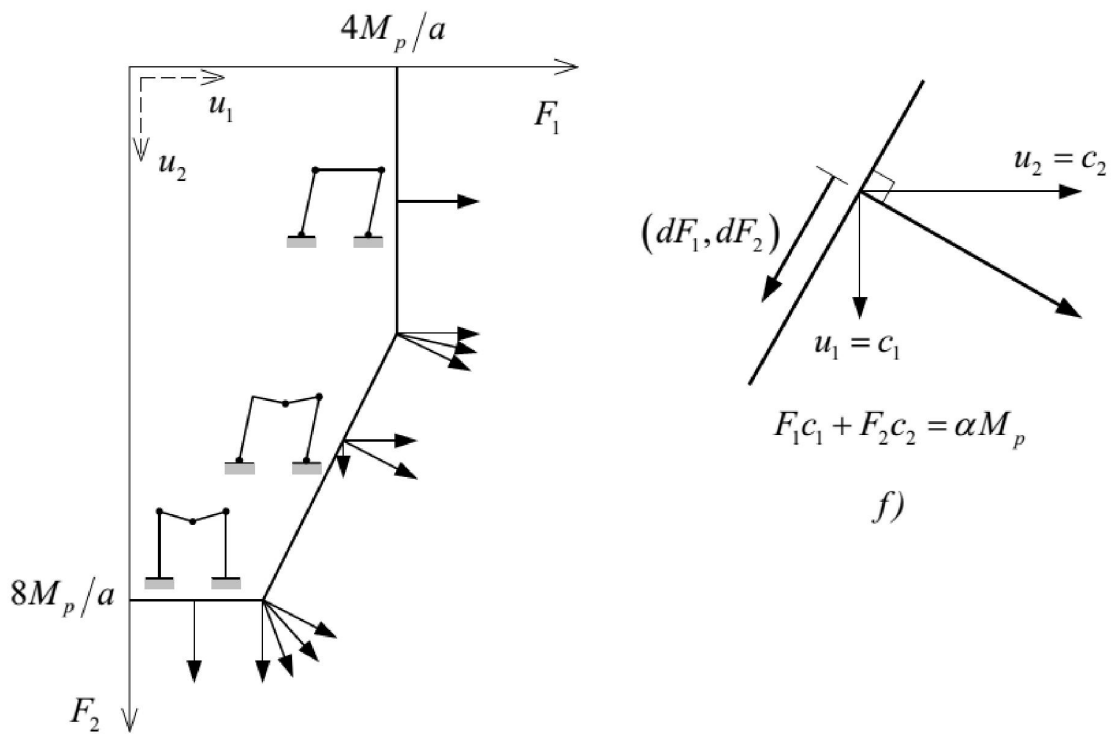


Figure VIII-10. Diagramme d'interaction d'un portique plan

Le contour de charge est constitué de trois branches: la branches horizontale générée par le mécanisme de la poutre, la verticale par le mécanisme de panneau et l'inclinée par le mécanisme combiné. Ainsi, des rapports entre F_1 et F_2 peuvent être identifiés pour lesquels l'un des mécanismes est décisif. La condition de ruine est donc la ligne ABCD et toute condition de charge dans la zone OABCD est donc à coté de sécurité.

On peut observer que le contour de charge (d'écoulement) est convexe et que le déplacement "plastique" est toujours perpendiculaire au contour (la loi de normalité est satisfaite):

- * Pour le mécanisme de poutre, le déplacement $(u_1, u_2) = (0, \theta \times a/2)$ est perpendiculaire à l'axe horizontal.

- * Pour le mécanisme de balancement, le déplacement $(u_1, u_2) = (\theta \times a, 0)$ est perpendiculaire à l'axe vertical.

- * Pour le mécanisme combiné, le déplacement $(u_1, u_2) = (\theta \times a, \theta \times a/2)$ est perpendiculaire à $F_1 \times a + F_2 \times a/2 = 6Mp$.

VIII-6-1. Le chemin de chargement n'a aucune influence sur la charge de ruine et le type de mécanisme

Le contour d'écoulement de la *Figure VIII-7* montre que la charge de ruine semble être indépendante du chemin de charge suivi. En d'autres mots, Il est possible de suivre plusieurs chemins de charge par différentes combinaisons de F_1 et F_2 (toutes les combinaisons de F_1 et F_2 sont situées à l'intérieur du contour d'écoulement). Par conséquent, la ruine se produit à la même charge pour les différents chemins de charge.

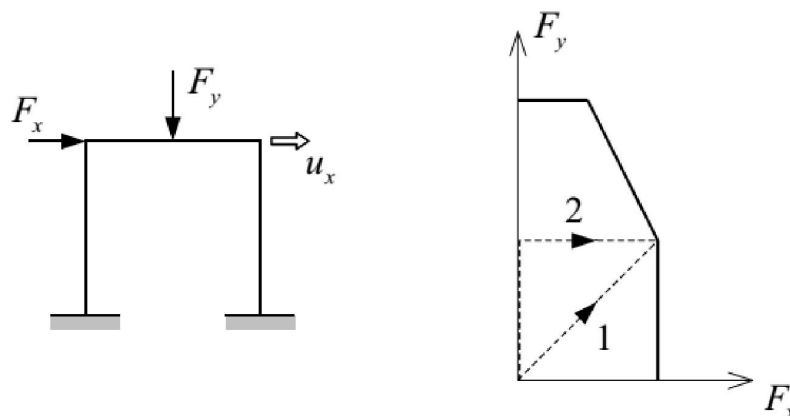


Figure VIII-11. Contour d'écoulement d'un portique plan «charge concentrée»

VIII-6-2. Charge uniformément répartie

En raison de la charge répartie, la position de la rotule plastique n'est pas fixe et le contour de la déformation est incurvé. la composante de déplacement \bar{u}_y , qui est importante pour la normalité, est le déplacement moyen de tous les points de la poutre supérieur.

pour un rapport donné de V à H , nous serons en mesure de déterminer le mécanisme d'effondrement critique.

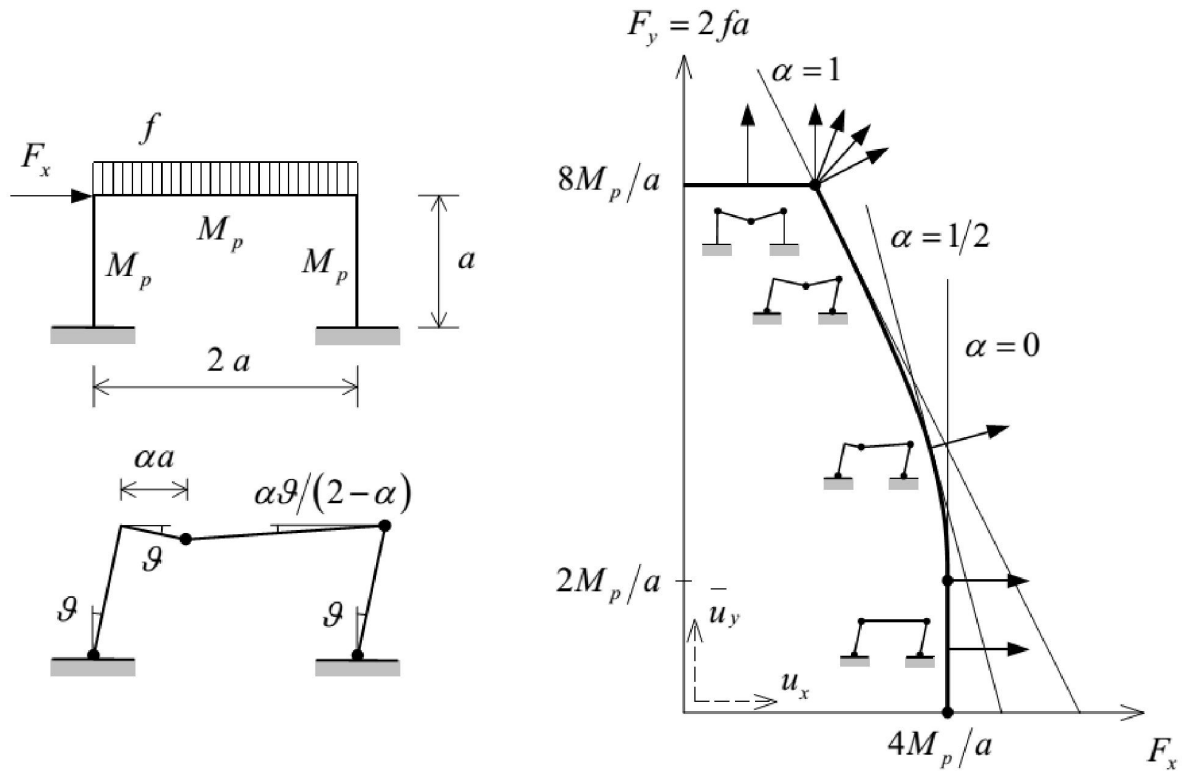


Figure VIII-12. Contour d'écoulement d'un portique plan «Charge uniformément répartie»

Les points intéressants du contour de chargement sont les points de coin, où deux lignes de mécanisme se croisent (les deux mécanismes donnent le même résultat). Dans un tel point d'intersection, des déplacements sont possibles selon l'un ou l'autre mécanisme, et aussi pour une combinaison arbitraire des deux mécanismes à coefficients positifs. C'est pourquoi tout un éventail de déplacements est dessiné dans les coins de la Figure VIII-8.

$u_1 = \theta \times a$ et $u_2 = \theta \times a/2$ The energy dissipation equation for a structural mechanism reads:

$$F_1 \times c_1 + F_2 \times c_2 = \alpha \times M_p.$$

$$F_1 \cdot c_1 + F_2 \cdot c_2 = \alpha \cdot M_p$$

$$F_2 \cdot c_2 = \alpha \cdot M_p - F_1 \cdot c_1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial F_1} = -\frac{c_1}{c_2}$$

La relation précédente peut être écrite comme suit:

$$\psi = F_1 \times u_1 + F_2 \times u_2 - \alpha \times M_p \times \theta = 0.$$

La quantité ψ est appelée le potentiel plastique. Le vecteur gradient $\nabla \psi$ est donné par:

$$\nabla \psi = \begin{Bmatrix} \partial \psi / \partial F_1 \\ \partial \psi / \partial F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

The plastic potential is not uniquely defined, since all terms can be multiplied with a certain factor. This means that only the direction of the displacement vector can be obtained. In order to find the magnitude of the displacements an undetermined (or through other circumstances a determined) positive scale factor is introduced, i.e.:

Le potentiel plastique n'est pas défini de manière unique, car tous les termes peuvent être multipliés avec un certain facteur. Cela signifie que seule la direction du vecteur de déplacement peut être obtenue. Afin de trouver l'amplitude des déplacements, un facteur d'échelle positif indéterminé (ou par d'autres circonstances déterminées) est introduit, à savoir:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \partial \psi / \partial F_1 \\ \partial \psi / \partial F_2 \end{Bmatrix}$$

Liste des références:

- [1] Jean-Jacques Marigo., Plasticité et Rupture. Engineering school. MEC551 Plasticité et Rupture, Ecole Polytechnique, 2012, pp-245.
- [2] J. Chakrabarty., Theory of plasticity. Third edition published by Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006, pp-882
- [3] Andreas Öchsner., Elasto-Plasticity of Frame Structure Elements. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, Pp-596
- [4] CH. Massonnet, W. Olszak, A. Phillips., Plasticity in Structural Engineering Fundamentals and Applications. Springer-Verlag Wien New York in 1979
- [5] E.J. Hearn (2000) MECHANICS OF MATERIALS I : An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, third edition, Butterworth-Heinemann
Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP
- [6] T.H.G. Megson (2005) Structural and Stress Analysis. Elsevier Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 30 Corporate Drive, Burlington, MA 01803
- [7] Heyman J (1998) Structural analysis: a historical approach. Cambridge University Press, Cambridge
- [8] Wang CM, Reddy JN, Lee KH (2000) Shear deformable beams and plates: relationships with classical solution. Elsevier, Oxford
- [9] Weaver W Jr, Gere JM (1980) Matrix analysis of framed structures. Van Nostrand Reinhold Company, New York
- [10] CHEVALIER, L. Mécanique des Systèmes et des Milieux Déformables. Ellipses-Edition Marketing S.A. 1996.
- [10] FREY, F. STUDER, M.A. Analyse des structures et milieux continus. Vol 5, Presses polytechniques et universitaires Romandes. 2000.