République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiqueset Informatique
Filière : Informatique
Option : Systèmes d'information

Thème

Théorèmes de point fixe dans un espace partiellement ordonné sous des conditions contractives généralisées

Présenté Par :
Rhamnia Sabrina
Rezig Amira

Devant le jury :

Mr. Berrah Khaled	MAA	UnivérsitéLarbi Tébessa	Président
Mr.Bazine Safia	MCB	UnivérsitéLarbi Tébessa	Examinateur
Mr. Fayçal MERGHADI	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2019.

<u>Les mots clés :</u> Espace métrique ordonné, contraction non linéaire, point fixe, Espace Fichet, équations intégrales ….

Résumé

Notre thèse se compose de trois chapitres, elle s'est concentrée sur l'étude d'existence et d'unicité de point fixe pour des applications ayant certaines restrictions.

Dans le premier chapitre, on explore les propriétés de point fixe. Ce chapitre met en œuvre la classification des équations intégrales et le principe de l'application contractante de Banach.

Le deuxième chapitre contient quelques résultats d'existence de point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné.

L'essentiel de notre étude se situe dans le dernier chapitre. On utilise quelques résultats récents de point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné et dans un espace de Fichet pour établir et prouver l'existence et l'unicité de solution pour certains types d'équations intégrales non linéaires.

<u>Keywords:</u> *Ordered metric space, fixed point, contractives mappings, L-space, integrals equations, space of Banach …*

ABSTRCT

Our thesis consists of three chapters, it focused on the existence and uniqueness study of fixed point for mappings with certain restrictions.

In the first chapter, we explore the properties of fixed point. This chapter implements the classification of integral equations and the principle of the Banach contraction mappings.

The second chapter contains some results of existence of fixed-point in a partially ordered metric space.

The essence of our study lies in the last chapter. Some recent fixed-point results are used in a partially ordered metric space to establish and prove the existence and uniqueness of solution for certain types of nonlinear integral equations.

الكلمات المفتاحية:

الفضاء المتري المرتب، النقطة الثابتة، التطبيقات المقلصة، الفضاء-$\mathcal{L}$، المعادلات التكاملية، فضاء *Banach*...

ملخص

تتألف مذكرتنا من ثلاثة فصول، وتتركز على دراسة وجود ووحدانية النقطة الثابتة بالنسبة إلى تطبيقات لديها شروط وقيود معينة.

في الفصل الأول: استكشفنا الخاصيات الأساسية للنقطة الثابتة، هذا المحور إستعمل فيه تصنيف المعادلات التكاملية وكذلك مبدأ التطبيق المتقلص ل*Banach*

الفصل الثاني: يحوي بعض النتائج لوجودية النقطة الثابتة في فضاء متري مرتب جزئيا .
الأساس في دراستنا يتموضع في الفصل الأخير حيث استعملنا بعض النتائج الحديثة في النقطة الثابتة في فضاء متري جزئيا لبناء وبرهنة وجودية ووحدانية الحل لبعض الأنواع من المعادلات التكاملية غير الخطية .

شكر وعرفان

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم"لا يشكر الله من لا يشكر الناس"وعملا بهذا القول لا يسعنا الا ان أتقدم بأجمل عبارات الشكر و العرفان والتقدير والإمتنان لمن كان لي خير معين إلى الذي مهما قلت فيه لن اوفيه حقه الى الأستاذ"مرغادي فيصل"أدامه الله لنا أستاذا وعمادا لهذه الجامعة

وإلى كافة الأساتذة

إهداء

الى من علمني حسن الخلق يرجع الى اعتدال قوة العقل وكمال الحكمة

الى من علمني ان الحياة اخذ قبل عطاء

الى مثلي الاعلى "ابي"

الى من علمتني احتضان الاشياء وغمرها

الى من جنتي تحت قدميها

الى نور حياتي "امي"

الى اخوتي الذين شاركوني في السراء والضراء "اسامة - ايمن "

الى نجمة سمائي "ديانا"

الى اعز صديقاتي وسندي في الحياة "صبرينة رحامنية- جميلة مساعدية- بوالديار خديجة"

الى من ينطق بعرفانهم كل ذرة في وجداني

الى من يفرحوا لفرحي ويحزنوا لحزني"اعمامي وعماتي واخوالي وخلاتي"

الى من يسعهم قلبي ولم يذكرهم لساني

الى كل هؤلاء اهدي احلى ثمرة جهدي

اسال الله ان يجازي الجميع كل الخير

اميرة

إهداء

الى من علمني حسن الخلق يرجع الى اعتدال قوة العقل وكمال الحكمة

الى من علمني ان الحياة اخذ قبل عطاء

الى مثلي الاعلى "ابي"

الى من علمتني احتضان الاشياء وغمرها

الى من جنتي تحت قدميها

الى نور حياتي "امي"

" الى اخوتي الذين شاركوني في السراء والضر"محمد-سيف-معاذ"

الى نجمات سمائي " سناء-لبنى-كوثر-امنية "

"الى اعز صديقاتي وسندي في الحياة "اميرة-مريم-شهلة-نبيلة-سميرة-خولة"

الى من ينطق بعرفانهم كل ذرة في وجداني

الى من يفرحوا لفرحي ويحزنوا لحزني"اعمامي وعماتي واخوالي وخلاتي"

الى من يسعهم قلبي ولم يذكرهم لساني

الى كل هؤلاء اهدي احلى ثمرة جهدي

اسال الله ان يجازي الجميع كل الخير

صبرينة

Table des matières

Introduction générale……………………………..……………………...10

Liste des figures

…………………………..

Liste des tableaux

………………………………

Table des matières

1 Notions, définitions et préliminaires **5**

1.1 introdiction 5

1.2 Notions sur les opérateurs 7

1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés 7

1.2.2 L'opérateur intégral linéaires 9

1.2.3 Opérateurs contractifs 9

1.3 Généralités sur les équations intégrales 9

1.4 Classification des équations intégrales 10

1.5 Equations intégrales non linéaires 12

1.6 Equations intégrales mixtes 13

1.7 Contractions,conditions contractives et pionts fixes 13

1.7.1 Contractions généralisées. 13

1.7.2 Théorème de point fixe de Banach 15

1.8 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra . 19

1.9 Existence et unicité de la solution continue de l'équation de Hammerstein-Volterra . 20

1.9.1 Théorème d'existence 20

1.9.2 L'unicité de la solution 22

2 Théorèmes de point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné **24**

2.1 Introduction 24

2.2 **Ensembles ordonnés** 24

2.2.1 Quelques résultats de l'existance de point fixe dans un espace métrique partiallement ordonné 26

3 Théorèmes de points fixes pour les contractions génèralisées en ordre espaces métriques **34**

3.1 Introduction 34

3.2 **Notation et concepts de base** 36

3.3 **Résultats du point fixe** 37

3.4 **Applications** 47

Introduction Générale

Dans notre thème, soit le mémoire, on a travaillé en parallèle de trois chapitres qui aboutissant à un seul objectif (**l'existence et l'unicité de point fixe**), ce dernier beaucoup utilisé afin de résoudre les problèmes d'exitence pour certaines équations et des systhèmes mathématiques de plusieurs formes. Mais la signification de notre étude est de donner quelques notions claires et approfondies pour les théorèmes de point fixe. Ainsi pour donner plus de précision, on va poser les principaux et fondamentaux théorèmes du point fixe qui montre à l'aide des exemples simples leurs utilité. Cependant, on peux s'oposer des questions dont la première :

Qu'est ce qu'un point fixe ?

Un point fixe est un point qui reste immobile par une application ou une transformation, en d'autre terme, Soit X un ensemble et $T : X \to X$ une application. Une solution de l'équation $Tx = x$ est appelée un point fixe de T, on le rencontre partout et sur tout les chemains : que vous étudiez les cours de la bourse, les équations de la physique mathématiques ou vérifiez un compteur électrique vous rencontrer des points fixes. Les anciens disaient

Qu'en ne peut pas passer, sans sauter, d'une berge d'une rivière à l'autre sans se mouiller les pieds

Il s'agit la peut être de la première preuve d'un théorème de topologie. En dimension un, Considérons la boule unité dans l'ensemble $\Re$ des nombre réels

$$B^1 = \{x \in \Re : |x| \leq 1\} = \{x \in \Re : -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

et décident de la restructurer d'une manière sociale et humaine. En d'autre terme, nous voulons assigner à chaque élément $x \in B^1$ une position $T(x)$ de sorte que :
-Il n'est pas mis dehors, c'est à dire $T(x) \in B^1$ (social)
- Deux positions "voisines" avant la restructuration restent "voisine" après (humain).
Le modèle mathématique de cette restructuraion est donc une application continue T de B^1 en elle-même. Ce dernier fait se traduit par la condition $-1 \leq T(x) \leq 1$ quel que soit $x \in B^1$, qui entraine les inégalités

$$-1 - T(-1) \leq 0, 1 - T(1) \geq 0$$

Un résultat fondamental sur les fonctions continues affirme que si une fonction continue sur un intervalle prend des valeurs de signes posés aux extrémités de cet intervalle, alors elle s'annule nécessairement dans cet intervalle. La première démonstration satisfaisante de ce théorème est due à Bolzano (1781-1848), dans un article de 1817.

La fonction continue f définie par $f(x) = x - T(x)$, négative en -1 et positive en 1, doit s'annuler en au moin un point $x^* = f(x^*)$ est appelé un point fixe de T. Géométriquement, un point fixe est une intersection du graphe $\{(x, T(x)) \in \Re^2 : x \in B^1\}$ avec celui de l'indenté $\{(x, x) : x \in B^1\}$. Enfin, notons que notre terminologie : "**Le théorème du point fixe** " est totalement abusive ! Il existe plusieurs centaines de théorèmes du point fixe, et des livres entiers ne font qu'en citer et en citer des applications. L'un des plus beaux, des plus surprenants, et le résultat suivant, dit **théorème du point fixe de Brouwer** :

Toute fonction continue d'un convexe compact de $\Re^n$ dans lui-même admet un point fixe.

Par exemple, si vous tournez votre café, à la fin il y a au moins une particule qui sera toujours à la même place !. Par conséquent, notre thème s'intérsse à l'étude de quelques théorèmes de point fixe.

De toute évidence le premier chapitre, comme dans toutes les mémoires, contient les éléments indispensables dont on aura besoin dans les chapitre qui se suit.

Concernant le dexième chapitre, nous donnons des définitions de base de l'espace ordonné et quelques théorèmes relatif à l'existence de point fixe pour un auto-application dans un espace métrique partiellement ordoné sous des condition contractives non linéaires généralisées.

Pour le dernier chapitre, nous avons procédé à des conditions contractives non linéaires, et en démontre quelques théorèmes d'existences et d'unicité de point fixe, pour une auto-application dans un espace **partiellement ordonné** et dans un espace de **Fréchet** sous certaines conditions bien précises. Quelques application aux équations intégrales sont également donnés dans ce chapitre pour confirmer l'utilité de ces derniers résultats.

Chapitre 1

Notions, définitions et préliminaires

1.1 introdiction

Appliquer les mathématiques signifie, dans plusieurs cas, résoudre des équations. Si le cas est ainsi, alors la plus importante chose à connaitre est de savoir si une équations particulière admet une solution où non. La présence de solution est traditionnellement garantie par ce que l'on appelle les théorèmes d'existence. Ci-dessous on va expliquer comment un théorème pouvant assurer une solution d'une équation intégrale donnée peut être formulée en terme de principe de point fixe. Le but de ce chapitre est d'introduire le principes de théorème de point fixe de Banach sur les équations intégrales et quelques informations principale qui dont on aura besoin pour les autres chapitres.

Définition 1.1 *Un espace métrique est une paire* (X, d) *où* X *est un ensemble quelconque et* $d : X \times X \to [0, +\infty[$ *est une application satisfaisante les conditions suivantes :*

i) $d(x, y) = d(y, x)$,
ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
iii) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
La fonction d est appelée une métrique. La propriété (ii) est appelée l'inégalité triangulaire. Le plus familier des exemples est sans doute l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle :

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Uue autre métrique sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

Définition 1.2 *La boule ouverte de centre x et de rayan ε dans (X,d) est l'ensemble défini par*

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X / d(x,y) < \varepsilon\}$$

Un sous ensemble $U \subset X$ est dit ouvert ssi pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$

Notons ici que l'ensemble $\emptyset$ et l'espace X tout entier sont ouverts. Un sous ensemble d'un espace métrique est dit fermé si son complémentaire est ouvert. Un exemple d'un ensemble fermé est la boule fermé de centre x et de rayon ε donnée par :

$$B'(x,\varepsilon) = \{y \in X / d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

Un sous ensemble $U \subset X$ est dit voisinage du point x s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $B(x,\varepsilon) \subset X$

Définition 1.3 *Une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ dans X, est dite convergente vers $x \in X$,et on écrit souvent $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ ou $x_n \to x$,si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq N \text{ on ait } d(x_n,x) < \varepsilon$$

Le point x est appelé la limite de la suite $\{x_n\}$.Ainsi, on peut dire qu'un sous ensemble est fermé si toute suite convergente de cet ensemble admet une limite appartenant à cet ensemble.

Définition 1.4 *Une suite $\{x_n\}$ dans un espace métrique (X,d) est dit de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } p,q \geq N \text{ on ait } d(x_p,x_q) \leq \varepsilon$$

i.e, $\lim\limits_{p,q\to\infty} d(x_p,x_q) = 0$. ($\lim x_p = \lim x_q$)

Définition 1.5 *Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de cet espace converge vers limite dans ce même espace.*

$\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle est complet.

Définition 1.6 *Soient (X,d) et (X,p) deux espaces métriques, et $f : (X,d) \to (X,p)$. une fonction f est dite séquentiellement continue si*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(f(x_n),f(x)) = 0$$

Définition 1.7 *Un espace métrique (X,d) est dit compact ssi l'une des propriétés suivantes est satisfaite*

(i) De toute suite de points de X on peut extraire une sous suite convergente vers un point dans X

(ii)Tout sous ensemble infini de X admet un point d'accumulation dans X

Définition 1.8 *Un sous ensemble U d'un espace vectoriel X (sur $\mathbb{R}$) est dit convexe si*

$$\forall x, y \in U, \text{ et } \forall \lambda \in [0,1] \text{ on a } \lambda x + (1-\lambda) y \in U$$

Définition 1.9 *Soit X un espace vectoriel. Une fonction $\|.\| : X \to [0, \infty)$ est dite une norme si et seulement si,pour tout $x, y \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on ait*

(i)$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,
(ii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(iii)$\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
Le couple $(X, \|.\|)$ est alors appelé un espace vectoriel normé.(ii) est encore appelée l'inégalité triangulaire. Un espace vectoriel normé définie un espace métrique. En effet, $d(x, y) = \|x - y\|$ verifie les conditions d'une métrique.

Définition 1.10 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associée.*

Définition 1.11 *Soit $C([a, b], R)$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs rèelles, pour tout $f \in C([a, b], R)$, on pose $\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Les applications $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $C([a, b], R)$ et les espaces $(C([a, b], R), \|.\|_1)$ ou $(C([a, b], R), \|.\|_\infty)$ sont des espaces de Banach.*

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.12 *Soient X et Y deux espace normés, un opérateur A définit sur X dans Y est dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes : pour tout u, v de X et α, β de $\mathbb{R}$*

i) $Au \in Y$
ii)$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$

Définition 1.13 *Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dite borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X , \forall u \in X$$

Proposition 1.1 *Le plus petit nombre C vérifiant cette inégalité s'applle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$,on a*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Preuve. Pour la preuve voir [29] ∎

Proposition 1.2 *Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes*

i)L'opérateur T est continu sur X,
ii)L'opérateur T est continu au point 0_X.
iii)L'opérateur T est borné.

Proposition 1.3 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans X .Alors, l'opérateur $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A^n \text{ de plus } \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Théorème 1.1 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans X .Alors, l'opérateur $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A^n \text{ de plus } \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Preuve. De la relation $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue $\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \|A^n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}$ dans l'espace de Banach $L(X)$ (l'espace de tous les opérateurs linéaire continus sur E dans lui même), par conséquent, la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné $S = \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} A^n$ avec la relation $\|S\| \leq (1-\|A\|)^{-1}$ de plus S est l'inverse de $(I-A)$. En effet, utilisons $(A^0 = I$ et $A^K = AA^{K-1})$, on peut voir que :

$$\begin{aligned} S(I-A) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n} A^k(I-A) = \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I, \text{ aussi} \\ (I-A)S &= (I-A) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n} A^k = \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I \end{aligned}$$

puisque $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$, lorsque $n \to \infty$. ∎

Définition 1.14 *Soit X un espace de Banach , L'opérateur $T : X \to X$ est dit totalement borné si $T(S)$ est un ensemble totalement borné dans X pour tout S un sous-ensemble de X*

1.2.2 L'opérateur intégral linéaires

Définition 1.15 *Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante*

$$(A\varphi)x = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

La fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A.

Remarque 1.1 *Si K est une fonction continue de $[a,b] \times [a,b]$, l'opérateur A est appelé opérateur intégral à noyau continu K.*

1.2.3 Opérateurs contractifs

Définition 1.16 *Soient H est un espace de Hilbert et T un opérateur borné, l'opérateur T est dit opérateur Lipschitzien s'il existe un nombre réel $k \geq 0$, tel que pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in H$, on a*

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq k\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

T est un opérateur contractant si, dans l'ex inégalité on a $k < 1$, elle nonexpansif si $k = 1$. Enfin, T est dit contractif si, pour tout $x, y \in X$ et $x \neq y$, on a

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| < \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Notons que (contraction⇒contractive⇒nonexpansive⇒Lipschitziènne), et que tout ces opérateurs sont continus (à démontrer).

1.3 Généralités sur les équations intégrales

Définition 1.17 *L'équation définie par : $T\varphi = f$ est dite une équation de première espèce. Si l'équation est définie par : $\varphi - T\varphi = f$ cette équation est dite une équation de deuxième espèce, où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue.*

Définition 1.18 *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue φ figure sous le singe d'intégrations $\int$. En générale l'équation par rapport à l'inconnue φ s'écit sous la forme*

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_E K(x,t,\varphi(t))dt; x \in E \tag{1.2}$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donné qui peut eître réel ou complexe, et K une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale. Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (1.2) *:*

i) Si on prend $K(x,t,\varphi(t)) = K(x,t)\varphi(t)$, l'équation (1.2) devient linéaire, est sinon devient équation intégrale non linéaire
ii) Le type le plus général d'une équation intégrale est $h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_E K(x,t,\varphi(t))dt$. La fonction h détermine le type de l'équation.
iii) Notons que l'équation peut être sous forme d'opérateur $T\varphi = \lambda\varphi + f$ où l'opérateur T s'écrit comme suit

$$T\varphi(x) = \int\limits_E K(x,t,\varphi(t))dt.$$

Lemme 1.1 [26] *Soit K une fonction de l'éspace $L^2(]a,b[\times]a,b[)$, alors l'opérateur T défini par $T\varphi(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt, x \in]a,b[$ est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.*

Lemme 1.2 *Soit $K \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$. L'opérateur intégral T de noyau K est compact de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.*

1.4 Classification des équations intégrales

Définition 1.19 ***(Equation intégrale de Fredholm)*** *On applle équation intégrale linéaire de Fredholm une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.3}$$

où $f(x), K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètere non nul, réel ou complexe. La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.3) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.
ii) Si $h(x) = k =$ constante $\neq 0$, l'équation (1.5) s'écrit

$$k\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.
iii) Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.3) est appellée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.
1-Si $f(x) = 0$, l'équation (1.3) est dite homogène.
2-Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.3) est dite non homogène.

Définition 1.20 ***(Equation intégrale de Volterra)*** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra, une équation de la forme :*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.4}$$

i) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, donc l'équation (1.4) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

ii) On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si $h(x) = k =$ constante $\neq 0$, donc l'équation (1.4) s'écrit

$$k\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

iii) Si $h(x) \neq 0$, la formule (1.4) est appellée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

1)Si $f(x) = 0$, l'équation (1.4) est dite homogène.
2)Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.4) est dite non homogène.
3)L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K
vérifie la condition $K(x,t) = 0$, pour $x < t$.

Définition 1.21 ***(Equation intégrale de Wiener-Hoph)*** *On appelle équation intégrale de Wiener-Hoph une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x-t)\varphi(t)dt \tag{1.5}$$

Définition 1.22 ***(Equation intégrale de Renwal)*** *Les équations intégrales de la forme*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x-t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

sont applées équations intégrales de Renwal.

Définition 1.23 ***(Equation intégrale d'Abel)*** *On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une éqation de la forme*

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x) \tag{1.7}$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

1.5 Equations intégrales non linéaires

Définition 1.24 ***(Equation intégrale de Fredholm)*** *L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme*

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = 0 \tag{1.8}$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de second espèce, si s'écrit sous la forme

$$k\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt$$

où $k =$ constante $\neq 0$,
et troisième espèce, de la forme

$$k(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt \tag{1.10}$$

Définition 1.25 ***(equation intégrale de Volterra)*** *L'équation intégrale non linéaire de Volterra prendre les même formes de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm mais sur l'intervalle $[a,x]$*

Définition 1.26 ***(Equation intégrale de Hammerstein)*** *On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de forme*

$$k(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{1.11}$$

Définition 1.27 ***(Equation intégrale de Hammerstein-Volterra)*** *On appelle équation intégrale de Hammerstein-Volterra une équation de la forme*

$$k(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)F(t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{1.12}$$

1.6 Equations intégrales mixtes

Définition 1.28 ***(Equation intégrale de Fredholm-Volterra)*** *On appelle équation intégrale de Fredholm-Volterra une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x,t)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y,t)dy+\lambda\int_0^t F(t,s)\varphi(x,s)ds=f(x,t),t\in[0,T],T<\infty \tag{1.13}$$

La fonction h détermine le type de l'équation intégrale.

Définition 1.29 ***(Equation intégrale de Volterra-Fredholm)*** *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x,t)+\lambda\int_0^t\int_a^b K(x,t)F(t,s)\varphi(y,s)dyds=f(x,t),t\in[0,T],T<\infty \tag{1.14}$$

Définition 1.30 ***(Equation intégrale non linéaire de Volterra-Hammerstein)****On appelle éqation intégrale de Volterra-Hammerstein une équation de la forme*

$$h(x)\varphi(x,t)=f(x,t)+\int_a^b K(x,y)\psi(y,\varphi(y,t))dy+\int_0^t F(t,s)\varphi(x,s)ds,t\in[0,T],T<\infty \tag{1.15}$$

1.7 Contractions,conditions contractives et pionts fixes

1.7.1 Contractions généralisées.

De nombreux auteurs ont défini les applications de type contractive sur un espace métrique complet X, qui sont des généralisations de la contraction de Banach, et qui ont la propriété que chaque une telle application a un point fixe unique. Maintenant, nous introduisons la multitude des définitions correspondantes au type contractive.

Définition 1.31 [7] *Soit (X,d) un espace métrique complet.Une application $T:X\rightarrow X$ est dite une contraction s'il existe une constante $0<K<1$ tel que pour tout $x,y\in X$*

$$d(Tx,Ty)<Kd(x,y) \tag{1.16}$$

Définition 1.32 [41] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction de Rakotch s'il existe une fonction monotone et décroissante* $\alpha :]0, +\infty[\to [0, 1[$ *tel que, pour tout* $x, y \in X, x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y)) \tag{1.17}$$

Définition 1.33 [25] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction de Kannan s'il existe un nombre* $a, 0 < a < \frac{1}{2}$, *tel que, pour tout* $x, y \in X, x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \tag{1.18}$$

Définition 1.34 [8] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction de Bianchini s'il existe un nombre* $h, 0 < h < 1$, *tel que, pour tout* $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq h \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\} \tag{1.19}$$

Définition 1.35 [44] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction de Reich s'il existe des nombres positifs* a, b, c, *satisfont* $a + b + c < 1$, *tel que, pour tout* $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, y) \tag{1.20}$$

Définition 1.36 [48] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction de Sehgal si pour tout* $x, y \in X, x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y)\} \tag{1.21}$$

Définition 1.37 [52] *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. On dit que* T *est une contraction de Zamfirescu si pour tout* $x, y \in X, x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, Ty), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\} \tag{1.22}$$

Définition 1.38 [13] *Une auto-application* $T : X \to X$ *d'un espace métrique* X *est dite quasicontraction s'il existe un nombre* $k, 0 \leq k < 1$, *tel que pour tout* $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\} \tag{1.23}$$

ou

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{1.24}$$

Définition 1.39 [10]*Soient $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction telle que $\phi(t) < t$ pour $t > 0$ et $T : X \to X$ une application. On dit que T est ϕ-contractive (ou que T est une contraction non linéaire) si*

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)) \text{ pour tout } x, y \in X \tag{1.25}$$

Si on pose $\phi(t) = kt$, pour $0 \leq k < 1$ dans la contraction de Boyd-Wong (1.25) on trouve la contraction de Banach.

1.7.2 Théorème de point fixe de Banach

le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver qui s'applique au espaces complet et possède de nombreuse applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existences pour les équations différentielles, équations intégrales et convergence de certaines méthodes numeriques comme celle de Newton pour la résolution d'équations non linéaire. Nous avons préféré l'énnoncé du théorème de Banach formulé par Zeidler [53].

(Stefan Banach). Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f : X \to X$, une contraction. Alors

(a) f admet un unique point fixe dans X, i.e $\exists! x^* \in X$, tel que $f(x^*) = x^*$.

(b) Pour tout $x_0 \in X$, la suite de picard $\{x_n\}_{n\geq 1}$définie par $x_n = f^n x_0$converge vers x^*.

(c) (à priori) $d(f^n x_0, x^*) \leq k^n (1-k)^{-1} d(f x_0, x_0), n \geq 1$

(d) (à postériori) $d(f^{n+1} x_0, x^*) \leq k(1-k)^{-1} d(f^{n+1} x_0, f^n x_0), n \geq 1$.

(e) (vitèsse de convergence) $d(f^{n+1} x_0, x^*) \leq d(f^n x_0, x^*)$.

L'estimation à priori (c) nous inculque l'idée : qu'en partant d'une donnée initiale x_0 en laquelle $x_1 = f(x_0)$, on peut déterminer le nombre maximum d'étapes d'itérations demandés pour aboutir à un niveau de précision voulu. L'éstimation à postériori (d) permet l'utilisation des valeurs calcuées x_n et x_{n+1} pour déterminer la précision de l'approximation de x_{n+1}. La première extension de ce théorème remonte à Cacciopoli qui affirme que la suite de Picard d'une application f dans un espace métrique complet converge si, pour tout $n \geq 1$, il existe une constante c_n telle que

$$d(f^n x, f^n y) \leq c_n d(x, y) \tag{1.26}$$

pour tout $x, y \in X$, où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$

Exemple 1.1 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra donnée par*

$$u(x) = f(x) + \int_0^x F(x, y) u(y) dy, \tag{1.27}$$

avec f et le noyau F sont des fonctions continues sur $[0,a]$ et $[0,a]\times[0,a]$ respectivement.Par la méthode d'approximation successives on peut montrer que l'équation (1.1) admet une solution unique et ce pour une quelconque fonction F. D'autre part, si on considère l'application

$$T : C([0,a]) \to C([0,a])$$

définie par

$$Tu\,(x) = f(x) + \int_0^x F(x,y)u(y)dy \tag{1.28}$$

alors on s'aperçoit que pour tout $u, v \in C([0,a])$

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq aK \|u - v\|_\infty$$

où $K = \max\limits_{0\leq x,y\leq a} |F(x,y)|$ et où $\|u\|_\infty = \max\limits_{0\leq t\leq a} |u(t)|$ est la norme choisie sur $C([0,a])$.Il est clair que si on choisit notre intervalle de sorte que $aK < 1$ alors l'équation (1.1) admet une solution unique (avec une convergence de la suite *itérative de Picard)* Notre problème admet donc une solution unique à condition de réduire la taille de l'intervalle $[0,a]$ ou bien réduire la magnitude du noyau F. Or ceci est, en réalité, nuisible puisque nous souhaitons que de tels arguments peuvent etre appliqués pour étendre la solution. Par ailleurs, A. Bieleck [9] découvre une méthode pour rémedier le problème. Il introduit une nouvelle norme $\|.\|_\lambda$ sur $C([0,a])$ donnée par

$$\|u\|_\lambda = \max_{0\leq t\leq a}[\exp(-\lambda t)\,|u(t)|], \lambda > 0$$

On vérifie, si $u, v \in C([0,a])$ et K définie ci-dessus, que

$$\begin{aligned}
|(Tu)x - (Tv)y| &= \left|\int_0^x F(x,y)(u(y)-v(y))\exp(-\lambda y)\exp(\lambda y)dy\right| \\
&\leq \int_0^x |F(x,y)|\,|(u(y)-v(y))\exp(-\lambda y)|\exp(\lambda y)dy \\
&\leq K\|u-v\|_\lambda \int_0^x \exp(\lambda y)dy \\
&\leq \frac{K}{\lambda}\exp(\lambda x)\|u-v\|_\lambda
\end{aligned}$$

Ainsi

$$|(Tu)x - (Tv)y|\exp(-\lambda x) \leq \frac{K}{\lambda}\|u-v\|_\lambda,$$

et par conséquent

$$\|Tu - Tv\|_\lambda \leq \frac{K}{\lambda} \|u - v\|_\lambda .$$

Il est clair que si la constante λ est suffisament grande T est une contraction sur l'espace de Banach $(C([0, a]), \|.\|_\lambda)$. L'application du théorème de Banach offre une solution au problème posé. Notons ici que les deux normes $\|.\|_\lambda$ et $\|.\|_\infty$ sont, en fait, équivalentes. En effet, on a

$$\forall t \in [0, 1], |x(t)| e^{-\lambda t} \leq |x(t)| \leq \|x\|_\infty .$$

Donc

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\infty .$$

D'autre part

$$|x(t)| = |x(t)| e^{-\lambda t} e^{+\lambda t} \leq \|x\|_\lambda e^\lambda \forall t \in J.$$

D'où

$$e^{-\lambda} \|x\| \leq \|x\|_\lambda$$

Par conséquent les deux normes sont équivalentes. Il est naturel de se demander si on remplace la suite $\{f^n x_0\}$ par une quelconque suite $\{y_n\}$ avec la condition $y_0 = x_0$ et $y_{n+1} = f y_n$, alors sous quelles conditions on obtient encore $\lim_{n \to \infty} y_n = x^*$. Une réponse affirmative à été donné par Ostowski [36] sous la forme suivante.

Théorème 1.2 *Si X est un espace métrique complet, et $f : X \to X$ est une application telle que f^n est contractante pour un certain entier positif n, alors f admet un point fixe unique.*

Preuve. Le théorème de Banach montre que f^n admet un point fixe unique. Par ailleurs,

$$f^{n+1} x = f(f^n x) = f x,$$

montre que fx est aussi un point fixe pour f^n Par unicité du point fixe on aura obligatoirement $fx = x$. ■

Exemple 1.2 *Soit $X = \mathbb{R}$, et*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est rationnel,} \\ 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

De toute évidence f n'est pas contractante, mais $f^2x = 1$, est triviallement une application conractante. Cet exemple éloquent montre que l'on a même pas besoin de la contiuité pour appliquer le **Théorème de Banach**.

Exemple 1.3 *Soit* $T : C([0,2]) \to C([0,2])$ *l'application définie par*

$$T(f)(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

où $C([0,2])$ est muni de la norme $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\le t\le 2} |f(t)|$. On peut démontrer que la composée T^n d'ordre n de T s'écrit sous la forme

$$[T^n(f)](t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds.$$

On en déduit que

$$\|T^n(f) - T^n(g)\|_\infty \le \frac{2^n}{n!}\|f-g\|_\infty .$$

Ainsi on constante que T^n est une contraction pour n assez grand et le principe de Banach s'applique même si T n'est pas une contraction.
En manipulant ces fonctions Lipschitziènnes on peut se demander si on peut affaiblir la notion de contraction ne serait-ce un peut et obtenir encore un point fixe. La réponse est négative comme le prouve l'exemple suivant pris de [27].

Exemple 1.4 *Considérons l'espace de Banach* $C([0,1])$ *muni de la norme* $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\le t\le 1} |f(t)|$. *Considérons le sous espace*

$$M = \{f \in C([0,1])/f(1) = 1\}.$$

M est un sous espace fermé et donc de Banach lui aussi. Définissons $T : M \to M$ par

$$T(f)(t) = tf(t).$$

Si $f, g \in C([0,1])$, alors $[Tf - Tg] \in C([0,1])$. Il existe alors un $t_0 \in [0,1]$ tel que $[Tf - Tg](t_0)$ est maximal. On obtient alors,

$$\begin{aligned}\|Tf - Tg\|_\infty &= \max_{0\le t\le 1} |T(f)(t) - T(g)(t)| = |T(f)(t_0) - T(g)(t_0)| \\ &\le t_0 |f(t_0) - g(t_0)| \le \|f-g\|_\infty .\end{aligned}$$

Mais si $f \neq g$ il va y exister un $t \in [0,1]$ tel que $f(t) \neq g(t)$ et comme $f(1) = g(1) = 1$ cela entraine que $t_0 < 1$. Par conséquent,

$$\|Tf - Tg\|_\infty < \|f - g\|_\infty$$

toute les fois $f, g \in M$ que et $f \neq g$.
Supposons que $Tf = f$ pour $f \in M$. Ceci implique que pour tout $t \in [0,1], f(t) = tf(t)$. Ceci implique que $f(t) = 0$
pour tout $t \in [0,1)$. D'autre part, $f(1) = 1$. Ceci est en contradiction avec le fait que f est une fonction continue sur $[0,1].T$ ne possède donc pas de point fixe sur M. Ceci démontre que le principe de Banach ne peut être étendue à cette type de fonctions légèrement plus large.

1.8 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Définition 1.40 *Soit T un opérateur contractant d'un espace de Hilbert H dans lui même. Alors T admet une solution unique dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur. i,e ; $\exists\varphi! \in H$, tel que $T\varphi = \varphi$.*

Théorème 1.3 *Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :*

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt + f(x), 0 \leq x \leq b < \infty \tag{1.29}$$

Suppossons que les conditions suivantes sont vérifiées :
i)$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue.
ii)$K : [0,b] \times [0,b] \to \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition Lipschitziènne suivante : $|K(x,t,u) - K(x,t,v)| \leq L\,|u - v|$, tel que $x, t \in [0,b]$ et $u, v \in C([0,b],\mathbb{R})$. Alors, l'équation (1.29) admet une solution unique $\varphi \in C([0,b],\mathbb{R})$.
Preuve. On choisit la suivante $\|g\| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} \{|g(x)|\, e^{-Lx}\}$, On définit l'opérateur T comme suit :

$$T\varphi(x) = \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt + f(x)$$

Afin de prouver que l'équation (1.29) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur T admet un point fixe. D'abord, on montre que T est contractant

$$\begin{aligned}\|T\varphi - T\psi\| &= \sup_{x[0,b]}\{e^{-Lx}\left|T\varphi(x) - T\psi(x)\right|\} = \sup_{x[0,b]}\{e^{-Lx}\left|\int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt - \int_0^x K(x,t,\psi(t))dt\right|\} \\ &\leq \sup_{x[0,b]}\{e^{-Lx}\int_0^x \left|K(x,t,\varphi(t)) - K(x,t,\psi(t))\right| dt\} \\ &\leq L\sup_{x[0,b]}\{e^{-Lx}\int_0^x e^{-Lx}e^{Lx}\left|\varphi(t) - \psi(t)\right| dt\} \\ &\leq L\|\varphi - \psi\| \sup_{x[0,b]}\{e^{-Lx}\left(\frac{e^{Lx}-1}{L}\right)\} = \sup_{x[0,b]}(1 - e^{-Lx})\|\varphi - \psi\|.\end{aligned}$$

Comme $\sup_{x[0,b]}(1 - e^{-Lx}) < 1$,alors T est contractant, d'après le principe de Banach l'opèrateur T admet un point fixe unique $\varphi \in C([0,b],\mathbb{R})$, qui est une solution unique de l'équation intégrale (1.29). ■

1.9 Existence et unicité de la solution continue de l'équation de Hammerstein-Volterra

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence pour une solution cotinue de l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein-Volterra.

1.9.1 Théorème d'existence

Notre résultat d'existence est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.4 *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein-Volterra suivante*

$$T\varphi(x) = \varphi(x) = \int_a^x K(x,t)f(t,\varphi(t))dt + g(x) \text{ tel que } x \in [a,b] \tag{1.30}$$

Supposons que $g \in C([a,b])$, et le noyau K satisfait les condutions suivantes,
(i) $K(x,t) \geq 0, \forall x,t \in [a,b]\,, K(x_0,t)\,, \forall x \leq x_0$;
(ii) La fonction $x \longmapsto \int_a^x k(x,t)\,dt$, est continue sur $[a,b]\,$;
(iii) $\forall x_0 \in [a,b]\,, t \longmapsto K(x_0,t) \in L^1([a,b])$
On suppose que la fonction $f(.,.)$ est continue sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ et satisfaisant la condution suivante

$$f(t,x) \leq c_1|x| + c_2, \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.31}$$

où c_1, c_2 sont deux constantes positives. En outre, supposons que le noyau K vérifie la condition suivante

$$\sup_{x\in[a,b]}\int_a^x K\left(x,t\right)\leq\frac{1}{c_1} \tag{1.32}$$

Alors, l'équation (1.30) admet au moins une solution $\varphi\in c\left([a,b]\right)$.
Nous allons prouver que l'opérateur T est complétement continu de $c\left([a,b]\right)$ dans $c\left([a,b]\right)$. Pour prouver que $T\left(c\left([a,b]\right)\right)\subset c\left([a;b]\right)$, nous procédons comme suit.
Soit $\varphi\in c\left([a,b]\right)$ et $x,x_0\in[a;b]$, on peut supposer que $x<x_0$, puis, utilissons (i), on btient

$$\left|T\varphi\left(x\right)-T\varphi\left(x\right)\right|\leq\left|g\left(x\right)-g\left(x_0\right)\right|+\int_a^x\left(K(x,t)-K\left(x_0,t\right)\right)\left|f\left(t,\varphi\left(t\right)\right)\right|dt+\int_{x_0}^x K\left(x_0,t\right)\left|f\left(t,\varphi\left(t\right)\right)\right|dt \tag{1.33}$$

et

$$0\leq\int_a^x\left(K(x,t)-K\left(x_0,t\right)\right)dt\leq\left|\int_a^x K(x,t)dt-\int_a^{x_0}K\left(x_0,t\right)dt\right|+\int_{x_0}^x K\left(x_0,t\right)dt \tag{1.34}$$

de (ii), (iii) et (1.34), on conclut que

$$\lim_{x\to x_0}\int_{x_0}^x K\left(x_0,t\right)dt=\lim_{x\to x_0}\int_a^x\left(K\left(x,t\right)-K\left(x_0,t\right)\right)dt=0 \tag{1.35}$$

puisque φ est bornée sur $[a,b]$,et $f\left(.,.\right)$ satisfaisant (1.31), alore il existe une constante $M>0$ telle que

$$f\left(t,\varphi\left(t\right)\right)\leq M,\forall t\in[a,b] \tag{1.36}$$

En combinant (1.33), (1.35) et (1.36), on conclut que $T\varphi\in C\left([a,b]\right)$.
Note également que la continuité de T sur $C\left([a,b]\right)$ est une conséquence directe de (ii) et la continuité de $f\left(.,.\right)$ sur $[a,b]\times\mathbb{R}$. Ensuite, pour prouver la compacité de T , il suffit de vérifier que T satisfaisant la condition de théoréme d'Ascoli-Arzela.
Soit $S=\{\varphi_n,n\in\mathbb{N}\}$ un ensemble borné de $C\left([a,b]\right)$ avec une constante ℓ. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}$, on btient

$$\left\|T\varphi_n\right\|_\infty\leq\left\|g\right\|_\infty+\left(c_1\ell+c_2\right)\sup_{x\in[a,b]}\int_a^x K\left(x,t\right)dt$$

D'où $T\left(S\right)$ est uniformément borné.

Remplaçans φ par φ_n dans (1.33), en utilisant (1.35) et (1.36), on montre que $T(S)$ est équicontinu. Ainsi, que le théoréme d'Arzela-Ascoli, on conclut que $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ est compléte-ment continu. Ensuite. soit $R > 0$ un nombre réel positiv, on considère B est une boule convexe et fermée de $C([a,b])$, notée par

$$B_R = \{\varphi \in C([a,b]), \|\varphi\|_\infty \leq R\}$$

En utilisant (1.30), on obtient l'inegalité suivante

$$\|T\varphi\|_\infty \leq \|g\|_\infty + (c_1 R + c_2) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(x,t)dt$$

Par conséquent, si $\sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(x,t)dt \leq \frac{1}{c_1}$, d'où $T(B_R) \subseteq B_R$, tel que

$$R \geq \frac{\|g\|_\infty + c_2 \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(x,t)dt}{1 - c_1 \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^x K(x,t)dt} = R_0$$

En utilisant le théorème du point fixe de Schader, on conclut que l'équation (1.29) admet une solution continue sur $[a,b]$.

1.9.2 L'unicité de la solution

L'unicité de la solution de (1.29) est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.4 *Supposons que la fonction $f(.,.)$ proposée par le théorème précédent satisfaisaint la condition suivante,*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|^r, \forall x,y \in \mathbb{R}$$

pour des constantes $L > 0$ et $0 < r < 1$. Alors, dans les conditions du théorème précédent, l'équation (1.29) admet une solution unique et continue sur $[a,b]$:
Soit M_k une constante positive donnée par

$$M_k = \sup_{x\in[a,b]} \{\max_{t\in[a,b]} K(x,t)\}$$

Par contradiction, supposons que l'équation (1.29) admet deux solutions différentes $\varphi, \psi \in C([a,b])$, alors il existe $0 \leq \varepsilon < 1$ telle que $\|\varphi - \psi\|_\infty \geq \varepsilon$, il est clair que $\forall x \in [a,b]$, on obtient

$$T\varphi(x) = \varphi(x) = \int_a^x K(x,t)f(t,\varphi(t))dt + g(x)$$

$$|T(\varphi)-T(\psi)| \leq L\int_a^x K(x,t)\,|\varphi(t)-\psi(t)|^r\,dt \leq L(\|\varphi-\psi\|_\infty)^r M_K(x-a)$$

En utilisany l'inégalité précédente, on obtient

$$\left|T^2\varphi(x)-T^2\psi(x)\right| \leq L\int_a^x K(x,t)\,|T\varphi(t)-T\psi(t)|^r\,dt \leq (LM_K)^{r+1}(\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^2}\frac{(x-a)^{r+1}}{r+1}$$

De même, on obtient

$$\left|T^3\varphi(x)-T^3\psi(x)\right| \leq L\int_a^x K(x,t)\left|T^2\varphi(t)-T^2\psi(t)\right|^r dt \leq (LM_K)^{r^2+r+1}(\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^3}\frac{(x-a)^{r^2+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)}$$

Plus généralement, pour tout n entier positif, on obtient

$$|T^n\varphi(x)-T^n\psi(x)| \leq (LM_K)^{r^{n-1}+\ldots+r+1}(\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^n}\frac{(x-a)^{r^{n-1}+\ldots+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)\ldots(r^{n-1}+\ldots+r+1)}$$

Par conséquent

$$\|T^n\varphi-T^n\psi\|_\infty \leq (\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^n}\frac{(LM_K(b-a))^{r^{n-1}+\ldots+r+1}}{(r+1)(r^2+r+1)\ldots(r^{n-1}+\ldots+r+1)} = \|\varphi-\psi\|_\infty\frac{(\|\varphi-\psi\|_\infty)^{r^n-1}(LM}{(r+1)(r^2+r+1)..}$$

Puisque $0<r<1$ et que $\|\varphi-\psi\|_\infty \geq \varepsilon$ pour certain $0<\varepsilon<1$, alors l'inégalité précédente implique

$$\|T^n\varphi-T^n\psi\|_\infty \leq \|\varphi-\psi\|_\infty\frac{\max(1.(LM_K(b-a))^{\frac{1}{1-r}})}{(r+1)(r^2+r+1)\ldots(r^{n-1}+\ldots+r+1)}$$

Comme $\lim\prod_{i=2}^{i=n}(r^{i-1}+\ldots+r+1)=\infty$, alors, il existe $N_0\in\mathbb{N}$, tel que

$$\frac{\max(1.(LM_K(b-a))^{\frac{1}{1-r}})}{\varepsilon(r+1)(r^2+r+1)\ldots(r^{n-1}+\ldots+r+1)} < 1, \forall n > N_0$$

alors, on conclut que

$$\|T^n\varphi-T^n\psi\|_\infty < \|\varphi-\psi\|_\infty\,, \forall n > N_0 \tag{1.37}$$

D'autre part, puisque φ,ψ sont deux solutions de (1.29) et des points fixes de T alors, ils sont des points fixes de $T^n, \forall n > N_0$. Par conséquent, φ,ψ satisfont l'éalité suivante

$$\|T^n\varphi-T^n\psi\|_\infty = \|\varphi-\psi\|_\infty\,,$$

Ce qui contredit (1.37) admet une solution unique.

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe dans un espace métrique partiellement ordonné

2.1 Introduction

Récemment dans $[10, 13]$ le principe de contraction de Banach a été discuté dans un espace métrique muni par un ordre partiel. La condition de contraction habituelle est affaiblie mais aux dépens du fait que l'opérateur est monotone. L'idée principale de $[10, 13]$ implique de combiner les idées dans le principe de contraction avec celles de la technique itérative monotone.
Cette approche a été initiée dans $[13]$ et les résultats dans $[10]$ sont de légéres extensions de celles de $[13]$. Ce chapitre représente de nouveaux résultats pour des contractions généralisées dans un espace metrique partiallement ordonné.
Enfin, nous remarquons que certaines des idées présentées ici étaient motinées dans $[1]$

2.2 Ensembles ordonnés

Définition 2.1 *Soit E un ensemble, un ordre partiel sur E est donné par une relation $\Re$ vérifiant, si $x, y \in E$*

$\Re$ est réflexive i.e, $x\Re x$.
$\Re$ est transitive i.e, $x\Re x$ et $y\Re z$ alors $x\Re z$.
$\Re$ est antisymétrique i.e, $x\Re y$ et $y\Re x$ alors $x = y$.

Exemple 2.1 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$par relation "x divise y". Vérifions qu'elle est antisymétrique*

$x\Re y \Longleftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : y = k_1 x$
$y\Re x \Longleftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : x = k_2 y$

Il vient que $k_1k_2 = 1$,comme k_1 et $k_2 \in \mathbb{N}^*$,alors, $k_1 = k_2 = 1$
a) Au lieu de $x\Re y$,On notera une relation d'ordre soit par un signe spécifique, soit par exemple "$\leq$" que l'on énonce indifférement

$\{x$ est inférirur à $y\}$ ou $\{y$ est supérieur à $x\}$;
$\{x$ est antérieur à $y\}$ ou$\{y$ est postérieur à $x\}$,
Un ensemble muni d'une relation d'ordre est appelé ensemble ordonné, on dit aussi qu'il possède une structure d'ordre.
b) la relation $x < y$ et $x \neq y$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas refléxive, on l'énonce $\{x$ est strictement inférieur à $y\}$,
ou
$\{x$ est strictement antérieur à $y\}$.
c) Dans $\mathbb{R}$, quels que soit x et y l'une des deux relation : $x \leq y$ ou $y \leq x$ est toujour vraie. elle n'est pas de même pour l'**Exemple 3.1** puisque dans $\mathbb{N}^*$ si nous considérons 3 et 7, aucune des deux ne divise l'autre. d'où les définition suivantes :

Définition 2.2 *On dit q'une relation d'ordre $\Re$ définit sur E un ordre total si, $\forall x, y \in E$, on a :*

$x \leq y$ ou $y \leq x$. On dit encore que deux éléments quelconques sont **comparables** pour l'ordre définit par $\Re$. On dit également que E est **totalement ordonné** par $\Re$ ou que possède une structure d'ordre total.

Définition 2.3 *Lorsqu'il existe au moins un couple (x, y) d'éléments de E non comparables pour l'ordre défini par $\Re$, on dit que $\Re$ définit un **ordre partiel** ou que E est partiellement ordonné par $\Re$.*

Définition 2.4 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\Re$. Les éléments x et y de E sont dit **comparables** si lon a$[x\Re y$ ou $y\Re x]$. Si tout les éléments x et y de E sont comparables par $\Re$, l'ensemble E est dit **totalement ordonné** par $\Re$. Sinon, il est **partiellement ordonné.***

2.2.1 Quelques résultats de l'existance de point fixe dans un espace métrique partiallement ordonné

On va commencer par une version facile de notre résultat général (**Théorème 2.2**) pour illustrer la méthode impliquée. Supposons que $(X, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et que $F : X \to X$. Nous disons que l'application F est croissante si $x, y \in X, x \leq y$ implique $F(x) \leq F(y)$.

Théorème 2.1 *Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonnée et supposons qu'il existe une métrique d sur X tel que (X, d) soit un espace métrique complet. Supposons qu'il existe une fonction croissante $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ avec $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ pour tout $t > 0$ et supposons également que F est une application croissante avec :*

$$d(F(x), F(y)) \leq \psi(d(x, y)) \text{ pour tout } x \geq y.$$

Supposons aussi que

$$F \text{ est continu} \tag{2.1a}$$

ou

$$\begin{cases} \{x_n\} \subseteq X \text{ est une suite non décroissante avec } x_n \to x \\ \text{en } X \text{ puis } x_n \leq x \text{ pour tout } n. \end{cases} \tag{2.1b}$$

S'il existe un $x_0 \in X$ avec $x_0 \leq F(x_0)$, alors F a un point fixe.

Preuve. Tout d'abord, notez que $\psi(t) < t$ Pour $t > 0$. Pour le voir, supposons qu'il existe $t_0 > 0$ avec $t_0 \leq \psi(t_0)$, alors comme ψ est croissante on voit que $t_0 \leq \psi^n(t_0)$ pour tout $n \in \{1, 2, ...\}$ est une contradiction. on remarque également que $\psi(0) = 0$.

Si $F(x_0) = x_0$ nous avons terminé, supposons donc $F(x_0) \neq x_0$. Maintenant, depuis $x_0 \leq F(x_0)$ et F est non décroissant nous avons

$$x_0 \leq F(x_0) \leq F^2(x_0) \leq \cdots \leq F^n(x_0) \leq F^{n+1}(x_0) \leq \cdots.$$

Maintenant, comme $x_0 \leq F(x_0)$ nous avons $d(F^2(x_0), F(x_0)) \leq \psi(d(F(x_0), x_0))$ et depuis $F(x_0) \leq F^2(x_0)$ on a

$$d(F^3(x_0), F^2(x_0)) \leq \psi(d(F^2(x_0), F(x_0))) \leq \psi^2(d(F(x_0), x_0)).$$

Par indication

$$d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) \leq \psi^n(d(F(x_0), x_0)).$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisi $n \in \{1, 2, ...\}$ pour que

$$d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) < \epsilon - \psi(\epsilon).$$

Maintenant comme $F^n(x_0) \leq F^{n+1}(x_0)$ nous avons

$$\begin{aligned} d(F^{n+2}(x_0), F^n(x_0)) &\leq d(F^{n+2}(x_0), F^{n+1}(x_0)) + d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) \\ &\leq \psi(d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0))) + [\epsilon - \psi(\epsilon)] \\ &\leq \psi(\epsilon - \psi(\epsilon)) + [\epsilon - \psi(\epsilon)] \\ &\leq \psi(\epsilon) + [\epsilon - \psi(\epsilon)] = \epsilon. \end{aligned}$$

Aussi depuis $F^n(x_0) \leq F^{n+2}(x_0)$ nous avons

$$\begin{aligned} d(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)) &\leq d(F^{n+3}(x_0), F^{n+1}(x_0)) + d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) \\ &\leq \psi(d(F^{n+2}(x_0), F^n(x_0))) + [\epsilon - \psi(\epsilon)] \\ &\leq \psi(\epsilon) + [\epsilon - \psi(\epsilon)] = \epsilon. \end{aligned}$$

Par induction $d(F^{n+k}(x_0), F^n(x_0)) \leq \epsilon$ pour $k \in \{1, 2, ...\}$.
Cela implique que $\{F^n(x_0)\}$ est une suite de Cauchy dans X (notez également que $F^n(x_0) \leq F^{n+k}(x_0)$) et donc il existe un $x \in X$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(x_0) = x$.
Si $(2.1a)$ est verifiée, alors clairement on trouve que $x = F(x)$.
Supposons maintenant que $(2.1b)$ est satisfaisante et que $d(x, F(x)) = a > 0$.
Puisque $x = \lim\limits_{n\to\infty} F^n(x_0)$ il existe $N \in \{1, 2, ...\}$ avec $d(x, F^n(x_0)) < \frac{a}{2}$ pour $n \geq N$. Alors pour $n \geq N$ nous avons (notons de $(2.1b)$ que $F^n(x_0) \leq x$)

$$\begin{aligned} d(x, F(x)) &\leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + d(F(x), F^{n+1}(x_0)) \\ &< \frac{a}{2} + \psi(d(x, F^n(x_0)) < \frac{a}{2} + \psi(\frac{a}{2}) \leq a, \end{aligned}$$

une contradiction. Donc $x = F(x)$. ■

Remarque 2.1 *La note F non décroissante peut être remplacée par la valeur F non croissante dans le* ***Théorème 2.1****, à condition que $x_0 \leq F(x_0)$ soit remplacé par $F(x_0) \leq x_0$ dans le* ***Théorème2.1****. Une remarque similaire s'applique aux* ***Théorème 2.2*** *et* ***2.3****.*

Remarque 2.2 *Si $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ est une fonction continue (ou supérieure semi-continu de droite) avec $\psi(t) < t$ pour $t > 0$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} \psi^n(x_0) = 0$ pour $t > 0$ puisque pour fixe $t > 0$ si $a_n = \psi^n(t)$ donc $a_n = \psi^n(a_{n-1}) \leq a_{n-1}$ un dire $a_n \downarrow \beta$, et maintenant noter $\beta = \psi(\beta)$ (ou $\beta \leq \psi(\beta)$) alors $\beta = 0$.*

Nous présentons maintenant le résultat principal dans cet article .

Théorème 2.2 *Soit $(X,\leq)$ un ensemble partiellement ordonné et supposons qu'il existe une métrique d sur X tel que (X,d) soit un espace métrique complet. Supposons qu'il existe une fonction croissante $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ avec $\lim_{n\to\infty}\psi^n(x_0)=0$ pour tout $t>0$ et supposons également que F est une application croissante avec :*

$$d(F(x),F(y))\leq\psi\left(\max\left\{\begin{array}{c}d(x,y),d(x,F(x)),d(y,F(y)),\\ \frac{1}{2}\left[d(x,F(y))+d(y,F(x))\right]\end{array}\right\}\right)\text{ pour tout }x\geq y.$$

Supposons également que $(2.1a)$ ou $(2.1b)$ soit maintenu. S'il existe un $x_0\in X$ avec $x_0\leq F(x_0)$ alors F a un point fixe.

Preuve. Note

$$x_0\leq F(x_0)\leq F^2(x_0)\leq\ldots\leq F^n(x_0)\leq F^{n+1}(x_0)\leq\ldots.$$

Nous allons démontrer que

$$d(F^{n+1}(x_0),F^n(x_0))\leq\psi(d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0))).\tag{2.2}$$

Pour avoir (2.2) (note $F^{n-1}(x_0)\leq F^n(x_0)$),

$$\begin{aligned}d(F^{n+1}(x_0),F^n(x_0))&\leq\psi\left(\max\left\{\begin{array}{c}d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0)),\\ d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0)),d(F^{n-1}(x_0),F^n(x_0)),\\ \frac{1}{2}\left[d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0))+d(F^{n-1}(x_0),F^{n+1}(x_0))\right]\end{array}\right\}\right)\\ &\leq\psi(\eta_n),\end{aligned}$$

où

$$\eta_n=\max\left\{\begin{array}{c}d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0)),\\ d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0)),d(F^{n-1}(x_0),F^n(x_0)),\\ \frac{1}{2}\left[d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0))+d(F^{n-1}(x_0),F^{n+1}(x_0))\right]\end{array}\right\}.$$

Si $\eta_n=d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0))$ alors (2.2) est vérifiée.
Si $\eta_n=d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0))$ alors $d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0))=0$ puisque si non

$$d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0))\leq\psi(d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0)))<d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0)),$$

une contradiction. Donc $d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0))=0$ et (2.2) est immédiat.
Enfin supposons $\eta_n=\frac{1}{2}\left[d(F^n(x_0),F^{n-1}(x_0))+d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0))\right]$.
Si $\eta_n=0$ alors $d(F^n(x_0),F^{n+1}(x_0))=0$ et (2.2) est immédiat.

Si $\eta_n \neq 0$ nous avons

$$\begin{aligned} d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) &\leq \psi(\frac{1}{2}\left[d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)) + d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0))\right]) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)) + d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0))\right], \end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{2}d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) < \frac{1}{2}d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)),$$

et comme résultat

$$\begin{aligned} \eta_n &= \frac{1}{2}\left[d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)) + d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0))\right] \\ &< \frac{1}{2}d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)) + \frac{1}{2}d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)) \\ &= d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)), \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de η_n. Dans tous les cas (2.2) est vrai. Ansi

$$d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) \leq \psi^n(d(F(x_0), x_0)),$$

so $\lim_{n\to\infty} d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Choisissez $n \in \{1, 2, ...\}$ pour que

$$d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) < \epsilon - \psi(\epsilon).$$

Note suivante **(Théorème2.1)** que

$$d(F^{n+2}(x_0), F^n(x_0)) \leq d(F^{n+2}(x_0), F^{n+1}(x_0)) + [\epsilon - \psi(\epsilon)] \leq \epsilon. \tag{2.3}$$

Remarque

$$d(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)) \leq d(F^{n+3}(x_0), F^{n+1}(x_0)) + [\epsilon - \psi(\epsilon)]$$

et de (2.2) nous anons

$$d(F^{n+2}(x_0), F^{n+1}(x_0)) \leq \psi(d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0))) \leq \psi(\epsilon). \tag{2.4}$$

Ainsi $((2.3)$ et $(2.4))$

$$\begin{aligned} d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right) &\leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \psi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d\left(F^{n+2}(x_0), F^n(x_0)\right), d\left(F^{n+1}(x_0), F^n \right. \\ d\left(F^{n+3}(x_0), F^{n+2}(x_0)\right), \frac{1}{2}\left[d\left(F^{n+2}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) + d\right. \end{array}\right.\right. \\ &\leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \psi\left(\max\left\{\epsilon, \epsilon - \psi(\epsilon), \psi^2(\epsilon), \frac{1}{2}\left[\psi(\epsilon) + d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right)\right]\right\}\right) \\ &\leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \psi(\tau_n) \end{aligned}$$

depuis (2.2) et (2.4) nous avons

$$d\left(F^{n+3}(x_0), F^{n+2}(x_0)\right) \leq \psi\left(d\left(F^{n+2}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right)\right) \leq \psi^2(\epsilon)$$

ici

$$\tau_n = \max\left\{\epsilon, \frac{1}{2}\left[\psi(\epsilon) + d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right)\right]\right\}$$

si $\tau_n = \frac{1}{2}[\psi(\epsilon) + d(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0))]$ (note $\tau_n > 0$) alors

$$d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right) < [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \frac{1}{2}\left[\psi(\epsilon) + d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right)\right]$$

alors

$$\frac{1}{2}d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right) < [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \frac{1}{2}\psi(\epsilon)$$

et comme résultat

$$\tau_n = \frac{1}{2}\left[\psi(\epsilon) + d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right)\right] < \frac{1}{2}\psi(\epsilon) + \left\{[\epsilon - \psi(\epsilon)] + \frac{1}{2}\psi(\epsilon)\right\} = \epsilon$$

ce qui contredit la définition de τ_n. Par conséquent $\tau_n = \varepsilon$. et ainsi

$$d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right) \leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \psi(\epsilon) = \epsilon \tag{2.5}$$

Prochain avis

$$d\left(F^{n+4}(x_0), F^n(x_0)\right) \leq d\left(F^{n+4}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) + [\epsilon - \psi(\epsilon)]$$

Note aussi

$$\begin{aligned} d\left(F^{n+3}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) &\leq \psi\left(\max\{d\left(F^{n+2}(x_0), F^n(x_0)\right), d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)\right), \\ &\quad d\left(F^{n+3}(x_0), F^{n+2}(x_0)\right), \frac{1}{2}\left[d\left(F^{n+2}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) + d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right)\right]\}) \\ &\leq \psi(\max\{\epsilon, \epsilon - \psi(\epsilon), \psi^2(\epsilon), \frac{1}{2}[\psi(\epsilon) + \epsilon]\}) \end{aligned}$$

depuis (2.2) nous avons $d(F^{n+3}(x_0), F^{n+2}(x_0)) \leq \psi^2(d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0))) \leq \psi^2(\epsilon)$. Comme un résultat

$$d\left(F^{n+3}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) \leq \psi(\epsilon) \tag{2.6}$$

Ainsi ((2.5) est (2.6))

$$\begin{aligned} d\left(F^{n+4}(x_0), F^n(x_0)\right) &\leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + d\left(F^{n+4}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) \\ &\leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \psi(\max\{d\left(F^{n+3}(x_0), F^n(x_0)\right), d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)), \\ &\quad d\left(F^{n+4}(x_0), F^{n+3}(x_0)\right), \frac{1}{2}\left[d\left(F^{n+3}(x_0), F^{n+1}(x_0)\right) + d\left(F^{n+4}(x_0), F^n(x_0)\right)\right]\}) \\ &\leq [\epsilon - \psi(\epsilon)] + \psi(\max\{\epsilon, \epsilon - \psi(\epsilon), \psi^3(\epsilon), \frac{1}{2}\left[\psi(\epsilon) + d\left(F^{n+4}(x_0), F^n(x_0)\right)\right]\}) \end{aligned}$$

depuis (2.2) nous avons

$$d\left(F^{n+4}\left(x_0\right), F^{n+3}\left(x_0\right)\right) \leq \psi^3\left(d(F^{n+1}\left(x_0\right), F^n\left(x_0\right))\right) \leq \psi^3\left(\epsilon\right)$$

Par conséquent

$$d\left(F^{n+4}\left(x_0\right), F^n\left(x_0\right)\right) \leq \left[\epsilon - \psi\left(\epsilon\right)\right] + \psi\left(r_n\right)$$

où

$$r_n = \max\{\epsilon, \frac{1}{2}\left[\psi\left(\epsilon\right) + d\left(F^{n+4}\left(x_0\right), F^n\left(x_0\right)\right)\right]\}$$

Des résultats précédents, il est facile de voir que $r_n = \epsilon$ alors

$$d\left(F^{n+4}\left(x_0\right), F^n\left(x_0\right)\right) \leq \left[\epsilon - \psi\left(\epsilon\right)\right] + \psi\left(\epsilon\right) = \epsilon \tag{2.7}$$

Continuez ce processus pour obtenir

$$d\left(F^{n+k-1}\left(x_0\right), F^{n+1}\left(x_0\right)\right) \leq \psi\left(\epsilon\right) \text{ et } d\left(F^{n+k}\left(x_0\right), F^n\left(x_0\right)\right) \leq \epsilon \tag{2.8}$$

pour $k \in \{1, 2, ...\}$. Donc $\{F^n(x_0)\}$ est une suite de Cauchy dans X. donc il existe un $x \in X$ avec $\lim_{n\to\infty} F^n(x_0) = x$.
si $(2.1a)$ tient, alors clairement $x = F(x)$.
Supposons maintenant $(2.1b)$ est valide. Supposer $d(x, F(x)) = a > 0$. Maintenant depuis $x = \lim_{n\to\infty} F^n(x_0)$ il existe $N \in \{1, 2, ...\}$ avec $d(x, F^n(x_0)) < \frac{a}{2}$ pour $n \geq N$. Alors pour $n \geq N$ nous avons (note de $(2.1b)$ que $F^n(x_0) \leq x$)

$$\begin{aligned} d(x, F(x)) &\leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + d(F(x), F^{n+1}(x_0)) \\ &\leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + \psi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(x, F^n(x_0)), d(x, F(x)), d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)), \\ \frac{1}{2}\left[d(x, F^{n+1}(x_0)) + d(F(x), F^n(x_0))\right] \end{array}\right\}\right) \end{aligned}$$

Note aussi $d(x, F^n(x_0)) < \frac{a}{2} < a = d(x, F(x))$

$$d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) \leq d(x, F^n(x_0)) + d(x, F^{n+1}(x_0)) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[d(x, F^{n+1}(x_0)) + d(F(x), F^n(x_0))\right] &< \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2} + d(x, F(x)) + d(x, F^n(x_0))\right] \\ &< \frac{1}{2}[\frac{a}{2} + a + \frac{a}{2}] = a \end{aligned}$$

En conséquence pour $n \geq N$ nous avons $d(x, F(x)) \leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + \psi\left(d(x, F(x))\right)$ laissant donc $n \to \infty$ donne $d(x, F(x)) \leq \psi(d(x, F(x)))$ qui est une contradiction. Donc $d(x, F(x)) = 0$.
Dans certaines circonstances, il est possible de supprimer la condition ψ non décroissant dans le **Théoème2.2.** ∎

Théorème 2.3 *Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et supposons qu'il existe un métrique d sur X tel que (X, d) soit un espace métrique complet. Supposons qu'il y ait une fonction continue $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ avec $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et supposons également que F est une application non décoissant avec :*

$$d(F(x), F(y)) \leq \psi\left(\max\left\{d(x, y), d(x, F(x)), d(y, F(y))\right\}\right) \text{ pour tout } x \geq y.$$

Supposons également que $(2.1a)$ ou $(2.1b)$ est maintenu. S'il existe un $x_0 \in X$ avec $x_0 \leq F(x_0)$ alors F admet un point fixe.

Preuve. Remarque **Remarque2.2** garantit que $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ pour $t > 0$. Soit $\alpha_n = d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0))$. Avis depuis $F^n(x_0) \geq F^{n-1}(x_0)$ que

$$\begin{aligned}
\alpha_n &\leq \psi\left(\max\left\{d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)), d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)), d(F^{n-1}(x_0), F^n(x_0))\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{d(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)), d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0))\right\}\right) \\
&= \psi\left(\max\left\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\right\}\right).
\end{aligned}$$

Nous montrons maintenant

$$\alpha_n \leq \psi\left(\alpha_{n-1}\right). \tag{2.9}$$

si $\max\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} = \alpha_{n-1}$ alors clairement (2.9) est vrai, alors que si $\max\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} = \alpha_n$ alors $\alpha_n \leq \psi(\alpha_n)$ et ainsi $\alpha_n = 0$, donc (2.9). est immédiat. Ainsi (2.9) tient. Maintenant depuis $\alpha_n \leq \psi(\alpha_{n-1}) \leq \alpha_{n-1}$ il existe $\alpha \geq 0$ avec $\alpha_n \downarrow \alpha$. Maintenant $\alpha_n \leq \psi\left(\alpha_n - 1\right)$ avec le continuité de ψ implique $\alpha \leq \psi(\alpha)$ donc $\alpha = 0$. En conséquence

$$\alpha_n = d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0)) \to 0 \text{ qund } n \to \infty. \tag{2.10}$$

Nous revendiquons

$$\{F^n(x_0)\} \text{ est une suite de Cauchy.} \tag{2.11}$$

Supposons que (2.11) est faux .Ensuite, nous pouvons trouver un $\delta > 0$ et deux séquences d'entiers $\{m(k)\}, \{l(k)\}, m(k) > l(k) \geq k$ avec

$$r_k = d(F^{l(k)}(x_0), F^{m(k)}(x_0)) \geq \delta \text{ pour } k \in \{1, 2, ...\}. \tag{2.12}$$

Nous pouvons aussi assumer à partir de

$$d(F^{m(k)-1}(x_0), F^{l(k)}(x_0)) < \delta \tag{2.13}$$

en choisissant $m(k)$ comme étant le plus petit nombre dépassant $l(k)$ pour lequel (2.12) est vrai. A présent

$$\begin{aligned}\delta &\leq r_k \leq d(F^{m(k)-1}(x_0), F^{l(k)}(x_0)) + d(F^{m(k)}(x_0), F^{m(k)-1}(x_0)) \\ &< \delta + \alpha_{m(k)-1}\end{aligned}$$

donc avec cela, (2.10) implique

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \delta \tag{2.14}$$

Notez aussi que (note $F^{m(k)}(x_0) \geq F^{l(k)}(x_0)$ puisque $m(k) > l(k)$)

$$\begin{aligned}\delta &\leq r_k \leq d(F^{l(k)+1}(x_0), F^{l(k)}(x_0)) + d(F^{m(k)+1}(x_0), F^{m(k)}(x_0)) + d(F^{m(k)+1}(x_0), F^{l(k)+1}(x_0)) \\ &= \alpha_{l(k)} + \alpha_{m(k)} + d(F^{m(k)+1}(x_0), F^{l(k)+1}(x_0)) \\ &\leq \alpha_{l(k)} + \alpha_{m(k)} + \psi(\max\left\{\begin{array}{c} d(F^{m(k)}(x_0), F^{l(k)}(x_0)), d(F^{m(k)}(x_0), F^{m(k)+1}(x_0)), \\ d(F^{l(k)}(x_0), F^{l(k)+1}(x_0)) \end{array}\right\} \\ &= \alpha_{l(k)} + \alpha_{m(k)} + \psi(\max\left\{r_k, \alpha_{l(k)} + \alpha_{m(k)}\right\})\end{aligned}$$

et laisser $k \to \infty$, pour obtenir (note $(2.10)\,,(2.14)$ et ψ sont continues) $\delta \leq \psi(\delta)$. donc $\delta = 0$, ce qui est une contradiction. En conséquence (2.11) est valide, il existe donc $x \in X$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(x_0) = x$.

Si $(2.1a)$ tient alors clairement $x = F(x)$. supposons maintenant$(2.1b)$ est valide. Avis(note de $(2.1b)$ cette $F^n(x_0) \leq x$)

$$\begin{aligned}d(x, F(x)) &\leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + d(F(x), F^{n+1}(x_0)) \\ &\leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + \psi(\max\left\{d(x, F^n(x_0)), d(x, F(x)), d(F^{n+1}(x_0), F^n(x_0))\right\}) \\ &\leq d(x, F^{n+1}(x_0)) + \psi(\max\left\{d(x, F^n(x_0)), d(x, F(x)), \alpha_n\right\})\end{aligned}$$

et laissez $n \to \infty$ (la note ψ est continue) pour obtenir $d(x, F(x)) \leq \psi(d(x, F(x)))$. Donc $d(x, F(x)) = 0$. ■

Chapitre 3

Théorèmes de points fixes pour les contractions génèralisées en ordre espaces métriques

3.1 Introduction

Récemment, Ran et Reurings $[15]$ ont démontré le principe de type de Banach-Cacciopoli suivant dans des espace métrique ordonnés.

Théorème 3.1 *(Voir Ran et Reurings* $[15]$*) Soit* X *un ensemble partiellement ordonné tel que chaque paire* $x, y \in X$ *ait un inférieure et une limite supérieure. Soit* d *une métrique sur* X *telle que l'espace métrique* (X, d) *est complet. Soit* $f : X \to X$ *un opérateur continu et monotone (c'est-à-dire décroissant ou croissant). Supposons que les deux affirmation suivantes tenir :*

(1)Il existe un $a \in \left]0,1\right[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq a.d(x, y)$, pour tout $x, y \in X$ avec $x \geq y$
(2)Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq f(x_0)$ ou $x_0 \geq f(x_0)$.
Alors f a un point fixe unique $x^* \in X$ c-à-dire $f(x^*) = x^*$, pour tout $x \in X$ la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de plusieurs successives les approximations de f à partir de x convergent vers $x^* \in X$.
Depuis lors, plusieurs auteurs ont examiné le problème de l'existence (et du caractére unique) d'un point fixe pour la contraction.
tapez des opérarteurs sur des ensembles partiellement ordonnés.
En 2005, J.J.Nieto et R.Rodríguez-López se sont avérés une variante modifiée du **Théorème 1.1**, en supprimant la continuité de f. Leur résultat (voir $[$8,**Théorème2.3**$]$) est le suivant.

Théorème 3.2 *(Voir Ran et Reurings-López* $[8]$ *.) Soit* X *un ensemble partiellement ordonné tel que* *chaque paire $x, y \in X$ a une limite inférieure ou supérieure. Soit d une métrique sur X telle que l'espace métrique (X, d) soit complet. Soit $f : X \to X$ un opérateur croissant. Supposons que les trois affirmations suivantes soient vérifiées :*

(1)Il existe un $a \in]0, 1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq a.d(x, y)$,pour tout $x, y \in X$ avec $x \geq y$;
(2)Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq f(x_0)$;
(3)Si une suite croissante (x_n) converge vers x dans X, alors $x_n \leq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors f a un point fixe unique $x^* \in X$ et pour tout $x \in X$ la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximations successives de f à partir de x converge vers $x^* \in X$.
Noyez que le cas des opérateurs en baisse est traité dans J.J.Nieto et R.Rodríguez-López [9], où certains
Des applications intéressantes aux équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites périodiques sont également présentées.
Aussi,J.J.Nieto, R.L.Pouso et R.Rodríguez-López, dans un article trés récent, améliorent certains

résultats donnés par A.Petruësel et I.A.Rus dans [12] dans le cadre L-espaces abstraits au sens de Fréchet, voir par exemple **Théorème 3.3** et **3.5** dans [11] .
En revanche, trés récemment, R.P.Agarwal, M.A.El-Gebeily et D.O'Regan dans [2] ont prolongé Ran et Reuring.
résultat pour le cas des contractions φ généralisées. Le résultat principal dans [2] est le théorème suivant

Théorème 3.3 *(Voir Agarwal, El-Gebeily et O'Regan [2] .) Soit X un ensemble partiellement ordonné et d une métrique sur X tel que l'espace métrique (X, d) soit complet. Soit $f : X \to X$ un opérateur*

croissant. Supposons que les trois

suivants affirmations tiennent :
(1) Il existe un application croissant $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n(t) = 0$ pour tout $t > 0$, tel que pour tout $x, y \in X$
avec $x \geq y$ nous avons

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi\left(\max\left\{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), \frac{1}{2}\left[d(x, f(y)), d(y, f(x))\right]\right\}\right);$$

(2)Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq f(x_0)$;
(3)[f est continu] ou [si une suite croissante $(x_n) \subset X$ converge vers x dans X, alors $x_n \leq x$ pour tout n
Alors f a au moins un point fixe dans X.

Remarquons enfin que si X est un ensemble non vide doté d'un ordre partiel et une métrique d, un point fixe les résultats pour les opérateurs $f : (C[a, b], X) \to X$ sont donnés dans Z. Drici, F. A. McRae, J. Vasundhara Drvi $[3]$.
Le but de article est de généraliser et d'étendre les **Théorème 1.1** à **1.3**.Quelques application aux équations intégrales sont également donnés.

3.2 Notation et concepts de base

Soit $f : X \to X$ un opérateur. Alors $f^0 = 1_X, f^1 = f, ..., f^{n+1} = f \circ f^n, n \in \mathbb{N}$, désignent les opérateurs itératifs de f. Par $I(f)$, nous désignerons l'ensemble des sous-ensembles invariants non vides de f, c'est-à-dire $I(f) := \{Y \subset X/f(Y) \subseteq Y\}$.
Aussi, par $F_f := \{x \in X/x = f(x)\}$ nous désignerons l'ensemble des points fixes de l'opérateur f, tandis que $A_f(x^*) := \{x \in X/f^n(x) \to x^*,\ \text{quand}\ n \to +\infty\}$ désigne l'attracteur bassin de f par rapport à $x^* \in X$.
Soit X un ensemble non vide. Soit $\triangle(X)$ la diagonale de $X \times X$. Soit aussi $s(X) := \{(x_n)_{n\in N}/x_n \in X, n \in \mathbb{N}$
Soit $c(X) \subset s(X)$ un sous-ensemble de $s(X)$ et $Lim : c(X) \to X$ un opérateur. Par définition, le triple $(X, c(X), Lim)$ est appelé un L-espace (Fréchet $[4]$) si les conditions suivantes sont remplies :
(i) Si $x_n = x$, pour tout $n \in N$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ et $Lim(x_n)_{n\in N} = x$.
(ii) Si $(x_n)_{n\in N} \in c(X)$ et $Lim(x_n)_{n\in N} = x$, alors pour toutes les sous-suites, $(x_{n_i})_{i\in N}$, de $(x_n)_{n\in N}$ nous avons que $(x_{n_i})_{i\in N} \in c(X)$ et $Lim(x_{n_i})_{i\in N} = x$.
Par définition, un élément de $c(X)$ est une suite convergente, $x := Lim(x_n)_{n\in N}$ est la limite de cette suite et nous écrivez aussi $x_n \to x$ quand $n \to +\infty$.
Dans ce qui suit, nous désignons un L-espace par $(X, \to)$.
Dans ce réglage, si $U \subset X \times X$, un opérateur $f : X \to X$ est appelé orbitalement U-continu (voir $[11]$) si : $\left[x \in X \text{ et } f^{n(i)}(x) \to a \in X, \text{ quand } i \to +\infty \text{ et } (f^{n(i)}(x), a) \in U \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\right]$ impliquent $\left[f^{n(i)+1}(x) \to f(a) \text{ quand } i \to +\infty\right]$.
Soit $(X, \to)$ un ensemble partiellement ordonné, c'est-à-dire que X est un ensemble non vide et $\leq$ est un réflexif, transitif et anti-symétrique relation sur X. Dénoter

$$X_{\leq} := \{(x, y) \in X \times X/x \leq y \text{ ou } y \leq x\}.$$

En outre, si $x, y \in X$, avec $x \leq y$, puis par $[x, y]_{\leq}$ nous noterons le segment ordonné joignant x et y, c'est-à-dire $[x, y]_{\leq} := \{z \in X/x \leq z \leq y\}$. Dans le même contexte, considérons $f : X \to X$. Ensuite, $(LF)_f := \{x \in X/x \leq f(x)\}$ est le plus bas ensemble de points fixes de f, tandis que $(UF)_f := \{x \in X/x \geq f(x)\}$ est l'ensemble des points fixes supérieurs de f. Aussi si $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$, le produit cartésien de f et g est alors noté $f \times g$ il est défini de la manière suivante :

$f \times g : X \times Y \to X \times Y, (f \times g)(x, y) := (f(x), g(y))$.

Définition 3.1 *Soit X un ensemble non vide. Puis, par définition $(X, \to, \leq)$ est un L-espace ordonné si et seulement si*

(i) $(X, \to)$ est un L-espace ;
(ii) $(X, \leq)$ est partiellement commandé ;
(iii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$, pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$.
Tout au long de cet article, nous supposons que $(X, \to, \leq)$ est un L-epace ordonné. Si (X, d) est un espace métrique, alors la structure de convergence est donnée par la métrique et le triple $(X, \to, \leq)$ sera appelé un espace métrique ordonné.
Nous examinerons également dans cet article les affirmations suivantes :
(*) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ et $x_n \leq y_n \leq z_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $y_n \to x$.
(**) Si $(y_i)_{i\in N}$ et $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suite de $(x_n)_{n\in N}$ telles que $\{y_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{z_i : i \in \mathbb{N}\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $(y_i)_{i\in N}, (z_i)_{i\in N} \in c(X)$ avec $Lim(y_i)_{i\in N} = x$ et $Lim(z_i)_{i\in N} = x$, alors $(x_n)_{n\in N} \in c(X)$ et $Lim(x_n)_{n\in N} = x$.
Rappelons maintenant le concept abstrait important suivant :

Définition 3.2 *(Voir Rus [17]. Soit $(X, \to)$ un L-espace. Un opérateur $f : X \to X$ est un opérateur de picard (brièvement OP) ssi :*

(i) $F_f = \{x^*\}$;
(ii) $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in X$.
Plusieurs résultats classiques de la théorie des points fixes peuvent être facillement transcrits en termes d'opérateurs de Picard, voir [12, 14, 14]. En I.A.Rus [17] présente la théorie de base des opérateurs de Picard

3.3 Résultats du point fixe

Notre résultat de départ est une version légérement modifiée du résultat abstrait principal dans [11] (voir **Théorème 3.5**) et dans [12] (voir **Lemme 4.1**). Par souci d'exhaustivité, nous le présenons ici.

Lemme 3.1 *Soit $(X, \to)$ un L-espace et U un sous- ensemble symétrique de $X \times X$ tel que $\triangle(X) \subset X$. Soit $f : X \to X$ un opérateur. Supposer que :*

(i) Pour tout $x, y \in X$ avec $(x, y) \notin U$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in U$ et $(y, z) \in U$;
(ii) Il existe $x_0, x^* \in X$ tel que $x_0 \in A_f(x^*)$;

(iii) $(x, y) \in U$ et $x \in A_f(x^*)$ implique $y \in A_f(x^*)$.
Alors $A_f(x^*) = X$.
De plus, si

$$\begin{cases} \text{(a) } f \text{ est orbitalement continu} \\ \text{ou} \\ (b)\ f \text{ est continuellement en orbite et il existe une sous-suite } (f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{telle que } ((f^{n_k}(x_0), x^*) \in U \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Alors $F_f = \{x^*\}$ et donc f est un OP.
Une concéquence naturelle du résultat ci-dessus s'ensuit en choisissant $U := X_\leq$

Lemme 3.2 *(Voir* [11, ***Théorème 3.3***] *.) Soint* $(X, \to, \leq)$ *un L-espace ordonné et* $f : X \to X$ *un opérateur. Supposer cette :*

(i) Pour toute $x, y \in X$ avec $(x, y) \notin X_\leq$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in X_\leq$ et $(y, z) \in X_\leq$;
(ii) Il existe $x_0, x^* \in X$ tel que $x_0 \in A_f(x^*)$;
(iii) $(x, y) \in X_\leq$ et $x \in A_f(x^*)$ implique $y \in A_f(x^*)$.

$$\text{(iv)} \begin{cases} \text{a) } f \text{ est orbitalement continu} \\ \text{ou} \\ \text{b) } f \text{ est continuellement } X_\leq\text{-continue et il existe une sous-suite } (f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{telleque } (f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_\leq \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Alors f est un OP.
Rappelons que $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de comparaison si elle augemente et que $\varphi^k(t) \to 0$, quand $k \to +\infty$. Comme un conséquece, nous avons aussi $\varphi(t) < t$, pour tout $t > 0, \varphi(0) = 0$ et φ est juuste continu à 0.
Par exemple, $\varphi(t) = at$ (où $a \in [0, 1[$) $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ et $\varphi(t) = \ln(1 + t), t \in \mathbb{R}_+$, est comparaison fonction.
Si (X, d) est espace metrique, Alors $f : X \to X$ un opérateur est appelé φ-contraction si $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est fonction de comparaison et $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$, pour tout $x, y \in X$. Nous nous référons à Jachymski et Józwik [6] et I.A.Rus[12] pour une étude détaillée de φ-contractions.
Le premier résultat pricipal de cette section est un théorème en point fixe pour une contraction sur une métrique compléte ordonnée espace.

Théorème 3.4 *Soit* $(X, d, \leq)$ *un espace métrique ordonné et* $f : X \to X$ *un opérateur. Nous supposons que :*

(i) Pour tout $x, y \in X$ avec $(x, y) \notin X_\leq$, il existe $c(x, y) \in X$ tel que $(x, c(x, y)) \in X_\leq$ et $(y, c(x, y)) \in X_\leq$;

(ii) $X_{\leq} \in I(f \times f)$,

(iii) Si $(x, y) \in X_{\leq}$ et $(y, z) \in X_{\leq}$, alors $(x, z) \in X_{\leq}$;

(iv) Il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$;

$$\text{(v)} \begin{cases} \text{a) } un\ f \text{ est orbitalement continu} \\ \text{ou} \\ \text{b) } f \text{ est orbitalement } X_{\leq}\text{-continue et il existe une sous-suite } (f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{telle que } (f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(vi) Il existe une fonction de comparaison $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$, pour tout $(x, y) \in X_{\leq}$;

(vii) d est métrique compléte.

Alors f est un OP.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ tel que $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$.Suppose premiérement que $x_0 \neq f(x_0)$. Ensuite, de (ii) on obtient

$$(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}, (f(x_0), f^2(x_0)) \in X_{\leq}, (f^2(x_0), f^3(x_0)) \in X_{\leq}, ..., (f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \in X_{\leq}, ... \in X_{\leq}.$$

De (vi) on obtient, par induction, que $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi^n(d(x_0, f(x_0)))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Depuis $\varphi^n(d(x_0, f(x_0))) \to 0$ quand $n \to +\infty$, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, nous pouvons choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon)$, pour tout $n \geq N$. Depuis $(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \in X_{\leq}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons pour tout $n \geq \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+2}(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))) \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon - \varphi(\varepsilon)) \text{ tel que } \varepsilon - \varphi(\varepsilon) \leq \varepsilon \text{ et } \varphi(\varepsilon - \varphi(\varepsilon)) \leq \varphi(\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, depuis $d(f^n(x_0), f^{n+2}(x_0)) \in X_{\leq}$ (voir (iii) tel que $(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \in X_{\leq}$ et $(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}($ $X_{\leq}$ donc $(f^n(x_0), f^{n+2}(x_0)) \in X_{\leq}$) nous avons pour tout $n \geq N$ que

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+3}(x_0)) \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(d(f^n(x_0), f^{n+2}(x_0))) \\ &\leq \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Par induction nous avons

$$d(f^n(x_0), f^{n+k}(x_0)) < \varepsilon, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \geq N.$$

Donc $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X,d). De (vii) nous avons $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$ quand $n \to +\infty$.

Soit $x_0 \in X$ choisi arbitrairement. Ensuite :

(1) Si $(x,x_0) \in X_{\leq}$, alors $(f^n(x), f^n(x_0)) \in X_{\leq}$ et donc $d(f^n(x), f^n(x_0)) \leq \varphi^n(d(x,x_0))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(x_0)) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n(d(x,x_0))$ quand $n \to +\infty$ nous obtenons que $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$.

(2) Si $(x,x_0) \notin X_{\leq}$, alors, depuis (i), il existe $c(x,x_0) \in X$ tel que $(x, c(x,x_0)) \in X_{\leq}$ et $(x_0, c(x,x_0)) \in X_{\leq}$.

De la seconde relation, comme précédemment, nous obtenons $d(f^n(x_0), f^n(c(x,x_0))) \leq \varphi^n(d(x_0, c(x,x_0)))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x_0), f^n(c(x,x_0))) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n(d(x_0, c(x,x_0)))$ et d'où $(f^n(c(x,x_0)))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, quand $n \to +\infty$. Puis, en utilisant la première relation, on en déduit que $d(f^n(x), f^n(c(x,x_0))) \leq \varphi^n(d(x, c(x,x_0)))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(c(x,x_0))) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n(d(x, c(x,x_0)))$ ainsi de suite, en laissant à nouveau $n \to +\infty$, nous concluons $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$.

Maintenant, nous allons prouver que $x^* \in F_f$.

Si $(v)_a$ est valable, alors clairement $x^* \in F_f$.

Si nous supposons que $(v)_b$ a lieu,alors puisque $(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \to x^*$ et $(f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient, De a partir de l'orbite $X_{\leq}$-continuité de f, que $f^{n_k+1}(x_0) \to f(x^*)$quand $k \to +\infty$. Donc $x^* = f(x^*)$. Si nous avons $f(y) = y$ pour un certain $y \in X$, alors $f^2(y) = f(y) = y, f^3(y) = f^2(y) = f(y) = y, ..., f^n(y) = y$ d'en haut, nous doit avoir $f^n(y) \to x^*$, alors $y = x^*$.

Si $f(x_0) = x_0$, alors x_0 joue le rôle de x^*. ■

Remarque 3.1 *Représentation équivalente de la condition (iv) sont*

$(iv)'$ Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq f(x_0)$ ou $x_0 \geq f(x_0)$;

Remarque 3.2 *La condition (ii) peut être remplacée par chacune des affirmation suivantes :*

$(ii)'$ $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ est croissante ;

$(ii)''$ $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ est décroissante.

Cependant, il est facile de voir que l'affirmation (ii) du **Théorème 3.3** est plus générale, voir [12] par exemple.

Notons qu'avec les remarques ci-dessus et avec la condition de φ-contraction, le **Théorème 3.3** généralise le **Théorème 2.1** dans [2], les **Théorème 2.2** à **2.3** dans [15] .

Dans certaines situations, la condition :

(iii) Si $(x,y) \in X_{\leq}$ et $(y,z) \in X_{\leq}$ alors $(x,z) \in X_{\leq}$,

Peut être enlevé.

Par exemple, le **Théorème 3.3** a pour résultat le résultat suivant. Par souci d'exhauustivité, nous en esquisserons ici une preuve directe.

Théorème 3.5 *Soient* $(X, d, \leq)$ *un espace métrique ordonné et* $f : X \to X$ *un opérateur. Supposons que :*

(i) Pour tous $x, y \in X$ avec $(x, y) \notin X_{\leq}$ il existe $c(x, y) \in X$ tel que $(x, c(x, y)) \in X_{\leq}$ et $(y, c(x, y)) \in X_{\leq}$;
(ii) $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ est croissante ;
(iii) Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \leq f(x_0)$;

(iv) $\begin{cases} \text{a) } f \text{ est orbitalement continu} \\ \text{ou} \\ \text{b) } f \text{ est orbitalement } X_{\leq}\text{-continue et il existe une sous-suite } (f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{tel que } (f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \\ \text{ou} \\ \text{c) Si une suite croissante } (x_n) \text{ converge vers } x \text{ dans } X, \text{ alors } x_n \leq x \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

(v) Il existe une fonction de comparaison $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$, pour tout $(x, y) \in X_{\leq}$;
(vi) d est métrique compléte.
Alors f est un OP.

Preuve. Comme $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ est en croissance et $x_0 \leq f(x_0)$ nous avons immédiatement $x_0 \leq f(x_0) \leq f^2(x_0) \leq \cdots \leq f^n(x_0) \leq \cdots$.Donc, à partir de (v) on obtient $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi^n(d(x_0, f(x_0)))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par une preuve semblable de celle du **Théorème 3.3** nous obtenons
$d(f^n(x_0), f^{n+k}(x_0)) < \varepsilon$. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$.
Donc $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d). De (vi) nous avons $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, quand $n \to +\infty$.
Maintenant, nous allons prouver que $x^* \in F_f$.
Pour les cas $(iv)_a$ et $(iv)_b$, la conclusion vient de la même manière que le **Théorème 3.3**.
Si $(iv)_c$ a lieu, alors, étant donné que $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ nous avons $d(f^n(x_0), x^*) < \epsilon$. Par contre, pour tout $n \geq N_\epsilon$, puisque $f^n(x_0) \leq x^*$,

on obtient

$$\begin{aligned} d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, f^{n+1}(x_0)) + d(f(f^n(x_0)), f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, f^{n+1}(x_0)) + \varphi(d(f^n(x_0), x^*)) \\ &\leq \epsilon + \varphi(\epsilon) \text{ tel que } \varphi(\epsilon) < \epsilon \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Donc il admet point fixe $x^* \in F_f$.
L'unicité du point fixe découle de la contradiction. Supposons qu'il existe $y^* \in F_f$, avec $x^* \neq y^*$. Il y a deux cas possibles :
(a) Si $(x^*, y^*) \in X_\leq$, on a $0 < d(y^*, x^*) = d(f^n(y^*), f^n(x^*)) \leq \varphi^n(d(y^*, x^*)) \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui est une contradiction. D'où $x^* = y^*$;
(b) Si $(x^*, y^*) \notin X_\leq$, alors il existe $c^* \in X$ tel que $(x^*, c^*) \in X_\leq$ et $(y^*, c^*) \in X_\leq$. La condition de la monotonie implique que, $f^n(x^*)$ et $f^n(c^*)$ sont comparables, de même que, $f^n(c^*)$ et $f^n(y^*)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &< d(y^*, x^*) = d(f^n(y^*), f^n(x^*)) \leq d(f^n(y^*), f^n(c^*)) + d(f^n(c^*), f^n(x^*)) \\ &\leq \varphi^n(d(y^*, c^*)) + \varphi^n(d(c^*, x^*)) \to 0 \end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$, ce qui est encore une contradiction. Ainsi, $x^* = y^*$.
Alors f admet une point fixe unique.
Donc f OP. ■

Remarque 3.3 *Il est facile de voir qu'un résultat double au **Théorème 3.6** peut être preuver. Plus précisément, le **Théorème 3.6** est valable si nous remplaçons la condition (iii) par*

$(iii)'$ Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \geq f(x_0)$, et la condition $(iv)_c$ par $(iv)'_c$ si une suite décroissante (x_n) converge vers x dans X, alors $x_n \geq x$

Remarque 3.4 *D'autres résultats du type ci-dessus peuvent être obtenus en mettant a la place d'un espace métrique ordonné complet une des L-structure suivantes (voir aussi* $[6, 7, 11, 12, 16]$ *) :*

(a) $(X, d, \leq)$ un espace métrique généralisé complet commandé (c-à-d, $d(x, y) \in \mathbb{R}^n_+$) ;
(b) (X, F, T) un espace complet de Menger .
Un autre résultat de ce type est :

Théorème 3.6 *Soit* $(X, \to, \leq)$ *un L-espace ordonné tel que* $(X, \to, \leq)$ *de la **Section 2** et* $f : X \times X$ *un oprérateur. Nous supposons que :*

(i) Pour tout $x, y \in X$ avec $(x,y) \notin X_{\leq}$ il existe $m(x,y), M(x,y) \in X$ tel que $x, y \in [m(x,y), M(x,y)]_{\leq}$

(ii) $[f$ croissant $]$ ou $[f$ est décroissant et $(X, \to, \leq)$ a la propriété (**) dans la **Section 2**$]$;

(iii) Il existe $x_0, x^* \in X$ tel que $x_0 \in A_f(x^*)$;

(iv) $\begin{cases} \text{a) } f \text{ est orbitalement continu} \\ \text{ou} \\ \text{b) } f \text{ est orbitalement } X_{\leq} \text{ continue et il existe une sous-suite} \\ (f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ tel que } (f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

(v) Si $(x, x_0) \in X_{\leq}$, alors $x \in A_f(x^*)$.

Alors f est un OP.

Preuve. De (iii) et (iv) nous avons que $x^* \in F_f$.

Soit $x \in X$ choisi arbitrairement

(1) Si $(x, x_0) \in X_{\leq}$, puis de (v) on obtient $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, en tant que $n \to +\infty$.

(2) Si $(x, x_0) \notin X_{\leq}$, puis par (i) nous avons que $x, x_0 \in [m(x,x_0), M(x,x_0)]_{\leq}$. Depuis $x_0 \in [m(x,x_0), M(x,x_0)]_{\leq}$ donc $m(x,x_0) \leq x_0 \leq M(x,x_0)$ alors $(m(x,x_0), x_0) \in X_{\leq}$ et $(M(x,x_0), x_0) \in X_{\leq}$

Donc $m(x,x_0) \in A_f$ et $M(x,x_0) \in A_f$, compte tenu de (v) il s'ensuit que $(f^n(m(x,x_0)))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$ et $(f^n(M(x,x_0)))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, quand $n \to +\infty$.

Si f est croissant, alors de $m(x,x_0) \leq x \leq M(x,x_0)$ et l'hypothése (*) nous obtenons

$$\begin{aligned} f^n(m(x,x_0)) &\leq f^n(x) \leq f^n(M(x,x_0)) \\ \lim_{n\to+\infty} f^n(m(x,x_0)) &\leq \lim_{n\to+\infty} f^n(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f^n(M(x,x_0)) \end{aligned}$$

Donc $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$quand $n \to +\infty$.

Si f est décroissant, alors

$$\begin{aligned} m(x,x_0) &\leq x \leq M(x,x_0) \\ f(m(x,x_0)) &\geq f(x) \geq f(M(x,x_0)) \\ f^2(m(x,x_0)) &\leq f^2(x) \leq f^2(M(x,x_0)) \end{aligned}$$

D'aprés (*)

$$\begin{aligned} f^{2k}(m(x,x_0)) &\leq f^{2k}(x) \leq f^{2k}(M(x,x_0)) \\ \lim_{n\to+\infty} f^{2k}(m(x,x_0)) &\leq \lim_{n\to+\infty} f^{2k}(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f^{2k}(M(x,x_0)) \end{aligned}$$

$f^{2k}(x) \to x^*$ quand $k \to +\infty$ et

$$\begin{aligned} f^{2k+1}(m(x,x_0)) &\geq f^{2k+1}(x) \geq f^{2k+1}(M(x,x_0)) \\ \lim_{n\to+\infty} f^{2k+1}(m(x,x_0)) &\geq \lim_{n\to+\infty} f^{2k+1}(x) \geq \lim_{n\to+\infty} f^{2k+1}(M(x,x_0)) \end{aligned}$$

D'aprés (*) $f^{2k+1}(x) \to x^*$ quand $k \to +\infty$

De (**) nous obtenons que $f^n(x) \to x^*$, quand $n \to +\infty$. Par conséquent, f est un OP.

Une conséquence du théoréme ci-dessus est : ■

Théorème 3.7 *Soit $(X, d, \leq)$ un espace métrique ordonné satisfaisant a la condition (*) de la* ***Section 2*** *et $f : X \to X$*

un opérateur. Nous supposons que :

(i) Pour tout $x, y \in X$ avec $(x, y) \notin X_{\leq}$ il existe $m(x, y), M(x, y) \in X$ tel que $x, y \in [m(x, y), M(x, y)]_{\leq}$;

(ii) Si $(x, y) \in X_{\leq}$ et $(y, z) \in X_{\leq}$, alors $(x, z) \in X_{\leq}$;

(iii) f croissant ou décroissant ;

(iv) Il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$;

(v) a) f est orbitalement continu

ou

b) f est orbitalement $X_{\leq}$ continue et il existe une sous-suite $(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, si $(f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq}$ quand $k \to \infty$, puis $(f^{n_k}(x_0), x^*)_{k\in\mathbb{N}} \in X_{\leq}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;

(vi) d est métrique compléte ;

(vii) Il existe une fonction de comparaison $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$, pour tout $(x, y) \in X_{\leq}$.

Alors $f : (X, d) \to (X, d)$ est un OP.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ tel que $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$. Ensuite, à partir de (iii), il en résulte $(f(x_0), f^2(x_0)), (f^2(x_0),$ $X_{\leq}$. De (vii) on obtient que $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi^n(x_0, f(x_0))$; pour tout $n \in \mathbb{N}$. As dans la preuve du **Théoréme 3.3**, nous obtenons que $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, en tant que $n \to \infty$.

Soit $x \in X$ être arbitraire. Ensuite :

(1) Si $(x, x_0) \in X_{\leq}$, alors $(f^n(x), f^n(x_0)) \in X_{\leq}$ et ainsi $d(f^n(x), f^n(x_0)) \leq \varphi^n(d(x, x_0))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ letting $n \to \infty$ nous obtenons que $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$.

(2) Si $(x, x_0) \notin X_{\leq}$, alors, à, partir de (i), il existe $m(x, x_0), M(x, x_0) \in X$ tel que $x, x_0 \in [m(x, x_0), M(x, x_0)]_{\leq}$.

De $m(x, x_0) \leq x_0 \leq M(x, x_0)$ nous obtenons que $(f^n(m(x, x_0)))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$ et $(f^n(M(x, x_0)))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$, quand $n \to +\infty$. De la relation $m(x, x_0) \leq x_0 \leq M(x, x_0)$, la condition (iii) et la convergence ci-dessus, nous en déduisons que la prouve, à savoir le fait $x^* \in F_f$, est identique à celui utilisé auparavant.

Dans le cas d'une contraction φ généralisée, un résultat d'existence pour le point fixe peut également être établi. ■

Théorème 3.8 *Soit $(X, d, \leq)$ un espace métrique ordonné et $f : X \to X$ un opérateur. Nous supposons que :*

(i) $X_{\leq} \in I(f \times f)$;

(ii) Si $(x,y) \in X_{\leq}$ et $(y,z) \in X_{\leq}$, alors $(x,z) \in X_{\leq}$;

(iii) Il existe $x_0 \in X$ tel que $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$;

(iv) $\begin{cases} \text{a) } f \text{ est orbitalement continu} \\ \text{ou} \\ \text{b) } f \text{ est orbitalement } X_{\leq}\text{-continue et il existe une sous-suite } (f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{tel que } (f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\,; \end{cases}$

(v) Il existe une fonction de comparaison $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tellle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi\left(\max\left\{d(x,y), d(x,f(x)), d(y,f(y)), \frac{1}{2}\left[d(x,f(y)) + d(y,f(x))\right]\right\}\right),$$

pour tout $(x,y) \in X_{\leq}$;

(vi) d est métrique compléte.

Alors $F_f \neq \emptyset$.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ tel que $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$. Supposons d'abord que $x_0 \neq f(x_0)$.
Ensuite, de (i) on obtient

$$(f(x_0), f^2(x_0)), (f^2(x_0), f^3(x_0)), ..., (f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)), ... \in X_{\leq}.$$

Nous prétendons que

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi(d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \qquad (***)$$

Pour voir (***) on considéré

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)), d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)), d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0), \\ \frac{1}{2}\left[d(f^n(x_0), (f^n(x_0)) + d(f^{n-1}(x_0), f^{n+1}(x_0))\right]) \end{array}\right\}\right) \leq \varphi(M_n$$

où

$M_n := \max\left\{d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)), d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)), \frac{1}{2}\left[d(f^{n-1}(x_0), (f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))\right]\right\}$.

(1) Si $M_n = d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$, nous avons terminé.

(2) Si $M_n = d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))$, alors $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) = 0$. Depuis si non, alors
$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi(d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))) < d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))$,
ce qui est une contraction. Ainsi (**) suit à nouveau.

(3) Si $M_n = \frac{1}{2}\left[d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))\right]$, alors si $M_n = 0$ nous avons ce $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)$
0 et (**) est valide.

Si $M_n \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) &\leq \varphi\left(\frac{1}{2}\left[d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))\right]\right) \\ &< \frac{1}{2}\left[d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))\right]. \end{aligned}$$

D'où $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) < d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$. Dans ce cas
$M_n = \frac{1}{2}\left[d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0) + d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))\right] < d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))$,
ce qui contredit la définition de M_n.
Ainsi, dans tous les cas (***), De (***) nous avons immédiatement
$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \varphi^n(d(x_0, f(x_0)))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
Puisque $\varphi^n(d(x_0, f(x_0))) \to 0$, pour $n \to +\infty$, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, nous pouvons choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que
$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon)$, pour tout $n \geq N$.
Comme dans la preuve du **Théoréme 3.3**, nous avons d'abord que

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+2}(x_{\leq 0})) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, depuis $d(f^n(x_0), f^{n+2}(x_0)) \in X_{\leq}$ (voir (ii)) nous avons pour tout $n \geq N$ que

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_{\leq 0})) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0)) \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi\left(\max\left\{\begin{array}{c} d(f^n(x_0), f^{n+2}(x_0)), d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)), d(f^{n+2}(x_0), f^{n+3}(\\ \frac{1}{2}\left[f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) + d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0))\right] \end{array}\right.\right. \\ &< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi\left(\max\left(\left\{\varepsilon, \varepsilon - \varphi(\varepsilon), \varphi^2(\varepsilon), \frac{1}{2}\left[\varphi(\varepsilon) + d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0))\right]\right\}\right)\right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

où
$S_n = \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{2}\left[\varphi(\varepsilon) + d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0))\right]\right\}$.
Nous allons prouver que $S_n = \varepsilon$. Si non, alors $S_n = \frac{1}{2}\left[\varphi(\varepsilon) + d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0))\right]$.
Depuis $S_n > 0$ nous avons $d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0)) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \frac{1}{2}\left[\varphi(\varepsilon) + d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0))\right]$
Et ainsi
$d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0)) < 2\left[\varepsilon - \varphi(\varepsilon)\right] + \varphi(\varepsilon)$.
En conséquence, $S_n < \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon) + [\varepsilon - \varphi(\varepsilon)] + \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$, ce qui contredit la définition de S_n.
D'où $S_n = \varepsilon$ et donc $d(f^n(x_0), f^{n+3}(x_0)) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.
Ensuite, par induction, nous obtenons que $d(f^n(x_0), f^{n+k}(x_0)) < \varepsilon$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$.
Donc $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d). De (vi) nous avons $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to \infty$.
Maintenant, nous prouvons que $x^* \in F_f$. Si $(iv)_a$ tient, alors clairement $x^* \in F_f$. Si nous supposons que $(iv)_b$ a lieu, alors depuis $(f^{n_k}(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \to x^*$et $(f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leq}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient, a partir de l'orbite $X_{\leq}$-continuité de f, que $f^{n_k+1}(x_0) \to f(x^*)$ quand $k \to +\infty$. Donc $x^* = f(x^*)$.
Si $f(x_0) = x_0$,
Alors x_0 est un point fixe. ■

3.4 Applications

Considérons les équations intégrales

$$x(t) = \int_a^b k(t, s, x(s))ds + g(t), t \in [a, b], \tag{1}$$

et

$$x(t) = \int_a^t k(t, s, x(s))ds + g(t), t \in [a, b], \tag{2}$$

Le but de cette section est de donner des résultats d'existence pour les "quations. **(1)** et **(2)** en utilisant le **Théorème 3.6**.

Théorème 3.9 *Considérons l'équation.(1). Supposer*

(i) $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sont continus ;
(ii) $k(t, s, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ croissant pour tout $t, s \in [a, b]$;
(iii) Il existe une fonction continue $p : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}_+$ et une fonction de comparaison $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, telle que

$$|k(t, s, u) - k(t, s, v)| \leq p(t, s)\varphi(|u - v|), \text{ pour tout } t, s \in [a, b], u, v \in \mathbb{R}^n, u \leq v;$$

(iv) $\sup\limits_{t \in [a,b]} \int_a^b p(t, s)ds \leq 1$;
(v) Il existe $x_0 \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ tel que $x_0(t) \leq \int\limits_a^b k(t, s, x_0(s))ds + g(t)$, pour tout $t \in [a, b]$.
Alors l'équation intégrale(1) a une solution unique x^*dans $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $X := C([a, b], \mathbb{R}^n)$ avec la norme supremum habituelle, c'est-à-dire, $||x|| := \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ pour $x \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$
Considérons sur X l'ordre partiel défini par
$x, y \in C([a, b], \mathbb{R}^n), x \leq y$ si et seulement si $x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.
Alors $(X, ||.||, \leq)$ est un espace métrique complet et ordonné. De plus, pour toute suite croissante$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X convergeant vers un certain $x^* \in X$ nous avons $x_n(t) \leq x^*(t)$, pour tout $t \in [a, b]$. En outre, pour tout $x, y \in X$, il existe $c(x, y) \in X$ qui est comparable à x et y.
Définissez $A : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to C([a, b], \mathbb{R}^n)$, par la formule

$$Ax(t) = \int_a^b k(t, s, x(s))ds + g(t), t \in [a, b].$$

+Observons d'abord que de (ii) A croissant. De plus, pour tout $x, y \in X$ avec $x \leq y$ nous avons

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &\leq \int_a^b |k(t,s,x(s)) - k(t,s,y(s))|\, ds \leq \int_a^b p(t,s)\varphi(|x(s) - y(s)|)ds \\ &\leq \varphi(||x-y||) \,.\int_a^b p(t,s)ds \leq \varphi(||x-y||)\,, \text{ pour tout } t \in [a,b]\,. \end{aligned}$$

Par conséquent $||Ax - Ay|| \leq \varphi(||x-y||)$, pour tout $x, y \in X$ avec $x \leq y$.
De (v) nous avons que $x_0 \leq Ax_0$.
La conclusion découle maintenant du **Théorème 3.6.** ■

Théorème 3.10 *Considérons l'équation.**(2)**. Supposons que*

(i) $k : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sont continus ;
(ii) $k(t,s,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ croissant pour tout $t, s \in [a,b]$;
(iii) Il existe une fonction de comparaison $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, avec $\varphi(\lambda t) \leq \lambda\varphi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $\lambda \geq 1$, tels que

$$|k(t,s,u) - k(t,s,v)| \leq \varphi(|u-v|)\,, \text{ pour tout } t, s \in [a,b]\,, u, v \in \mathbb{R}^n, u \leq v;$$

(iv) Il existe $x_0 \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ tel que $x_0(t) \leq \int_a^b k(t,s,x_0(s))ds + g(t)$, pour tout $t \in [a,b]$.
Alors l'équation intégrale **(2)** a une solution unique x^* dans $C([a,b], \mathbb{R}^n)$.
Preuve. Supposns que $X := C([a,b], \mathbb{R}^n)$ muni d'une norme de type Bielecki, c'est-à-dire., $||x||_B := \max_{t\in[a,b]}(|x(t)|\,.e^{-\tau(t-a)}$, pour $x \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ (où $\tau > 0$ est choisi arbitrairement). Considérons sur X le même ordre partiel défini précédemment (voir la preuve du **Thérème 4.1**).
Alors $(X, ||.||_B\,, \leq)$ est un espace métrique complet et ordonné. De plus, pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergeant vers un certain $x^* \in X$ nous avons $x_n(t) \leq x^*(t)$, pour toute $t \in [a,b]$.
En outre, pour tout $x, y \in X$, il existe $c(x,y) \in X$ qui est comparable à x et y .
Définissez $A : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$, par la formule

$$Ax(t) = \int_a^t k(t,s,x(s))ds + g(t), t \in [a,b]\,.$$

D'aprés (ii) nous avons que A croissant. De plus, pour tout $x, y \in X$ avec $x \leq y$ nous avons

$$\begin{aligned}
|Ax(t) - Ay(t)| &\leq \int_a^t |k(t,s,x(s)) - k(t,s,y(s))|\, ds \leq \int_a^t \varphi(|x(s) - y(s)|) ds \\
&= \int_a^t \varphi\left(|x(s) - y(s)|\, e^{-\tau(s-a)} e^{\tau(s-a)}\right) ds \leq \int_a^t e^{\tau(s-a)} \varphi\left(|x(s) - y(s)|\, e^{-\tau(s-a)}\right) ds \\
&\leq \varphi\left(||x - y||_B\right) \int_a^t e^{\tau(s-a)} ds \leq \frac{1}{\tau} \varphi\left(||x - y||_B\right) e^{\tau(t-a)}, \text{ pour tout } t \in [a,b]\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\tau \geq 1$, nous obtenons $||Ax - Ay||_B \leq \varphi\left(||x - y||_B\right)$, pour tout $x, y \in X$ avec $x \leq y$.
De (iv) nous avons que $x_0 \leq Ax_0$.
La conclusion découle maintenant du **Théorème 3.6** ■

Conclusion

Le théorème du point fixe c'est théorème représente un outile fondamentale de convergence pour une large classe de méthode itérative.
On trouve aussi dautres théorème comme celui de Brouwer et Schauder.
Théorème de Brouwer est théorème du point fixe trés fort : l'hypothèse sur la fonction est plutôt faible, on a juste sa contnuité et qu'elle laisse stable la boule unité, et on obtient l'existence d'un point fixe.
Le principe de point fixe est établi dans le théorème Schouder ; ce drenier est un plus profonds d'existence du point fixe, en particulier, pour les espace localement convexes ont été preuver par lui même.
Finalement, on conclu que la recherche des solutions des équations intégrale non linéaire on servant d'une théorème de point fixe sous des conditions de contractivité bien précis, (citons, la contraction de Banach, la contraction non linéaire de Boyd-Wong, ...) est trés éfficace. Cela nos permet de poser plusieurs questions
1/ Ya-t-il une relation entre tout les théorèmes de point fixe et tout les types des équations intégrales linéaire ou non linéaire ?
2/ Est-il possible de trouver de noveaux théorèmes de point fixe en utilisant des conditions contractives plus faibles qui nous permet de résoudre d'autres types d'équations intégrales non linéaire ?.

3/ Est-ce que possible de transformer tout les formes des équations différentielles (partielles, ordinaires, varitionnelles, ...) aux équations intégrales ?.
4/ Si le cas est ainsi, on déduit que la combinaison entre le théorème de point fixe et l'équations intégrales est une bonne solution pour divers probleme des mathématiques.
5/ La réponse aux questions est possible, mais un peu délicat.

Bibliographie

[1] M. Abbas, B .E. Rhoades, Common fixed point theorems for hybrid pairs of occassionally weakly mappings satisfying generalized contractive condition of integral type, Fixed Point Theory Appl., Vol. 2007.

[2] A. Abdelhalm, "Théoréme de Point Fixe Et Leur Application Sur Les équation Intégrale"(2012).

[3] R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily, D. O'Regan, Generalized contractions in partially ordered metric spaces, Appl. Anal., in press.

[4] R. P. Agarwal, D. O'Regan and M. Sambandhan, Random and deterministie fixed point theory for generalized contractive maps. Applicable analysis. 83 (2004) 711-725.

[5] M. A. Al-Thaga and N. Shahzad, Generalized I-nonexpansive selfmaps and invariant approximations, Acta Math. Sin. 24 (2008), no. 5, 867-876.

[6] I. Altun and H. Simsek, Some Fixed Point Theorems on Ordered Metric Spaces and Application, Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Applications, (2010), pp. 1-17.

[7] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fundamenta Mathematicae, vol. 3 (1922), pp. 133-181.

[8] R. M. T. Bianchini, Su un problema di S. Reich riguardante lsa dei puisiti fissi, Boll. Un. Mot.Ital, 5 (1972), 103-108.

[9] A. Bielecki, Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires, Bull. Acad. Polon Sci. III, 4(1956), 261-266.

[10] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. soc. 20 (1969), 458-464. MR 39 :916.

[11] F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equation in Banach spaces, Proceedings of sympozia in pure mathematics, Amer. Math. Soc. 18 (1976).

[12] T. A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr. 189 (1998), 23-31.

[13] L. B. Cirric, A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 267-273.

[14] B. C. Dhage, On a fixed point theorem of Krasnoselkii-Schaefer, Kasubai, Gurucul Colony Ahmedpur, No. 6 (2002), p. 1-9.

[15] B. C. Dhage, D. O'Regan and R. P. Agarwal, "Common fixed point theorems for a pair of countably ondensing mappings in ordered Banach spaces, "Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, vol. 16, (2003), no. 3, pp. 243-248.

[16] Z. Drici, F. A. Mcrae, Vasundhara Devi, J. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces for operators with PPF dependence, Nonlinear Anal. 7 (2007) 641-647.

[17] M. Fréchet, les espaces abstraits, Gauthier-Villar, Paris, 1928.

[18] A. Granas, R. B. Guenther, and J. W. Lee, Some general exixtence principles in the Caratheodory of nonlinear diferential systems, J. Math. Pures et Appl. 70 (1991), 153-196.

[19] J. Jachymski, Jóźwik, Nonlinear contractive conditions : A comparison and related problems, Banach Center Publ.77 (2007) 123-146.

[20] O. Hadžić, E. Pap, V. Radu, Generalized contraction mapping principles in probabilistic metric spaces. Acta Math. Hungar. 101 (2003) 131-138.

[21] H. Hochstadt, Integral Equation, New York, 1973.

[22] O. Hadžić, E. Pap, Fixed point Theory in Probabilistic Metric Spaces, Kluwer Acad. Publ, Dordrecht, 2001.

[23] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Int. J. Math. Sci. 9 (1986), 771-779.

[24] G. Fixed Point Theorems for occasionally weakly compatible mappings, Fixed Point Theory 7 (2006), 217-296.

[25] R. Kannan, some results on fixed points. Bull. Calcutta. Math. Soc. 60 (1968), 761-768.

[26] M. Kern Problèmes Inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003.

[27] W. A. Kirik, and B. Sims, Handbouk of Metricfixed point theory, 2001 Kluwer Academic Publishers.

[28] M. A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen 1964.

[29] W. V. Lovitt Linear integral equation, New York, 1950.

[30] J. Matkowski, "fixed point theoremsfor mappings with a contractive iterate at a point, " Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 62, no. 2, pp. 344-348, 1977.

[31] J. J. Nieto, R. Rodríguez-López, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order 22 (2005) 223-239.

[32] J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopaz, Existence and uniqueness of fixed points in partiallly ordered sets, Proc, Amer, Math, Hungar. 101 (2003) 134-138.

[33] J.J. Nieto, R. L. Pouso, R. Rodríguez-Lópaz, Fixed point theorems in orderd abstract sets, Proc, Amer, Math, Soc, 135 (2007) 2505-2517.

[34] D. O'Regan, and A. Pertus, el, "Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces, "Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 341, no. 2, pp. 1241-1252, 2008.

[35] A.M. Ostowski,the round off stability of iteration, Angew. Math. Mech. Z,47(1967),77-81.

[36] H. K. Pathak, and M. S. Khan, Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type, czechoslovak Math. J. 45 (120) (1995), 685-698.

[37] . H. K. Pathak, M. S. Khan, and R. Tiwari, "A Common Fixed Point Theorems And Its Application to Nonlinear Integral Equations", computers, and mathematics with applications (2007), doi : 10. 1016/ J. Camwa. 2006.08.046.

[38] A. Petru. sel, I. A. Rus, fixed point theorem in ordered L-spaces, Proc, Amer, Math, Soc, 134 (2006) 411-418.

[39] V. Popa, A general fixed point theorem for weakly compatible mappings in compact metric spaces, Turk J Math, 25 (2001), 465-474.

[40] E. Rakotch, A note on contractive mappings, proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 459-465.

[41] A. C. M. Ran, and M. C. B. Reurings, "A fixed point theorem in partically ordered sets and some applications to matrix equations, "Proceedings of American Mathematical Society, vol. 132, no. 5, pp. 1435-1443, 2004.

[42] A. C. M. Ran, and M. C. B. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proceedings of the American Mathematical Society, 132 (2004) 1435-1443.

[43] S. Reich, A comparaison of various definitions, Trans. Amer. Math. Soc. 226 -1977), 257290.

[44] A. C. M. Ran, M. C. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proc, Amer, Math, Soc, 132 (2004) 1435-1443.

[45] I. A. Rus, Generalized Contractions and Applications, Cluj Univ. Paress, 2001.

[46] I. A. Rus, A. Petru sel, G. Petrusel, Fixed point Theory 1950-2000 : Romanian Contributions, House of the Book of Science, Cluj-Napoca. 2002.

[47] I. A. Rus, Picard operators and applications, Sci, Math, Jpn. 58 (2003) 191-219.

[48] V. M. Sehgal, and S. P. Singh, On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convexspaces, Pacific J. Math. 62 (1976) 561-567.

[49] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 32 46 (1982) 149-153.

[50] D. R. Smart, Fixed Points Theorems, Cambridge University Press, New York, 1980.

[51] T. Zamfirescu, A theorem on fixed point, Atti Acad. Naz Lincei Rend. Ci. Sci. Fix. Natur. 52(8) (1972), 832-834.

[52] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications, I. fixed-point theorems, Springer-Verlage, Berlin, 1993.

[53] X. Zhang, "Common fixed point theorems for some new generalized cotractive type mappings". J. Math. Anal. Appli. 333 (2007), 708-786.