République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Tébessi –Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equations aux Dérivées Partielles et applications

Thème:

Etude de quelques problèmes d'évolution du type parabolique

Présenté par:

Aounallah Radhouane

Bouaziz Hichem

Devant le jury:

Nouri Boumaza	M.C.B	Univ. Tébessa	Président
Salim Raouar	M.A.A	Univ. Tébessa	Rapporteur
Hafdallah Abdelhak	M.A.A	Univ. Tébessa	Examinateur

Date de soutenance: 29/05/2016

Note : Mention :

إهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

اللهم إني أسألك إيمانا دائما و قلبا خاشعا علما نافعا و يقينا صادقا ودينا قيما

بداية و قبل كل شيء أقول الحمد لله الذي وفقنا و منحنا القدرة على إتمام هذا العمل

الحمد لله الذي خلق كل شيءٍ فقدَّره تقديراً، وصلى الله على النبيِّ الذي لا نبي بعده محمَّد وعلى آله وصحبه وسلم تسليماً كثيراً

إلى أغلى من على قلبي ' إلى من أفدي بروحي و فؤادي ' إلى زهرة أحلامي و نور أيامي إلى نبع العطف و الحب و الحنان ' إلى من كان لي صدرا دافئا و قلبا صاغيا ...

إليك أمي

إلى من أثقلت السنين كاهليه ' إلى من احتضنتني يداه في الصغر 'و ابتسامته في الكبر' إلى المنار في الإبحار و القدوة في الحياة ' إلى سندي على الصعاب

إليك أبي الغالي

إلى كل عائلتي و أهلي

إلى كل إخوتي و أخواتي

إلى كل من رافقني في درب حياتي

إلى كل زملائي و زميلاتي في هذا المشوار الدراسي

كما أني أتقدم بجزيل الشكر لكل أساتذة قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

كما لا أنسى الأستاذ الفاضل سليم روار الذي قام على هذا العمل و أعاننا على إتمامه و تقديمه.

** بوعزيز شلم **

إهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على والدي و أن أعمل صالحا ترضاه و أدخلني برحمتك في عبادك الصالحين

قال الله تعالى " و قل اعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنون "

اللهم لك الحمد كما ينبغي لجلال وجهك و عظيم سلطانك

و الصلاة و السلام على أشرف خلق الله طب العقول و دوائها و نور القلوب و ضيائها

إلى العائلة التي أعتز دائما بالانتماء إليها

إلى والدي العزيزين الذين داسا على راحتيهما من أجل راحتنا

و لهم الفضل في كل خطوة نجاح نخطوها

إلى أروع من في القلوب إلى رمز البذل و الصبر و العطاء إلى فيض الحب و العطف و الحنان إلى الشمس التي لا تغيب إلى أجمل هبة وهبني الله إياها إلى من جعلها ربي تاجا فوق رأسي و التي لا تكفيها الكلمات حقها

أمي الغالية...

إلى من كابد المشاق من أجل أن نكون الأفضل إلى من علمني أن العلم حب قبل أن يكون اجتهاد

أبي العزيز....

إلى كل أخواتي....

إلى كل الذين لهم مكان في قلبي ...

إلى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي ' إلى كل من أضاء طريقي بذكريات جميلة

إلى من كانوا معي على طريق النجاح و الخير إلى من عرفت كيف أجدهم و علموني أن لا أضيعهم .

إلى زملائي و زميلاتي طلبة قسم الرياضيات

ثم أني أتقدم بجزيل الشكر و العرفان إلى كل أساتذة معهد الرياضيات و الإعلام الآلي .

و ختاما من باب التقدير لا التأجيل الأستاذ سليم روار الذي تحملنا طوال هذا المشوار و أعاننا من أجل إنهاء هذا العمل .

** عون الله رضوان **

Remerciements

Nous remercions avant tous ALLAH de nous avoir donné la force et le courage pour réaliser ce travail

Prière et salut sur notre prophète MOHAMED

Nous tenons à remercier très fort respectable enseignant et encadreur Monsieur Salim Raouar pour son soutien et encouragement

Nous remercions Dr. Buomaza Nouri et Mr. Hafdaellah Abdelhak acepté avec gentilles d'examiner notre travail

Aussi nous remercions par cette occasion toutes les enseignants du département des mathématique et informatique sans oublier notre amies de la 2eme année master math, promotion 2015-2016

Et à tout ce qui nous a encouragés d'un simple mot, sourire ou une prière de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

ملخص

هذا العمل مخصص لدراسة الوجود و عدم الوجود الكلي لحلول بعض أنظمة رد الفعل والانتشار ذات مشتقات عادية.

و كذلك دراسة عدم الوجود الكلي لحلول بعض أنظمة رد الفعل و الانتشار ذات مشتقات كسرية.

بالاضافة لدراسة الشروط اللازمة للوجود المحلي و الكلي لحلول بعض أنظمة رد فعل و الانتشار ذات مشتقات كسرية.

الكلمات المفتاحية:

انظمة رد الفعل و الانتشار،الوجود الكلي ،المشتقات العادية ،المشتقات الكسرية ،تابع ليبونوف.

Résumé

Ce travail, est consacré à l'étude de l'existence et la non-existence des solutions globales pour quelques systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées classiques, et la non-existence des solutions globales pour quelques systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires .

Ainsi que l'étude des conditions nécessaires de l'existence locale et globale pour quelques systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires.

***Mots-clés** : problèmes d'évolution, Système de réaction-diffusion - Existence globale, Existence globale faible, conditions nécessaires, Non-existence.*

.

Abstract

In this work,we did study existence of global solutions for some systemes of reaction-diffusion with classical derivatives ,and the non existence of weak globale solutions for some systemes of reaction-diffusion with fractional derivatives , as well as the study of necessary conditions for local and global existence for some reaction-diffusion systems with fractional derivatives.

Key-words: evolution problems, reaction-diffusion systems, global existence, global weak existence, non existence, necessary conditions.

Table des matières

Chapitre **1**

Chapitre préliminaires

1.1 Notations et notions générales 2

1.2 Théorèmes et formules fondamentaux 4

1.3 Quelques inégalités utiles 5

1.4 Formes Quadratiques 6

1.5 Principe du maximum 6

1.6 Systémes de rèaction-difusion 7

1.7 Existence globale et positivité des solutions 9

1.8 La dérivation fractionnaire 11

Chapitre **2**

Existence globale des solutions classiques pour des systèmes de réaction diffusion avec des dérivées classiques

2.1 Existence globale des solutions pour un système de réaction-diffusion avec deux équations 16

2.1.1 Positivité des solutions 16

2.1.2 Existence globale 17

2.2 Existence globale des solutions pour un système avec trois équations 22

2.2.1 **Existence globale** 22

Chapitre 3
Non existence globale des solution pour un systeme de reaction-diffusion

Chapitre 4
Non existence globale de solution d'équations
Et systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires

4.1 Non existence de solution globale pour une équation différentielle fractionnaire . . 41
4.2 Non existence de solutions pour un système d'équations différentielles fractionnaires 47

Chapitre 5
Les Conditions nécessaires pour l'existence locale et globale de certains problèmes d'évolution

5.1 Les Conditions nécessaires de l'existence locale et globale pour un système d'équations différentielles fractionnaires 55

Introduction

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'existence et non existence de solutions pour des systèmes de réaction-diffusion qui font une partie d'équations aux dérivées partielles de type paraboliques. On étudie dans ce mémoire deux types de système de réaction-diffusion,le premier système de réaction-diffusion avec dérivée classiques, Tendis que le deuxième est système réaction-diffusion est avec des dérivées fractionnaires.

Le mémoire se compose de cinq chapitres. Dans le premier chapitre on introduit quelque notions et rappels de base, quelque espace fonctionnelle (l'espace de Sobolev,l'espace $L^p(\Omega)$), des théorèmes fondamentaux (l'effet régularisant,Principe du maximum) et quelques définitions (système de réaction-diffusion,et dérivées fractionnaires).

Présentons les systèmes de réaction-diffusion, et dérivation fractionnaire...

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour deux problèmes

Le premier problème est définit comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = g(u,v) = \Lambda - \lambda(t) f(u,v) - \mu u \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - b\Delta u - d\Delta v = h(u,v) = \lambda(t) f(u,v) - \mu v \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{2}$$

et les données initiales continues et bornées

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x) \text{ dans } \overline{\Omega} \tag{3}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1,avec la frontière $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.

Les constantesa, b, d,Λ,et μ;sont telles que :

$$a > 0; b > 0, d - a \geq b, \mu > 0 \text{ et } \Lambda \geq 0 \tag{4}$$

Pour cette raison on utilise une fonctionnelle de Lyapunov à croissance polynômiale de la forme

$$J(t) = \int_{\Omega} (1 + \delta(u + u^2)e^{\varepsilon v} dx$$

Pour le deuxième problème on a le système de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a_1\Delta u = f(u,v,w) = \sigma - b_1 u + \frac{u^{p1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+c)}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - a_2\Delta v = g(u,v,w) = -b_2 v + \frac{u^{p2}}{v^{q_2}w^{r_2}} & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - a_3\Delta w = h(u,v,w) = -b_3 w + \frac{u^{p3}}{v^{q_3}w^{r_3}}. \end{cases} \tag{5}$$

avec les conditions
$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\partial w}{\partial \eta}=0 \text{ dans } \partial\Omega\times\{t>0\}\,, \tag{6}$$
et les données initiales
$$u(0,x)=\varphi_1(x)>0,\quad v(0,x)=\varphi_2(x)>0,\quad w(0,x)=\varphi_3(x)>0,\quad \text{dans } \Omega, \tag{7}$$

pour cette raison on utilise une fonctionnelle de Lyapunov à croissance polynômiale de la forme
$$L(t)=\int\limits_{\Omega}\frac{u^{\alpha}(t,x)}{v^{\beta}(t,x)w^{\gamma}(t,x)}dx.$$

Dans le chapitre 3,on s'intéresse à l'étude de la non-existence des solutions globales faibles pour le problème
$$\begin{cases} u_t=\Delta\left(a\left(x,t,u,v\right)u\right)+\Delta\left(b\left(x,t,u,v\right)v\right)+h(x,t)\left|v\right|^{p}\\ v_t=\Delta\left(c\left(x,t,u,v\right)u\right)+\Delta\left(d\left(x,t,u,v\right)v\right)+k(x,t)\left|u\right|^{q}\end{cases} \tag{8}$$

Ce système est complété par les conditions initiales suivantes
$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0; v(x,0)=v_0(x)\geq 0, x\in\mathbb{R}^N, \tag{9}$$

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la non-existence des solutions globales faibles pour les deux problèmes :

Le premier problème est définit comme suit
$$\begin{cases} \underset{0/t}{D}^{\alpha}u+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u)=h(x,t)\left|u\right|^{1+\widetilde{p}}\, pour (x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}=:Q,\\ u(x,0)=u_0(x)\geq 0, pour x\in\mathbb{R}^N.\end{cases}$$
Pour le deuxième problème on a le système de la forme
$$\begin{cases} \underset{0t}{D}^{\alpha}(u-u_0)+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u)=f(x,t)\left|v\right|^{p} dans Q,\\ \underset{0t}{D}^{\delta}(v-v_0)+(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}(v)=g(x,t)\left|u\right|^{q} dans Q.\end{cases} \tag{10}$$
avec les conditions initiales
$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0; v(x,0)=v_0(x)\geq 0, x\in\mathbb{R}^N, \tag{11}$$

Dans le dernier chapitre,on s'intéresse à l'étude des conditions nécessaires de l'existence locale et globale pour le problème
$$\begin{cases} \underset{0t}{D}^{\alpha_1}u+(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}(u)=\left|u\right|^{p_1}\left|v\right|^{q_1} \text{ dans } Q_T,\\ \underset{0t}{D}^{\alpha_2}v+(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}(v)=\left|u\right|^{p_2}\left|v\right|^{q_2} \text{ dans } Q_T.\end{cases} \tag{12}$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0; v(x,0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

et on termine par quelques résultats concernant l'existence globale et la non-existence locale pour les solutions.

Chapitre 1

Chapitre préliminaires

On introduit dans ce chapitre des notions et définitions de base, des théorèmes fondamentaux (Principe du maximum,...), quelques inégalités qui sont très utiles pour la suite de ce travail.

1.1 Notations et notions générales

Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, ..., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.

On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x))$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, son gradient est le champ de vecteurs défini par

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right).$$

Pour un champ de vecteurs $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de u la fonction définie par

$$\operatorname{div} u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière.

On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $v(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \Omega$,$v(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.

On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.

On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par $\frac{\partial u}{\partial v}(x) = \nabla u(x) \cdot v(x)$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $v(x)$).

Espaces fonctionnels

On dfinit l'espace $L^p(\Omega)$,par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p \, dx,$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{mesurable } \exists C \text{ et } \; |u| \leq C \text{ p p sur } \Omega \}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\,|u(x)| = \inf\{C; |u| \leq C \text{ p p sur } \Omega\}.$$

On définit les espaces $L^p(0,T,X)$,$1 \leq p \leq \infty$ comme suit

$$L^p(0,T,X) = \left\{u : [0,T] \to X : \text{ mesurable et } \|u\|_{L^p(0,T,X)} < \infty\right\}.$$

Muni de la norme

$$\begin{cases} \|u\|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|u\|^p_X\,dt \;\text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup\limits_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_X \text{ si } p = \infty. \end{cases}.$$

On définit les espaces $L^p_{loc}(\Omega)$,$1 \leq p < \infty$ comme suit

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable ;} \exists k \text{ compacte telle que} \int\limits_k |u|^p\,dx < \infty, 1 \leq p < \infty\right\}.$$

Muni de la norm

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|k|}\int\limits_k |u|^p\,dx.$$

On définit les espaces $L^p_{loc}(Q, f(t,x), dtdx)$,$1 \leq p < \infty$ comme suit

$$L^p_{loc}(Q; f(t,x); dtdx) = \left\{u : Q \to \mathbb{R}\diagdown \int\limits_k |u|^p\,f dtdx < +\infty; \text{pour } k \subset Q\right\}.$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de **Sobolev** défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|^2\,dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall\alpha \in \mathbb{N}^* : |\alpha| \leq m\right\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^P(\Omega); \forall\alpha : |\alpha| \leq m\right\}.$$

Muni de la norme

$$\begin{cases} \| u \|_{m,p}^{p} = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} \ \ si \ 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{x\in\Omega} \|D^{\alpha}u\|_{L\infty(\Omega)} \ \ si \ p = \infty. \end{cases},$$

où $D^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$.,est la dérivée au sens des distributions.
$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)| \, .$$

$C^{k}(\Omega)$,$k \in \mathbb{N}$,désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω et on écrit

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^{k}(\Omega).$$

$C_{x,t}^{r,k}(\Omega)$,$k; r \in \mathbb{N}$,désigne l'espace des fonctions r fois continûment différentiable par rapport à x sur Ω et désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiable par rapport à t sur Ω.
Naturellement on a $H^{1}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ et $H^{m}(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

1.2 Théorèmes et formules fondamentaux

Nous rappelons ci-dessous quelques théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour l'étude des équations d'évolution.

Théorème 1.1 ***D'Otrogradski (où théorème de la divergence)***
Soit S une surface, frontière d'un domaine de volume V.
Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieur du domaine à l'extérieur.
Alors si A_1,A_2 et A_3 sont des fonctions continues dans le domaine ,le théorème de la divergence s'exprime ainsi

$$\int\limits_{V} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV = \int\limits_{S} A_1 dydz + A_2 dzdx + A_3 dxdy. \tag{1.1}$$

Sous forme vectorielle avec $A = (A_1, A_2, A_3)$ ceci peut s'écrire simplement

$$\int\limits_{V} \nabla \cdot AdV = \int\limits_{S} A \cdot \eta dS. \tag{1.2}$$

Ce théorème est appelé encore théorème de Green dans l'espace.

Preuve. Voir M. R. Spiegel[24] ■

Formule de Green

Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, alors la formule de Green s'écrit

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u)\, v dx = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v. \tag{1.3}$$

Preuve. Voir H.Bresis[4] ■

1.3 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

Théorème 1.2 *Soit* $p \geq 1$ *et* q *des nombres réels liés par la relation* $p + \acute{p} = p\acute{p}$ *alors* $\forall u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^{p'}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)v(x)|\, dx \leq \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} |v(v)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.4}$$

Preuve. Voir Brezis[4] ■

Inégalité de Young

Théorème 1.3 *Soit f une fonction continue et croissante sur* $[0; c]$ *où* $c > 0$ $f(0) = 0$*,* $a \in [0; c]$ *et* $b \in [0; f(c)]$*, alors*

$$ab \leq \int\limits_0^a f(x)\, dx + \int\limits_0^b f^{-1}(x)\, dx, \tag{1.5}$$

où f^{-1} *est la fonction inverse de* f*.*

Preuve. (Voir Mitrinovic, Pecaric et Fink [18]). ■

La fonction $f(x) = x^{p-1}$avec $p > 1$ dans chaque intervalle $[0, c]$ satisfait les conditions précédentes. On applique (1.5) utilisant $p + \acute{p} = p\acute{p}$,on obtient

$$ab \leq \frac{a^{\acute{p}}}{\acute{p}} + \frac{b^p}{p}, \forall a; b \in \mathbb{R}^+.$$

Si on remplace la fonction $f(x)$ par εx^{p-1}dans (1.5) alors on obtient l'inégalité de **Young avec** ε

$$ab \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^{\acute{p}}, \forall X; Y \in \mathbb{R}^+$$

1.4 Formes Quadratiques

Définition 1.1 *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré.*
Une forme quadratique par rapport aux n *variables* $u_1, u_2, ..., u_n$ *peut être représentée par*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j, \tag{1.6}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$*est une matrice symétrique.*
Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ *par* u *et la forme quadratique* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$ *par* $A(u, u)$*, nous pouvons écrire*

$$A(u, u) = u^T A u = Au \cdot u. \tag{1.7}$$

Définition 1.2 *Une forme quadratique* $A(u, u)$ *est dit définie positive si*

$$A(u, u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0. \tag{1.8}$$

Théorème 1.4 *Une forme quadratique* $A(u, u)$*est dit définie positive si et seulement si,tous les déterminants principaux de cette matrice sont positifs.*π

$$\det 1 > 0, \det 2 > 0, ..., \det n > 0.$$

Preuve. Voir F R Gantmacher[9] ■

1.5 Principe du maximum

Considérons le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega \times [0, +\infty] , \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, +\infty] , \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ sur } \Omega. \end{cases} . \tag{1.9}$$

Théorème 1.5 *Soit* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et soit* u *la solution du problème (1.9), alors on a*

$$Min \left\{ 0, \inf_{\Omega} u_0 \right\} \leq u(x, t) \leq Max \left\{ 0, \sup_{\Omega} u_0 \right\} \qquad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty[. \tag{1.10}$$

Preuve. Voir H.Bresis[4] ■

Corollaire 1.1 *Considérons maintenant le problème non homogène*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -f(u) \textit{ sur } \Omega \times [0, +\infty], \\ u = 0 \textit{ sur } \partial\Omega \times [0, +\infty], \\ u(x, 0) = u_0(x) \textit{ sur } \Omega. \end{cases}, \tag{1.11}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$*,* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$.
Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et soit* u *la solution du problème (1.11) (puisque* $f(u) \geq 0 \forall u \geq 0$*,(i e)* $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0$*)*
i)si $u_0 \geq 0$ *p p sur* Ω *alors* $u \geq 0$ *sur* $\Omega \times [0, +\infty[$.
ii)si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *alors* $u \in L^\infty(\Omega)$ *et* $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

1.6 Systémes de rèaction-difusion

Dans un milieu continu, soient N espèces chimiques (où constituants fluides). On note $i = 1, 2, ..., N$ l'une de ces espèces, soient alors $u_i(x, t)$ sa concentration (où densité) au temps t et au point $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de R^n, et D_i son coeffecient de diffusion. Les concentrations $u_i(x; t)$ représentent les variable étudiée dans un modèle de réaction-diffusion dont l'évolution est régie par le système d'équation aux dérivées partielles suivantes, appelées équations de réaction diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \tag{R-D}$$

où $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), ..., u_n(x, t))$ est l'inconnue

$$f(x, t, u(x, t)) = (f_1(x, t, u(x, t)), ..., f_m(x, t, u(x, t))),$$

est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x, t, u(x, t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u.
En chimie u est un vecteur de concentrations chimiques et f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.
En dynamiques des populations u représente le vecteur de densités des populations et f l'effet des relations prédateurs-proie, des relations compétitions où symbiose. Le terme $D\Delta u$ représente des mouvement aléatoire d'individus de la population étudiée (voir M. Kirane and S.Kouachi[12] , [13]et[14]).
En biologie par exemple, lors du transport sanguin du sucre $u = (u_1, u_2, u_3)$ désigne les

concentrations respectives en sucre complexe (sucrose) et sucre simple (glucose et fructose)sucrose hydrolysis by acid

$$sucrose \underset{u_1 \rightarrow u_2 \oplus u_3}{\xrightarrow{hydrolysisbyasid}} glucose \oplus fructose$$

$f(u)$ représente les réactions chimiques sur les sucres et $D\Delta u$ désigne, comme toujours, le flux de ces sucres à travers la frontière de la surface où se produit cette réaction (voir Rothe[22] ,Morgan[19] , Feng[6]).

Définition 1.3 *Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations paraboliques non linéaires qui peuvent s'écrire sous la forme*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\triangle u = f(u),$$

où l'inconnue $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_m(x,t))^t$ *est un vecteur des variables dépendantes* $f(x,t,u) = (f_1(x,t,u), ..., f_m(x,t,u))^t$*est la réaction (généralement non linéaire) et* $D(x,t,u(x,t))$ *est une matrice carrée* $m * m$ *définie positive et diagonalisable appelée matrice de difusion*

Fonctionnelle de Lyapunov

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles basées sur des estimations à priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov. Ici, nous n'exposons pas les deux premières méthodes puisqu'elles ne donnent pas toujours l'existence globale vu la difficulté et la complexité des termes de réaction de certains systèmes de réaction-diffusion, mais nous consacrons à la dernière méthode qui donne des résultats satisfaisants.

Définition 1.4 *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée au système (R-D), toute fonction*

$$L : R^+ \rightarrow R^+, \tag{1.12}$$

telle que

$$\frac{\partial L(u_1(t,.), ..., u_m(t,.))}{dt} \leq 0$$

pour tout $t > 0$ *et tout solution* $(u_1(t,.), ..., u_m(t,.))$.

Existence locale et unicité

L'étude d'existence locale et d'unicité des solutions du problème des équations aux dérivées

partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations diffiérentielles semi linéaires abstraites (voir A. Friedman [7] , D. Henry [11] et Pazy [20])
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire,
$f : X \to X$:Etant donné $u_0 \in X$.
Considérons le problème

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = f \qquad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{R-D}$$

Définition On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t \geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (R-D), s'il existe u définie sur un intervalle maximale $[0, T^*)$ qui pour tout $t < T^*$ est l'unique solution de (R-D) dans $C^1([0, T^*), X)$.
En particulier, l'une des deux éventualités suivantes à lieu
i)$T^* = \infty$
ii)$T^* < \infty$ et $\lim\limits_{t \to T^*} \|u\| = \infty$
Remarque
-Si la propriété (i) est satisfaite, on dit que la solution u est globale.
-Si la propriété (ii) est satisfaite, on dit que la solution explose en temps fini.

1.7 Existence globale et positivité des solutions

Existence globale

Nous donnons dans ce paragraphe une idée de l'état des connaissances sur l'existence globale de solution.
Il est bien connu que, pour démontrer l'existence globale des solutions d'un système de réaction diffusion, il suffit de montrer que les termes de réaction sont dans $L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$ pour un certain $p > \frac{n}{2}$ (voir J. A. Smoller[9]).

Théorème 1.6 ***(Existence Globale par l'effet régularisant)***
Soit le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(t, x, u) sur [0, T[\times\Omega. \tag{1.13}$$

Avec la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad\qquad x \in \Omega, \tag{1.14}$$

et la condition aux limite

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \qquad\qquad \textit{sur } [0, T[\times\partial\Omega, \tag{1.15}$$

Si

$$f(t,x,u) \in L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) \text{ pour un certain } p > \frac{n}{2}, \text{où } n = \dim\Omega, \tag{1.16}$$

(i.e)

$$\begin{aligned} f(t,x,u) &\in L^\infty(0,T,L^p(\Omega)) \Leftrightarrow \sup_{0<t<T^*} \|f(t,x,u)\|_{L^p(\Omega)} < +\infty, \\ &\Leftrightarrow \int_\Omega |f(t,x,u)|^p \, dx \le C; \forall t \in [0,T[, \end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation (1.13) est globale.

Preuve. Voir D Henry[11]. ■

Exemple

Considérons le système

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = -u^\alpha \text{ sur } \Omega \times [0,T[, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ sur } \Omega. \end{cases} . \tag{1.17}$$

Nous allons étudier l'existence globale du problème (1.17) en appliquant le théorème de l'effet régularisant.

On prend $n = \dim\Omega = 1$ ou $n = 2$, d'après le théorème (1.6),il faut montrer que $\int_\Omega |-u^\alpha|^p \, dx \le C$ Pour un certain $p > \frac{n}{2}$, alors il suffit de montrer que $\int_\Omega u^{\alpha+1} dx \le C$ On multiplie l'équation du problème (1.27) par u^α

$$u^\alpha u_t - u^\alpha \Delta u = -u^{2\alpha},$$

Et en intègre sur Ω

$$\int_\Omega u^\alpha u_t dx - \int_\Omega u^\alpha \Delta u dx = -\int_\Omega u^{2\alpha} dx \le 0,$$

donc

$$\frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\alpha+1} dx + \int_\Omega \alpha\, |\nabla u|^2\, u^{\alpha-1} dx = -\int_\Omega u^{2\alpha} dx \le 0,$$

On obtient

$$\frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\alpha+1} dx \le 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega u^{\alpha+1} dx \le 0 \Leftrightarrow \int_\Omega u^{\alpha+1}(t,x) dx \le \int_\Omega u^{\alpha+1}(0,x) dx = C,$$

Alors la solution est globale.

Positivité des solutions

Théorème 1.7 *Introduisons le système diagonale*

$$\left\{ \begin{array}{c} U_t - d_1 \Delta U = F_1(U,V) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ V_t - d_2 \Delta V = F_2(U,V) \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ U(0,x) = U_0(x), V(0,x) = V_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. , \tag{1.18}$$

où $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions de classe* C^1,$d_{1,}d_2 > 0$
Supposons que les fonctions $(F_i)_{i=1,2}$ *sont quasi-positive c-à-d*

$$\forall U_1, U_2 \geq 0, F_1(0,U_2), F_2(U_1,0) \geq 0. \tag{1.19}$$

Lemme 1.1 *Si les fonctions* $(F_i)_{i=1,2}$ *sont quasi-positive, alors*

$$U_0(x), V_0(x) \geq 0 \Rightarrow U(t,x), V(t,x) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0, T^*[. \tag{1.20}$$

Preuve. Voir Friedman[7] ■

1.8 La dérivation fractionnaire

Commençons d'abord par l'historique du concept ;nous connaissons que **Leibnitz** est l'inventeur De la notation $\frac{d^n y}{dx^n}$ mais en 1695 l'hôpital posa une question qui surprit leibnitz
Question :
·Que se passerait-il si $n = \frac{1}{2}$ et leibnitz.,répondit que "ceci est un paradoxe duquel naitrait un jour de belle conséquences "
·Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{éme} siécle inclut Fourier,Abel ; Liouville vint Reiman ..ect

La fonction Gamma

La fonction d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes. Pour $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \tag{1.21}$$

la fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tout entier.
On a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et pour n entier on a $n! = \Gamma(n+1)$.

la fonction Béta

La fonction Béta est définie par
$\beta(p,q)=\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,avec $\mathrm{Re}(p)>0$ et $\mathrm{Re}(q)>0$.

Dérivation fractionnaire approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$,alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1\leq p<n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$\underset{at}{\overset{Rp}{D}}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.22}$$

La dérivée à droite, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par

$$\underset{at}{\overset{Rp}{D}}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t(t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.23}$$

La dérivée à gauche, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par

$$\underset{tb}{\overset{Rp}{D}}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n\int_t^b(\tau-t)^{n-p-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.24}$$

Exemple 1.1 *La dérivée de* $\underset{t\searrow T}{D^{\alpha}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l$*au sens de Riemann-Liouville* $(0\leq\alpha<1)$

$$\underset{t\searrow T}{D^{\alpha}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^1\int_t^b(\tau-t)^{-\alpha}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)^l d\tau.$$

On pose $\tau=\lambda T+(1-\lambda)t$ *,donc* $\tau=(T-t)\lambda+t$.
Donc

$$\begin{aligned}
\underset{t\searrow T}{D^{\alpha}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}T^{-l}\frac{d}{dt}\int_0^1\frac{(T-t)^{l+1}(1-\lambda)^l}{((T-t)\lambda)^{\alpha}}d\lambda,\\
&= -T^{-l}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}(T-t)^{l+1-\alpha}\int_0^1(1-\lambda)^l\lambda^{-\alpha}d\lambda,\\
&= T^{-l}\frac{(l+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(T-t)^{l-\alpha}\int_0^1(1-\lambda)^l\lambda^{-\alpha}d\lambda,\\
&= T^{-l}\frac{(l+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(T-t)^{l-\alpha}\beta(l+1,-\alpha+1),\\
&= T^{-l}(T-t)^{l-\alpha}\frac{\Gamma(l+1)}{(l+1-\alpha)\Gamma(l+1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Dérivation fractionnaire Approche de Caputo.

Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a,b]$.
La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est défnie par

$$\underset{at}{\overset{Cp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.25}$$

La dérivée à droite, de Caputo, correspondante est définie par

$$\underset{at}{\overset{Cp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.26}$$

La dérivée à gauche, de Caputo, correspondante est définie par

$$\underset{tb}{\overset{Cp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_t^b (\tau-t)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.27}$$

Exemple 1.2 *La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo.*
Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$,alors on a
$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$ d'ou

$$\underset{at}{\overset{Cp}{D}}(t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura

$$\begin{aligned}
\underset{at}{\overset{Cp}{D}}(t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} d\tau, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n-1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Propriétés

Relation entre dérivée de caputo avec la dérivée de Riemann Liouville

Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$)supposons que f est une fonction telle que $\overset{Cp}{\underset{at}{D}}$ et $\overset{Rp}{\underset{at}{D}}$ Existent alors

$$\overset{Cp}{\underset{at}{D}} f(t) = \overset{Rp}{D}_{at}\left[f(t) - f(0)\right]. \tag{1.28}$$

Chapitre 2

Existence globale des solutions classiques pour des systèmes de réaction diffusion avec des dérivées classiques

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence globale des solutions classiques pour des systèmes de réaction diffusion avec des dérivées classiques, on commence par des systèmes avec deux équations, puis des systèmes avec trois équations.

2.1 Existence globale des solutions pour un système de réaction-diffusion avec deux équations

Considérons le système de réaction-diffusion (voir[3])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = g(u,v) = \Lambda - \lambda(t) f(u,v) - \mu u \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta u - d\Delta v = h(u,v) = \lambda(t) f(u,v) - \mu v \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{2.2}$$

et les données initiales continues et bornées

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x) \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{2.3}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1,avec la frontière $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial\eta}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.
Les constantesa, b, d,Λ,et μ;sont telles que

$$a > 0; b > 0, d - a \geq b, \mu > 0 \text{ et } \Lambda \geq 0. \tag{2.4}$$

On suppose que $t \to \lambda(t)$ est une fonction non négative et bornée sur $C(\mathbb{R}^+)$,et que f est non négative continûment différentiables sur $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$,et satisfait
$f(0,s) = 0, \forall s \in \mathbb{R}^+$,et

$$\lim_{s\to+\infty} \left(\frac{\ln(1 + f(.,s))}{s}\right) = 0. \tag{2.5}$$

2.1.1 Positivité des solutions

Puisque u_0 est non négative sur Ω on déduit du principe du maximum appliqué à la première équation du système (2.1) que reste non négative et bornée sur $(0, T^*) \times \Omega$,et on a

$$0 \leq u(x,t) \leq k = \max\left(\|u_0\|_\infty, \frac{\Lambda}{\mu}\right).$$

Et pour obtenir la positivité de v ,on suppose que

$$\|u_0\|_\infty \leq \frac{\Lambda}{\mu}. \tag{2.6}$$

Lemme 2.1 *(voir [3])*
Soit (u,v) *la solution de (2.1) - (2.3).Si le donnée initial* v_0 *satisfait à la condition*

$$v_0 \geq \frac{b}{d-a}(\frac{\Lambda}{\mu} - \|u_0\|_\infty).$$

Alors toute $(x,t) \in (0,T^*) \times \Omega$ on a

$$v(x,t) \geq \frac{b}{d-a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u(x,t)).$$

Preuve. (voir [3])
En multipliant l'équation (2.1) par$(\frac{b}{d-a})$, en l'ajoutant à l'équation (2.2)et posant $w = v - \frac{b}{d-a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u)$, le système (2.1) - (2.3) équivalent au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = \Lambda - \lambda(t)f(u,w) - \mu u \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - d\Delta w = (1 - \frac{b}{d-a})\lambda(t)f(u,w) - \mu w \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{cases} u(.,0) = u_0(.) \geq 0 \\ w(.,0) = w_0(.) \geq 0 \end{cases}. \tag{2.8}$$

En utilisant (2.4) on déduit du principe du maximum appliqué à la deuxiéme équation du système (2.1) on trouve que
$w(x,t) \geq 0, \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T^*)$.
Donc

$$v(x,t) \geq \frac{b}{d-a}(\frac{\Lambda}{\mu} - u(x,t)), \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T^*)$$

■

2.1.2 Existence globale

Il est bien connu que pour montrer l'existence globale des solutions pour (2,1) -(2,3) (voir Henry[11],pp 35-62), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|f(u,v)\|_p$ et $\|g(u,v)\|_p$ pour $t \in [0; T_{max}[$ dans l'espace $L^p(\Omega)$, pour un certain $p > \frac{n}{2}$ Notre but est de construire une fonctionnelle de Lyapunov à croissance exponentielle pour trouver des estimations à priori de la solution.

Considérons la fonctionnelle $J(t) = \int\limits_{\Omega} (1 + \delta(u + u^2))e^{\varepsilon v} dx$ (voir Haraux and Youkana[10]).

Où δ et ε sont des constantes telle que

$$0 < \delta \leq \min(\frac{\mu}{2\Lambda(1+2k)}, 2(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \frac{1}{1+2k})^2), \tag{2.9}$$

et

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{1+\delta(k+k^2)} \min(1, \frac{d-a}{b}). \tag{2.10}$$

Théorème 2.1 *(voir [3])*

Soit $(u(t,\cdot), v(t,\cdot))$ une solution de (2.1) - (2.3) sur $(0, T^*)$, alors il existe une constante positive γ telle que pour toute $t \in (0, T^*)$ la fonctionnelle

$$J(t) = \int\limits_{\Omega} (1 + \delta(u + u^2)e^{\varepsilon v} dx, \tag{2.11}$$

satisfait la relation

$$\frac{d}{dt} J(t) \leq -\frac{\mu}{2} J(t) + \gamma. \tag{2.12}$$

Preuve. (voir [3])

Dérivant J (t) par rapport à t, on obtient

$$\acute{J}(t) = \int\limits_{\Omega} \left[(\delta(1+2u)\partial_t u) + \varepsilon(1 + \delta(u+u^2)\partial_t v \right] e^{\varepsilon v}.$$

On remplace $\partial_t u$,et $\partial_t v$ dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \acute{J}(t) &= \int\limits_{\Omega} \left\{ \left[a\delta(1+2u) + \varepsilon b(1+\delta(u+u^2) \right] e^{\varepsilon v} \right\} \Delta u dx + \varepsilon d \int\limits_{\Omega} \left\{ (1+\delta(u+u^2)e^{\varepsilon v} \right\} \Delta v dx, \\ &\quad + \delta \int\limits_{\Omega} (1+2u)(\Lambda - \lambda(t) f(u,v) - \mu u) e^{\varepsilon v} dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega} (1+\delta(u+u^2))(\lambda(t) f(u,v) - \mu v) e^{\varepsilon v} dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$\acute{J}(t) = G + H_1 + H_2 + H_3,$$

où

$$
\begin{aligned}
G &= -\delta \int\limits_{\Omega} \left[2a + b\varepsilon(1+2u)\right] |\nabla u|^2 e^{\varepsilon v} dx, \\
&\quad -\varepsilon \int\limits_{\Omega} \left[\delta(a+d)(1+2u) + b\varepsilon(1+\delta(u+u^2))\right] \nabla u \nabla v e^{\varepsilon v} dx - d\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega} \left[(1+\delta(u+u^2)\right] |\nabla v|^2 e^{\varepsilon v} dx,
\end{aligned}
$$

et

$H_1 = \int\limits_{\Omega} (\Lambda \frac{\delta(1+2u)}{1+\delta(u+u^2)} - \mu u \frac{\delta(1+2u)}{1+\delta(u+u^2)} - \mu)(1+\delta(u+u^2))e^{\varepsilon v} dx,$

$H_2 = \int\limits_{\Omega} (\varepsilon - \frac{\delta(1+2u)}{1+\delta(u+u^2)})\lambda f(u,v)(1+\delta(u+u^2))e^{\varepsilon v} dx,$

$H_3 = \mu \int\limits_{\Omega} (1-\varepsilon v)(1+\delta(u+u^2))e^{\varepsilon v} dx.$

On observe que G implique une forme quadratique par rapport à∇u et ∇v

$$
\begin{aligned}
Q &= \delta\left[2a + b\varepsilon(1+2u)\right] e^{\varepsilon v} |\nabla u|^2 + d\varepsilon^2(1+\delta(u+u^2))e^{\varepsilon v} |\nabla v|^2 \\
&\quad +\varepsilon\left[\delta(a+d)(1+2u) + b\varepsilon(1+\delta(u+u^2))\right] e^{\varepsilon v} \nabla u \nabla v.
\end{aligned}
$$

et le discriminant

$$
D = \left\{\varepsilon\left[\delta(a+d)(1+2u) + b\varepsilon(1+\delta(u+u^2))\right]\right\}^2 - 4\delta d\varepsilon^2 \left[2a + b\varepsilon(1+2u)\right](1+\delta(u+u^2),
$$

est non-positif puisque les constantesδ et ε satisfont (2.9) et (2.10).par conséquent

$$
G \leq 0; \text{pour toute t dans}(0, T^*). \tag{2.13}
$$

Maintenant, pour les termes H_i ,$i = 1, 2$,d'après (2.9) et (2.10)
Où

$$
0 < \delta \leq \frac{\mu}{2\Lambda(1+2k)}; \qquad 0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{1+\delta(k+k^2)}. \tag{2.14}
$$

On vérifie que

$$
\Lambda \frac{\delta(1+2u)}{1+\delta(u+u^2)} - \mu u \frac{\delta(1+2u)}{1+\delta(u+u^2)} - \mu \leq 2\delta\Lambda(1+2k) - \mu \leq -\frac{\mu}{2}, \tag{2.15}
$$

et

$$\varepsilon - \frac{\delta(1+2u)}{1+\delta(u+u^2)} \leq \varepsilon - \frac{\delta}{1+\delta(k+k^2)} \leq 0, \tag{2.16}$$

donc

$$H_1 \leq -\frac{\mu}{2}J(t), \tag{2.17}$$

et

$$H_2 \leq 0. \tag{2.18}$$

Maintenant, pour le terme H_3,
la fonction

$$\pi : \eta \to (1-\varepsilon\eta)e^{\varepsilon\eta},$$

est bornée sur $\mathbb{R}^+$,En effet, on a

$$\frac{d\pi}{d\eta}(\eta) = -\varepsilon^2\eta e^{\varepsilon\eta} \leq 0,$$

donc π est non croissante sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\max_{\eta\geq 0}((1-\varepsilon\eta)e^{\varepsilon\eta}) = 1.$$

On peut déduire qu'il existe une constante positive γ

$$\gamma = \mu(1+\delta(k+k^2))\left|\Omega\right|,$$

telle que

$$H_3 \leq \gamma. \tag{2.19}$$

D'aprés (2.13)(2.17)(2.18)et(2.19), on obtient

$$\frac{d}{dt}J(t) \leq -\frac{\mu}{2}J(t) + \gamma. \tag{2.20}$$

Ce qui termine la preuve du théorème. ■

Corollaire 2.1 *La fonctionnelle J est uniformément bornée sur l'intervalle* $[0;T^*], T^* \leq T_{\max}$.

Preuve.
En multiple (2.20)par $\exp(\frac{\mu}{2}t)$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[J(t)\exp(\frac{\mu}{2}t)\right] \leq \gamma \exp(\frac{\mu}{2}t), \forall t \in (0, T^*),$$

alors

$$J(t) \leq J(0)\exp(-\frac{\mu}{2}t) + \frac{2\gamma}{\mu},$$

donc

$$J(t) \leq C, \forall t \in (0, T^*).$$

■

Corollaire 2.2 *Sous l'hypothèse (2.4) - (2.6), les solutions du système (2.1) - (2.3) avec les données initiales dans $L^\infty(\Omega)$sont globales non négatives et uniformément bornée dans $(0, +\infty) \times \Omega$.*

Preuve.
De (2.5), on voit qu'il existe une constante positive C telle que

$$1 + f(., v) \leq Ce^{\frac{v}{n}}, \forall v \geq 0. \tag{2.21}$$

Où ε est choisi comme dans (2.10).
et

$$\inf(1 + \delta(u + u^2)) \int_\Omega e^{\varepsilon v} dx \leq C,$$

donc

$$\int_\Omega e^{\varepsilon v} dx \leq \acute{C}.$$

On choisie $p = n\varepsilon$ donc

$$f(., v) \in L^\infty((0, T^*), L^p(\Omega)).$$

Donc

$$g(u, v) \in L^\infty((0, T^*), L^p(\Omega)),$$

et

$$h(u, v) \in L^\infty((0, T^*), L^p(\Omega)).$$

Donc d'après le théorème (1.6) , la solution $(u; v)$ est globale (ie $T^* = +\infty$). ■

2.2 Existence globale des solutions pour un système avec trois équations

Considérons le système de réaction-diffusion avec trois équations :(voir [2].)

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a_1\Delta u=f(u,v,w)=\sigma-b_1u+\frac{u^{p_1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+c)},\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-a_2\Delta v=g(u,v,w)=-b_2v+\frac{u^{p_2}}{v^{q_2}w^{r_2}}\qquad\qquad x\in\Omega,t>0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}-a_3\Delta w=h(u,v,w)=-b_3w+\frac{u^{p_3}}{v^{q_3}w^{r_3}}.\end{array}\right. \tag{2.22}$$

avec les conditions de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\partial w}{\partial \eta}=0 \text{ dans } \partial\Omega\times\{t>0\}, \tag{2.23}$$

et les données initiales

$$\left\{\begin{array}{l}u(x,0)=\varphi_1(x)>0,\\ v(x,0)=\varphi_2(x)>0 \quad \text{dans } \Omega,\\ w(x,0)=\varphi_3(x)>0.\end{array}\right. \tag{2.24}$$

et$\varphi_i(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$,pour tout $i=1,2,3,$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1avec la frontière $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial\eta}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.

c, p_i, q_i, r_i sont non négatifs avec $\sigma, b_i, a_i>0$, pour tout $i=1,2,3$

$$0<p_1-1<\max\left\{p_2\min\left(\frac{q_1}{q_2+1},\frac{r_1}{r_2},1\right),p_3\min\left(\frac{r_1}{r_3+1},\frac{q_1}{q_3},1\right)\right\}. \tag{2.25}$$

Posons $A_{ij}=\frac{a_i+a_j}{\sqrt[2]{a_ia_j}}$ pour tout $i,j=1,2,3$. α,β et γ soient des constantes positives telles que

$$\alpha>2\max\left\{1,\frac{b_2+b_3}{b_1}\right\}, \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{\beta}>2A_{12}^2, \tag{2.27}$$

et

$$\left(\frac{1}{2\beta}-A_{12}^2\right)\left(\frac{1}{2\gamma}-A_{13}^2\right)>\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}A_{23}-A_{12}A_{13}\right)^2. \tag{2.28}$$

2.2.1 Existence globale

Il est bien connu que pour trouver l'existence globale des solutions pour (2.22) -(2.24) (voir Henry[11],pp 35-62), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|g(u,v)\|_p$; $\|g(u,v)\|_p$ pour

$t \in [0; T_{max}[$ dans l'espace $L^p(\Omega)$, pour un certain $p > \frac{n}{2}$

Lemme 2.2 *(voir [2])*
On suppose que p, q, r, s, m *et* n *satisfaisant*

$$\frac{p-1}{r} < \min\left(\frac{q}{s+1}, \frac{m}{n}, 1\right).$$

Pour tout $h, l, \alpha, \beta, \gamma > 0$,*Il existe* $C = C(h, l, \alpha, \beta, \gamma) > 0$ *et* $\theta = \theta(\alpha) \in (0.1)$,*telle que*

$$\alpha \frac{x^{p-1+\alpha}}{y^{q+\beta} z^{m+\gamma}} \leq \beta \frac{x^{r+\alpha}}{y^{s+1+\beta} z^{n+\gamma}} + C\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta z^\gamma}\right)^\theta, x \geq 0, y \geq h, z \geq l. \tag{2.29}$$

Preuve. (voir [2])
Pour toute les $x \geq 0, y \geq h, z \geq l$ on multiplie (2.29) par $\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}$ on obtient

$$\alpha \frac{x^{p-1}}{y^q z^m} \leq \beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n} + C\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta z^\gamma}\right)^{\theta-1}. \tag{2.30}$$

Et nous pouvons écrire

$$\alpha \frac{x^{p-1}}{y^q z^m} = \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}} \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}} y^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q} z^{\frac{n(p-1)}{r} - m}.$$

Pour chaque ϵ réaliser :$0 < \epsilon < \min\left(\frac{q}{s+1}, \frac{m}{n}, 1\right) - \frac{p-1}{r}$

$$\alpha \frac{x^{p-1}}{y^q z^m} = \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}} \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{-\epsilon} y^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q} z^{\frac{n(p-1)}{r} - m}.$$

Ensuite, aussi

$$\alpha \frac{x^{p-1}}{y^q z^m} = \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} y^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)} z^{\frac{n(p-1)}{r} - m + \epsilon n}.$$

Pour $\left(\epsilon < \min\left(\frac{q}{s+1}, \frac{m}{n}, 1\right) - \frac{p-1}{r}\right)$ donc $\left(\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1) < 0 \text{ et } \frac{n(p-1)}{r} - m + \epsilon n < 0\right)$.,et

$$\alpha \frac{x^{p-1}}{y^q z^m} \leq \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} (h)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)} l^{\frac{n(p-1)}{r} - m + \epsilon n}.$$

Pour $\left(\frac{y}{h} \geq 1 \text{ et } \frac{z}{l} \geq 1\right)$ on a

$$\begin{aligned}
\alpha \frac{x^{p-1}}{y^q z^m} &\leq \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} (h)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)}, \\
&\quad \times l^{\frac{n(p-1)}{r} - m + \epsilon n} \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}, && (2.31) \\
&\leq C_1 \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}, && (2.32)
\end{aligned}$$

où $C_1 = \alpha\beta^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} l^{\frac{n(p-1)}{r}-m+\epsilon n-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}$.

En utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$C_1 \left(\beta \frac{x^r}{y^{s+1} z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} \leq \frac{1}{q}\beta \frac{x^r}{y^{s+1}z^n} + \frac{1}{q'} C_1^{\frac{r}{r-(p-1)-r\epsilon}} \left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}},$$

avec $q = \frac{1}{(p-1+\epsilon r)} > 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Donc on pose $C = C_1^{1+\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}}$ et $\theta = 1 - \frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}$,

où ϵ est suffisamment petit, nous obtenons l'inégalité (2.31) ■

Lemme 2.3 *(voir [2])*

Soient $\mu, T > 0$ et $f_j = f_j(t)$ une fonction intégrable non négative sur $[0, T)$ et $0 < \theta_j < 1$ $(j = 1, ..., J)$.

Soit $W = W(t)$ une fonction positive sur $[0, T)$ satisfait à l'inégalité différentielle

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -\mu W(t) + \sum_{j=1}^{J} f_j(t) W^{\theta_j}(t), 0 \leq t \leq T. \tag{2.33}$$

Alors, on obtient que

$$W(t) \leq k, 0 \leq t \leq T, \tag{2.34}$$

où k est la racine maximale de l'équation algébrique suivante :

$$x - \sum_{j=1}^{J} \left(\sup_{0<t<T} \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} f_j(\xi) d\xi \right) x^{\theta_j} = W(0). \tag{2.35}$$

De plus,si$T = +\infty$,alors

$$\lim_{t \nearrow \infty} \sup W(t) \leq k_\infty,$$

où k_∞ est la racine maximale de l'équation algébrique suivante :

$$x - \sum_{j=1}^{J} \left(\lim_{t \nearrow \infty} \sup \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} f_j(\xi) d\xi \right) x^{\theta_j} = 0.$$

Preuve. Avoir [Masuda.K et Takahashi. K [17],Lemme 2.2] ■

Lemme 2.4 *(voir [2])*

Soit $(u(.,t)v(.,t), w(.,t))$ une solution de (2.1) - (2.3).

Alors pour tout $(x,t) \in \Omega \times (0, T_{\max}[$ on a

$$\begin{cases} u(x,t) \geq e^{-b_1 t} \min(\varphi_1(x)) > 0, \\ v(x,t) \geq e^{-b_2 t} \min(\varphi_2(x)) > 0, \\ w(x,t) \geq e^{-b_3 t} \min(\varphi_3(x)) > 0. \end{cases} . \tag{2.36}$$

Preuve. Immédiate du principe du maximum ■

Théorème 2.2 *(Voir [2])*
Supposons que les fonctions f, g et h sont satisfaisants la condition (2.25).
Soit $(u(.,t)v(.,t),w(.,t))$ Une solution de (2,22) - (2,24) et soit

$$L(t)=\int\limits_{\Omega}\frac{u^{\alpha}(t,x)}{v^{\beta}(t,x)w^{\gamma}(t,x)}dx, \tag{2.37}$$

alors, la fonction L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T^{*}]\,, T^{*}<T_{\max}$

Preuve. (voir [2])
Dérivant L (t) par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\acute{L}(t) &= \int\limits_{\Omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)dx,\\ &= \int\limits_{\Omega}\left(\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\partial_t u-\beta\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\partial_t v-\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\partial_t w\right)dx.\end{aligned}$$

Remplaçant $\partial_t u, \partial_t v$,et $\partial_t w$ dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}\acute{L}(t) &= \int\limits_{\Omega}\begin{pmatrix} a_1\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\Delta u-a_2\beta\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\Delta v-a_3\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\Delta w\\ -b_1\alpha\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}+b_2\beta\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}+b_3\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\\ \alpha\frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^{\gamma}(w^{r_1}+c)}-\beta\frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}}-\gamma\frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}}+\sigma\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\end{pmatrix}dx,\\ &= I+J,\end{aligned}$$

où I contient des termes laplacien et J contient les autres termes

$$I=a_1\alpha\int\limits_{\Omega}\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\Delta u dx-a_2\beta\int\limits_{\Omega}\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\Delta v dx-a_3\gamma\int\limits_{\Omega}\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\Delta w dx,$$

$$\begin{aligned}J &= (-b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma)L(t)+\alpha\int\limits_{\Omega}\frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^{\gamma}(w^{r_1}+c)}dx,\\ &\quad -\beta\int\limits_{\Omega}\frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}}dx-\gamma\int\limits_{\Omega}\frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}}dx+\sigma\alpha\int\limits_{\Omega}\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}dx.\end{aligned}$$

Estimation de I : En utilisant la formule de Green pour les termes$\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\Delta u dx$, $\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\Delta v dx$ et

$\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^\beta w^{\gamma+1}}\Delta w dx$ on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \begin{pmatrix} -a_1\alpha(\alpha-1)\frac{u^{\alpha-2}}{v^\beta w^\gamma}\left|\nabla u\right|^2 + a_1\alpha\beta\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1}w^\gamma}\nabla u\nabla v + a_1\alpha\gamma\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^{\gamma+1}}\nabla u\nabla w \\ +a_2\beta\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1}w^\gamma}\nabla u\nabla v - a_2\beta(\beta+1)\frac{u^\alpha}{v^{\beta+2}w^\gamma}\left|\nabla v\right|^2 - a_2\beta\gamma\frac{u^\alpha}{v^{\beta+1}w^{\gamma+1}}\nabla v\nabla w \\ +a_3\gamma\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^{\gamma+1}}\nabla u\nabla w - a_3\gamma\beta\frac{u^\alpha}{v^{\beta+1}w^{\gamma+1}}\nabla v\nabla w - a_3\gamma(\gamma+1)\frac{u^\alpha}{v^\beta w^{\gamma+2}}\left|\nabla w\right|^2 \end{pmatrix} dx; \\ &= -\int_\Omega \left[\frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta+2}w^{\gamma+2}}(QT)\cdot T\right] dx, \end{aligned}$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{pmatrix},$$

Q est la matrice de la forme quadratique par rapport à :$vw\nabla u, uw\nabla v$ et $uv\nabla w$,sous forme matricielle :$T = (vw\nabla u, uw\nabla v, uv\nabla w)^t$.

La matrice Q est définie positive si et seulement si tous ses déterminates principales sont positives. Nous avons

1.

$$\Delta_1 = a_1\alpha(\alpha-1),$$

utilisant (2.26),nous obtenons $\Delta_1 > 0$.

2.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2 a_1 a_2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\beta+1}{\beta} - A_{12}^2\right),$$

utilisant(2.26) et (2.27),nous obtenons $\Delta_2 > 0$.

3. En utilisant le théorème 1 dans [1] on obtient

$$\begin{aligned} (\alpha-1)\Delta_3 &= (\alpha-1)\left|Q\right|, \\ &= \alpha(\alpha\beta\gamma)^2 a_1a_2a_3\left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\beta+1}{\beta} - A_{12}^2\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\gamma+1}{\gamma} - A_{13}^2\right) - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}A_{23} - A_{12}A_{13}\right)^2\right), \end{aligned}$$

utilisant (2.26)-(2.28),nous obtenons $\Delta_3 > 0$.

Par conséquence, nous avons $I \le 0, \forall(x,t) \in [0,T^*] \times \Omega$.

Estimation de J :

$$\begin{aligned} J &= (-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)L(t) + \alpha\int_\Omega \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^\gamma(w^{r_1}+c)}dx, \\ &\quad -\beta\int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}}dx - \gamma\int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}}dx + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}dx. \end{aligned}$$

Selon le principe du maximum, il existe C_0 dépendant de φ_1, φ_2 et φ_3,
telle que $v, w \geq C_0 > 0$, alors nous avons

$$\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} = \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \leq \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}},$$

alors

$$\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} \leq C_2 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \text{ ,où } C_2 = \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J &= (-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)L(t) + \alpha \int_\Omega \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^\gamma (w^{r_1}+c)} dx, \\ &\quad -\beta \int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} dx - \gamma \int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta} w^{r_3+\gamma+1}} dx + \sigma\alpha \int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} dx, \end{aligned}$$

utilisant lemme(2 1),$\forall (t,x) \in [0, T^*] \times \Omega$.nous avons

$$\alpha \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^\gamma (w^{r_1}+c)} \leq \alpha \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^{\gamma+r_1}} \leq \beta \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} + C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^\theta, \tag{2.38}$$

où

$$\alpha \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^{\gamma+r_1}} \leq \gamma \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta} w^{r_3+\gamma+1}} + C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^\theta. \tag{2.39}$$

Utilisant (2.37) ou (2.38) alors

$$J \leq (-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)L(t) + \int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^\theta dx + \sigma\alpha \int_\Omega C_2 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dx,$$

En appliquant l'inégalité de Holder, pour tout t dans $[0, T^*]$, nous obtenons

$$\int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^\theta dx \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right) dx\right)^\theta \left(\int_\Omega C^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta},$$

alors

$$\int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^\theta dx \leq C_3 L^\theta(t), \text{ où } C_3 = C\,|\Omega|^{1-\theta},$$

nous avons

$$\int_\Omega C_2 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dx \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right) dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_\Omega (C_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

alors
$$\int_{\Omega} C_2 \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dx \leq C_4 L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t), \text{ où } C_4 = C_2 \left|\Omega\right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nous obtenons
$$J \leq (-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)L(t) + C_3 L^{\theta}(t) + \alpha\sigma C_4 L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t),$$

ce qui implique
$$J \leq (-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)L(t) + C_5(L^{\theta}(t) + \alpha\sigma L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)).$$

Ainsi, d'après les conditions (2.26), (2.27) et (2.28), nous obtenons

$$\acute{L}(t) \leq (-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)L(t) + C_5(L^{\theta}(t) + \alpha\sigma L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t)).$$

Comme $-b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma < 0$ et utilisant le lemme (2.2) on déduit que $L(t)$ est bornée sur $(0, T_{\max}[$ (ie) $L(t) \leq k$, où k dépendante de φ_1, φ_2 et φ_3. ■

Corollaire 2.3 *Sous les hypothèses du théorème 1 toutes les solutions de (2.22) - (2.24) avec les données initiales positives en $C(\overline{\Omega})$ sont globales. Si, en outre $b_1, b_2, b_3, \sigma > 0$,alors (u, v, w) sont uniformément bornées dans $\overline{\Omega}. \times [0, \infty)$.*

Preuve. Comme $L(t)$ est bornée sur $(0, T_{\max}[$ et les fonctions $\frac{u^{p_1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+c)}$
$\frac{u^{p_2}}{v^{q_2}w^{r_2}}$et $\frac{u^{p_3}}{v^{q_3}w^{r_3}}$ sont dans $L^{\infty}((0, T_{\max}), L^m(\Omega))$,pour tout $m > \frac{N}{2}$,alors d'après l'effet règularisant ,la solution du système (2-22)-(2-28) est globale et uniformément bornée dans $\Omega \times (0, +\infty)$. ■

Chapitre 3

Non existence globale des solution pour un systeme de reaction-diffusion

On s'intéresse, dans ce chapitre à l'étude du non existence globale des solutions pour un système de réaction-diffusion, avec des dérivées classiques.

Considérons le problème d'évolution (voir [16])

$$\begin{cases} u_t = \Delta\left(a\left(x,t,u,v\right)u\right) + \Delta\left(b\left(x,t,u,v\right)v\right) + h(x,t)\left|v\right|^p, \\ v_t = \Delta\left(c\left(x,t,u,v\right)u\right) + \Delta\left(d\left(x,t,u,v\right)v\right) + k(x,t)\left|u\right|^q. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le système (3.1) est complété par les conditions initiales suivantes

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0; v(x,0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Lemme 3.1 *(voir [16]) Soient $\mathcal{L}, y, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, l_1$ et l_2 positives et soient α_i et $\theta_i(i = 1,2,3)$ des nombres positifs telles que $\alpha_2 < \alpha_1$ et $\theta_2 < \theta_1$;$\theta_1\theta_3 \geq 1$ et $\alpha_3\theta_3 < \alpha_1\theta_1$,si*

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{\alpha_1} \leq \mathcal{F}_1\mathcal{L}^{\alpha_2} + l_1 y^{\theta_3}, \\ y^{\theta_1} \leq l_2\mathcal{L}^{\alpha_3} + \mathcal{F}_2 y^{\theta_2}. \end{cases}$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\mathcal{L}^{\alpha_1\theta_1} \leq C\left[\mathcal{F}_1^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1-\alpha_2}} + \mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\theta_3}{\theta_1-\theta_2}} l_1^{\theta_1} + \left(l_1^{\theta_1} l_2^{\theta_3}\right)^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1\theta_1-\alpha_3\theta_3}}\right].$$

Preuve. (voir [16])
Comme

$$\begin{aligned} y^{\theta_1\theta_3} &\leq 2^{\theta_3-1}\left(l_2^{\theta_3}\mathcal{L}^{\alpha_3\theta_3} + \mathcal{F}_2^{\theta_3} y^{\theta_2\theta_3}\right), && (3.3) \\ \mathcal{L}^{\alpha_1\theta_1} &\leq 2^{\theta_1-1}\left(\mathcal{F}_1^{\theta_1}\mathcal{L}^{\alpha_2\theta_1} + l_1^{\theta_1} y^{\theta_1\theta_3}\right). && (3.4) \end{aligned}$$

Afin d'estimer le membre droite de (3.3), on applique l'inégalité de Young pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, on obtient

$$\mathcal{F}_2^{\theta_3} y^{\theta_2\theta_3} \leq \varepsilon y^{\theta_2\theta_3} + C(\varepsilon)\mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\theta_3}{\theta_1-\theta_2}}.$$

En choisissant ε assez petit, on aura

$$y^{\theta_1\theta_3} \leq C\left[l_2^{\theta_3}\mathcal{L}^{\alpha_3\theta_3} + \mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\theta_3}{\theta_1-\theta_2}}\right]. \tag{3.5}$$

Ainsi,(3.5) avec l'inégalité (3.4) entraînent

$$\mathcal{L}^{\alpha_1\theta_1} \leq \acute{C}\left[\mathcal{F}_1^{\theta_1}\mathcal{L}^{\alpha_2\theta_1} + l_1^{\theta_1} l_2^{\theta_3}\mathcal{L}^{\alpha_3\theta_3} + l_1^{\theta_1}\mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\theta_3}{\theta_1-\theta_2}}\right]. \tag{3.6}$$

Afin d'estimer le membre droite de (3.6), on applique l'inégalité de Young pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, on obtient

$$\mathcal{F}_1^{\theta_1}\mathcal{L}^{\alpha_2\theta_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{L}^{\alpha_1\theta_1} + C(\varepsilon)\mathcal{F}_1^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1-\alpha_2}},$$

et

$$l_1^{\theta_1} l_2^{\theta_3} \mathcal{L}^{\alpha_3\theta_3} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{L}^{\alpha_1\theta_1} + C(\varepsilon)\left(l_1^{\theta_1} l_2^{\theta_3}\right)^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1\theta_1-\alpha_3\theta_3}}.$$

En choisissant ε assez petit, on aura

$$\mathcal{L}^{\alpha_1\theta_1} \leq C\left[\mathcal{F}_1^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1-\alpha_2}} + \mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\theta_3}{\theta_1-\theta_2}} l_1^{\theta_1} + \left(l_1^{\theta_1} l_2^{\theta_2}\right)^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1\theta_1-\alpha_3\theta_3}}\right]. \tag{3.7}$$

■

Lemme 3.2 *(voir [16]) Soient $\mathcal{L}, y, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, l_1$ et l_2 positives et soient α_i et $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ des nombres positifs telles que $\alpha_2 < \alpha_1$ et $\theta_2 < \theta_1$;$\theta_1\theta_3 \geq 1$ et $\alpha_3\theta_3 < \alpha_1\theta_1$,si*

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{\alpha_1} \leq \mathcal{F}_1\mathcal{L}^{\alpha_2} + l_1 y^{\theta_3}, \\ y^{\theta_1} \leq l_2\mathcal{L}^{\alpha_3} + \mathcal{F}_2 y^{\theta_2}. \end{cases}$$

Alors il existe une constant C telle que

$$y^{\alpha_1\theta_1} \leq C\left[l_2^{\alpha_1}\mathcal{F}_1^{\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}} + \mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\alpha_1}{\theta_1-\alpha_2}} + (l_2^{\alpha_1} l_2^{\alpha_3})^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1\theta_1-\alpha_2\theta_3}}\right].$$

Preuve. (voir [16]) Comme

$$y^{\theta_1\theta_3} \leq 2^{\alpha_1-1}\left(l_2^{\alpha_1}\mathcal{L}^{\alpha_3\alpha_1} + \mathcal{F}_2^{\alpha_1} y^{\theta_2\alpha_1}\right), \tag{3.8}$$

$$\mathcal{L}^{\alpha_3\alpha_1} \leq 2^{\alpha_3-1}\left(\mathcal{F}_1^{\alpha_3}\mathcal{L}^{\alpha_2\alpha_3} + l_1^{\alpha_3} y^{\theta_2\alpha_3}\right). \tag{3.9}$$

Afin d'estimer le membre de droite de (3.9), on applique l'inégalité de Young pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, il vient

$$\mathcal{F}_1^{\alpha_3}\mathcal{L}^{\alpha_2\alpha_3} \leq \varepsilon\mathcal{L}^{\alpha_3\alpha_1} + C(\varepsilon)\mathcal{F}_1^{\frac{\theta_1\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Ainsi et en choisissant ε assez petit, on aura

$$\mathcal{L}^{\alpha_3\alpha_1} \leq C\left[\mathcal{F}_1^{\frac{\theta_1\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}} + l_1^{\alpha_3} y^{\theta_2\alpha_3}\right]. \tag{3.10}$$

Ainsi,(3.10) avec l'inégalité (3.8) entraînent

$$y^{\theta_1\theta_3} \leq \acute{C}\left[l_2^{\alpha_1}\mathcal{F}_1^{\frac{\theta_1\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}} + l_2^{\alpha_1} l_1^{\alpha_3} y^{\theta_2\alpha_3} + \mathcal{F}_2^{\alpha_1} y^{\theta_2\alpha_1}\right]. \tag{3.11}$$

Afin d'estimer le membre droite de (3.11), on applique l'inégalité de Young pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, on obtient

$$\mathcal{F}_2^{\alpha_1} y^{\theta_2\alpha_1} \leq \frac{\varepsilon}{2} y^{\alpha_1\theta_1} + C(\varepsilon)\mathcal{F}_2^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\theta_1-\theta_2}},$$

et

$$l_2^{\alpha_1} l_1^{\alpha_3} y^{\theta_2\alpha_3} \leq \frac{\varepsilon}{2} y^{\alpha_1\theta_1} + C(\varepsilon)\left(l_2^{\alpha_1} l_1^{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1\theta_1-\alpha_2\theta_3}}.$$

En choisissant ε assez petit, on aura

$$y^{\alpha_1\theta_1} \leq C\left[l_2^{\alpha_1}\mathcal{F}_1^{\frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}} + \mathcal{F}_2^{\frac{\theta_1\alpha_1}{\theta_1-\alpha_2}} + (l_2^{\alpha_1} l_2^{\alpha_3})^{\frac{\alpha_1\theta_1}{\alpha_1\theta_1-\alpha_2\theta_3}}\right].$$

■

Définition 3.1 *pour $0 \leq T \leq \infty$, on dit que (u, v) est une solution faible locale de (3.1) ; si*

$$u \in C\left([0, T], L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap C\left([0, T], L^p_{loc}\left(\xi, hdxdt\right)\right) \cap L^1_{loc}(Q),$$

$$v \in C\left([0, T], L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap C\left([0, T], L^p_{loc}\left(\xi, kdxdt\right)\right) \cap L^1_{loc}(Q),$$

et satisfait

$$\begin{cases} -\int_Q u\xi_t - \int_Q a(x,t,u,v)\, u\Delta\xi - \int_Q b(x,t,u,v)\, v\Delta\xi = \int_Q h(x,t)\, |v|^p\, \xi + \int_Q u_0\xi(x,0) \\ -\int_Q v\xi_t - \int_Q c(x,t,u,v)\, u\Delta\xi - \int_Q d(x,t,u,v)\, v\Delta\xi = \int_Q k(x,t)\, |u|^q\, \xi + \int_Q v_0\xi(x,0) \end{cases}, \tag{3.12}$$

pour toute fonction test $0 \leq \xi \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^N)$,vérifiant $\xi(.,S) = 0; 0 \leq S \leq T$.
Si $T = +\infty$, on dit que $(u; v)$ est une solution faible globale.

Pour commencer, nous exposons quelques hypothèses :
Les fonctions h, k satisfaient

$$\left|h(R^2\tau, Ry)\right| \geq R^\lambda, \left|k(R^2\tau, Ry)\right| \geq R^k, \tag{(H_f)}$$

pour R suffisamment grand et $\tau \geq 0$,y dans un domaine borné.

Théorème 3.1 *(voir [16])*
Soit $p > 1$ et $q > 1$,et supposons que
i)$\min(p, q) > 1$ *et* $\min(\lambda + 2, k + 2) > 0$,
ii)les fonctions a, b, c, d, h, k sont positives et satisfaient$\|a\|_\infty, \|b\|_\infty, \|c\|_\infty, \|d\|_\infty \leq c$.
Et (H_f) est vérifie,si

$$N \leq \max(\theta_1, \theta_2), \tag{3.13}$$

où

$$\begin{cases} \theta_1 = \min\left(\frac{(k+2)}{q-1}, \frac{(\lambda+2)}{p-1}, \frac{q(\lambda+2)+(k+2)}{pq-1}\right) \\ \theta_2 = \min\left(\frac{(k+2)}{q-1}, \frac{(\lambda+2)}{p-1}, \frac{p(k+2)+(\lambda+2)}{pq-1}\right) \end{cases},$$

alors le système(3.1) n'admet aucu'une solution faible positive globale non-triviale.

Preuve. (voir [16])
Nous supposons que le problème (3.1) admet une solution faible globale non-triviale, donc $(u\ , v)$ existe dans $(0, T^*)^2$ pour tout $T^* > 0$

Soit ξ une fonction test positive .

Comme la condition initiale u_0,(resp v_0) est positive, la formulation variationnelle (3.12), entraîne

$$\int_Q h(x,t)\,|v|^p\,\xi \leq \int_Q u\xi_t - \int_Q a\,(x,t,u,v)\,u\Delta\xi - \int_Q b\,(x,t,u,v)\,v\Delta\xi,$$

et

$$\int_Q k(x,t)\,|u|^q\,\xi \leq \int_Q v\xi_t - \int_Q c\,(x,t,u,v)\,u\Delta\xi - \int_Q d\,(x,t,u,v)\,v\Delta\xi.$$

Comme $\int_Q h(x,t)\,|v|^p\,\xi \geq 0$ et $\int_Q k(x,t)\,|u|^q\,\xi \geq 0$,alors

$$\int_Q h(x,t)\,|v|^p\,\xi \leq \int_Q u\,|\xi_t| + \int_Q a\,(x,t,u,v)\,u\,|\Delta\xi| + \int_Q b\,(x,t,u,v)\,v\,|\Delta\xi|\,, \tag{3.14}$$

et

$$\int_Q k(x,t)\,|u|^q\,\xi \leq \int_Q v\,|\xi_t| + \int_Q c\,(x,t,u,v)\,u\,|\Delta\xi| + \int_Q d\,(x,t,u,v)\,v\,|\Delta\xi|\,. \tag{3.15}$$

La fonction test ξ est choisie de façon qu'on a :

$$\begin{cases} \left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{q}}\,(k\xi)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}} < +\infty, \\ \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}}\,(\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}} < +\infty, \\ \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}}\cdot(\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} < +\infty, \\ \left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{p}}\,(h\xi)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} < +\infty, \\ \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}}\,(\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} < +\infty, \\ \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}}\,(\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}} < +\infty. \end{cases} \tag{3.16}$$

Afin d'estimer le membre droite de (3.14),En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_Q u\,|\xi_t| \leq \left(\int_{Q_T} |u|^q\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{q}}\,(k\xi)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}, \tag{3.17}$$

et

$$\int_Q a\,(x,t,u,v)\,u\,|\Delta\xi| \leq c\int_Q u\,|\Delta\xi| \leq c\left(\int_{Q_T} |u|^q\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}}\,(\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}, \tag{3.18}$$

et

$$\int_Q b\,(x,t,u,v)\,v\,|\Delta\xi| \leq c\int_Q v\,|\Delta\xi| \leq c\left(\int_{Q_T} |v|^p\,h\xi\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}}\cdot(\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}. \tag{3.19}$$

Ainsi, (3.17), (3.18) et (3.19)avec l'inégalité (3.14) entraînent

$$\int_{Q} h\,|v|^{p}\,\xi \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{q}\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}} \cdot A_1 + \left(\int_{Q_T} |v|^{p}\,h\xi\right)^{\frac{1}{q}} \cdot A_2, \tag{3.20}$$

où

$$A_1 = \left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{q}}\,(k\xi)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}} + c\left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}}\,(\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}, \tag{3.21}$$

$$A_2 = c\left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}} \cdot (\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}. \tag{3.22}$$

Afin d'estimer le membre droite de (3.15),En utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\int_{Q} v\,|\xi_t| \leq \left(\int_{Q_T} |v|^{p}\,h\xi\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{p}}\,(h\xi)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}, \tag{3.23}$$

et

$$\int_{Q} c\,(x,t,u,v)\,u\,|\Delta\xi| \leq c\int_{Q} u\,|\Delta\xi| \leq c\left(\int_{Q} |u|^{q}\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}}\,(\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}, \tag{3.24}$$

et

$$\int_{Q} d\,(x,t,u,v)\,v\,|\Delta\xi| \leq c\int_{Q} v\,|\Delta\xi| \leq c\left(\int_{Q} |v|^{p}\,h\xi\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}}\,(\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}. \tag{3.25}$$

Ainsi, (3.23), (3.24) et (3.25) avec l'inégalité (3.15) entraînent

$$\int_{Q_T} k\,|u|^{q}\,\xi \leq \left(\int_{Q_T}^{p} |v|^{p}\,h\xi\right)^{\frac{1}{p}} \cdot A_3 + \left(\int_{Q_T}^{p} |u|^{q}\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}} \cdot A_4, \tag{3.26}$$

où

$$A_3 = \left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{p}}\,(h\xi)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} + c\left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}}\,(\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}, \tag{3.27}$$

$$A_4 = \left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}}\,(\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}. \tag{3.28}$$

Prenons maintenant

$$\mathcal{L} = \left(\int_{Q_T} |u|^q \, k\xi \right)^{\frac{1}{q}}, y = \left(\int_{Q_T} |v|^p \, h\xi \right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}^q \leq yA_3 + \mathcal{L}A_4, \\ y^p \leq \mathcal{L}A_1 + yA_2. \end{cases} \tag{3.29}$$

En utilisant le lemme (3.1) on obtient

$$\mathcal{L}^{pq} \leq C \left[A_4^{\frac{pq}{q-1}} + A_3^p A_2^{\frac{p}{p-1}} + (A_3^p A_1)^{\frac{pq}{pq-1}} \right].$$

En utilisant le lemme (3.2) on obtient

$$y^{pq} \leq C \left[A_2^{\frac{pq}{p-1}} + A_1^q A_4^{\frac{q}{q-1}} + (A_1^q A_3)^{\frac{pq}{pq-1}} \right].$$

Maintenant, en prenant la fonction test de la forme

$$\xi(x,t) = \Phi \left(\frac{|x|^2 + t}{R^2} \right),$$

où $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fontion test positive décroissante vérifiant

$$0 \leq \Phi \leq 1, r \left| \acute{\Phi}\,(r) \right| \leq C,$$

pour tout $r > 0$,on a

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1, \text{ si } r \leq 1, \\ 0, \text{ si } r \geq 2, \end{cases}$$

l'existence de ξ et Φ est claire.
Par exemple

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq r, \\ \left(2 - \frac{|x|}{r}\right)^{\frac{1}{1-q^*}} & \text{si } r \leq |x| \leq 2r, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2r, \end{cases}$$

où q^* est proche de 1,si δ est choisie assez grand, alors on a les convergences des integrales (3.16)
Par exemple, comme

$$|\xi_t|^{\acute{p}} \, \xi^{\frac{-\acute{p}}{p}} \simeq \Phi^{(\delta-1)\acute{p}} \left| \acute{\Phi} \right|^{\acute{p}} \Phi^{-\frac{\delta \acute{p}}{p}},$$

et si nous choisissons δ tel que

$$(\delta - 1) - \frac{\delta \acute{p}}{p} > 0,$$

alors

$$\left(\int\limits_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{p}} (h\xi)^{\frac{-\acute{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\acute{p}}} < +\infty.$$

Afin d'estimer le membre droite de (3.29), on applique le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{R^2}, y = \frac{x}{R}, \tag{3.30}$$

nous obtenons

$$\left(\int\limits_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{q}} (k\xi)^{\frac{-\acute{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\acute{q}}} \leq R^{\frac{-k}{q} + \frac{N+2}{\acute{q}} - 2} \left(\int\limits_{\Omega} \left|\Phi_\tau^\delta\right|^{\acute{q}} (\Phi)^{\frac{-\acute{q}\delta}{q}} \right)^{\frac{1}{\acute{q}}}, \tag{3.31}$$

$$\left(\int\limits_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}} (\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\acute{q}}} \leq R^{\frac{-k}{q} + \frac{N+2}{\acute{q}} - 2} \left(\int\limits_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{q}} (\Phi)^{\frac{-\acute{q}\delta}{q}} \right)^{\frac{1}{\acute{q}}}. \tag{3.32}$$

Ainsi, (3.31) et (3.32) avec l'inégalité (3.21) entraînent

$$A_1 \leq R^{\frac{-k}{q} + \frac{N+2}{\acute{q}} - 2} \acute{A}_1, \tag{3.33}$$

où

$$\acute{A}_1 = \left(\int\limits_{\Omega} \left|\Phi_\tau^\delta\right|^{\acute{q}} (\Phi)^{\frac{-\acute{q}\delta}{q}} \right)^{\frac{1}{\acute{q}}} + c \left(\int\limits_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{q}} (\Phi)^{\frac{-\acute{q}\delta}{q}} \right)^{\frac{1}{\acute{q}}},$$

et

$$\left(\int\limits_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}} (\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\acute{p}}} \leq R^{\frac{-\lambda}{p} + \frac{N+2}{\acute{p}} - 2} \left(\int\limits_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{p}} (\Phi)^{\frac{-\acute{p}\delta}{p}} \right)^{\frac{1}{\acute{p}}}. \tag{3.34}$$

Ainsi, (3.34) avec l'inégalité (3.22) entraînent

$$A_2 \leq R^{\frac{-\lambda}{p} + \frac{N+2}{\acute{p}} - 2} \acute{A}_2, \tag{3.35}$$

où

$$\acute{A}_2 = c \left(\int\limits_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{p}} (\Phi)^{\frac{-\acute{p}\delta}{p}} \right)^{\frac{1}{\acute{p}}}.$$

Et

$$\left(\int_{Q_T} |\xi_t|^{\acute{p}} (h\xi)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} \leq R^{\frac{-\lambda}{p}+\frac{N+2}{\acute{p}}-2}\left(\int_{\Omega} \left|\Phi_\tau^\delta\right|^{\acute{p}} (\Phi)^{\frac{-\acute{p}\delta}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}, \tag{3.36}$$

$$\left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{p}} (\xi h)^{\frac{-\acute{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} \leq R^{\frac{-\lambda}{p}+\frac{N+2}{\acute{p}}-2}\left(\int_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{p}} (\Phi)^{\frac{-\acute{p}\delta}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}. \tag{3.37}$$

Ainsi, (3.36), et (3.37) avec l'inégalité (3.27) entraînent

$$A_3 \leq R^{\frac{-\lambda}{p}+\frac{N+2}{\acute{p}}-2}\acute{A}_3, \tag{3.38}$$

où

$$\acute{A}_3 = \left(\int_{\Omega} \left|\Phi_\tau^\delta\right|^{\acute{p}} (\Phi)^{\frac{-\acute{p}\delta}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}} + c\left(\int_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{p}} (\Phi)^{\frac{-\acute{p}\delta}{p}}\right)^{\frac{1}{\acute{p}}}.$$

Et

$$\left(\int_{Q_T} |\Delta\xi|^{\acute{q}} (\xi k)^{\frac{-\acute{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}} \leq R^{\frac{-k}{q}+\frac{N+2}{\acute{q}}-2}\left(\int_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{q}} (\Phi)^{\frac{-\acute{q}\delta}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}. \tag{3.39}$$

Ainsi, (3.39) avec l'inégalité (3.28) entraînent

$$A_4 \leq R^{\frac{-k}{q}+\frac{N+2}{\acute{q}}-2}\acute{A}_4, \tag{3.40}$$

où

$$\acute{A}_4 = c\left(\int_{\Omega} \left|\Delta\Phi^\delta\right|^{\acute{q}} (\Phi)^{\frac{-\acute{q}\delta}{q}}\right)^{\frac{1}{\acute{q}}}.$$

Ainsi, (3.33), (3.35),(3.38)et(3,35) avec l'inégalité (3.40) entraînent

$$\mathcal{L}^{pq} \leq C\left(R^{S_1} + R^{S_2} + R^{S_3}\right), \tag{3.41}$$

où

$$\begin{aligned}
(q-1)\,S_1 &= p\left[N(q-1) - (k+2)\right], \\
(p-1)\,S_2 &= p\left[N(p-1) - (\lambda+2)\right], \\
(pq-1)\,S_3 &= p\left[N(pq-1) - (k+2) - q(\lambda+2)\right].
\end{aligned}$$

Et

$$y^{pq} \leq C\left(R^{J_1} + R^{J_2} + R^{J_3}\right), \tag{3.42}$$

où

$$\begin{aligned}(p-1)\,J_1 &= q\left[N(p-1)-(\lambda+2)\right],\\(q-1)\,J_2 &= q\left[N(q-1)-(k+2)\right],\\(pq-1)\,J_3 &= q\left[N(pq-1)-p(k+2)-(\lambda+2)\right].\end{aligned}$$

Maintenant, dans le cas $\max(s_1, s_2, s_3) < 0$ ou $\max(J_1, J_2, J_3) < 0$ l'exposant de R dans (3.41) où (3.42) est négatife.
En faisant tendre R vers l'infini on obtient

$$\int_{R^N\times R^+} |u|^q\, k\xi = 0, \tag{3.43}$$

ou

$$\int_{R^N\times R^+} |v|^p\, h\xi = 0, \tag{3.44}$$

alors que $u \equiv 0$ ou $v \equiv 0$ Ceci contredit le fait que (u, v) est une solution faible non-triviale de (3.1).
Maintenant, dans le cas $\max(s_1, s_2, s_3) = 0$ ou $\max(J_1, J_2, J_3) = 0$,
d'aprés la convergence de l'integrale (3.43) et (3.44) si

$$C_R = \left\{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+, R^2 < |y|^2 + t^2 < 2R^2\right\}.$$

Comme

$$y^{pq} \leq C,$$

ou

$$\mathcal{L}^{pq} \leq C.$$

Comme

$$\int_{C_R} |u|^q\, k\xi = \int_{|y|^2+t^2<2R^2} |u|^q\, k\xi - \int_{|y|^2+t^2<R^2} |u|^q\, k\xi,$$

et

$$\int_{C_R} |v|^p\, h\xi = \int_{|y|^2+t^2<2R^2} |v|^p\, h\xi - \int_{|y|^2+t^2<R^2} |v|^p\, h\xi.$$

En faisant tendre R vers l'infini on obtient

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} |u|^q\, k\xi = 0, \tag{3.45}$$

ou

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}|v|^p\,h\xi=0. \tag{3.46}$$

Comme

$$\int\limits_{Q_T}|u|^q\,k\xi\leq A_3\left(\int\limits_{C_R}|v|^p\,h\xi\right)^{\frac{1}{p}}+A_4\left(\int\limits_{Q_T}|u|^q\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.47}$$

ou

$$\int\limits_{Q_T}|v|^p\,h\xi\leq A_1\left(\int\limits_{Q_T}|u|^q\,k\xi\right)^{\frac{1}{q}}+A_2\left(\int\limits_{C_R}|v|^p\,h\xi\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En faisant tendre R vers l'infini on obtient

$$\int\limits_{R^N\times R^+}|v|^p\,h\xi=0,$$

ou

$$\int\limits_{R^N\times R^+}|u|^q\,k\xi=0, \tag{3.48}$$

alors que $u\equiv 0$ou $v\equiv 0$Ceci contredit le fait que u est une solution faible non-triviale de (3.1). ■

Chapitre 4

Non existence globale de solution d'équations Et systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires

Ce chapitre est consacré à l'étude du non existence des solutions pour une équation d'évolution, ainsi que pour un système de réaction-diffusion (2×2)

4.1 Non existence de solution globale pour une équation différentielle fractionnaire

Considérons le problème d'évolution :(voir [15])

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D}^{\alpha} u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = h(x,t)\,|u|^{p}\,, \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ =: Q, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{pour } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $N \geq 1$, p est un nombre réel positive.
$\underset{0/t}{D}^{\alpha}$désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha \in (0,1)$ au sense de Caputo., $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$, $\beta \in [1,2]$ est le laplacien fractionnaire, par rapport à x, d'ordre $\frac{\beta}{2}$,lequel est défini par

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta}\,\mathcal{F}(v)(\xi))(x,t), \tag{4.2}$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$son l'inverse.

Définition 4.1 *Soit $p = \tilde{p} + 1$.Une fonction $u \in L^1_{loc}(Q_T)$ est une solution faible locale pour le problème (4.1) définie sur Q_T ; si $uh^{\frac{1}{p}} \in L^1_{loc}(Q_T, dxdt)$*
et est telle que :

$$\int\limits_{Q_T} u_0(x) \underset{t/T}{D}^{\alpha}\varphi(x,t)dxdt + \int\limits_{Q_T} h\,|u|^{p}\,\varphi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} u \underset{t/T}{D}^{\alpha}\varphi(x,t)dxdt + \int\limits_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi(x,t)dxdt, \tag{4.3}$$

pour toute fonction test $\varphi \in C^{2.1}_{x,t}(Q_T)$,vérifiant $\varphi(x,T) = 0$.
Les intégrales dans la défintion ci-dessus sont supposées êtres convergentes.
Si,dans la définition $T = +\infty$, la solution est dite globale.
Concernant la fct $h(x,t)$,on pose la condition (H) :

$$h(x,t) \geq C_h\,|x|^{\delta}\,t^{\rho}, \forall x \in \mathbb{R}^N, t > 0, C_h > 0. \tag{H}$$

Les hypothèses sur σ et ρ sont déterminées par la convergence de certaines integrales dans la preuve (voir (3))

Remarque 4.1 *Soient T et R deux réels positifs et soient $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$,*
pour le changement de variable suivant : $\tau = \frac{t}{R^{\frac{2}{\theta}}}$ et $y = \frac{x}{R}$,on a

$$(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\beta}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}, \tag{4.4}$$

$$\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t) = R^{\frac{-2\alpha}{\theta}}\underset{\tau/T}{D}{}^{\alpha}\Phi(|y|^2+\tau^{\theta}), \tag{4.5}$$

$\underset{0/t}{D}{}^{\alpha}$*désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre* $\alpha \in [0,1]$ *au sense de Caputo.*$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$*,*$\beta \in [1,2]$ *est le laplacien fractionnaire, par rapport à* x*, d'ordre* $\frac{\beta}{2}$*.*

Preuve.

$$\begin{aligned}(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\cdot\frac{\partial y_i^2}{\partial x_i^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}, \\ &= \left(R^{-2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\beta}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{\frac{2}{\theta}}}\frac{\varphi(x,\delta)}{(\delta-t)^{\alpha}}d\delta, \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{\frac{2}{\theta}}}\frac{\Phi\left(y^2+(\frac{\delta}{R^{\frac{2}{\theta}}})^{\theta}\right)}{(\delta-t)^{\alpha}}d\delta.\end{aligned}$$

On pose $\frac{\delta}{R^{\frac{2}{\theta}}} = M$ alors $d\delta = R^{\frac{2}{\theta}}dM$ donc

$$\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t) = \frac{-1}{R^{\frac{2\alpha}{\theta}}\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T}\frac{\Phi\left(y^2+M^{\theta}\right)}{(M-\tau)^{\alpha}}dM,$$

donc

$$\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t) = R^{\frac{-2\alpha}{\theta}}\underset{\tau/T}{D}{}^{\alpha}\Phi(|y|^2+\tau^{\theta}).$$

■

Théorème 4.1 *(voir [15])*
Soit $N \geq 1$ *et* $p > 1$*.Supposons que la condition (H) est vérifié.*
Si

$$1 < p \leq p_c = 1 + \frac{\alpha(\beta+\sigma)+\beta\rho}{\alpha N+\beta(1-\alpha)},$$

alors le problème (4.1) n'admet auqu une solution faible non négative globale non triviale.

Preuve. (voir [15]) (Par contradiction)

La méthode est basée sur un choix convenable de la fonction test.

Nous supposons que le problème (4.1) admet une solution faible globale non triviale, et donc u_0.existe dans $(0, T^*)$ pour tout $T^* > 0$.

Soient T et R deux réels positifs tels que $0 < TR^{\frac{\beta}{\alpha}} < T^*$ et soit φ une fonction test positive de classe $C(Q_T)$..

Comme la condition initiale u_0 est positive, la formulation variationnelle (4.3) entraîne

$$\int_{Q_T} h\,|u|^p\,\varphi(x,t)dxdt \leq \int_{Q_T} u \underset{t/T}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi(x,t)dxdt. \tag{4.6}$$

La fonction test φ est choisie de façon qu'on a :

$$\int_{Q_T} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\right|^{\grave{p}} (h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}} < \infty\,;\ \int_{Q_T} \left|\underset{t/T}{D}{}^{\alpha}\varphi\right|^{\grave{p}} (h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}} < \infty. \tag{4.7}$$

Afin d'estimer le membre droite de (4.6), on applique l'inégalité de Young pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, on obtient

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\right| \leq \varepsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p\,h\varphi + C(\varepsilon)\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(\varphi)\right|^{\grave{p}} (h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}}, \tag{4.8}$$

et

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} u\left|\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi\right| \leq \varepsilon \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} |u|^p\,h\varphi + C(\varepsilon)\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left|\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi\right|^{\grave{p}} (h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}}. \tag{4.9}$$

En choisissant ε assez petit, on aura

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} h\,|u|^p\,\varphi \leq C(\varepsilon)\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left\{\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(\varphi)\right|^{\grave{p}} + \left|\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi\right|^{\grave{p}}\right\}(h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}}. \tag{4.10}$$

Prenons maintenant :

$$\varphi(x,t) = \Phi\left(\frac{|x|^2 + t^{\theta}}{R^2}\right),$$

où Φ est une fonction de classe $C^{\infty}(Q_T)$ décroissante telle que

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1, \text{ si } z \leq 1, \\ 0, \text{ si } z \geq 2, \end{cases} \tag{*}$$

et $0 \leq \Phi \leq 1$,

et R et θ sont des réels positives.

Afin d'estimer le membre droite de (4.10), on applique le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{R^{\frac{2}{\theta}}}, y = \frac{x}{R}.$$

Posons

$$\mu(y,\tau) = |y|^2 + \tau^\theta,$$

et

$$\Omega = \left\{(y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, |y|^2 + \tau^\theta < 2\right\}.$$

Comme $(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\beta}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}$(voir remarque (4.1)) et $dxdt = R^{N+\frac{2}{\theta}}dyd\tau$ nous obtenons

$$\int\limits_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(\varphi)\right|^{\grave{p}} (h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \leq R^{-\beta\grave{p}+N+\frac{2}{\theta}-\frac{\grave{p}}{p}\left(\delta+\frac{2\rho}{\theta}\right)} \int\limits_{\Omega} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}} \left(C_h\,|y|^\delta\,|\tau|^\rho\,\Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau. \tag{4.11}$$

En tenant compte de la définition de la dérivée fractionnaire en temps au sens Riemann-Liouville,(voir remarque (4.1)) nous obtenons

$$\int\limits_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} \left|\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi\right|^{\grave{p}} (h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \leq R^{-\frac{2\alpha}{\theta}\grave{p}+N+\frac{2}{\theta}-\frac{\grave{p}}{p}\left(\delta+\frac{2\rho}{\theta}\right)} \int\limits_{\Omega} \left|\underset{\tau/T}{D}{}^{\alpha}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}} \left(C_h\,|y|^\delta\,|\tau|^\rho\,\Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau. \tag{4.12}$$

Pour que les membres droites de (4.11)et (4.12) ont le même ordre en R, on choisie $\theta = \frac{2\alpha}{\beta}$ on a donc l'estimation

$$\int\limits_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} h\,|u|^p\,\varphi \leq CR^\gamma, \tag{4.13}$$

où

$$\gamma = -\beta\grave{p} + N + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\grave{p}}{p}\left(\delta + \frac{\beta\rho}{\alpha}\right),$$

et

$$C = C(\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\left(\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}} + \left|\underset{\tau/T}{D}{}^{\alpha}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}}\right)\left(\left(C_h\,|y|^\delta\,|\tau|^\rho\,\Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}}\right) dyd\tau. \tag{4.14}$$

Maintenant, dans le cas où, $\gamma < 0,$ (ie $p < p_c$), l'exposant de R dans (4.13) est négatif.
En faisant tendre R vers l'infini on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} h\,|u|^p \leq 0, \tag{4.15}$$

ce qui implique que $u \equiv 0$. Ceci contredit le fait que u est une solution faible non-triviale de (4.1).
Finallement, dans le cas, $\gamma = 0,$ (ie $p = p_c$),
d' après la convergence de l' intégral dans (4.13) si

$$C_R = \left\{(y,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, R^2 < |x|^2 + t^\theta < 2R^2\right\}.$$

Donc

$$\int_{C_R} h\,|u|^p\,\varphi = \int_{|x|^2+t^\theta<2R^2} h\,|u|^p\,\varphi - \int_{|x|^2+t^\theta<R^2} h\,|u|^p\,\varphi,$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} h\,|u|^p\,\varphi &= \lim_{R\to+\infty}\int_{|x|^2+t^\theta<2R^2} h\,|u|^p\,\varphi - \lim_{R\to+\infty}\int_{|x|^2+t^\theta<R^2} h\,|u|^p\,\varphi,\\ &= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+} h\,|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+} h\,|u|^p = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder,dans (4.8)et(4.9) nous obtenons

$$\int_{Q_{TR^{\frac{\beta}{\alpha}}}} u\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\right| \leq \left(\int_{C_R} |u|^p\,(h\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{C_R}\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\right|^{\grave{p}}(h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}, \tag{4.17}$$

et

$$\int_{Q_{TR^{\frac{\beta}{\alpha}}}} u\left|D_{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{}^{\alpha}\varphi\right| \leq \left(\int_{C_R} |u|^p\,(h\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{C_R}\left|D_{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{}^{\alpha}\varphi\right|^{\grave{p}}(h\varphi)^{\frac{-\grave{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}. \tag{4.18}$$

On applique le changement de variables présidente nous obtenons

$$\int_{Q_{TR^{\frac{\beta}{\alpha}}}} u\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\right| \leq \left(\int_{C_R} |u|^p\,(h\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega_1}\left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}}\left(C_h\,|y|^\delta\,|\tau|^\rho\,\Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}, \tag{4.19}$$

et

$$\int_{Q_{TR^{\frac{\beta}{\alpha}}}} u\left|D_{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha}\varphi\right| \leq \left(\int_{C_R} |u|^p (h\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} \left|D_{\tau/TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}} \left(C_h |y|^{\delta} |\tau|^{\rho} \Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}, \quad (4.20)$$

telle que

$$\Omega_1 = \left\{(y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, 1 < |y| + t^{\theta} < 2\right\}.$$

Par la somme de (4.19)et(4.20) nous obtenons :

$$\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\theta}}}} h |u|^p \varphi dxdt \leq L \cdot \left(\int_{C_R} |u|^p (h\varphi) dxdt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.21)$$

où

$$\begin{aligned} L &= \left(\int_{\Omega_1} \left|D_{\tau/TR^{\frac{2}{\theta}}}^{\alpha}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}} \left(C_h |y|^{\delta} |\tau|^{\rho} \Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}, \\ &+ \left(\int_{\Omega_1} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\Phi\circ\mu\right|^{\grave{p}} \left(C_h |y|^{\delta} |\tau|^{\rho} \Phi\circ\mu\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre R vers l'infini et en utilisant (4.16) nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+} h |u|^p dxdt = 0,$$

ce qui implique que $u \equiv 0$. Ceci contredit le fait que u est une solution faible non-triviale de (4.1),d'où la preuve. ■

Remarque 4.2 *la condition ($\gamma \leq 0$)*

$$p \leq 1 + \frac{\alpha(\beta+\sigma)+\beta\rho}{\alpha N + \beta(1-\alpha)},$$

nous fournie un critique exposant très connu qui est l'exposant de Fujita dans le cas $\sigma = \rho = 0, \alpha = 1, \beta = 2$.

4.2 Non existence de solutions pour un système d'équations différentielles fractionnaires

Considérons le système suivant (voir [15])

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D}^{\alpha}(u-u_0)+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u)=f(x,t)\,|v|^p\, dansQ, \\ \underset{0/t}{D}^{\delta}(v-v_0)+(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}(v)=g(x,t)\,|u|^q\, dansQ. \end{cases} \tag{4.22}$$

Où $\underset{0/t}{D}^{\alpha}$ (resp $\underset{0/t}{D}^{\delta}$)désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha; \alpha \in (0,1)$ (resp $\delta \in (0,1)$) , au sens de Caputo.,$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$(resp $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$),$\beta \in [1,2]$ (resp $\delta \in [1,2]$) est le laplacien fractionnaire, par rapport à x, d'ordre $\frac{\beta}{2}$ (resp $\frac{\gamma}{2}$).
Le système (4.22) est complété par les conditions initiales suivantes :

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0; v(x,0)=v_0(x)\geq 0, x\in\mathbb{R}^N, \tag{4.23}$$

où

$$\alpha>0, \delta<1\leq\gamma, \beta\leq 2,$$

où les fonctions f et g sont supposées satisfaire aux conditions :

$$f(x,t)\geq C_1 t^{\omega_1}\,|x|^{d_1}\,, g(x,t)\geq C_2 t^{\omega_2}\,|x|^{d_2}\,, \tag{H$_1$}$$

pour

$$t>0, x\gg 1, \omega_1,\omega_2\geq 0.d_1, d_2\geq 0.$$

Pour le système (4.22), nous avons

Définition 4.2 *soit $Q_T=(0,T)\times\mathbb{R}^N$;$0\leq T\leq\infty$, On dit que $(u;v)\in(L^1_{loc}(Q_T))^2$ est une solution faible locale de (4.22) définie sur Q_T si*

$$u^p, v^q\in L^1_{loc}(Q_T)\,; pour\ i=1,2,$$

et satisfait

$$\int\limits_{Q_{TR}} u_0 \underset{t/TR}{D}^{\alpha}\xi_1+\int\limits_{Q_{TR}} f\,|v|^p\,\xi_1=\int\limits_{Q_{TR}} u\underset{t/TR}{D}^{\alpha}\xi_1+\int\limits_{Q_{TR}} u.(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\xi_1, \tag{4.24}$$

et

$$\int\limits_{Q_{TR}} v_0 \underset{t/TR}{D}^{\delta}\xi_2+\int\limits_{Q_{TR}} g\,|u|^q\,\xi_2=\int\limits_{Q_{TR}} v\underset{t/TR}{D}^{\delta}\xi_2+\int\limits_{Q_{TR}} v.(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\xi_2, \tag{4.25}$$

pour certaines fonctions test $\xi_i \in C^{2.1}_{x,t}(Q_T)$,*telle que* $\xi_i(x,T) = 0$.*pour* $i = 1, 2$.
Si $T = +\infty$, *on dit que* $(u; v)$ *est une solution faible globale.*

Théorème 4.2 *(voir [15])*
Soit $p > 1, q > 1$. *Supposons la condition (H*$_1$*) est vérifié,Si*

$$N \leq \max\{N_1, N_2\},$$

où

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{\frac{\delta}{q}+\alpha-(1-\frac{1}{pq})+\frac{1}{pq}(\omega_1+\frac{\delta}{\gamma}d_1)+\frac{1}{q}(\omega_2+\frac{\alpha}{\beta}d_2)}{\frac{\delta}{\gamma q \grave{p}}+\frac{\alpha}{\beta \grave{q}}}, \\ N_2 = \dfrac{\frac{\alpha}{p}+\delta-(1-\frac{1}{pq})+\frac{1}{pq}(\omega_2+\frac{\alpha}{\beta}d_2)+\frac{1}{p}(\omega_1+\frac{\delta}{\gamma}d_1)}{\frac{\alpha}{\beta p \grave{q}}+\frac{\delta}{\gamma \grave{p}}}, \end{cases} \tag{4.26}$$

alors le problème (4.22) n'admet aucune solution faible non négative globale non triviale.

Preuve.
Comme dans la preuve du Theorem (4.1),on raisonne par l'absurde.
Supposons que le problème (4.22) admet une solution faible globale non triviale, et donc $(u\ , v)$ existe dans $(0, T^*)^2$ pour tout $T^* > 0$.
Soient T et R deux réels positifs tels que $0 < TR^{\frac{\beta}{\alpha}} < T^*$ et soit φ une fonction test positive assez régulière.
Comme la condition initiale u_0,(resp v_0) est positive, la formulation variationnelle (4.24),(resp (4.25)) entraîne

$$\int\limits_{Q_{TR}} f\,|v|^p\,\xi_1 \leq \int\limits_{Q_{TR}} u \underset{t/TR}{D}{}^{\alpha}\xi_1 + \int\limits_{Q_{TR}} u.(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\xi_1, \tag{4.27}$$

et

$$\int\limits_{Q_{TR}} g\,|u|^q\,\xi_2 \leq \int\limits_{Q_{TR}} v \underset{t/TR}{D}{}^{\delta}\xi_2 + \int\limits_{Q_{TR}} v.(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\xi_2. \tag{4.28}$$

En utilisant l'inégalité de Holder, il vient

$$\int\limits_{Q_{TR}} f\,|v|^p\,\xi_1 \leq \left(\int\limits_{Q_{TR}} |u|^q\,\xi_2 g\right)^{\frac{1}{q}} \cdot A, \tag{4.29}$$

où :

$$A = \left(\int\limits_{Q_{TR}} \left|\underset{t/TR}{D}{}^{\alpha}\xi_1\right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\grave{q}}} + \left(\int\limits_{Q_{TR}} \left|(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\xi_1\right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}}\right)^{\frac{1}{\grave{q}}}.$$

Et

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 g \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 f \right)^{\frac{1}{p}} \cdot B, \tag{4.30}$$

où :

$$B = \left(\int_{Q_{TR}} \left| \underset{t/TR}{D}^{\delta} \xi_2 \right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\grave{p}}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2 \right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\grave{p}}}.$$

En Combinant (4.29) et (4.30) on aura

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 f \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq B^{\frac{1}{q}} \cdot A, \tag{4.31}$$

et :

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 g \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq A^{\frac{1}{p}} \cdot B. \tag{4.32}$$

Prenons maintenant

$$\xi_j(x,t) = \Phi \left(\frac{|x|^{2\theta_j} + t^2}{R^2} \right), j = 1, 2$$

où Φ est une fontion test positive et décroissante vérifiant (*) et

$$\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \theta_2 = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Maintenant ,on utilise le changement de variables dans (A) suivant

$$t = R\tau, x = R^{\frac{\alpha}{\beta}} y,$$

et

$$\Omega_1 = \left\{ (y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \tau^2 + |y|^{\frac{2\beta}{\alpha}} < 2 \right\},$$

Choisir θ telle que

$$\left(\int_{Q_{TR}} \left| \underset{t/TR}{D}^{\alpha} \xi_1 \right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\grave{q}}} \leq \acute{C}_1 R^{\frac{1+\frac{N\alpha}{\beta} - \alpha\grave{q} - \frac{\grave{q}}{q}(\omega_2 + \frac{\alpha d_2}{\beta})}{\grave{q}}}, \tag{4.33}$$

où

$$\acute{C}_1 = \left(\int_{\Omega_1} \left| D_{\tau/T}^{\alpha} \Phi \right|^{\grave{q}} \left(C_2 \tau^{\omega_2} |y|^{d_2} \Phi \right)^{\frac{-\grave{q}}{q}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{\grave{q}}}.$$

Et comme $(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\alpha}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}$(voir remarque (4.1)) et $dxdt = R^{N+\frac{\alpha}{\theta}} dy d\tau$ nous obtenons

$$\left(\int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\grave{q}}} \leq \acute{C}_2 R^{\frac{1+\frac{N\alpha}{\beta} - \alpha\grave{q} - \frac{\grave{q}}{q}(\omega_2 + \frac{\alpha d_2}{\beta})}{\grave{q}}}, \tag{4.34}$$

où

$$\acute{C}_2 = \left(\int_{\Omega_1} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \Phi \right|^{\grave{q}} \left(C_2 \tau^{\omega_2} |y|^{d_2} \Phi \right)^{\frac{-\grave{q}}{q}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{\grave{q}}}.$$

Par la somme de (4.33) et (4.34) on obtient

$$A \leq C_1 R^{-L_1}, \tag{4.35}$$

où

$$C_1 = \acute{C}_1 + \acute{C}_2,$$

et

$$L_1 = \alpha - \frac{1}{\grave{q}} \left(1 + \frac{N\alpha}{\beta} - \frac{\grave{q}}{q} (\omega_2 + \frac{\alpha d_2}{\beta}) \right).$$

Maintenant ,on utilise le changement de variables dans (B) suivant

$$t = R\tau, x = R^{\frac{\delta}{\gamma}} y,$$

et

$$\Omega_2 = \left\{ (y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \tau^2 + |y|^{\frac{2\delta}{\gamma}} < 2 \right\}.$$

On obtient

$$\left(\int_{Q_{TR}} \left| D_{t/TR}^{\delta} \xi_2 \right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\grave{p}}} \leq \acute{C}_3 R^{\frac{1-\delta\grave{p} + \frac{N\delta}{\gamma} - \frac{\grave{p}}{p}(\omega_1 + \frac{\delta d_1}{\gamma})}{\grave{p}}}, \tag{4.36}$$

où

$$\acute{C}_3 = \left(\int_{\Omega_1} \left| D_{\tau/T}^{\delta} \Phi \right|^{\grave{p}} \left(C_1 \tau^{\omega_1} |y|^{d_1} \Phi \right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{\grave{p}}}.$$

Et comme $(\Delta_x)^{\frac{\gamma}{2}} = R^{-\gamma}(\Delta_y)^{\frac{\gamma}{2}}$(voir remarque (4.1)) et $dxdt = R^{N+\frac{\delta}{\gamma}}dyd\tau$ nous obtenons

$$\left(\int\limits_{Q_{TR}} \left|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\xi_2\right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\grave{p}}} \leq \acute{C}_4 R^{\frac{1-\delta\grave{p}+\frac{N\delta}{\gamma}-\frac{\grave{p}}{p}(\omega_1+\frac{\delta d_1}{\gamma})}{\grave{p}}}, \tag{4.37}$$

où

$$\acute{C}_4 = \left(\int\limits_{\Omega_1} \left|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\Phi\right|^{\grave{p}} \left(C_1\tau^{\omega_1}\,|y|^{d_1}\,\Phi\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}.$$

Par la somme de (4.36) et (4.37) on obtient

$$B \leq C_2 R^{-L_2}, \tag{4.38}$$

où

$$C_2 = \acute{C}_3 + \acute{C}_4,$$

et

$$L_2 = \delta - \frac{1}{\grave{p}}(1 + \frac{N\delta}{\gamma} - \frac{\grave{p}}{p}(\omega_1 + \frac{\alpha d_1}{\beta})).$$

Ainsi,de (4.35) et (4.38), il suit

$$\left(\int\limits_{Q_{TR}} |v|^p\,\xi_1 f\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \hat{C}_1 R^{-(\frac{1}{q}L_2+L_1)}, \tag{4.39}$$

et

$$\left(\int\limits_{Q_{TR}} |u|^q\,\xi_2 g\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \hat{C}_2 R^{-(\frac{1}{p}L_1+L_2)}. \tag{4.40}$$

Maintenant,dans le cas où $\max\left\{-\left(L_1+\frac{1}{q}L_2\right);-\left(L_2+\frac{1}{p}L_1\right)\right\}<0.$
L'exposant de R dans (4.39) et (4.40) est négatif,En faisant tendre R vers l'infini, nous obtenons

$$\begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} |u|^q\,g\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq 0, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} |v|^p\,f\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq 0, \end{cases}.$$

alors que $v \equiv 0$ et $u \equiv 0$, Ceci contredit le fait que (u,v) est une solution faible non-triviale de (4.22).
Finallement ,dans le cas où $\max\left\{-\left(L_1+\frac{1}{q}L_2\right);-\left(L_2+\frac{1}{p}L_1\right)\right\}=0$,
d'après la convergence des intégrales (4.39) et (4.40) si

$$C_R=\left\{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+, R^2<|y|^{\frac{2\beta}{\alpha}}+t^2\leq 2R^2\right\},$$

et

$$\acute{C}_R=\left\{(y,\tau)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+, R^2<|y|^{\frac{2\gamma}{\delta}}+t^\theta\leq 2R^2\right\}.$$

Donc

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{C_R}|v|^p\,\xi_1 f\right)=0, \tag{4.41}$$

ou

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{\acute{C}_R}|u|^q\,\xi_2 g\right)=0. \tag{4.42}$$

D'aprés (4.31), on obtien

$$\int\limits_{Q_{TR}} f\,|v|^p\,\xi_1\leq\left(\int\limits_{C_R} f\,|v|^p\,\xi_1\right)^{\frac{1}{pq}}\cdot\hat{C}_1.$$

D'aprés (4.32),on obtient

$$\int\limits_{Q_{TR}}|u|^q\,\xi_2 g\leq\left(\int\limits_{\acute{C}_R}|u|^q\,\xi_2 g\right)^{\frac{1}{pq}}\cdot\hat{C}_2. \tag{4.43}$$

En faisant tendre R vers l'infini, et on utilisant (4.41) où (4.42) nous obtenons

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}}|v|^p\,f=0,$$

ou

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}}|u|^q\,g=0,$$

alors que $v \equiv 0$ ou $u \equiv 0$, Ceci contredit le fait que (u,v) est une solution faible non-triviale de (4.22). ■

Remarque 4.3 *lorsque $\alpha = \delta = 1; \beta = \gamma = 2$,nous retrouvons le cas étudié par Escobedo et Herrero [5],mais nous avons besoin d'imposer
les contraintes $p > 1; q > 1$ tandi que Escobedo et Herro nècessite $pq > 1$.*

Chapitre 5

Les Conditions nécessaires pour l'existence locale et globale de certains problèmes d'évolution

Dans ce chapitre, on établit des conditions nécessaires pour l'existence des solutions locales et globales pour un système de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires.

5.1 Les Conditions nécessaires de l'existence locale et globale pour un système d'équations différentielles fractionnaires

Considérons le problème d'évolution (voir [21])

$$\begin{cases} \underset{0t}{D}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}(u) = |u|^{p_1} |v|^{q_1} \, dans Q_T, \\ \underset{0t}{D}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}(v) = |u|^{p_2} |v|^{q_2} \, dans Q_T, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\underset{0/t}{D}^{\alpha_1}$ (resp $\underset{0/t}{D}^{\alpha_2}$)désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha_1; \alpha_1 \in (0,1)$ (resp $\alpha_2 \in (0,1)$) , au sens de Caputo.$(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}$(resp $(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}$) ;$\beta_1 \in [1,2]$,(resp $\beta_1 \in [1,2]$) est le laplacien fractionnaire, par rapport à x, d'ordre $\frac{\beta_1}{2}$ (resp $\frac{\beta_2}{2}$) ,avec

$$\alpha > 0, \alpha_1 < \beta_{1,} \alpha_2 < \beta_2, \beta \leq 2.$$

Le système (5.1) est complété par les conditions initiales suivantes

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \neq 0; v(x,0) = v_0(x) \geq 0 \neq 0, x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.2}$$

Définition 5.1 *soit $Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N$;pour $0 \leq T \leq \infty$, on dit que $(u;v) \in (L^1_{loc}(Q_T))^2$ est une solution faible locale de (5.1) défini sur Q_T si*

$$u^{p_i}, v^{q_i} \in L^1_{loc}(Q_T) \, ; \text{pour } i = 1,2,$$

et satisfait

$$\begin{cases} \int_{Q_T} u_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 + \int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 = \int_{Q_T} u \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 + \int_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1, \\ \int_{Q_T} v_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2 + \int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 = \int_{Q_T} v \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2 + \int_{Q_T} v(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2, \end{cases} \tag{5.3}$$

pour toute fonction test $\varphi_i \in C^{2.1}_{x,t}(Q_T)$,vérifiant $\varphi_i(x,T) = 0$.pour $i = 1,2$.
Si $T = +\infty$, on dit que (u,v) est une solution faible globale.

Théorème 5.1 *Soit (u,v) une solution faible locale non triviale du problème (5.1), alors, on a les estimations suivantes :*

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf [u_0(x)] \leq CT^{\frac{-(q_1\alpha_2 + \alpha_1)}{p_2 q_1 - 1}}, \tag{5.4}$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf\left[u_0(x)\right] \leq C^{'} T^{\frac{-(\alpha_2+p_2\alpha_1)}{p_2 q_1 -1}}, \tag{5.5}$$

où C et $C^{'}$ sont des constantes positives.

Preuve.

Grâce à la formultaion variationnelle (5.3), nous avons

$$\begin{cases} \int\limits_{Q_T} u_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 \leq \int\limits_{Q_T} u \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 + \int\limits_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1, \\ \int\limits_{Q_T} v_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq \int\limits_{Q_T} v \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2 + \int\limits_{Q_T} v(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2, \end{cases} \tag{5.6}$$

pour toute fonction test positive $\varphi_i \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ vérifiant

$$\varphi(.,T) = 0 \text{ pour } i = 1,2.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\int\limits_{Q_T} u \left| \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 \right| dxdt \leq \left(\int\limits_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} A,$$

et

$$\int\limits_{Q_T} u \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right| dxdt \leq \left(\int\limits_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} B,$$

où

$$A = \left(\int\limits_{Q_T} \left| \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 \right|^{p_2^{'}} v^{\frac{-p_2^{'} q_2}{p_2}} \varphi_2^{\frac{-p_2^{'}}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_2^{'}}},$$

et

$$B = \left(\int\limits_{Q_T} \left| \underset{t/T}{(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}} \varphi_1 \right|^{p_2^{'}} v^{\frac{-p_2^{'} q_2}{p_2}} \varphi_2^{\frac{-p_2^{'}}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_2^{'}}}.$$

Ainsi

$$\int_{Q_T} u_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1 dxdt \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} A_1, \tag{5.7}$$

où

$$A_1 = A + B. \tag{5.7.1}$$

Comme ci-dessus, en utilisant une seconde fois l'inégalité de Hölder, il vient

$$\int_{Q_T} v_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2 dxdt \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} A_2, \tag{5.8}$$

avec

$$A_2 = \acute{A} + \acute{B}, \tag{5.8.1}$$

où

$$\acute{A} = \left(\int_{Q_T} \left| \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_1^{'}} u^{\frac{-p_1 q_1^{'}}{q_1}} \varphi_1^{\frac{-q_1^{'}}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_1^{'}}},$$

et

$$\acute{B} = \left(\int_{Q_T} \left| \underset{t/T}{(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}} \varphi_2 \right|^{q_1^{'}} u^{\frac{-p_1 q_1^{'}}{p_2}} \varphi_1^{\frac{-q_1^{'}}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_1^{'}}}.$$

D'autre part,comme u_0 et v_0 sont des fonctions positives, nous obtenons comme précédemment

$$\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} A_1,$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} A_2.$$

Par conséquent,

$$\left(\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \right)^{1-\frac{1}{p_2 q_1}} \leq A_2^{\frac{1}{p_2}} A_1, \tag{5.9}$$

et

$$\left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2\right)^{1-\frac{1}{p_2 q_1}} \leq A_1^{\frac{1}{q_1}} A_2. \tag{5.10}$$

Appliquant (5.10) et (5.9) respectivement dans (5.7) et (5.8), on aura

$$\left(\int_{Q_T} u_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_1} \varphi_1\right)^{1-\frac{1}{p_2 q_1}} \leq A_2^{\frac{1}{p_2}} A_1, \tag{5.11}$$

et

$$\left(\int_{Q_T} v_0 \underset{t/T}{D}^{\alpha_2} \varphi_2\right)^{1-\frac{1}{p_2 q_1}} \leq A_1^{\frac{1}{q_1}} A_2. \tag{5.12}$$

Maintenant, en prenant des fonctions test de la forme

$$\varphi_i(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \begin{cases} \left(1-\frac{t}{T}\right)^l, 0 < t \leq T \\ 0, t < T \end{cases}, \tag{5.13}$$

où $\Phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ est positive, à $supp\ \Phi \subset \{1 < |x| < 2\}$ et vérifie

$$\begin{cases} \left((-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \Phi\right)_+ \leq k\Phi \text{ pour une certaine constant } k > 0 \\ \left((-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \Phi\right)_+ \leq h\Phi \text{ pour une certaine constant } h > 0 \end{cases}. \tag{5.14}$$

L'exposant l, introduit dans (5.14), est un nombre réel positif quelconque si
$\min\left(p_2 - \frac{1}{1-\alpha_1}, q_1 - \frac{1}{1-\alpha_2}\right) \geq 0$
,et $l \geq \max\left(\alpha_1 p_2' - 1, \alpha_1 q_1' - 1\right)$ si $\min\left(p_2 - \frac{1}{1-\alpha_1}, q_1 - \frac{1}{1-\alpha_2}\right) < 0$,
où q' et p'sont respectivement les exposants conjugués de p et q.
De plus, notons que

$$\underset{t\diagdown T}{D}^{\alpha_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l = \Lambda T^{-\alpha_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{l-\alpha_1}, \tag{5.15}$$

où $\Lambda = \frac{\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+l-\alpha_1)}$.
De façon analogue,

$$\underset{t\diagdown T}{D}^{\alpha_2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l = \Upsilon T^{-\alpha_2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{l-\alpha_2}, \tag{5.16}$$

où $\Upsilon = \frac{\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+l-\alpha_2)}$.

Considérons le changement de variables suivant

$$t = T\tau \text{ et } x = Ry,$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} u_0(x) \underset{t/T}{D}^{\alpha_1}\varphi_1(x,t)dxdt &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\Lambda\Phi(\frac{x}{R})T^{-\alpha_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{l-\alpha_1} dxdt,\\ &= \frac{R^N\Lambda T^{1-\alpha_1}}{l-\alpha_1+1}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry)\Phi(y)dy. \end{aligned} \quad (5.17)$$

et

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}\left|\underset{t/T}{D}^{\alpha_1}\varphi_1\right|^{p_2'} v^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\varphi_2^{\frac{-p_2'}{p_2}}dtdx &\leq \Lambda^{p_2'}T^{1-\alpha_1p_2'}s_1^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(\frac{x}{R})\int_0^1(1-\tau)^{l-\alpha p_2'}d\tau dx,\\ &= \frac{R^N\Lambda^{p_2'}T^{1-\alpha_1p_2'}}{l-\alpha_1p_2'+1}s_1^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy. \end{aligned} \quad (5.18)$$

et

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}\left|\underset{t/T}{(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}}\varphi_1\right|^{p_2'} v^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\varphi_2^{\frac{-p_2'}{p_2}}dtdx &\leq \frac{T}{l+1}s_1^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\int_{\mathbb{R}^N}((-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi(\frac{x}{R}))_+^{p_2'}(\Phi(\frac{x}{R}))^{\frac{-p_2'}{p_2}}dx,\\ &\leq \frac{TR^{N-\beta_1p_2'}k^{p_2'}}{l+1}s_1^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Appliquant (5.17),(5.18) et (5.19) dans (5.7.1) ,on aura
$A_1 \leq \left(\frac{R^N\Lambda^{p_2'}T^{1-\alpha_1p_2'}}{l-\alpha_1p_2'+1}s_1^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{p_2'}} + \left(\frac{TR^{N-\beta_1p_2'}k^{p_2'}}{l+1}s_1^{\frac{-p_2'q_2}{p_2}}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{p_2'}},$
Ou encor

$$A_1 \leq R^{\frac{N}{p_2'}}s_1^{\frac{-q_2}{p_2}}\left[\frac{\Lambda T^{\frac{1}{p_2'}-\alpha_1}}{((l-\alpha_1)p_2'-l\frac{p_2'}{p_2}+1)^{\frac{1}{p_2'}}} + \frac{T^{\frac{1}{p_2'}}R^{-\beta_1}k}{(l+1)^{\frac{1}{p_2'}}}\right]\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{p_2'}}. \quad (5.20)$$

De même,il vient

$$A_2 \leq R^{\frac{N}{q_1'}}s_2^{\frac{-p_1}{q_1}}\left[\frac{\Upsilon T^{\frac{1}{q_1'}-\alpha_2}}{((l-\alpha_2)q_1'-l\frac{q_1'}{q_1}+1)^{\frac{1}{q_1'}}} + \frac{T^{\frac{1}{q_1'}}R^{-\beta_2}h}{(l+1)^{\frac{1}{q_1'}}}\right]\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{q_1'}}. \quad (5.21)$$

Ainsi , (5.17), (5.20) et (5.21) avec l'inégalité (5.11) entraînent

$$T^{(1-\alpha_1)\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}\left(\inf_{|y|>1} u_0(Ry)\right)^{1-\frac{1}{p_2q_1}} \leq C_5\left(C_1T^{\frac{1}{p_2'}-\alpha_1}+C_2T^{\frac{1}{p_2'}}R^{-\beta_1}\right)\left(C_3T^{\frac{1}{q_1'}-\alpha_2}+C_4T^{\frac{1}{q_1'}}R^{-\beta_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}, \tag{5.22}$$

où C_1, C_2, C_3,C_4 et C_5sont des constantes positives indépendantes de R et T.
En faisant tendre $R \to \infty$ dans (5.22), on conclut que

$$T^{(1-\alpha_1)\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}\left(\inf_{|y|>1} u_0(Ry)\right)^{1-\frac{1}{p_2q_1}} \leq CT^{\frac{1}{p_2'}-\alpha_1}T^{\frac{1}{p_2q_1'}-\frac{\alpha_2}{p_2}},$$

l'estimation (5.4) est ainsi prouvée.
De même, il vient

$$T^{(1-\alpha_2)\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)}\left(\inf_{|y|>1} v_0(Ry)\right)^{1-\frac{1}{p_2q_1}} \leq C'T^{\frac{1}{p_2'q_1}-\frac{\alpha_1}{q_1}}T^{\frac{1}{q_1'}-\alpha_2},$$

l'estimation (5.5) est ainsi prouvée ∎
Concernant les résultats d'existence de solutions locales et globales, on établit les conditions nécessaires suivantes :

Corollaire 5.1 *Si on suppose que le système (5.1) admet une solution faible positive globale et non-triviale ,alors*

$$\liminf_{|x|\to\infty} u_0(x) = \liminf_{|x|\to\infty} v_0(x) = 0. \tag{5.23}$$

Corollaire 5.2 *Si* $\liminf_{|x|\to\infty} u_0(x) = +\infty$ *ou si* $\liminf_{|x|\to\infty} v_0(x) = +\infty$*,alors le système (5.1) n'admet aucune solution faible ;locale ;positive et non triviale.*

Corollaire 5.3 *Si on pose* $B_1 = \liminf_{|x|\to\infty} u_0(x) > 0$ *et* $B_2 = \liminf_{|x|\to\infty} v_0(x) > 0$ *,alors*

$$T^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1}} \leq \frac{C}{B_1}, \tag{5.24}$$

et

$$T^{\frac{\alpha_2+p_2\alpha_1}{p_2q_1}} \leq \frac{C'}{B_2}, \tag{5.25}$$

où C *et* $\acute{C}$ *sont les constantes introduites dans (5.4) et (5.5).*

Notre deuxième principal résultat est le suivant

Théorème 5.2 *Supposons que le problème (5.1) admet une solution faible ,positive ,globale et non-triviale, alors il existe deux constantes H et K telles que*

$$\liminf_{|x|\to\infty} u_0(x)\,|x|^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1-1}} \leq H, \tag{5.26}$$

$$\liminf_{|x|\to\infty} v_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_2+p_2\alpha_1}{p_2q_1-1}} \leq K. \tag{5.27}$$

Preuve.
Retournons à l'expression (5.22) que l'on multiplie par $|x|^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1-1}}\,|x|^{\frac{-(q_1\alpha_2+\alpha_1)}{p_2q_1-1}}$ à l'intérieur de l'intégrale et dans les deux membres.et En prenant $T=R$, il suit

$$\left(\inf_{|y|>R} u_0(Ry)\,|x|^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1-1}}\right)^{\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)} \leq 2^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1}}\left(C_1+C_2R^{\alpha_1-\beta_1}\right)\left(C_3+C_4R^{\alpha_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Comme $\alpha_1<\beta_1$ et $\alpha_2<\beta_2$ on passe à la limite par rapport à R et on obtient

$$\left(\inf_{|y|>R} u_0(Ry)\,|x|^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1-1}}\right)^{\left(1-\frac{1}{p_2q_1}\right)} \leq 2^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1}}C_1C_3^{\frac{1}{p_2}},$$

donc ,on obtient l'inégalité (5.26) avec

$$H = 2^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1-1}}\left(C_1C_3^{\frac{1}{p_2}}\right)^{\frac{q_1\alpha_2+\alpha_1}{p_2q_1-1}}.$$

De même, on obtient l'inégalité (5.27) avec

$$K = 2^{\frac{\alpha_2+p_2\alpha_1}{p_2q_1-1}}\left(C_1^{\frac{1}{q_1}}C_3\right)^{\frac{\alpha_2+p_2\alpha_1}{p_2q_1-1}}.$$

■

Conclusion

Nous avons étudie dans ce mémoire l'existence et la non existence des solutions pour quelques problèmes d'évolution du type parabolique, représentés dans des systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées classiques et systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires.
Une extension éventuelle de ce travail peut traiter des problèmes d'évolution du type hyperbolique.

Bibliographie

[1] S Abdelmalek.and S.Kouachi , A Simple Proof of Sylvester's (Determinants) Identity, App.Math. scie. Vol. 2.2008. no 32. p 1571-1580.

[2] S Abdelmalek ,H. LOUAFI , AND A.YOUKANA Global existence of solutions for GiererMeinhardt system with three equations arXiv :1007.4029v1 [math.AP]22 Jul 2010

[3] S Abdelmalek A.Youkana Global existence of solutions for some coupled systems of reaction-diffusion arXiv :1009.5687v2 [math.AP] 29 Jan 2011

[4] H.Bresis,Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[5] M. Escobedo, M.A. Herrero, Boundedness and blow-up for a semilinear reaction–diffusion equation, J. Differential Equations 89 (1991) 176–202..

[6] W. Feng, Coupled Systems of Reaction-Diffusion Equations and Applications. Ph.D Thesis,North Carolina State University (1988)

[7] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type.Prentice Hall Englewood Chiffs. N.J ;1964.

[8] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo Sect. I 13 (1966) 109–124

[9] F. R. Gantmacher, "Théorie des matrices. Tome 1 :Théorie générale",Dunod,Paris, 1966.(Cité page 12).

[10] A. Haraux and A. Youkana, On a result of K. Masuda concerning reactiondiffusion equations, T¨ohoku Math. J. 40(1988) 159-163

[11] D.Henry, Geometric Theory of Semi linear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, 1984

[12] M.Kirane and S.Kouachi, A Strongly Nonlinear Reaction-Diffusion Model for a Deteministic Diffusion Epidemie. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. Vol 12, n 1,(1995). JAPAN

[13] M.Kirane and S.Kouachi, Asymptitic Behavior for a System Describing Epidemics with Migration and Spatial Spread of Infection. Dynamical Systems and applications, Vol 12 number 1, (1993), 121-130.

[14] M.Kirane and S. Kouachi, Global Solutions to a System of Strongly Coupled ReactionDiffusion Equations. Nonlinear Analysis Theory, Methods and applications. Vol 126, n8 ; (1996) USA.

[15] M. Kiranea,Y.Laskri, N.-e. Tatar Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives J. Math. Anal. Appl. 312

[16] M.Kirane and M Qafsaoui Global Nonexistence for the Cauchy Problem of Some Nonlinear Reaction–Diffusion Systems J. Appl. Math 268,217–243 (2002)

[17] K Masuda and K Takahashi, Reaction-diffusion systems in the Gierer-Meinhardt theory of biological pattern formation. Japan J. Appl. Math., 4(1) : 47-58, 1987.

[18] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric et A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis. Mathematics and Its Applications, (1993) Kluwer Academic Publishers

[19] J. Morgan, Global Existence for Semilinear Parabolic Systems. SIAM. J.Math. Anal 20, (1989), 1128-1144.

[20] A Pazy,Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations.

[21] B Rebiai and K Haouam Non existence of Global Solutions to a Nonlinear Fractional Reaction-Diffusion System IAENG International Journal of Applied Mathematics, 45 :4, IJAM_45_4_02 14 November 2015

[22] F. Rothe, "Globale solutions of reaction-diffusion systems", Lecture Notes in Mathematics 1072, Springer-Verlag, New York, 1984.

[23] J.A.Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, New-York, (1983)

[24] M.R.Spiegel,Théorie et applications de L'analyse (1982)..

[25] Springer-Verlag,Applied Math.Sciences 44, New York (1975).