

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>1</b>
1.1 Connexité . . . . .	2
1.2 Homotopie . . . . .	3
1.3 Groupe d'homotopie . . . . .	6
<b>2 Calcul du groupe fondamental</b>	<b>8</b>
2.1 Produits libres et sommes amalgamées de groupes . . . . .	9
2.2 Théorème de Seifert et Van Kampen . . . . .	12
2.3 Deuxieme théorème de Van Kampen . . . . .	15
<b>3 Les Noeuds</b>	<b>16</b>
3.1 Les Noeuds . . . . .	17
3.2 Diagramme d'un noeud : . . . . .	19
3.3 Mouvement de Reidmeister . . . . .	20
3.4 Invariants de noeuds . . . . .	21
3.5 Le groupe d'un noeud . . . . .	24
3.6 Présentation de Wirtinger . . . . .	28
<b>4 Groupe de tresses</b>	<b>30</b>
4.1 Groupe de tresses . . . . .	31
4.1.1 Fermeture des tresses . . . . .	33
<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>



---

## Dédicase

A mon père et ma mère qui m'ont éclairés mon chemin et qui m'ont encouragés et soutenus toute la long de mes études,

A mes frères et soeurs,

A tous mes enseignants d'Université de Tebessa,

A tous mes amis,

A tous les étudiants du département de Maths et Inf.

ABDELKADIR

---

## Remerciements

nous tenons tiens a adresser nos remerciements les plus chaleureux et notre profonde gratitude a notre encadreur de mémoire Monsieur "**nouar dgaïchi**", pour 'avoir proposer le sujet de ce memoire. C'est grâce a sa grande disponibilite, ses conseils, ses orientations, ses encouragements que nous avons pu mené a bien ce travail.

Mes remerciens vont également a Monsieur "**Bouzneda smail**", pour avoir bien voulu nous faisant l'honneur d'accepter de presider le jury. De même nous remercie a Monsieur "**Saieb sadek**", pour l'honneur qu'il a fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Enfin nous remercions nos familles et tous nos amis et tous nos collegues sans exception .

---

## Table des figures

Figure 01 : Chemin	page 2
Figure 02 : Homotopie de deux chemins	page 3
Figure 03 : La transitivité de l'homotopie	page 5
Figure 04 : Exemple d'homotopie	page 5
Figure 05 : Homotopie de deux chemins composables	page 6
Figure 06 : Le tore	page 15
Figure 07 : Noeud trivial	page 18
Figure 08 : Diagramme d'un noeud de trèfle	page 20
Figure 09 : Types des mouvements de Reidemeister	page 21
Figure 10 : Le Noeud de huit , le noeud de trèfle	page 23
Figure 11 : La projection d'un noeud polygonal	page 24
Figure 12 : Les arcs polygonaux de deux noeuds équivalents	page 25
Figure 13 : La projection horizontal sans point double	page 26
Figure 14 : Diagramme de noeud de huit	page 28
Figure 15 : Les deux relations possibles de présontation de wertinger	page 29
Figure 16 : Exemple de tresse au 7 brins	page 31

---

# Introduction.

Il y a un peu moins de 150 ans, les noeuds ont commencé à intéresser les scientifiques et en particulier les mathématiciens. Dès lors, ils sont devenus le centre d'une nouvelle théorie mathématique très riches, utilisant des concepts sophistiqués des mathématiques modernes et ayant de nombreuses applications. Je me propose dans ces quelques lignes de décrire sommairement, et en tentant d'utiliser un langage le moins « technique » possible, mon travail de thèse.

Depuis Gauss, les mathématiciens s'intéressent à ces objets et tentent de les classer. Le problème est toujours ouvert. Cependant, l'avènement de la topologie algébrique au début du 20-ième siècle a énormément contribué à l'exploration du monde des entrelacs.

L'évolution des travaux sur les entrelacs a été marquée par la découverte de résultats très importants qui ont permis d'établir des liens avec d'autres objets mathématiques, et parfois des ponts avec d'autres disciplines telle que la physique théorique.

Parmi les théorèmes les plus intéressants de la topologie géométrique, on peut citer celui de Lickorish qui affirme qu'à difféomorphisme près toute 3-variété orientée connexe compacte sans bord est complètement décrite par une classe d'équivalence d'un certain entrelacs dans  $S^3$ , Le théorème de Kirby qui montre que modulo une relation d'équivalence, les entrelacs dans  $S^3$  sont en correspondance biunivoque avec les classes de difféomorphisme des 3-variétés orientées connexes compactes et sans bord. Ce résultat a ainsi ramené la classification des 3-variétés à celle des entrelacs dans  $S^3$ .

On ne pourra oublier de citer la grande et importante découverte du polynôme de Jones, invariant qui a inauguré une nouvelle ère dans les mondes des mathématiques et de la physique théorique.

De nos jours, la théorie des noeuds trouve des applications en physique quantique, en mécanique statistique et en biologie moléculaire .

Dans ce travail on fait rappel topologique sur la connexité et connexité par arc des espaces topologique et l'homotopie des chemins et des lacets et groupe d'homotopie qui est l'objet du premier chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à la notion du produit libre et sommes amalgamées de groupes qui sont nécessaire pour l'énoncé d'un fameux théorème de Seifert et Van Kampen pour calculer le groupe fondamental d'un espace.

Dans Le troisième chapitre nous allons définir les noeuds et les le groupe d'un noeud, diagramme d'un noeud, mouvement de Reidmeister, et la notion d'invariants de noeuds et présentation de Wirtinger.

---

Le quatrième chapitre contient la notion et quelques propriétés des groupes des tresses.

# Chapitre 1

## Préliminaire

---

1-Connexité

2-Homotopie

3-Groupe d'homotopie

---



## 1.1 Connexité

**Définition 1.1** Soit  $X$  un espace topologique.

un chemin dans  $X$  est une application continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  où  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

on suppose en général que  $a = 0$  et  $b = 1$  ; on peut toujours s'y ramener par l'unique application linéaire affine de  $[a, b]$  sur  $[0, 1] = I$

le point  $\gamma(0)$  est l'origine de chemin, le point  $\gamma(1)$  son extrémité.

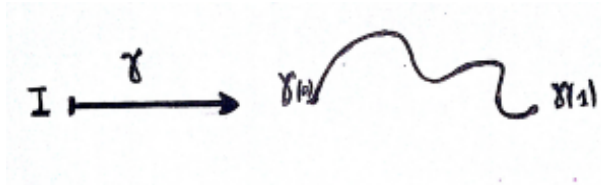


Figure 01 : Chemin

**Définition 1.2** On dit que  $X$  est un espace topologique connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont  $\emptyset$  et  $X$ .

**Définition 1.3** On dit que l'espace  $X$  est connexe par arcs si deux points quelconques  $x, y \in X$  peuvent être joints par un chemin  $\gamma$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$ .

**Proposition 1.1** La réunion d'une famille  $(A_j)_{j \in J}$  de parties connexes par arcs de  $X$ , ayant un point commun  $a$  est connexe par arcs.

**Preuve** Si  $x \in A_{j_1}$  et  $y \in A_{j_2}$  on obtient un chemin qui joint  $x$  à  $y$  en mettant bout à bout un chemin de  $x$  à  $a$  et un chemin de  $a$  à  $y$ . ■

**Définition 1.4** Un espace topologique  $X$  est connexe par arcs si et seulement si deux points quelconques de  $X$  peuvent toujours être connectés par un chemin.

**Proposition 1.2** Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.

**Preuve** Voir [6, p :3] ■

**Définition 1.5** Pour tout point  $x$  dans un espace topologique  $X$ , la plus grande partie connexe contenant  $x$  s'appelle la composante connexe de  $x$ .

**Proposition 1.3** La relation  $R(x, y) = \{\text{il existe un chemin qui joint } x \text{ à } y\}$  est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence (composant connexe par arcs) d'un point  $x$  est la plus grande partie connexe par arcs contenant  $x$ .

**Preuve** Voir [6, p :2] ■

## 1.2 Homotopie

**Définition 1.6** Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux chemins de même origine  $x$  et de même extrémité  $y$ . On dit que  $\gamma$  est homotope à  $\gamma'$ , s'il existe une application continue telle que :

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(t, 0) = \gamma(t)$  et  $H(t, 1) = \gamma'(t)$ .

Pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $H(0, s) = x$  et  $H(1, s) = y$ .

**Notation 1.1**  $\gamma \sim \gamma'$  désigne que  $\gamma$  homotope à  $\gamma'$

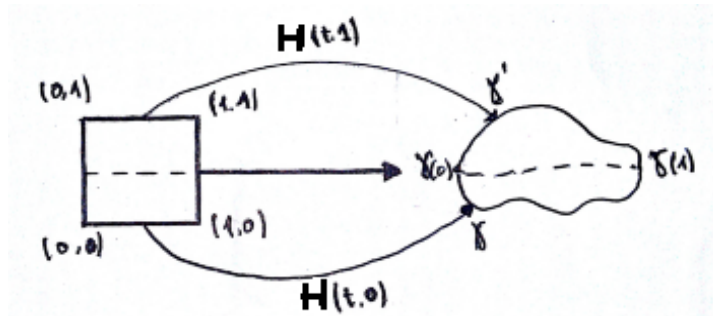


Figure 02 : Homotopie de deux chemins

**Définition 1.7** Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux chemins dans  $X$

tels que  $\gamma(1) = \gamma'(0)$ . On désigne par  $\gamma'' = \gamma \cdot \gamma'$  le chemin défini par :

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et on dit que  $\gamma''$  est le chemin composé de  $\gamma$  et  $\gamma'$ .

**Proposition 1.4** L'homotopie des chemins est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins dans  $X$ .

On note  $[\gamma]$  la classe d'équivalence d'homotopie du chemin  $\gamma \in C([0, 1], X)$  et on l'appelle la classe d'homotopie de  $\gamma$ .

**Preuve** Montrons que  $\sim$  est une relation d'équivalence

**Réflexivité**

Soit  $\gamma$  un chemin dans  $X$ , on définit l'application  $F$  par

$$F : I \times I \rightarrow X$$

$$F(t, s) = \gamma(t)$$

Donc  $F$  vérifie les condition d'homotopie alors  $\gamma \sim \gamma$

**Symétrie**

Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux chemins homotopes, tels que  $\gamma(0) = \gamma'(0)$ ,  $\gamma(1) = \gamma'(1)$ .

On définit l'application  $G : I \times I \rightarrow X$  par :  $G(t, s) = F(t, 1 - s)$

Alors  $G$  est continue et

$$\begin{cases} G(t, 0) = F(t, 1) = \gamma'(t) \\ G(t, 1) = F(t, 0) = \gamma(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(0, s) = F(0, 1 - s) = \gamma'(0) = \gamma(0) \\ G(1, s) = F(1, 1 - s) = \gamma(1) = \gamma'(1) \end{cases}$$

Alors  $G$  est une homotopie entre  $\gamma'$  et  $\gamma$ .

**Transitivité**

Soient  $\gamma$ ,  $\gamma'$  et  $\gamma''$  des chemins dans  $X$

Supposons que  $\gamma \sim \gamma'$  et  $\gamma' \sim \gamma''$  telle que  $F : I \times I \rightarrow X$ ,  $G : I \times I \rightarrow X$  et :

$$\begin{cases} F(t, 0) = \gamma(t) \\ F(t, 1) = \gamma'(t) \\ F(0, s) = \gamma(0) = \gamma'(0) \\ F(1, s) = \gamma'(1) = \gamma(1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G(t, 0) = \gamma'(t) \\ G(t, 1) = \gamma''(t) \\ G(0, s) = \gamma'(0) = \gamma''(0) \\ G(1, s) = \gamma''(1) = \gamma'(1) \end{cases}$$

On définit l'application  $H : I \times I \rightarrow X$  par :

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Donc  $H$  est continue et

$$H(t, 0) = F(t, 0) = \gamma(t)$$

$$H(t, 1) = G(t, 1) = \gamma''(t)$$

$$H(0, s) = F(0, 2s) = \gamma(0) = \gamma'(0) = \gamma''(0)$$

$$H(1, s) = \gamma(1) = \gamma'(1) = \gamma''(1)$$

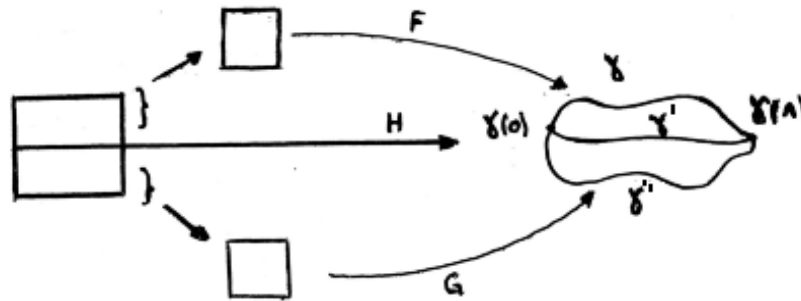


Figure 03 : La transitivité de l'homotopie

Alors  $H$  est une homotopie entre  $\gamma$  et  $\gamma''$ . ■

**Exemple 1.1** Soit  $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  et  $\gamma, \gamma'$  deux chemins dans  $X$ , tels que :  $\gamma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$  et  $\gamma'(t) = (\cos(\pi t), 2 \sin(\pi t))$

On a :  $\gamma \sim \gamma'$  par l'homotopie

$$F : I \times I \rightarrow X$$

$$F(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\gamma'(t)$$

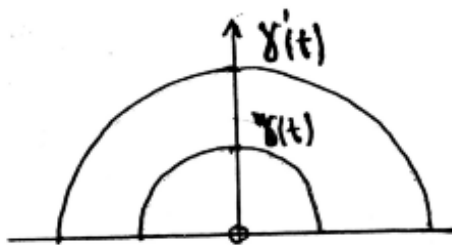


Figure 04 : Exemple d'homotopie

**Proposition 1.5** La classe d'équivalence du chemin composé ne dépend que des classes des chemins composants.

**Preuve** Soit  $\gamma'_0$  et  $\gamma''_0$  des chemins composables i.e. ( $\gamma'_0(1) = \gamma''_0(0)$ ) et  $\delta'$  et  $\delta''$  des homotopies entre  $\gamma'_0$  et  $\gamma'_1$  d'une part,  $\gamma''_0$  et  $\gamma''_1$  d'autre part.

Alors  $\gamma'_1$  et  $\gamma''_1$  sont composables et l'on a :  $\gamma'_0 \cdot \gamma''_0 \sim \gamma'_1 \cdot \gamma''_1$ .

Posons en effet

$$\delta(t, s) = \begin{cases} \delta'(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta''(2t - 1, s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'application  $\delta$  est une homotopie entre  $\gamma'_0 \cdot \gamma''_0$  et  $\gamma'_1 \cdot \gamma''_1$ .

Pour vérifier que  $\delta$  est continue (comme plus haut que  $\delta' \cdot \delta''$  est continu ) on utilise le résultat suivant :

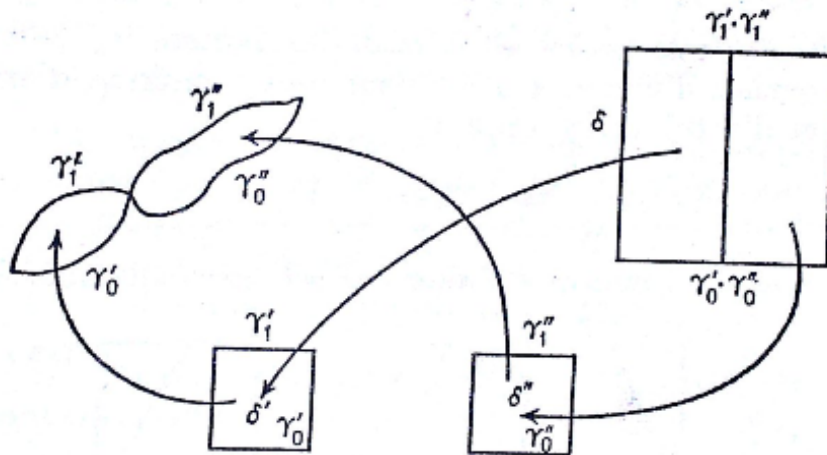


Figure 05 : Homotopie de deux chemins composables

■

### 1.3 Groupe d'homotopie

**Définition 1.8 Théorème 1.1** On dit qu'un chemin  $\gamma$  dans l'espace  $X$  est un lacet en  $x \in X$  (ou de base  $x$ ) si son origine  $\gamma(0)$  et son extrémité  $\gamma(1)$  sont confondant en  $x$ .

On note  $\pi_1(X, x)$  l'ensemble des classes d'homotopie des lacets de base  $x$  dans  $X$  et spécifiquement

le groupe fondamental..

**Théorème 1.2** La composition des lacets induit sur  $\pi_1(X, x)$  une structure de groupe.

**Preuve Associativité :** On définit l'application d'homotopie entre  $([\gamma] \cdot [\gamma']) \cdot [\gamma'']$  et  $[\gamma] \cdot ([\gamma'] \cdot [\gamma''])$  par

$$F(t, s) = \begin{cases} \gamma(4t / (s + 1)) \text{ si} & 0 \leq t \leq (s + 1)/4 \\ \gamma'(4t - s - 1) \text{ si} & (s + 1)/4 \leq t \leq (s + 2)/4 \\ \gamma''((4t - s - 2)/(2 - s)) \text{ si} & (s + 2)/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Donc  $F((s + 2)/4, s) = \gamma'(1) = \gamma''(0)$ ,  $F((s + 1)/4, s) = \gamma(1) = \gamma'(0)$

Alors  $F$  est continue, et

$$F(t, 0) = \begin{cases} \gamma(4t) \text{ si} & 0 \leq t \leq 1/4 \\ \gamma'(4t - 1) \text{ si} & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma''(2t - 1) \text{ si} & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = (([\gamma] \cdot [\gamma']) \cdot [\gamma''])(t)$$

$$\text{et } F(t, 1) = \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si} & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t - 2) \text{ si} & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ \gamma''(4t - 3) \text{ si} & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases} = (([\gamma] \cdot [\gamma']) \cdot [\gamma''])(t)$$

Et  $F(1, s) = \gamma''(1)$ ,  $F(0, s) = \gamma(0)$  d'où  $([\gamma] \cdot [\gamma']) \cdot [\gamma''] \sim [\gamma] \cdot ([\gamma'] \cdot [\gamma''])$

**Elément neutre :**

Notons  $\varepsilon_x$  le chemin constant d'image  $x \in X$ . pour tout chemin  $\gamma$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$ .

Il faut montrer que  $\varepsilon_x \cdot \gamma \sim \gamma$  et  $\gamma \cdot \varepsilon_y \sim \gamma$

On définit l'applications d'homotopies :  $F_1 : I \times I \rightarrow X$ ,  $F_2 : I \times I \rightarrow X$

$$F_1(t, s) = \begin{cases} x \text{ si} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) \text{ si} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$F_2(t, s) = \begin{cases} \gamma(2t/(2t - 1)) \text{ si} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y \text{ si} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Elément inverse :**

Notons  $\gamma^{-1}$  le chemin défini par  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$  on a alors

$$([\gamma] \cdot [\gamma^{-1}]) \sim [\varepsilon_x] \quad \text{et} \quad ([\gamma^{-1}] \cdot [\gamma]) \sim [\varepsilon_y].$$

Et on dit que  $\gamma^{-1}$  est l'inverse de  $\gamma$ . ■

**Exemple 1.2** Soit  $S^1$  le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et a le point  $(1, 0)$  de  $S^1$ .

Le groupe fondamental du cercle est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

En fait cet exemple est un théorème dont la démonstration repose sur des techniques de topologie algébrique[7, p :29]

# Chapitre 2

## Calcul du groupe fondamental

- 
- 1- Produits libres et sommes amalgamées de groupes
  - 2- Théorème de Seifert et Van Kampen
  - 3- Deuxieme théorème de Van Kampen
-

## 2.1 Produits libres et sommes amalgamées de groupes

Nous supposons connaître les définitions et propriétés des groupes abéliens, en particulier les groupes abéliens libres, la somme directe de groupes abéliens et les propriétés universelles qu'ils vérifient. Le groupe fondamental d'un espace n'étant généralement pas abélien, nous ne pouvons nous limiter à ce cadre et nous introduisons les outils basiques du cadre non commutatif.

Le but principal de cette section est la définition d'une somme amalgamée de groupes, nécessaire à l'énoncé du théorème de Seifert et Van Kampen pour calculer le groupe fondamental. Tous les groupes sont notés multiplicativement ; ainsi le groupe  $\mathbb{Z}$  est représenté par l'ensemble des puissances d'une variable formelle  $t$ .

$$\mathbb{Z} = \{t^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

L'élément neutre du groupe  $G$  est noté  $e_G$  ou  $e$  s'il n'y a pas ambiguïté.

**Définition 2.1** *Le produit libre de deux groupes,  $G_1$  et  $G_2$ , est le groupe noté  $G_1 * G_2$  ayant pour éléments les mots  $a_1 a_2 \dots a_n$ ,  $n > 0$ , où les  $a_i$  sont des éléments de  $G_1 \setminus \{e\}$  ou de  $G_2 \setminus \{e\}$  tels que, si  $a_i$  appartient à l'un des groupes,  $a_{i+1}$  appartient à l'autre et cela pour  $i = 1, \dots, n-1$ . Le cas  $n = 0$  correspond au mot vide.*

Le produit de deux mots  $a_1 \dots a_n$  et  $b_1 \dots b_m$  s'effectue de la manière suivante :

Si  $a_n$  et  $b_1$  n'appartiennent pas au même groupe, le produit s'obtient par juxtaposition

$$(a_1 \dots a_n)(b_1 \dots b_m) = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m.$$

Si  $a_n$  et  $b_1$  appartiennent à un même groupe et que le produit  $c$  dans ce groupe est différent de  $e$  le produit est défini par induction à partir de la formule

$$(a_1 \dots a_n)(b_1 \dots b_m) = (a_1 \dots a_{n-1})(b_2 \dots b_m).$$

L'associativité découle des formules ci-dessus et de l'associativité des lois de  $G_1$  et  $G_2$ .

L'élément neutre est le mot vide, noté  $e$ .

L'inverse du mot  $a_1 \dots a_n$  est le mot  $a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$ . Nous avons ainsi obtenu une structure de groupe, non commutatif dès que les groupes,  $G_1$  et  $G_2$ , ne sont pas triviaux.

Remarquons en effet que, si  $a \in G_1$  et  $b \in G_2$  sont différents de l'élément neutre, le mot  $aba^{-1}b^{-1}$  est différent de l'élément neutre de  $G_1 * G_2$ .

L'application  $i_1$  qui, à un élément  $g \in G_1 \setminus \{e\}$  associe le mot à une lettre  $g \in G_1 * G_2$ , est un homomorphisme de groupes,  $i_1 : G_1 \rightarrow G_1 * G_2$ . On introduit de même l'homomorphisme  $i_2 : G_2 \rightarrow G_1 * G_2$ .



**Proposition 2.1** Soient  $G_1, G_2$  et  $K$ .

si  $\varphi_1 : G_1 \rightarrow K$  et  $\varphi_2 : G_2 \rightarrow K$  sont deux homomorphismes de groupes, il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes  $\psi : G_1 * G_2 \rightarrow K$  tel que :

$$\psi \circ i_1 = \varphi_1$$

et

$$\psi \circ i_2 = \varphi_2$$

**Preuve** Voir [10, p :67] ■

**Définition 2.2** Un groupe libre à  $n$  générateurs est le produit libre itéré de  $n$  copies du groupe  $\mathbb{Z}$ .

Si on note les éléments du  $i$ -ème facteur  $\mathbb{Z}$  comme les puissances d'une variable  $t_i$ ;  $1 < i < n$ , alors le groupe libre à  $n$  générateurs apparaît comme l'ensemble des mots non commutatifs que l'on peut écrire avec les lettres  $t_i^n$ .

Ainsi dans  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , on trouve les mots  $t_1^3 t_2^{-4} t_1^{-1} t_2^8$ ,  $t_1 t_2 t_1$ ,  $t_2 t_1^{-1} t_2^4$  etc. De même, les mots  $t_1 t_2 t_1^{-3} t_3^5 t_2^5$  et  $t_3 t_1 t_3^{-1} t_2$  appartiennent à  $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$ .

**Notation 2.1** Dans la suite, le groupe libre à  $n$  générateurs est noté  $\langle t_1, \dots, t_n / \rangle$ .

**Corollaire 2.1** (Propriété universelle des groupes libres) Si  $g_1, \dots, g_n$  sont  $n$  éléments d'un groupe  $G$ , il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes  $\varphi : \langle t_1, \dots, t_n / \rangle \rightarrow G$  tel que  $\varphi(t_i) = g_i$

**Preuve** Voir [10] ■

Rappelons que si  $H$  est un sous-groupe d'un groupe  $G$ , l'ensemble  $G/H$  est, par définition, l'ensemble quotient de  $G$  par la relation d'équivalence :  $g_1 \sim g_2$  si et seulement si, il existe  $h \in H$  tel que :  $g_1 = g_2 h$ .

Le sous-groupe  $H$  est dit normal si, pour tout  $g \in G$ , les ensembles  $gH$  et  $Hg$  coïncident.

Dans ce cas, la surjection canonique  $\pi : G \rightarrow G/H$  est un homomorphisme de groupes pour la loi définie sur  $G/H$  par :

$$[g_1][g_2] = [g_1 g_2]$$

**Définition 2.3** Soit  $G$  est un groupe et  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $G$ , le sous- groupe normal de  $G$  engendré par la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est le sous-groupe  $N$  de  $G$  formé des éléments

$$(g_1 a_{i_1}^\pm g_1^{-1}) (g_2 a_{i_2}^\pm g_2^{-1}) \cdots (g_q a_{i_q}^\pm g_q^{-1})$$

où  $q \geq 0$ ,  $g_i \in G$  et  $a_j^\pm$  désigne  $a_j$  ou  $a_j^{-1}$ .

**Proposition 2.2** Soit  $\varphi : G \rightarrow K$  un homomorphisme de groupes et  $N$  le sous-groupe normal de  $G$  engendré par une famille  $(a_i)_{i \in I}$ .

Alors il existe un homomorphisme de groupes,  $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow K$ , tel que  $\bar{\varphi} \circ q = \varphi$  si et seulement si, on a  $\varphi(a_i) = e$ , pour tout  $i \in I$ .

**Preuve** Voir [10, p :68] ■

**Définition 2.4** Le sous-groupe des commutateurs,  $[G, G]$ , d'un groupe  $G$  est le sous- groupe normal de  $G$  engendré par les éléments  $aba^{-1}b^{-1}$ , lorsque  $a$  et  $b$  parcourent  $G$ .

Le quotient  $G/[G, G]$  est un groupe commutatif, appelé l'abélianisé de  $G$  et noté  $G_{ab}$ .

**Corollaire 2.2** Si  $H$  est un groupe commutatif et  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorphisme de groupes, il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes,  $\bar{\varphi} : G_{ab} \rightarrow H$ , tel que  $\bar{\varphi}([g]) = \varphi(g)$  pour tout  $g \in G$ .

**Preuve** Voir [10] ■

L'abélianisé du groupe libre  $\langle t_1, \dots, t_n / \rangle$  et le groupe abélien libre de rang  $n$ ,  $\mathbb{Z}^n$ , vérifient la même propriété universelle ; ils sont donc isomorphes. En particulier, si  $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  et si  $N$  est le sous-groupe normal engendré par  $t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1}$ , alors

$G/N = G_{ab}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Définition 2.5** Un groupe  $G$  est dit de type fini s'il existe un homomorphisme surjectif  $\varphi : \langle t_1, \dots, t_n / \rangle \rightarrow G$ .

Les éléments  $\varphi(t_i)$  sont appelés des générateurs du groupe. Si de plus, le noyau de  $\varphi$  est le sous-groupe normal  $N$  engendré par un nombre fini d'éléments  $a_1, \dots, a_r$ , alors  $G$  est dit de présentation finie.

Dans ce cas,  $G$  est isomorphe à  $\langle t_1, \dots, t_n / \rangle / N$  et on le note  $\langle t_1, \dots, t_n / a_1, \dots, a_r \rangle$ .

**Exemple 2.1** On a les présentations finies suivantes :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle t / t^n \rangle,$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle t_1, t_2 / t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1} \rangle,$$

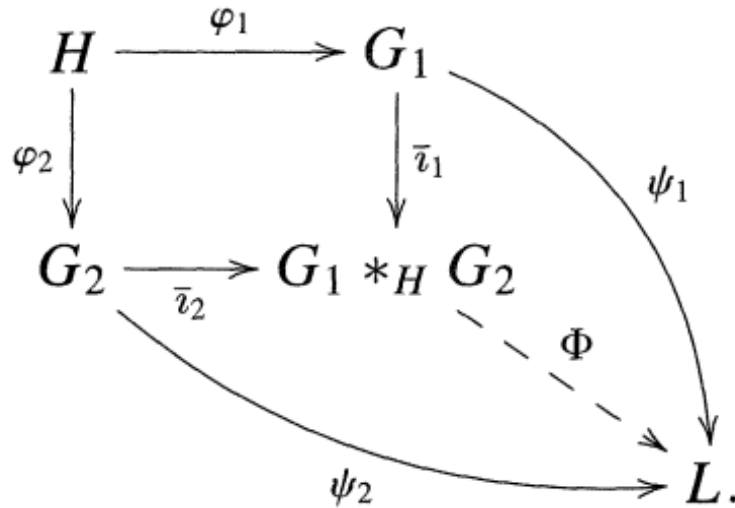
$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \langle t_1, t_2 / t_1^3 t_2^5, t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1} \rangle.$$

Introduisons maintenant la notion de somme amalgamée de groupes.

**Définition 2.6** Soit  $\varphi_1 : H \rightarrow G_1$  et  $\varphi_2 : H \rightarrow G_2$  deux homomorphismes de groupes.

La somme amalgamée de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ou, par abus, la somme amalgamée de  $G_1$  et  $G_2$  au-dessus de  $H$ , est le groupe  $(G_1 * G_2)/N$ , quotient du produit libre  $G_1 * G_2$  par son sous-groupe normal  $N$ , engendré par les éléments  $\varphi_1(h)\varphi_2(h)^{-1}$  lorsque  $h$  parcourt  $H$ . On le note  $G_1 *_H G_2$ .

**Proposition 2.3** Avec les notations précédentes, si  $\psi_1 : G_1 \rightarrow L$  et  $\psi_2 : G_2 \rightarrow L$  sont des homomorphismes de groupes vérifiant  $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ , alors il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes  $\Phi : G_1 *_H G_2 \rightarrow L$ , tel que  $\Phi \circ \bar{i}_1 = \psi_1$  et  $\Phi \circ \bar{i}_2 = \psi_2$ ,



Si les groupes  $G_1$  et  $G_2$  sont donnés par générateurs et relations,  $G_1 = \langle S_1/R_1 \rangle$  et  $G_2 = \langle S_2/R_2 \rangle$ , et si le groupe  $H$  est engendré par  $S$ , le groupe  $G_1 *_H G_2$  admet pour présentation

$$G_1 *_H G_2 = \langle S_1, S_2; R_1, R_2, \varphi_1(s) \varphi_2(s)^{-1}, s \in S \rangle.$$

**Preuve** Voir [10] ■

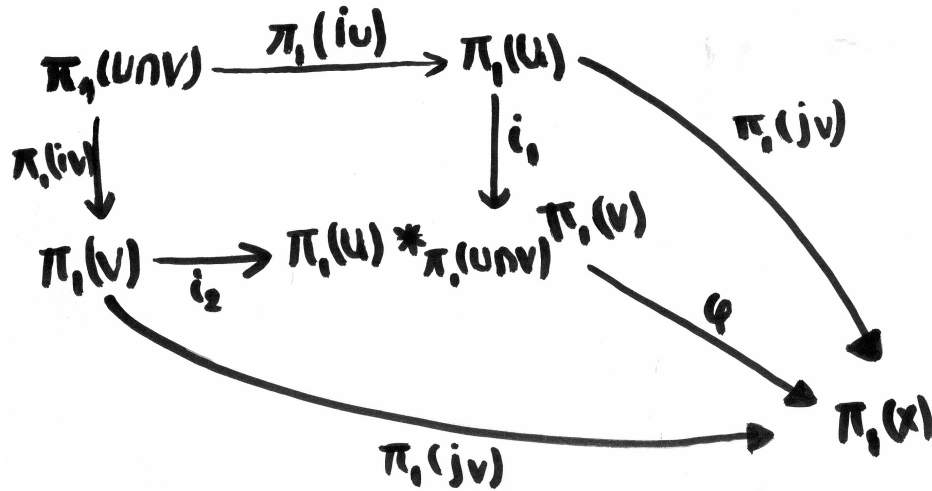
Si  $H = \{1\}$ , on retrouve le produit libre,  $G_1 *_{\{1\}} G_2 = G_1 * G_2$ . Si  $G_1 = \{1\}$  et si  $H$  est un sous-groupe normal de  $G_2$ , la somme amalgamée est le quotient de  $G_2$  par  $H$ , i.e.,  $\{1\} *_H G_2 = G_2/H$ .

## 2.2 Théorème de Seifert et Van Kampen

Soit  $X$  un espace topologique muni d'un recouvrement formé de deux ouverts  $U$  et  $V$  tels que  $U$ ,  $V$  et  $U \cap V$  sont connexes par arcs.

On considère les injections canoniques  $i_u : U \cap V \rightarrow U$ ,  $i_v : U \cap V \rightarrow V$ ,  $j_u : U \rightarrow X$  et

$j_v : V \rightarrow X$ , elles induisent le diagramme commutatif suivant :



dans lequel les groupes fondamentaux sont pointés en  $x_0 \in U \cap V$  et où l'homomorphisme  $\varphi$  est une conséquence de la propriété universelle de la somme amalgamée de groupes.

**Théorème 2.1 (Seifert -Van Kampen)** Avec les notations et hypothèses précédentes, l'homomorphisme  $\varphi$  est un isomorphisme de groupes.

**Preuve** Dans la (Proposition (1.35) Voir [10, p :19]), nous avons montré que, si on ajoute aux hypothèses précédentes,  $\pi_1(U) = \{1\}$  et  $\pi_1(V) = \{1\}$ , alors l'espace  $X$  est simplement connexe, i.e.

$\pi_1(X) = \{1\}$ . Le début de la preuve de cette proposition s'applique aussi ici ; il entraîne que tout lacet de  $X$  centré en  $x_0$  est homotope à un produit de lacets situés dans  $U$  ou dans  $V$ , autrement dit que l'application  $\pi_1(U) * \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$  est surjective. Il en résulte que l'application induite  $\varphi$  est surjective. Il nous reste donc à établir l'injectivité de  $\varphi$ .

Considérons deux éléments  $[\alpha_1][\alpha_2] \dots [\alpha_n]$  et  $[\beta_1][\beta_2] \dots [\beta_m]$  dans  $\pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ . Ici les  $\alpha_i$  et les  $\beta_j$  sont des lacets de  $X$  centrés en  $x_0$  et situés dans  $U$  ou dans  $V$ . Nous supposons que ces éléments ont même image par  $\varphi$ , c'est-à-dire que les lacets  $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n$  et  $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_m$  sont homotopes dans  $X$ , et nous devons démontrer que  $[\alpha_1][\alpha_2] \dots [\alpha_n] = [\beta_1][\beta_2] \dots [\beta_m]$  dans  $\pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ .

Notons  $H : [0, l] \times [0, l] \rightarrow X$  une homotopie entre  $\alpha$  et  $\beta$ . D'après le théorème du nombre de Lebesgue (Proposition (1.22) Voir [10, p :12]) , il existe des découpages  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$  et  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_q = 1$  du carré  $[0, 1]^2$ , tels que l'image par  $H$  de chaque petit rectangle  $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$  est située dans  $U$  ou dans  $V$ . Nous raffinons ensuite ces découpages pour que les

découpages induits sur chacun des deux côtés,  $[0, 1] \times \{0\}$  et sur  $[0, 1] \times \{1\}$ , soit un raffinement des découpages induits par l'écriture  $\alpha = \alpha_1.\alpha_2 \dots \alpha_n$  et  $\beta = \beta_1.\beta_2 \dots \beta_m$ . Nous étendons maintenant cette application  $H$ , définie sur le carré  $[0, l]^2$ , en une application  $H' : [0, l]^3 \rightarrow X$ , définie sur le cube  $[0, 1]^3$ . Pour cela, grâce à l'hypothèse de connexité par arcs, pour tout point  $x$  de  $X$  nous choisissons

un chemin  $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$  allant de  $x$  au point  $x_0$ . Si  $x = x_0$ , nous prenons le chemin constant sur  $x_0$ . Si  $x \in U$ , nous choisissons le chemin avec son support dans  $U$ ; de même si  $x \in V$ , le chemin choisi est situé dans  $V$ . Nous procédons par étapes successives pour la construction de l'application  $H'$ .

- Sur la base du cube, nous posons  $H' = H$ , i.e ,  $H'(u, v, 0) = H(u, v)$ . - Sur les arêtes verticales, de base un point de la forme  $(t_i, S_j)$ , nous posons  $H'(t_i, S_j, r) = \gamma H(t_i, s)(r)$ .

- Pour les carrés  $[t_j, t_{j+1}] \times \{s_j\} \times [0, 1]$ , nous utilisons une méthode qui permet d'étendre de façon continue, à un carré, une fonction définie sur trois côtés de ce carré. Plus précisément, soit  $q$  la projection de  $[t_j, t_{j+1}] \times \{s_j\} \times [0, 1]$  sur :

$$[t_i, t_{i+1}] \times \{s_j\} \times \{0\} \cup \{t_i\} \times \{s_j\} \times [0, 1] \cup \{t_{i+1}\} \times \{s_j\} \times [0, 1]$$

effectuée à partir du point  $((t_i + t_{i+1})/2, s_j, 2)$ . Nous définissons alors  $H'$  par  $H' \circ q$ . En procédant de même pour les carrés situés au-dessus des segments  $\{t_i\} \times [s_j, s_j + i]$ , nous avons ainsi défini  $H'$  au-dessus des droites  $t = t_i$  et  $s = s_j$ . Observons que, par choix du chemin  $\gamma_{x_0}$  comme chemin constant sur  $x_0$ , la restriction de  $H'$  aux segments  $\{0\} \times [0, 1] \times \{1\}$  et  $\{1\} \times [0, 1] \times \{1\}$  est constante sur le point  $x_0$ . Pour la dernière étape, nous procédons de façon similaire en étendant de façon continue, à un cube, une fonction définie sur toutes les faces du cube sauf une. Notons  $q$  la projection du cube  $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_j + i] \times [0, 1]$ , sur sa base et ses faces latérales, à partir du point  $((t_i + t_{i+1})/2, (s_j + s_{j+1})/2, 2)$ . L'application  $H'$  est alors définie sur le cube par  $H' \circ q$  et l'image par  $H'$  de chaque rectangle  $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \times \{1\}$  est située dans  $U$  ou dans  $V$ .

Par construction, pour tout  $i$ , la restriction de  $H'$  à l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}] \times \{0\} \times \{0\}$  est égale à  $\alpha_i$  et la restriction de  $H'$  à  $[t_i, t_{i+1}] \times \{0\} \times [0, 1]$  est une homotopie dans  $U$  entre deux lacets de  $U$ . En conséquence  $\alpha_1.\alpha_2 \dots \alpha_n$  et l'image par  $H'$  de  $[0, 1] \times \{0\} \times \{1\}$  sont deux lacets conduisant au même élément dans  $\pi_1(U) *_{\pi(U \cap V)} \pi_1(V)$ . De même  $\beta_1.\beta_2 \dots \beta_m$  et le lacet  $H'([0, 1] \times \{1\} \times \{1\})$  sont deux lacets égaux dans  $\pi_1(U) *_{\pi(U \cap V)} \pi_1(V)$  Comme  $H'([0, 1] \times \{1\} \times \{1\}) = x_0$  pour tout  $i, j$ , les restrictions de  $H'$  aux intervalles  $[t_i, t_{i+1}] \times \{s_j\} \times \{1\}$  et  $\{t_i\} \times [s_j, s_{j+1}] \times \{1\}$  sont des lacets notés  $c_{i,j}$  et  $d_{i,j}$ . Par construction ces lacets sont dans  $U$  ou dans  $V$ . Considérons maintenant tous les chemins allant de  $(0, 0, l)$  à  $(l, l, l)$  et formes de lacets  $c_{i,j}$  et  $d_{i,j}$ . Chacun de

ces chemins, étant un composé de lacets entièrement dans  $U$  ou dans  $V$ , conduit à un élément de  $\pi_1(U) *_{\pi(U \cap V)} \pi_1(V)$ . Chaque carré  $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$  donnant une homotopie, dans  $U$  ou dans  $V$ , entre  $c_{i,j} \cdot d_{i+1,j}$  et  $d_{i,j} \cdot c_{i,j+1}$ , tous les chemins considérés conduisent au même élément de  $\pi_1(U) *_{\pi(U \cap V)} \pi_1(V)$ . En particulier les chemins  $H'([0, 1] \times \{0\} \times \{1\})$  et  $H'([0, 1] \times \{1\} \times \{1\})$  sont les mêmes dans la somme amalgamée des deux groupes, et ceci termine la preuve de l'injectivité de  $\gamma$ . ■

### 2.3 Deuxieme théorème de Van Kampen

**Théorème 2.2** 1) Soit  $Y = D^2 \cup_f X$  où  $f : S^1 \rightarrow X$  est continue et  $D$  disque, soit  $x_0$  un point de base de  $X$  dans  $f(S^1)$  alors  $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) / \langle [f] \rangle$  ou  $\langle [f] \rangle$  désigne le plus petit sous-groupe de  $\pi_1(X, x_0)$  contenant la classe du lacet.

2) Soit  $n > 2$  et  $Z = D_n \cup_f X$  où  $f : S_{n-1} \rightarrow X$  est continue.

Alors

$$\pi_1(Z, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

**Preuve** Voir [11, p :43] ■

**Exemple 2.2** Soit  $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$

$\pi_1(S^n) = 0$  pour  $n > 1$

Soit  $T^1 = S^1 \times S^1$  un tore

Le premier groupe fondamental de  $T^1$  est  $\pi_1(S^1 \times S^1) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

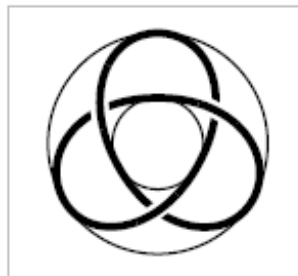


Figure 06 : Le tore

# Chapitre 3

## Les Noeuds

- 
- 1- Noeuds.
  - 2- Diagramme d'un noeud.
  - 3- Mouvement de Reidmeister.
  - 4- Le groupe d'un noeud.
  - 5- Présentation de Wirtinger.
  - 6- Groupe de tresses
-

La théorie des noeuds est actuellement assez développée bien que très compliquée; il s'agit de l'étude de la figure formée par une courbe fermée simple dans l'espace de dimension 3, ceci constitue la représentation mathématique des figures qu'on peut former avec une ficelle, les problèmes posés se généralisent à l'étude d'une sphère de dimension  $p$  plongée dans l'espace de dimension  $n$ . On se bornera à donner quelques définitions et résultats élémentaires de la théorie des noeuds comme exemple d'utilisation du groupe fondamental.

### 3.1 Les Noeuds

**Définition 3.1** *le plongement d'une surface est l'angle de sa ligne de plus grande pente avec un plan horizontal*

En mathématiques les plongements sont des cas particuliers d'applications injectives.

**Définition 3.2** *Un noeud est l'image d'un plongement du cercle  $S^1$  dans  $R^3$ . Autrement dit, un sous-ensemble  $K$  de  $R^3$  est un noeud s'il existe un plongement  $h : S^1 \rightarrow R^3$  tel que  $Imh = K$ , où  $S^1 = \{(x, y, 0) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ , le cercle de rayon 1 dans le plan  $\{z = 0\}$ , centré sur  $(0, 0, 0)$ .*

**Définition 3.3** *Deux noeuds  $K$  et  $K'$  sont équivalents s'il existe un homéomorphisme  $h : R^3 \rightarrow R^3$  tel que  $h(K) = K'$ .*

*On a alors  $h(R^3 - K) = R^3 - K'$ . une condition nécessaire pour que deux noeuds soient équivalents est que leurs complémentaires soient homéomorphes.*

**Définition 3.4** *soit l'application injective  $f : S^1 \rightarrow R^3$ ,  $f$  est polygonale si il existe une décomposition  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$  du segment  $[0, 2\pi]$  telle que, sur chaque segment  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$  l'application  $\theta \mapsto f(\theta)$  soit linéaire affine.*

**Définition 3.5** *un noeud  $K$  est polygonal s'il est l'image d'une application polygonale injective  $f : S^1 \rightarrow R^3$*

**Remarque 3.1**  *$f : S^1 \rightarrow R^3$  injective et de rang 1. On démontre qu'un tel noeud est équivalent à un noeud polygonal.*

*Dans la suite on considérera des noeuds différentiables que s'ils sont évidemment équivalents à un noeud polygonal.*



**Définition 3.6** Un entrelacs à  $n$  composantes est un plongement de  $n$  copies de  $S^1$  dans  $S^3$ .

Lorsque  $n = 1$ , on dit qu'il s'agit d'un noeud.

**Définition 3.7** On dira que deux entrelacs  $L$  et  $L'$  sont équivalents s'il existe un homéomorphisme de  $S^3$  transformant  $L$  en  $L'$  en respectant les orientations de  $L$ ,  $L'$  et  $S^3$ .

**Définition 3.8** On appelle isotopie qui transforme  $L$  en  $L'$  une application continue  $h : I \times S^3 \rightarrow S^3$  avec les propriétés suivantes :

- 1- On a  $h(0, x) = x$  pour  $x$  dans  $S^3$ .
- 2- Pour tout  $t$  dans  $I$ , l'application  $h_t : x \rightarrow h(t, x)$  est un homéomorphisme de  $S^3$ .
- 3-  $L$  est l'image de  $L'$  par l'application  $h$ .

Par suite, si deux entrelacs sont équivalents, il existe une isotopie transformant  $L$  en  $L'$ .

**Remarque 3.2** Un noeud est dit lisse s'il est équivalent à un noeud polygonal c'est-à-dire s'il est l'union finie de segments

**Théorème 3.1** Deux noeuds polygonaux isotopes sont équivalents

**Preuve** Voir [6, p :96] ■

**Définition 3.9** le noeud trivial est le cercle  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  du plan  $z = 0$  tout cercle de  $R^3$  est évidemment équivalent au noeud trivial .

De même, tout triangle dans  $R^3$  est équivalent au noeud trivial.

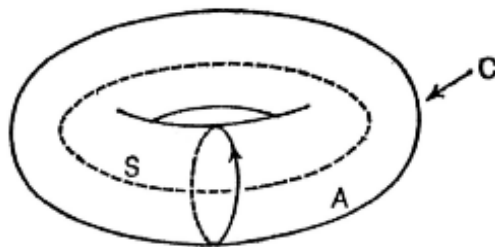


Figure 07 : Noeud trivial

**Théorème 3.2 (C. Papakiriakopoulous 1914-1976)** Le groupe des noeuds trivial est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

**Preuve** Voir [7, p :29] ■

**Remarque 3.3** *Inversement, on peut démontrer qu'un noeud dont le groupe est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  est équivalent au noeud trivial.*

## 3.2 Diagramme d'un noeud :

**Définition 3.10** *Un diagramme de noeud est une immersion générique d'un cercle dans le plan orienté  $\mathbb{R}^2$ , avec une information dessus-dessous en chaque point double. Ici générique signifie que les éventuels points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes.*

**Remarque 3.4** *Ce qui précède s'étend naturellement aux entrelacs.*

**Théorème 3.3** *Deux entrelacs sont isotopes si et seulement si ils possèdent des diagrammes équivalents.*

**Preuve** Voir [4, p :4] ■

**Définition 3.11** *Une ombre d'un noeud  $K$  est l'image de  $K$  sous une projection par rapport à la quelle  $K$  est en position régulière. Les points doubles d'une ombre sont appelés des croisements. Sur une ombre de  $K$ , si on indique de plus à chaque croisement lequel des deux fils passe par-dessus de l'autre, on obtient un diagramme du noeud  $K$ . Le fil passant dessus est appelé passage supérieur tandis que celui qui passe dessous est appelé passage inférieur.*

**Définition 3.12** *Un arc du diagramme est une courbe continue qui va d'un passage inférieur au prochain passage inférieur, peut-être en traversant des passages supérieurs.*

**Définition 3.13** *Un noeud est dit orienté ou muni d'une orientation si on a choisit une orientation du cercle, le sens des aiguilles d'une montre ou le contraire, et qu'on considère l'orientation induite sur le noeud par le plongement associé du cercle dans  $R^3$ .*

*L'orientation d'un diagramme d'un noeud est celle induite par l'orientation du noeud via la projection de celui-ci associée au diagramme.*

### 3.3 Mouvement de Reidmeister

Nous allons ici définir les mouvements que l'on peut effectuer sur un diagramme de projection d'un noeud dans  $S^3$  et qui laissent invariant le type topologique du noeud de départ. Ces mouvements sont importants dans la mesure où lorsqu'on cherche à savoir si deux noeuds sont équivalents, on peut ramener le problème à vérifier s'il existe une suite finie de mouvements de Reidmeister permettant de passer du diagramme associé au premier noeud au diagramme du second.

**Définition 3.14** *Le diagramme d'un noeud  $K$  est obtenu à partir de la projection standard  $p : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ . De façon générique, cette projection possède au plus des points doubles transverses, et ces points doubles seront vus comme des croisements de la projection du noeud.*

**Exemple 3.1** *La figure ci-dessous présente le diagramme d'un noeud de trèfle, autour d'un croisement, on efface la portion du noeud qui passe en dessous dans  $S^3$*

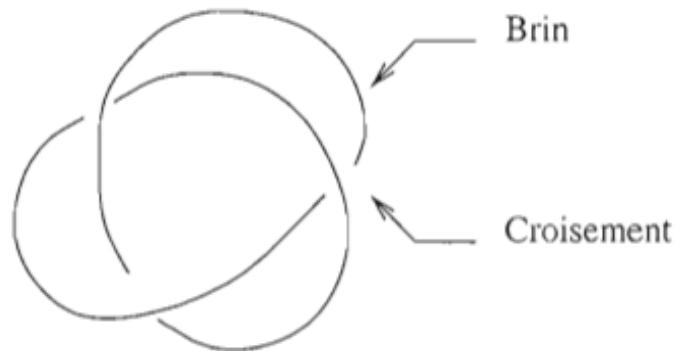


Figure 08 : Diagramme d'un noeud de trèfle

La figure 09 nous présente les types de mouvements autorisés qui permettent de changer notre diagramme sans pour autant transformer notre noeud. Les diagrammes obtenus sont alors dits équivalents.

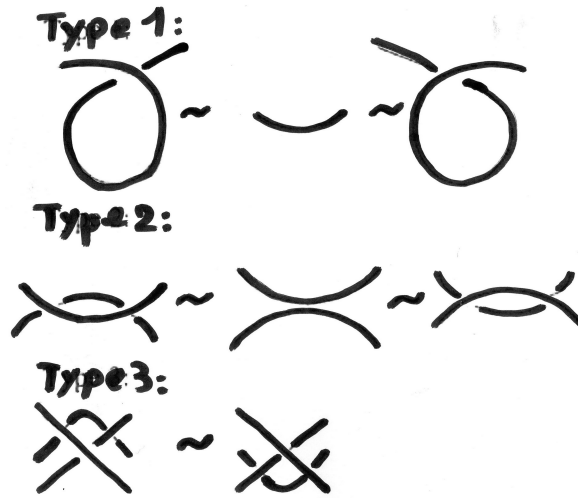


Figure 09 : Types des mouvements de Reidemeister

**Théorème 3.4 (Reidemeister)** *Deux diagrammes définissent le même noeud si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en utilisant un nombre fini de fois les opérations (1) , (2) où (3) plus isotopie.*

Pour plus de détails, voir la preuve de c'est théorème Voir [1, p :315]

### 3.4 Invariants de noeuds

**Définition 3.15** *Un invariant de noeuds est une application*

$$I : \{\text{ensemble des noeuds}\} \rightarrow \{\text{objets algébriques}\}$$

*Qui à chaque noeud  $K$  associe un objet algébrique  $I(K)$  tel que deux noeuds équivalents ont la même image par l'invariant. C'est-à-dire que si  $K$  et  $K'$  sont deux noeuds équivalents, alors on a*

$$K \sim K' \Rightarrow I(K) = I(K')$$

**Remarque 3.5** *L'invariant peut permettre de dire si deux noeuds sont de type différent, mais pas forcément l'inverse*

$$I(K) \neq I(K') \Rightarrow K \not\sim K'$$

mais :

$$I(K) = I(K') \not\Rightarrow K \sim K'$$

Les objets algébriques associés aux noeuds peuvent être des nombres, des polynômes, des groupes etc.

Suivant la complexité de ces objets, il sera plus ou moins facile de différencier les noeuds.

En effet, il est plus simple de comparer deux nombres ou deux polynômes que de comparer deux groupes (en cherchant un isomorphisme entre ces groupes).

Malheureusement, de manière générale, plus l'invariant de noeud sera facile à calculer, plus ses images seront difficiles à comparer.

Au contraire, un invariant plus difficile à calculer, comme les invariants numériques ou polynômiaux, aura des images faciles à comparer, mais au prix d'une perte de « finesse » de l'invariant, i.e. qu'il distinguera « moins » les type de noeud.

**Définition 3.16** *Les invariants qui satisfont*

$$I(K) = I(K') \Rightarrow K \sim K'$$

*Sont dit complets.*

Dans l'état des recherches actuel, il n'existe pas d'invariant complet, bien qu'on présume que certains le soient, notamment les invariants de **Vassiliev**, mathématicien russe qui à découvert en 1990 une famille d'invariants dont il a conjecturé qu'elle est complète. Cette conjecture reste à démontrer, beau projet pour le XXIème siècle.

Notre but sera d'étudier plusieurs invariants, tout d'abord en étudiant la construction théorique de ces invariants, puis en calculant l'image de trois noeuds particuliers.

Nous étudierons ainsi le noeud trivial, le noeud de trèfle, ainsi que le noeud de huit (Figure 10).

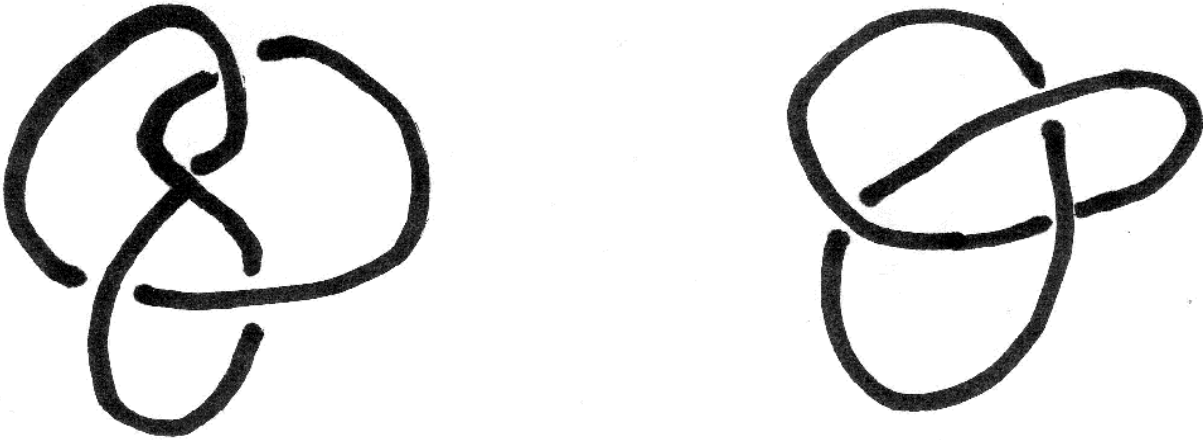


Figure 10 : Le Noeud de huit , le noeud de trfle

### 3.5 Le groupe d'un noeud

**Définition 3.17** On appelle groupe du noeud  $K$ , et on note  $G(K)$ , le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, x_0)$  où  $x_0$  est un point base arbitraire.

**Remarque 3.6** Deux noeuds  $K$  et  $K'$  ne sont pas équivalents si leurs groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes.

Voici comment, dans le cas général, on peut calculer le groupe d'un noeud polygonal.

**Représentation plane du noeud et notations :** D'abord, on choisit un plan  $P$  tel que la projection orthogonale du polygone  $K$  sur  $P$  soit (en position générale), c'est-à-dire n'ait aucune des particularités suivantes :

a) Trois points distincts ont même projection.

b) La projection d'un sommet du polygone est un point double. Pour choisir une droite  $D$  issue de  $O$  et orthogonale à  $P$  la condition (b) exclut d'abord un nombre fini de droites parallèles aux cotés de  $K$  ;

la condition (a) exclut les droites d'un nombre fini de cônes du second ordre, les cônes directeurs des quadriques contenant trois cotés de  $K$ . on peut donc bien choisir une droite  $D$  et un plan  $P$  convenables la projection  $k$  de  $K$  est une ligne polygonale fermé qui a pour seules singularités, des points doubles isolés intérieurs aux cotes. On convient alors que  $P$  est le plan  $z = 0$ ; par translation verticale éventuelle, on se ramène au cas où  $K$  est situé dans le demi-espace  $z > 0$  et on donne la représentation graphique suivante de  $k$ , projection de  $A$  et  $B \in K$ . si  $B$  est plus bas que  $A$ , soit  $]B', B''[$  un petit segment de  $K$  dont  $B$  est le centre. On supprime dans  $k$  la projection  $]b', b''[$  de l'intervalle  $]B', B''[$  (on représente souvent, pour simplifier,  $k$  par une courbe différentiable)

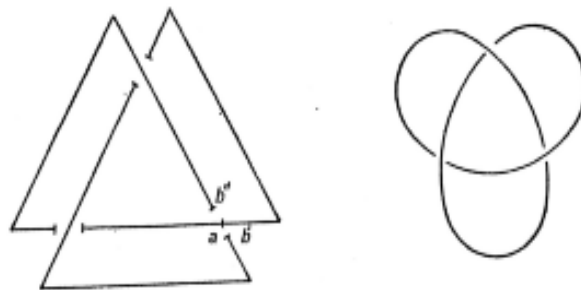


Figure 11 : La projection d'un noeud polygonal

**Le noeud  $K'$  équivalent à  $K$**  : par isotopie (théorème 3.1) , le noeud  $K$  est équivalent au noeud  $K'$  obtenu en remplaçant le segment  $B'B''$ . Par la suite des trois segments  $B'b'$ ,  $b'b''$  et  $b''B'$ . Choisissons un sens de parcours arbitraire sur  $K$  et numérotons dans l'ordre  $B_1, \dots, B_n$  les points  $B_i$  rencontrés ; on suppose que l'orientation de  $K$  coïncide avec celle de  $B'_i B''_i$  et on note  $Y_1, \dots, Y_n$  les arcs polygonaux de  $K$  qui forment le complémentaires des petits segments  $B'_i B''_i$  ; on a  $Y_1 = B'_1 B'_2, Y_2 = B''_2 B'_3, \dots, Y_n = B''_n B'_1$

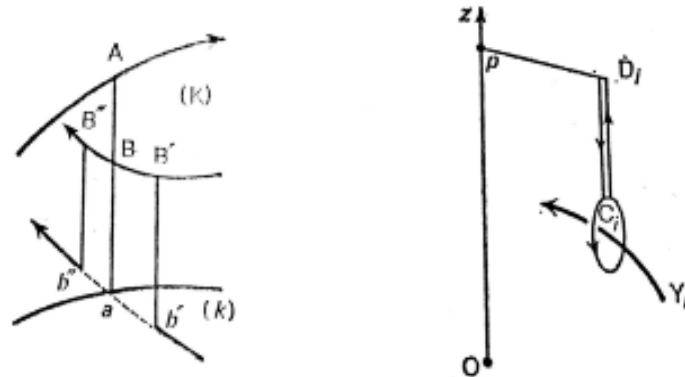


Figure 12 : Les arcs polygonaux de deux noeuds équivalents

**Les générateurs de  $G(K)$**  : soit  $p$  un point de l'axe  $O_z$ , de cote supérieure à celle du point le plus élevé de  $K$ .

Définissons certains éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $\pi(R^3 - K, p)$ , l'élément  $x_i$  est représenté par un chemin  $\gamma_i$  composé de la manière suivante : un segment horizontal joignant  $p$  à un point  $D_i$  situé à la verticale d'un point  $C_i$ , un tour complet autour de l'arc  $Y_i$  au voisinage et le retour  $p$  en empruntant les deux segments du trajet aller. On suppose que le tour autour de  $Y_i$  s'effectue, par rapport à l'orientation de  $Y_i$ , dans le même sens que sur la figure ci dessus.

**Théorème 3.5** *Le groupe  $G(K)$  du noeud  $K$  est isomorphe au quotient du groupe  $L(x_1, \dots, x_n/$*

*)*, groupe libre à  $n$  générateurs  $x_1, \dots, x_n$ , par le sous groupe normal engendré par les  $n$  éléments  $r_i = x_i x_k x^{-1} x_k^{-1}$  correspondant aux  $n$  points doubles de  $h$  ( $a_i$  est un point double, projection de  $A_i \in Y_k$  et  $Y_i$  et  $Y_{i'}$  sont les deux arcs issus de  $B_i$ ). si  $k$  n'a pas de point double, le groupe  $G(K)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .



a) Supposons d'abord que  $k$  n'a pas de point double, alors  $k$  lui même est un noeud polygonal : si  $f : S^1 \rightarrow R^3$  est l'application polygonale qui définit  $K$  et  $\pi : R^3 \rightarrow P$  la projection, alors  $\pi \circ f$  est polygonale injective d'image  $k$ . en outre  $\pi \circ f$  est isotope à  $f$  (isotopie le long des droites projetantes) et  $k$  est équivalent à  $K$ . il est facile de voir que  $k$ , polygone plan, est équivalent au noeud trivial.

b) S'il y a des points doubles, on calcul le groupe du noeud  $K'$  équivalent à  $K$  à l'aide du théorème de Van Kampen. Considérons le demi-espace  $E_1$  défini par  $z > 0$  et  $K_1 = K' \cap E_1$ , et le demi-espace  $E_2$  défini par  $z < 0$  ainsi que  $K_2 = K' \cap E_2$

**Lemme 3.1** Le groupe  $\pi(E_1 - K_1, p)$  est le groupe libre à  $n$  générateurs  $x_1, \dots, x_n$ .

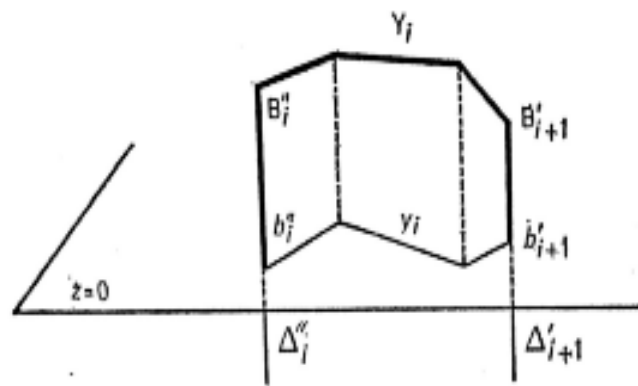


Figure 13 : La projection horizontale sans point double

**Preuve** L'espace  $K$ , possède  $n$  composantes  $F_i$  formées chacune d'un arc polygonal  $y_i$  (dont la projection horizontale  $y_i$  est sans points doubles) avec à chacune de ses extrémités un segment vertical,  $[B''_i, b''_i[$  et  $[B'_{i+1}, b'_{i+1}[$ . En outre les arcs  $y_i$  sont disjoint, il existe un homéomorphisme conservant la projection horizontale, de  $E_1$  sur  $R^3$  qui envoie chaque  $F_i$  sur la réunion  $F'_i$  de l'arc  $y_i$  et des deux demi-droites verticales descendantes  $\Delta''_i$  et  $\Delta'_{i+1}$  issues de  $b''_i$  et  $b'_{i+1}$ . Le complémentaire  $R^3 - (\cup F'_i)$  est homéomorphe au complémentaire de  $n$  droites parallèles dans  $R^3$ . On peut le voir en déformant par (isotopie) l'arc polygonal en un segment, les demi droite  $\Delta''_i$  et  $\Delta'_{i+1}$  restant les verticales des extrémités, puis en rabattant ces droites; un raisonnement analogue à celui du théorème 3.5, prouve que l'(isotopie) entraîne l'équivalence pour ces figures comme pour les noeuds. La même opération peut s'effectuer de façon disjointe pour toutes les  $F'_i$ . le complémentaire de  $n$  points de  $R^2$ . Son groupe fondamental est libre à  $n$  générateurs, chacun correspondant à un tour complet autour d'une des  $n$  droites et d'une seule. En remontant à  $E_1 - K_1$ , on voit qu'on a démontré le lemme.(3.1) ■

D'après le lemme, le groupe fondamental de  $E_2 - K_2$  est analogue car  $K_2$  est constitué de  $n$  composantes  $G_i$  formées chacune du segment  $[b'_i, b''_i]$  et de deux petits segments verticaux ; notons  $\alpha_i$  les générateurs de  $\pi_1(E_2 - K_2)$ .

En fin  $(E_2 - K_2) \cap (E_1 - K_1)$  complémentaire de  $2n$  segments verticaux dans  $E_1 \cap E_2$ , a un groupe fondamental à  $2n$  générateurs, les  $\beta_i$  qui entourent les  $\Delta'_i$  et les  $\gamma_i$  entourent les  $\Delta''_i$ .

On peut alors appliquer le théorème de Van Kampen .

Le groupe fondamental de  $R^3 - K'$  est la somme amalgamée du groupe libre  $L(x_i)$  et du groupe libre  $L(\alpha_i)$ , par deux homomorphismes  $\varphi$  et  $\psi$  venant du groupe libre  $L((\beta_i), (\gamma_i))$ .

Choisissons les orientations de  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x_i$  comme sur la figure.

On a alors  $\psi(\beta_i) = \alpha_i^{-1}, \psi(\gamma_i) = \alpha_i$ .

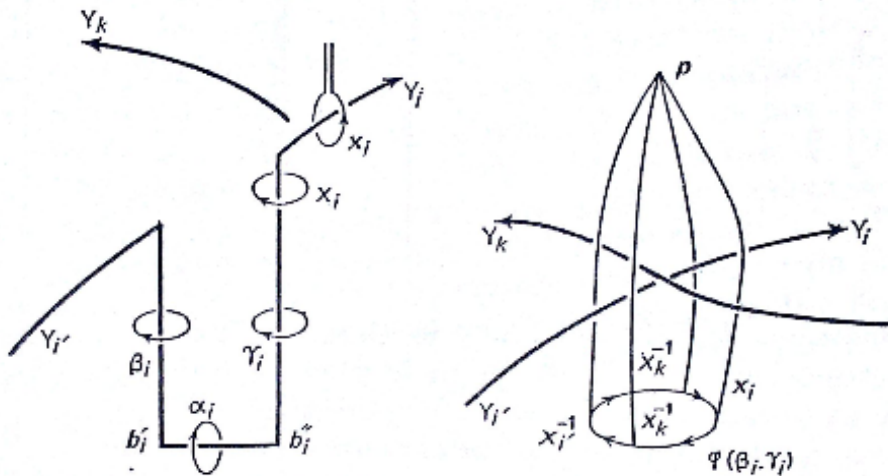
On obtient donc  $G(K')$  en faisant le quotient du groupe libre  $L((\alpha_i), (x_i))$  par le sous groupe  $N$  engendré par les éléments

$$\varphi(\beta_i) \cdot \alpha_i = 1 \text{ et } \varphi(\gamma_i) \cdot \alpha_i^{-1} = 1$$

sont équivalentes à :

$$\alpha_i = \varphi(\gamma_i) \text{ et } \varphi(\beta_i) \cdot \varphi(\gamma_i) = 1.$$

Il en result un isomorphisme entre  $L((\alpha_i), (x_i))/N$  et  $L((x_i))/N$ , ou  $N'$  est engendré par les éléments  $\varphi(\beta_i) \cdot \varphi(\gamma_i) = \varphi(\beta_i \cdot \gamma_i)$  le lacet  $\beta_i \cdot \gamma_i$  fait une fois le tour des deux droites  $\Delta'_i$  et  $\Delta''_i$  dans le même sens.



### 3.6 Présentation de Wirtinger

C'est une simple procédure pour obtenir une présentation d'un groupe de noeud, appelée présentation de Wirtinger. Prenons un plongement du noeud  $K$  qui soit tel que sa projection sur le plan  $Z = 0$  est régulière, et qui définit un nombre fini d'arcs  $1, \dots, n$  (voir Figure 14). On oriente le noeud  $K$  de façon à ce que les arcs  $\alpha_i$  soient des arcs orientés de façon compatible avec leur indexation. On fixe alors un point  $b$  au dessus de la projection

(par exemple  $(0, 0, 1)$ ) et on forme  $n$  boucles orientées  $x_1 \dots x_n$  qui passent par le point  $b$  et sous chaque  $x_i$ .

La Figure 14 représente ces boucles par des flèches sous chaque arc  $\alpha_i$

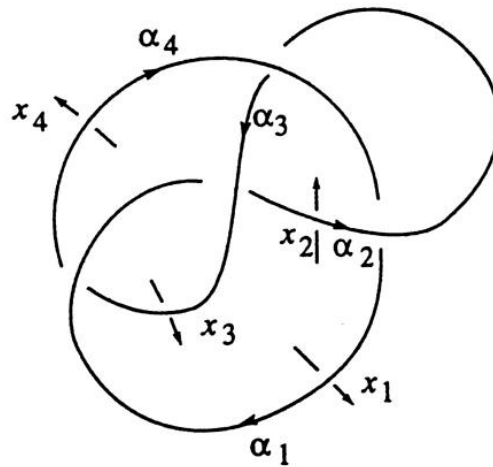


Figure 14 : Diagramme de noeud de huit

A chaque point d'intersection on trouve une relation entre les  $x_i$  qui ne peut prendre que deux forme possible comme le montre la figure ci-dessous

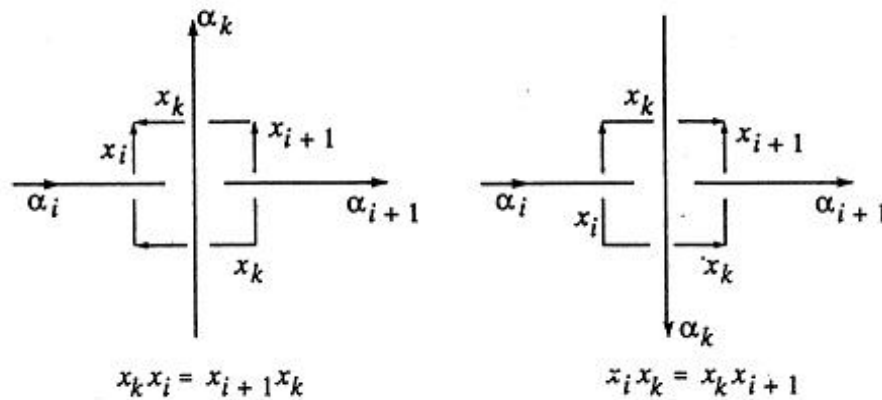


Figure 15 : Les deux relations possibles de prsentation de wertinger

**Théorème 3.6**  $\pi_1(S^3/K)$  est engendré par les  $x_i$  et a une présentation  $\langle x_1, \dots, x_n / r_1, \dots, r_n \rangle$  où les  $r_i$  sont les relations définies dans la Figure 15

De plus, le théorème reste vrai si en enlevant une des relations.

**Preuve** Voir [7, p :47] ■

**Exemple 3.2** On prend le noeud de huit représenté sur la figure précédente, et on trouve les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 x_3 = x_3 x_2 \\ x_4 x_2 = x_3 x_4 \\ x_3 x_1 = x_1 x_4 \end{cases}$$

**Théorème 3.7 (Papakyriakopoulos 1914-1976)** Le groupe des noeuds trivial est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

ou bien un noeud non noué si et seulement si il est équivalent au cercle

**Preuve** Voir [9, p :125] ■

# Chapitre 4

## Groupe de tresses

---

1- Groupe de tresses

---

## 4.1 Groupe de tresses

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le groupe des tresses qui a été introduit explicitement en 1925 par E. Artin.

d'abord nous donnons les définitions des tresses, les tresses équivalentes, la projection d'une tresse, l'invariant des tresses et les tresses pures.

**Définition 4.1** Soit  $D$  le cube unité :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

Sur la facette supérieure du  $D$  on place  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et sur la facette inférieure du même cube on place les  $n$  points  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

on pose :

$$A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1), \dots, A_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1)$$

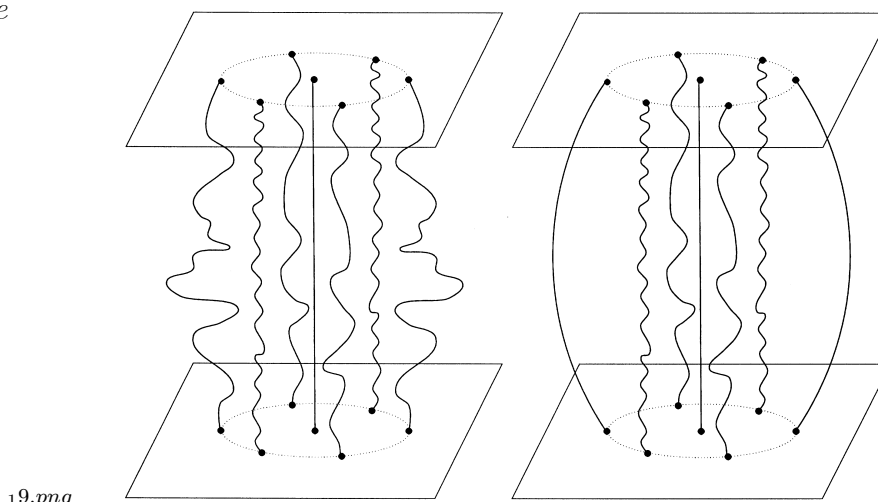
$$B_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0), \dots, B_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0)$$

On joints les points  $A_i$  avec les points  $B_i$  par des courbes  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

Les courbes  $d_i$  sont telle que les trois conditions sont satisfaites :

- 1)  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sont disjointes.
- 2) pour  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  chaque  $d_i$  relie un  $A_j$  avec un  $B_k$  tel que  $j, k$  égaux ou différents, mais  $d_i$  ne joint jamais  $A_j$  avec  $A_k$  ou  $B_j$  avec  $B_k$ .
- 3) chaque plan  $E_s$  d'équation ( $z = s$  tel que  $0 \leq s \leq 1$ ) parallèle avec le plan  $(xy)$  intersecte  $d_i$  en un seul point pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Une telle configuration des  $n$  arcs  $d_1, d_2, \dots, d_n$  est appelée  $n$  tresse ou tresse à  $n$  brins.

titre



19.png

Figure 16 : Exemple de tresse au 7 brins

**Définition 4.2** La réunion de  $n$  brins disjoints est dite tresses

**Notation 4.1** On note l'ensemble des  $n$  tresses par  $B_n$ .

**Remarque 4.1** L'ensemble des tresses muni de la loi concaténation forme un groupe qu'on appelle le groupe des tresses.

**Théorème 4.1 (E. Artin 1898-1962)** Pour  $n \geq 2$ , le groupe de tresses à  $n$  brins  $B_n$  est le groupe engendré par  $n - 1$  générateurs  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

soumis aux relations suivantes : 
$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$$

**Preuve** Voir [2] pour une démonstration algébrique ou [3] pour une démonstration topologique. ■

**Définition 4.3** Pour  $n \geq 1$  on considère l'application :

$$f : B_n \rightarrow \Sigma_n$$

$$\sigma_i \longmapsto f(\sigma_i) = (i, i + 1)$$

où  $B_n$  est le groupe de tresses et  $\Sigma_n$  est le groupe symétrique.

**Définition 4.4** Le noyau de  $f$  est un sous groupe de  $B_n$  qu'on appelle le groupe des tresses pures et qu'on note  $P_n$

**Proposition 4.1** Le groupe des tresses pures  $P_n$  est un sous-groupes normal de  $B_n$  .

De plus le groupe quotient  $B_n/P_n$  est isomorphe à  $\Sigma_n$ , et on a :  $[B_n : P_n] = n!$

**Preuve** Montrons tout d'abord que  $P_n$  est un sous groupe de  $B_n$

$P_n$  est constitué de  $n$  tresse  $\beta$  telle que  $\pi(\beta) = (i, i)$  est la permutation triviale qu'on note (1) et  $\pi$  est un morphisme de groupes.

Soient  $\beta_1, \beta_2$  deux tresses pures i.e  $\beta_1 \beta_2 \in P_n$

De plus  $\beta \in P_n$  donc  $\pi(\beta^{-1}) = \pi(\beta)^{-1} = (1)$  et cela implique que

$$\beta^{-1} \in P_n$$

Donc  $P_n$  est un sous groupe de  $B_n$

Pour démontrer que  $P_n$  est normal dans  $B_n$ , on considère  $\gamma \in B_n$  et  $\beta \in P_n$

$$\begin{aligned} \pi(\gamma \beta \gamma^{-1}) &= \pi(\gamma) \pi(\beta) \pi(\gamma^{-1}) \\ &= \pi(\gamma) \pi(\beta) \pi(\gamma)^{-1} \\ &= 1_n = \pi(\gamma \gamma^{-1}) \end{aligned}$$

donc  $\gamma\beta\gamma^{-1} \in P_n$  mais  $\gamma\beta\gamma^{-1} \in P_n \Rightarrow \gamma P_n \subset P_n \gamma$  pour tout  $n$  tresse  $\gamma \in P_n$  et par suite  $P_n$  est normal dans  $B_n$

Pour démontrer que  $B_n \setminus P_n \simeq \Sigma_n$ , on considère l'application  $f : B_n \longrightarrow \Sigma_n$  qui est induit par la permutation  $\pi$  c'est à dire

$$f(\beta) = \pi(\beta)$$

pour tout  $\beta_1, \beta_2 \in B_n$

$$\begin{aligned} f(\beta_1\beta_2) &= \pi(\beta_1\beta_2) \\ &= \pi(\beta_1)\pi(\beta_2) \\ &= f(\beta_1)f(\beta_2) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est un morphisme de groupes. ■

### 4.1.1 Fermeture des tresses

**Théorème 4.2 (J. Alexander 1888-1971)** *Chaque entrelacs est la fermeture d'une tresse.*



---

# Conclusion

Dans ce travail d'une part on a présenté les notions nécessaires concernant les noeuds ainsi que la classification des noeuds au moyen d'un invariant non complet qui est le groupe fondamental. D'autre part on a étudié un groupe particulier qui est le groupe de tresses et grâce à ce groupe on peut étudier les noeuds en utilisant le fameux théorème dû à J. Alexander.

Deux problèmes qui se présentent ici, le premier est : Étant donné un groupe est-il possible de décider si ce groupe est le groupe d'un noeud ?

Le deuxième problème est la classification des noeuds qui proviennent des tresses pures et qui ne le sont pas ?

.

# Bibliographie

- [1] H. Abchir : Invariants des noeuds issus de la cohomologie des quandles, arxiv 2003.
- [2] E. Artin : Theory of braids annals of mathematics, vol 5 1947 .
- [3] J. Birman : Braids, links and mapping class groups annals of maths volume 82 .
- [4] G. Bure & H.Zieshang : knots gruyter studies in mathematics 5, 1985 .
- [5] J. Calais : Eléments de théorie des groupes, Puf 2002
- [6] A. Gramain Topologie des surfaces, Puf 1971
- [7] A. Hatcher : Algebraic topology cambridge, university press 2002.
- [8] V. F.R.Jones : A polynomial invariants for knots via Von Neuman algebra .
- [9] S. Moran : The mathematical theory of knots and braids, an introduction (North-Holland mathematics studies ; v. 82).
- [10] Y. Felix & D. Tanne : Topologie algébrique, DUNOD, 2006.
- [11] F. Laudenbach & F. Wagemann Topologie Algébrique univrsité de nantes ,(CM) &(TD).