

# Table des matières

Liste des figures	5
Introduction	8
<b>1 Généralités sur les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>10</b>
1.1 Définitions et préliminaires . . . . .	10
1.1.1 Système dynamique . . . . .	10
1.1.2 Système dynamique discret . . . . .	11
1.1.3 Espace des phases . . . . .	11
1.1.4 Point fixe . . . . .	11
1.1.5 Orbite périodique . . . . .	12
1.2 Stabilité . . . . .	12
1.3 Linéarisation . . . . .	22
1.4 Bifurcations . . . . .	22
1.4.1 Bifurcation selle-noeud . . . . .	23
1.4.2 Bifurcation par doublement de la période . . . . .	24
<b>2 Exemples des systèmes dynamiques discrets</b>	<b>27</b>
2.1 L'application logistique . . . . .	27
2.1.1 Historique de l'application logistique . . . . .	27
2.1.2 Définition de l'application logistique . . . . .	30

2.1.3	Propriétés de l'application logistique . . . . .	30
2.1.4	Points fixes et orbites périodiques : . . . . .	39
2.1.5	Les bifurcations de l'application logistique . . . . .	46
2.1.6	Diagramme de bifurcations . . . . .	49
2.2	Attracteur de Hénon . . . . .	51
2.2.1	Historique du système de Hénon . . . . .	51
2.2.2	Définition du système de Hénon . . . . .	52
2.2.3	Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations . . . . .	58
2.2.4	Analyse de bifurcation . . . . .	60
2.2.5	Diagramme de bifurcation . . . . .	63
2.2.6	Bassin d'attraction de Hénon . . . . .	64
2.3	Système de Lozi . . . . .	64
2.3.1	Historique du système de Lozi . . . . .	64
2.3.2	Définition du système de Lozi . . . . .	65
2.3.3	Points fixes du système de Lozi . . . . .	66
2.3.4	Stabilité des points fixes . . . . .	66
2.3.5	Attracteur de Lozi . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Initiation au chaos dans les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>71</b>
3.1	Historique . . . . .	71
3.2	Définition du chaos . . . . .	74
3.3	Outils de quantification du chaos . . . . .	74
3.3.1	Espace des phases . . . . .	75
3.3.2	Attracteurs . . . . .	75
3.3.3	Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I) . . . . .	76
3.3.4	Exposants de Lyapunov . . . . .	77
3.4	Le chaos dans les systèmes précités . . . . .	80
3.4.1	L'application logistique . . . . .	80
3.4.2	Système de Hénon . . . . .	81
3.4.3	Système de Lozi . . . . .	82

## Table des matières

---

Conclusion	84
Bibliographie	85





gggggggggggggg

ggggggg

gggggggg

### Introduction

La notion du temps dans l'étude des modèles physiques et mathématiques [10] a été établie par Galilée<sup>1</sup>, qui le premier adoptait cette notion dans l'étude de la chute des corps et le mouvement de la terre autour du soleil. Cette insertion du temps dans l'étude des équations est ce qui se nommera l'étude des systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques symbolisent l'axe de recherche le plus courant des mathématiciens, topologiquement, analytiquement, géométriquement, et de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui tentent de distinguer les propriétés d'un système dynamique.

Historiquement, la mécanique était la première question relevant des systèmes dynamiques, et plus déterminément le problème de la stabilité du système solaire. Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, Isaac Newton<sup>2</sup> a caractérisé l'équivalence masse-énergie et trouvé explicitement la cause de certains mouvements visiblement désordonnés. Les systèmes dynamiques se sont développés durant le XIX<sup>ème</sup> siècle; effectivement, vers la fin de ce siècle, le mathématicien physicien et philosophe français Henri Poincaré<sup>3</sup> avait déjà mis en exergue le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales, il montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets.

Toujours dans le même siècle, des nombreuses recherches sur la sensibilité du mouvement ont été réalisées par le mathématicien russe Alexandre Lyapunov<sup>4</sup>, qui avait introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initialement voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales.

En 1963, le titre de la communication du météorologue Edward Lorenz<sup>5</sup> énonce bien le pro-

---

<sup>1</sup>Galilée (1564-1642), est un mathématicien, géomètre, physicien et astronome italien du XVII<sup>ème</sup> siècle.

<sup>2</sup>Isaac Newton (1642-1727), est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle.

<sup>3</sup>Henri Poincaré (1854-1912), est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos.

<sup>4</sup>Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918) est un mathématicien russe, il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou non.

<sup>5</sup>Edward Norton Lorenz (1917-2008), est un scientifique américain, travaillant comme météorologue au "Mas-

blème : "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas?". Il y analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non-linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents. Les systèmes chaotiques seraient alors à partir de 1975, pour répondre à cette question. C'est donc durant les années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Sans aucun doute, les travaux des antécédents de Lorenz ont donc été de grande importance pour comprendre le chaos déterministe, et c'est l'ordinateur qu'il a bien permis aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques et distinguer la disproportion entre la cause et l'effet soulignant au passage l'imprédictibilité sur le long terme de l'évolution de tels systèmes.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases" ; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire.

---

sachusetts Institute of Technology", il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques discrets

### 1.1 Définitions et préliminaires

#### 1.1.1 Système dynamique

**Définition 1.1** *Un système dynamique est une application continue  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant :*

$$\begin{aligned}\varphi(0, x_0) &= x_0 \\ \varphi(t + s, x_0) &= \varphi(t, \varphi(s, x_0))\end{aligned}$$

Où  $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$ .

Un tel système dynamique représente deux aspects, son état et sa dynamique ; c'est-à-dire son évolution en fonction du temps. Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Systèmes dynamiques discrets,
- Systèmes dynamiques continus.

### 1.1.2 Système dynamique discret

**Définition 1.2** *Un système dynamique discret est un système d'équations algébriques récurrentes défini par :*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, c), k \in \mathbb{N}$$

Où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état à l'instant  $t_k$ ;  $c$  le vecteur des paramètres;  $\varphi$  la fonction de récurrence qui définit la dynamique du système discret. Si nous associons à cette dynamique un état initial  $x_0$ , nous pourrions avoir une solution unique de  $\varphi$ .

Etant donnée une condition initiale  $x_0$  de l'état du système, le premier état suivant est :  $x_1 = \varphi(x_0)$ . Le second état, qui suit immédiatement le premier, est :  $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(\varphi(x_0)) = (\varphi \circ \varphi)(x_0) = \varphi^2(x_0)$ , et ainsi de suite, de telle sorte que le  $n$ -ième état est donné par :  $x_n = \varphi(x_{n-1}) = \dots = \varphi^n(x_0)$ .

### 1.1.3 Espace des phases

**Définition 1.3** *L'espace des phases est une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable...*

### 1.1.4 Point fixe

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système. Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système. De plus, ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettent d'indiquer une classification des changements des comportements.

**Définition 1.4** *Un point fixe d'une application  $f$  est un point invariant par  $f$ , c'est-à-dire un point  $p$  tel que  $f(p) = p$ .*

*Géométriquement : Le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction  $y = f(x)$*

avec la bissectrice  $y = x$ .

### 1.1.5 Orbite périodique

**Définition 1.5** Un cycle d'ordre  $p$  (ou orbite périodique d'ordre  $p$  ou encore un  $p$ -cycle) est un ensemble de  $p$  points  $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), i = 0, \dots, p-2. \\ x_p^* &= f(x_{p-1}^*) = x_0. \\ x_i^* &= f^p(x_i^*), i = 0, \dots, p-1. \\ x_i^* &\neq f^h(x_i^*), i = 0, \dots, p-1, 1 \leq h < p. \end{aligned}$$

$p$  est l'entier minimal tel que :  $x_0^* = f^p(x_0^*)$ .

Ainsi, les  $n$  éléments d'une orbite de période  $n$  correspondent aux points fixes propres de  $f^n$ , c'est-à-dire les points fixes qui ne sont fixes que pour  $f^n$ .

## 1.2 Stabilité

**Définition 1.6** Un point fixe attractif (ou stable) de  $f : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , est un point fixe  $x^*$  de  $f$  tel qu'il existe un voisinage de  $x^*$  tel que pour tout  $u_0$  dans ce voisinage la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , converge vers  $x^*$ .

**Définition 1.7** Un point fixe  $x^*$  de  $f : I \rightarrow I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , est répulsif (ou instable) si :

$$\forall x_0 \in I, \exists \varepsilon > 0, \text{ tel que pour } |x^* - x_0| < \varepsilon \text{ alors } |x^* - f(x_0)| \gg 0.$$

Pour résumer, un point fixe  $x^*$  est attractif si la suite  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x$  dans un voisinage de  $x^*$ , converge vers  $x^*$  tandis qu'il est répulsif si cette suite s'en éloigne.



**Définition 1.8** *Considérons une application non-linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; on définit le multiplicateur  $m$  de  $f$  au point fixe  $x^*$  comme suit :*

$$m = f'(x^*)$$

Il est clair que  $m$  est la pente de la tangente au point fixe  $x^*$  de  $f$  qui détermine le type (ou la nature) de point fixe.

**Théorème 1.1** *Supposons que  $x^*$  est un point fixe de  $x_{t+1} = f(x_t)$  , alors le point fixe est :*

1. *Attractif si  $|m| < 1$ .*
2. *Répulsif si  $|m| > 1$ .*
3. *Indifférent si  $|m| = 1$ .*
4. *Super stable si  $m = 0$ .*

**Preuve:** Nous utilisons la formule de Taylor au voisinage de  $x^*$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + m(x - x^*) + O((x - x^*)^2). \\ &= x^* + m(x - x^*) + O((x - x^*)^2). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(f(x^*)) + m(m(x - x^*)) + O(2) \\ &= x^* + m^2(x - x^*) + O(2). \\ &\dots \\ f^p(x) &= x^* + m^p(x - x^*) + O(2). \end{aligned}$$

Ainsi l'éloignement par rapport à  $x^*$  est multiplié par  $m$  à chaque itération (D'où le nom multiplicateur donné à  $m$ ). Après  $p$  itérations le point  $x$  voisin de  $x^*$  se trouve à la distance  $m^p(x - x^*)$ .

1. Par hypothèse, nous avons :

$$|m| = \lim_{x_0 \rightarrow x^*} \left| \frac{f(x^*) - f(x_0)}{x^* - x_0} \right| < 1$$

Pour  $x_0$  suffisamment proche de  $x^*$ , on a :

$$|f(x^*) - f(x_0)| < |x^* - x_0|$$

Comme  $x^*$  est fixe nous obtenons :

$$|x^* - f(x_0)| < |x^* - x_0|$$

Pour un  $x_0$  proche de  $x^*$ ,  $f(x_0)$  est encore plus proche de  $x^*$ , En répétant cet argument,  $f^2(x_0)$  sera encore plus proche de  $x^*$ , etc. Ainsi, la suite  $(x_n)_{\mathbb{N}}$  définie par  $x_0$  et  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers  $p$ , le point  $p$  est donc attractif.

2. Au contraire, le point fixe  $x^*$  peut être répulsif, la preuve de cette assertion est une adaptation évidente de l'assertion précédente.

3. si  $|m| = 1$ , la nature de  $x^*$  dépend des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor et nous ne pouvons pas conclure quant à la nature du point fixe.

4. Si  $m = 0$ , le terme du premier ordre disparaît complètement donc l'attraction est plus forte d'où le nom "super attractif" . ■

**Théorème 1.2** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pour déterminer la nature de point fixe  $x^*$  il faut falloir trouver les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $J(x^*) = Df(x^*)$ . Le point fixe  $x^*$  est :

1. Stable si toutes les valeurs propres de  $J(x^*)$  sont à l'intérieur du disque unité (leurs modules sont inférieurs à 1).

2. Instable si l'une de ces valeurs propres de  $J(x^*)$  a un module supérieur à 1.

**Preuve:** La preuve peut être faite en utilisant le critère de Routh-Hurwitz[11]. ■

Comme les points fixes peuvent être attractifs ou répulsifs, de même, une orbite périodique est soit attractive soit répulsive et le théorème suivant décrit la stabilité d'une orbite périodique.

En dimension 1; le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de chaîne. En effet, la dérivée de  $f^p$  au point  $x_0$  s'écrit :

$$(f^p)'(x_p) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)$$

Mais  $x_0 = x_p$ , on en déduit que la valeur  $(f^p)'(x_0)$  est la même pour toutes les dérivées et notée  $m_p$ .

On définit le multiplicateur du cycle  $m_p$  par :

$$m_p = (f^p)'(x_0)$$

**Théorème 1.3** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le cycle  $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$  est :

1. Attractif si  $|m_p| < 1$ .
2. Répulsif si  $|m_p| > 1$ .
3. Indifférent si  $|m_p| = 1$ .
4. Super stable si  $m_p = 0$ .

En général, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on calcule les valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  de la matrice jacobienne de  $f^p$ .

Si  $\lambda_i$  sont réelles :

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|\lambda_i| < 1$ , il s'agit d'un noeud attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|\lambda_i| > 1$ , il s'agit d'un noeud répulsif.

$\exists i, j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , tel que  $|\lambda_i| < 1$  et  $|\lambda_j| > 1$ , il s'agit d'un noeud col.

Si  $\lambda_i$  sont complexes :

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|\lambda_i| < 1$ , il s'agit d'un foyer attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|\lambda_i| > 1$ , il s'agit d'un foyer répulsif.

**Preuve:** La preuve peut être faite en utilisant le critère de Routh-Hurwitz[11]. ■

**Définition 1.9** Un point fixe  $x^*$  de  $x_{t+1} = f(x_t)$  est un point hyperbolique si  $|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)| \neq 1$ . Plus généralement, en dimension  $n$ ,  $x^*$  est un point hyperbolique si aucune des valeurs propres de  $Df(x^*)$  a un module égal à 1.

**Définition 1.10** Le bassin d'attraction d'un point fixe  $x^*$  d'une application  $f$  est formé par l'ensemble des conditions initiales  $u_0$  pour lesquelles la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers le point d'équilibre  $x^*$ .

Voyons maintenant un exemple qui montre bien l'utilité des définitions précédentes et à travers la technique du cobweb<sup>1</sup> on va voir comment se comportent les trajectoires.

**Exemple 1.1** Prenons un exemple linéaire des systèmes dynamiques de la forme :

$$x_{k+1} = ax_k + b \tag{1.1}$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constants.

L'application définie par (1.1) a un point fixe  $x^* = \frac{b}{1-a}$ .

Supposons  $b = 0$  ; i.e.  $x_{k+1} = ax_k \Leftrightarrow x_k = a^k x_0$ .

1. Si  $|a| < 1$ , alors  $a^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , donc  $x_k \rightarrow 0$ .
2. Si  $|a| > 1$ , alors  $a^k \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ , donc  $x_k \rightarrow \infty$ .
3. Pour  $|a| = 1$ , on a deux cas :

(a) Si  $a = 1$ , alors  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots$ , donc  $x_k = x_0$ .

(b) Si  $a = -1$ , alors  $x_0 = -x_1 = x_2 = \dots$ , donc  $x_k = (-1)^k x_0$ , d'où la solution oscille.

Maintenant, pour  $b \neq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b, \\ x_2 &= ax_1 + b, \\ &= a(ax_0 + b) + b, \\ &= a^2x_0 + b(a + 1). \\ x_3 &= ax_2 + b, \\ &= a(a^2x_0 + b(a + 1)) + b, \\ &= a^3x_0 + b(a^2 + a + 1). \\ x_4 &= ax_3 + b, \\ &= a(a^3x_0 + b(a^2 + a + 1)) + b, \\ &= a^4x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Une parcelle de cobweb, ou diagramme de Verhulst est un outil visuel utilisé dans les systèmes dynamiques pour étudier le comportement qualitatif des fonctions itérées unidimensionnelles, telle que l'application logistique ; et grâce à laquelle il est possible de déduire l'état à long terme d'une condition initiale de l'application itérée.

Donc :

$$x_k = a^k x_0 + b \sum_{j=0}^{k-1} a^j$$

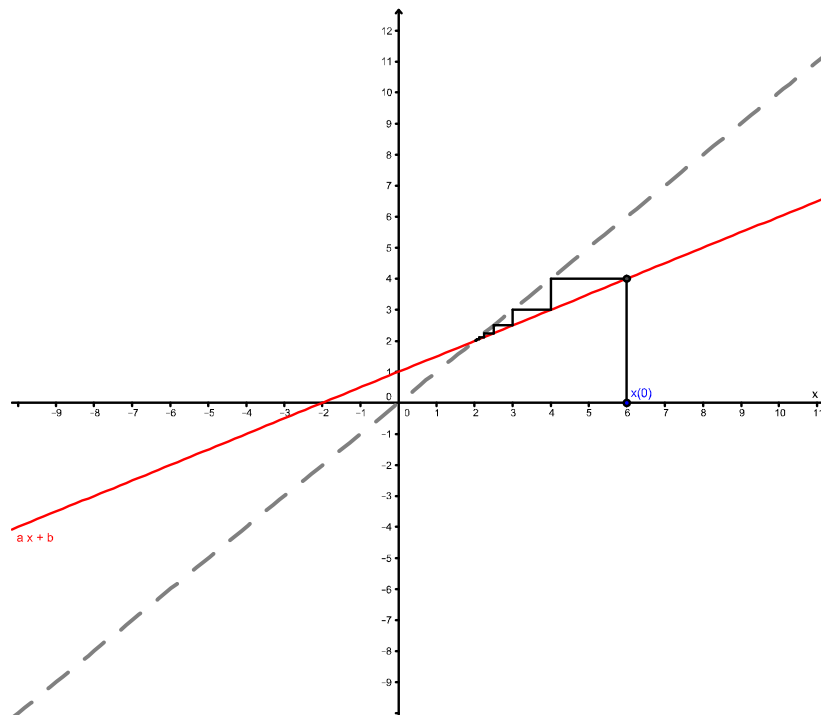
En appliquant la formule de série géométrique on obtient :

$$x_k = \begin{cases} a^k x_0 + b \left( \frac{a^k - 1}{a - 1} \right), & \text{si } a \neq 1. \\ a^k x_0 + kb, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

1/ Pour  $|a| < 1$  alors  $a^k \rightarrow 0$ , quand  $k \rightarrow \infty$ , donc :

$$x_k \rightarrow \frac{b}{1 - a} = x^*.$$

Donc  $x^*$  est un point fixe stable (i.e. un attracteur), voir Figures (1.1) et (1.2).



**Fig 1-1.** L'évolution des itérées de l'application  $x_{k+1} = ax_k + b$ , pour  $0 < a < 1$ .

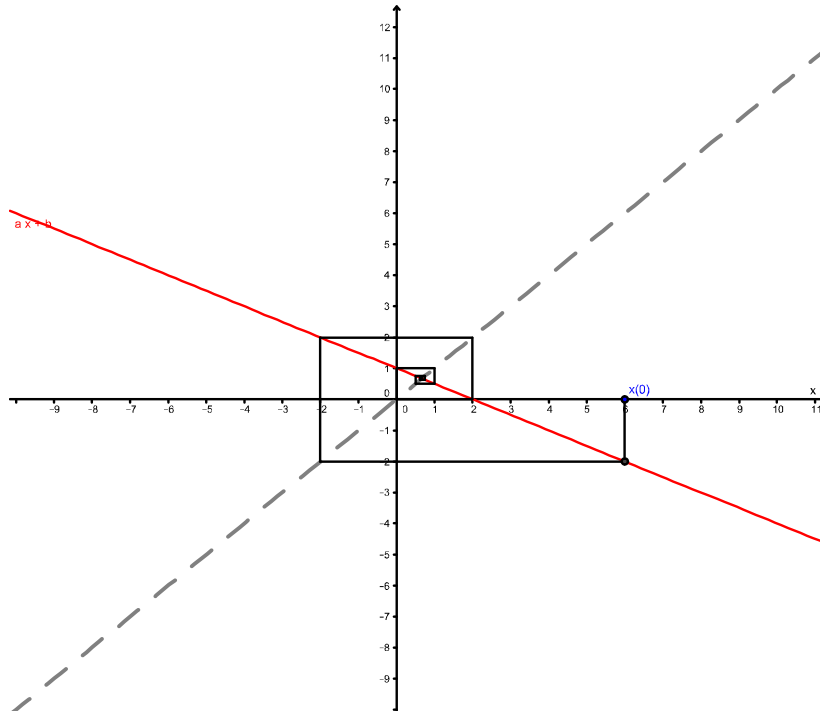
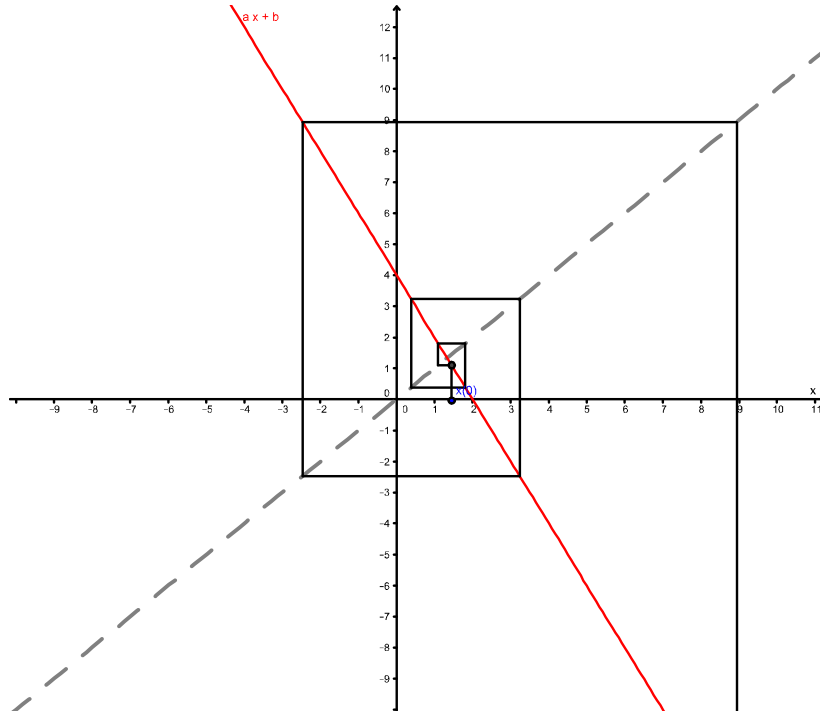


Fig 1-2. L'évolution des itérées de l'application  $x_{k+1} = ax_k + b$ , pour  $-1 < a < 0$ .

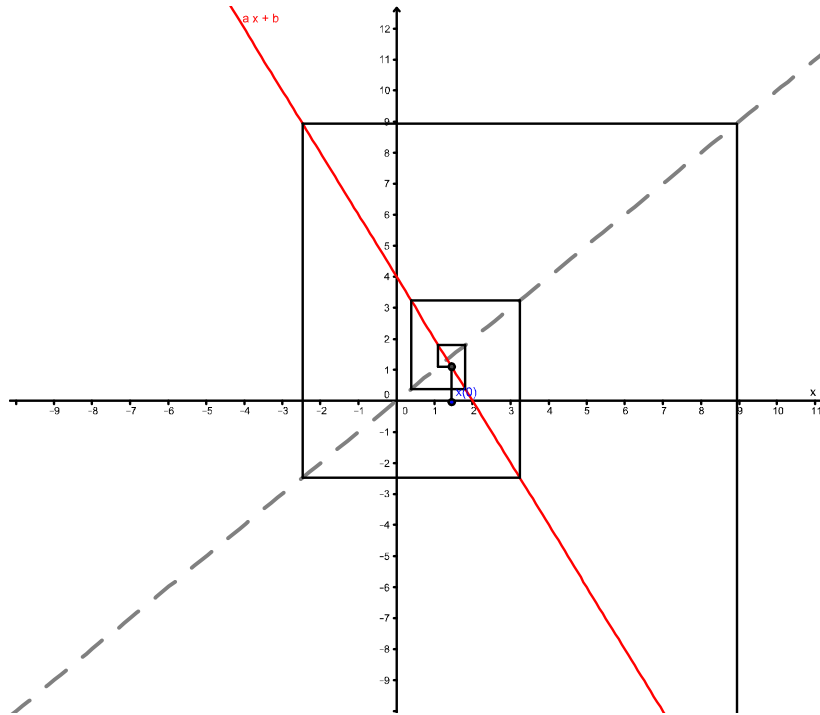
2/ Si  $|a| > 1$ , alors  $a^k \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ , donc :

$$x_k = a^k \left( x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \left( \frac{b}{1-a} \right).$$

si  $x_0 \neq \frac{b}{1-a}$  alors  $|x_k| \rightarrow \infty$ . voir Figures (1.3.) et (1.4.).



**Fig 1-3.** L'évolution des itérées de l'application  $x_{k+1} = ax_k + b$ , pour  $a > 1$ .

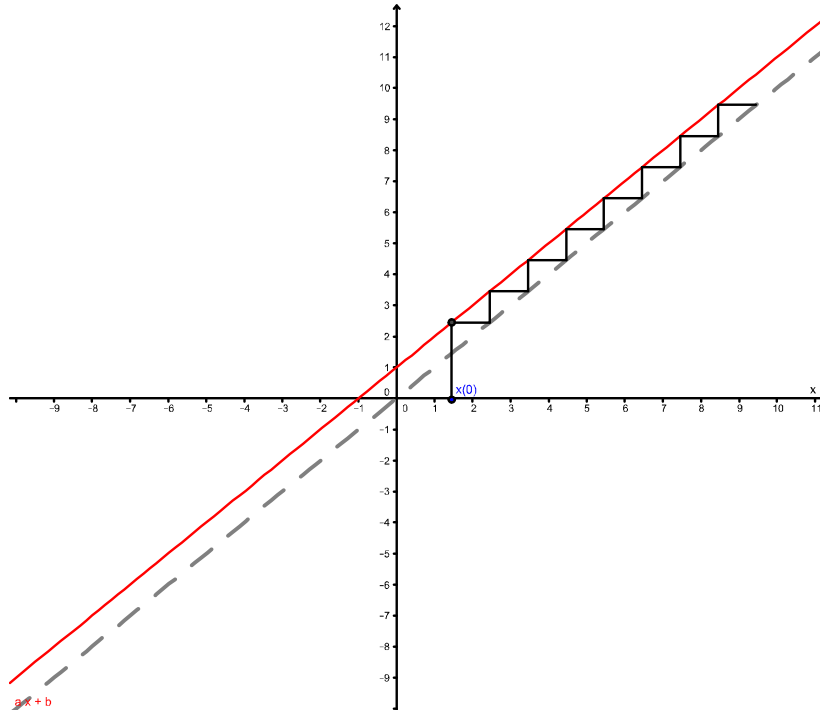


**Fig 1-4.** L'évolution des itérées de l'application  $x_{k+1} = ax_k + b$ , pour  $a < -1$ .

3/ Si  $a = 1$  alors

$$\begin{aligned} x_k &= a^k x_0 + kb \\ &= x_0 + kb \end{aligned}$$

Si  $b \neq 0$  alors  $|x_k| \rightarrow \infty$ , voir Figure (1.5.), sinon  $x_k = x_0, \forall k$ .



**Fig 1-5.** L'évolution des itérées de l'application  $x_{k+1} = ax_k + b$ , pour  $a = 1$ .

4/ si  $a = -1$  alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0 + b \\ x_2 &= x_0 + b(-1 + 1) = x_0. \\ x_3 &= -x_0 + b. \\ x_4 &= x_0. \end{aligned}$$

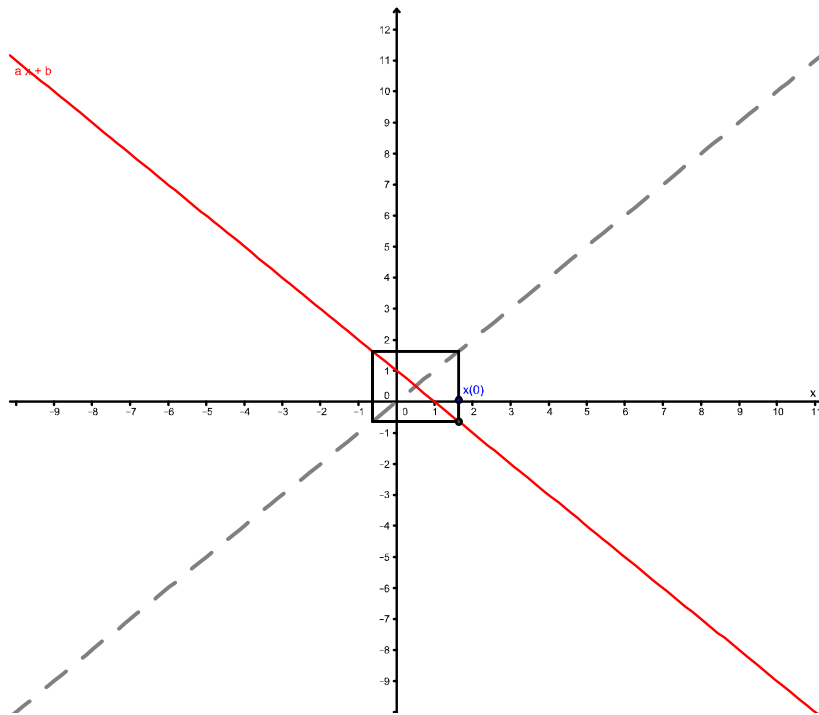
Donc  $x_k$  oscille entre  $x_0$  et  $-x_0 + b$ .



Il y a un cas particulier quand  $x_0 = b - x_0$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{b}{2}, \\ &= \frac{b}{1 - (-1)}, \\ &= \frac{b}{1 - a}, \\ &= x^*.\end{aligned}$$

C'est le même point fixe qu'on avait déjà vu ; voir Figure (1.6.).



**Fig 1-6.** L'évolution des itérées de l'application  $x_{k+1} = ax_k + b$ , pour  $a = -1$ .

Pour un système dynamique discret non-linéaire on utilise le procédé suivant de la linéarisation pour distinguer la nature des points fixes.

## 1.3 Linéarisation

**Définition 1.11** *Il s'agit d'étudier le comportement des trajectoires, au voisinage des points fixes d'un système défini en dimension  $n$  par l'application  $f$  suivante :*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} &= f(x_k)\end{aligned}\tag{1.2}$$

*Supposons que  $p \in \mathbb{R}^n$  est un point fixe de  $f$ , c'est-à-dire que  $f(p) = p$ . A proximité du point  $p$ , on peut linéariser la récurrence en négligeant les termes du second ordre. Soit  $q = p + \xi$  au voisinage de  $p$  pour  $\xi$  assez petit. Le développement limité au voisinage de  $q$  s'écrit alors :*

$$f(q) = p + A\xi + o(\xi)$$

Où  $\xi = q - p$  désigne l'écart par rapport au point fixe, et :

$$A = Df(p)$$

*est la matrice jacobienne de  $f$  au point  $p$ . Donc par itération, on obtient :*

$$f^n(q) = p + A^n\xi + o(\xi)\tag{1.3}$$

*L'application  $\xi \mapsto A\xi$  s'appelle l'application linéarisée de  $f$  au voisinage du point fixe  $p$ . On dit que le système (1.2) est approximé au voisinage du point d'équilibre  $p$  par le système linéaire (1.3).*

## 1.4 Bifurcations

**Définition 1.12** *Une bifurcation est un changement quantitatif ou qualitatif de la solution d'un système dynamique lors de la modification des paramètres auxquels il dépend, et d'une manière*

plus précise la disparition ou le changement de stabilité ou l'apparition de nouvelles solutions.

**Définition 1.13** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, et soient  $f : X \rightarrow X$  et  $g : Y \rightarrow Y$  deux applications continues ; on dit que les applications  $f$  et  $g$  sont topologiquement conjuguées s'il existe un homéomorphisme  $\varphi : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ .

Les applications  $f$  et  $g$  ont les mêmes propriétés dynamiques, elles ont donc entre autres, le même nombre de points fixes et d'orbites périodiques.

**Définition 1.14** Une famille d'applications  $F_c : X \rightarrow X$  dépendant d'un paramètre  $c$  admet une bifurcation en  $c_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c \in (c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$  tel que  $F_c$  et  $F_{c_0}$  ne sont pas topologiquement conjuguées.

### 1.4.1 Bifurcation selle-noeud

**Définition 1.15** Considérons l'application

$$x_{t+1} = f_c(x_t)$$

S'il existe  $c_0$  pour lequel l'application  $f_c$  admet un point fixe non-hyperbolique  $x^*$  i.e.  $f_{c_0}(x^*) = x^*$  où  $\frac{\partial f_{c_0}}{\partial x}(x^*) = 1$ .

On dit que  $f_c(x_t)$  admet une bifurcation selle-noeud (ou bifurcation tangente) en  $c = c_0$ .

**Définition 1.16** Une application  $F_c$  dépendant d'un paramètre  $c$  admet une bifurcation selle-noeud (ou bifurcation tangente) en  $c_0$  s'il existe un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

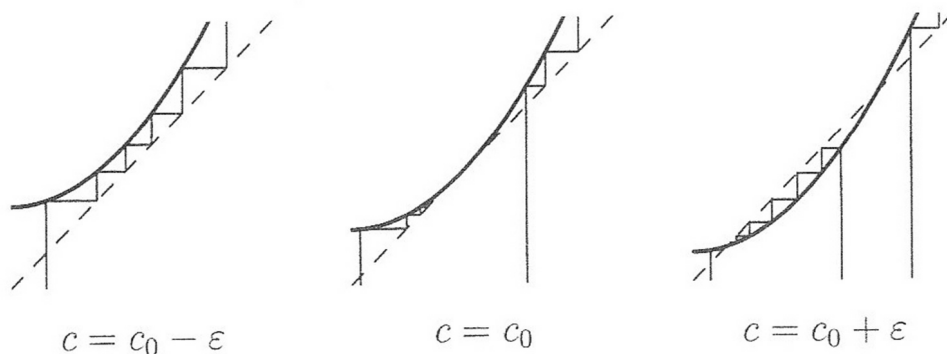
1. L'application  $F_{c_0-\varepsilon}$  n'a pas de points fixes dans  $I$ .
2. L'application  $F_{c_0}$  a un seul point fixe dans  $I$ .
3. L'application  $F_{c_0+\varepsilon}$  a deux points fixes dans  $I$ , l'un est attractif tandis que l'autre est répulsif.

**Remarque 1.1** - Intervertir  $c_0 - \varepsilon$  et  $c_0 + \varepsilon$  ne modifie pas la définition.

- Une bifurcation selle-noeud est une bifurcation locale, puisqu'elle est définie uniquement sur un petit intervalle  $I$ .

- Pour  $c = c_0$  le graphe de  $F_{c_0}$  est tangent à la bissectrice  $y = x$ , d'où son appellation bifurcation tangente.

Une bifurcation selle-noeud est représentée par la Figure (1.7.) qui montre bien la création des points fixes.



**Fig 1-7.** Bifurcation selle-noeud de  $F_c$ .

### 1.4.2 Bifurcation par doublement de la période

**Définition 1.17** Considérons l'application

$$x_{t+1} = f_c(x_t)$$

S'il existe  $c_0$  pour lequel l'application  $f_c$  admet un point fixe non-hyperbolique  $x^*$  i.e.  $f_{c_0}(x^*) = x^*$  où  $\frac{\partial f_{c_0}}{\partial x}(x^*) = -1$ .

On dit que  $f_c(x)$  admet une bifurcation par doublement de la période (ou bifurcation flip) en  $c = c_0$ .

**Définition 1.18** Une application  $F_c$  dépendant d'un paramètre  $c$  admet une bifurcation par doublement de la période en  $c_1$  s'il existe un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  contenant exactement un point fixe  $x^*$  de  $F_c$ , ( $c \in (c_1 - \varepsilon, c_1 + \varepsilon)$ ) et tel que :

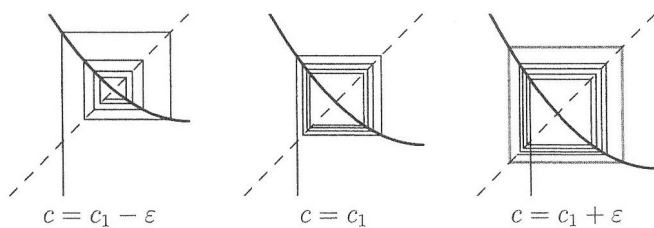
1. Le point fixe  $p_{c_1 - \varepsilon}$  est attractif et  $F_{c_1 - \varepsilon}$  n'a pas d'autres points fixes dans  $I$ .
2. Le point fixe  $p_{c_1}$  est neutre et  $F_{c_1}$  n'a pas d'autres points fixes dans  $I$ .
3. Le point fixe  $p_{c_1 + \varepsilon}$  est répulsif et  $F_{c_1 + \varepsilon}$  a une orbite périodique attractive de période 2 dans  $I$ .

**Remarque 1.2** - Intervertir  $c_1 - \varepsilon$  et  $c_1 + \varepsilon$  ne modifie pas la définition.

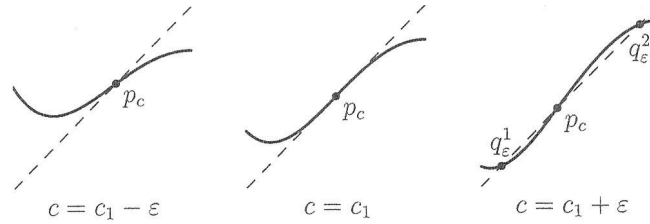
- La définition reste valable pour un point fixe répulsif qui devient attractif en créant une orbite périodique répulsive de période 2.

- Lorsque l'application  $F_c$  a une bifurcation par doublement de la période en  $c_1$ , on dit que  $F_c^2$  a une bifurcation fourche en  $c_1$ .

Plus généralement, on dit que  $F_c$  a une bifurcation par doublement de la période en  $c_1$ , si sa  $n$ -ième itérée  $F_c^n$  vérifie les critères de la définition précédente. En d'autres termes, si une orbite de longueur  $n$  change de stabilité en  $c_1$  et crée une orbite de longueur  $2n$  de stabilité initiale, alors  $c_1$  est une bifurcation par doublement de la période.



**Fig 1-8.** Bifurcation par doublement de la période de  $F_c$



**Fig 1-9.** Bifurcation fourche de  $F_c^2$

La Figure (1.8.) représente une bifurcation par doublement de la période. Nous constatons que le point fixe devient instable lorsque la dérivée de  $F_c$  en ce point passe par la valeur  $-1$ . Les changements de la dynamique de  $F_c^2$  lors de la bifurcation sont représentées dans la Figure (1.9.). Le point fixe de  $F_c^2$  devient répulsif en créant deux nouveaux points fixes attractifs.

# Chapitre 2

## Exemples des systèmes dynamiques discrets

### 2.1 L'application logistique

#### 2.1.1 Historique de l'application logistique

L'application logistique  $g_a = ax(1-x)$  s'intéresse à la modélisation de l'évolution des populations [9]. Elle a été énoncée en 1838 par Pierre François Verhulst<sup>1</sup>, et qui prétend modéliser non exponentiellement l'évolution des populations. Ce nouveau modèle vient en réaction au modèle de Thomas Malthus<sup>2</sup> qui anticipe une croissance exponentielle de la population. Assurément, pour Malthus, chaque année, la population grossit dans un rapport fixe :  $u_{n+1} = ru_n$  où  $u_n$  désigne la population de l'année  $n$  et  $r$  le taux de croissance de la population. La fonction associée à cette suite est :  $f(x) = rx$ . Ce modèle exponentiel envisage donc une évolution infinie de la population et dès lors, il se conforme mal à la réalité. Effectivement, aucun empêchement à l'évolution

---

<sup>1</sup>Pierre-François Verhulst (1804-1849) est un mathématicien belge. Inspiré par l'« Essai sur le principe de population » de Thomas Malthus, il proposa en 1838 le modèle de Verhulst, décrivant l'évolution des populations animales grâce à un modèle qui ne soit pas exponentiel. C'est dans la publication de 1845 qu'il nomme cette courbe « logistique » sans donner l'explication de ce terme

<sup>2</sup>Thomas Malthus (1766 – 1834), économiste britannique contemporain du décollage industriel anglais, il est surtout connu pour ses travaux sur les rapports entre les dynamiques de croissance de la population et la production, analysés dans une perspective pessimiste, totalement opposée à l'idée smithienne d'un équilibre harmonieux et stable.

est pris en compte. La correction du modèle de Malthus s'impose cependant en considérant ces empêchements. C'est de même que le modèle de Verhulst s'appuie sur la nourriture disponible. Cela établit une population maximale  $P$  qui sera aboutie lorsque toute la nourriture est épuisée. Si une année, la population est égale à  $P$ , l'année suivante la population sera nulle. Dans ce cas on peut écrire :  $u_{n+1} = ru_n(P - u_n)$  où la fonction associée est  $g(x) = rx(P - x)$ . Le facteur  $rx$  désigne l'augmentation de la population tant que  $(P - x)$  correspond à sa diminution due à des facteurs extérieurs. Cette dernière expression s'écrit alors  $g(x) = rxP(1 - \frac{x}{P})$ . En posant  $y = \frac{x}{P}$ , on obtient :

$$g(y) = ryP^2(1 - y) = ay(1 - y)$$

avec  $a = rP^2$ . La population doit être ainsi assimilée à un rapport compris entre 0 et 1, où 0 correspond à son extinction et 1 à son maximum. De plus, la population maximale est égale à  $g(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$ . Ainsi,  $0 \leq \frac{a}{4} \leq 1$ , soit  $0 \leq a \leq 4$ .

L'application  $g$  définie par :

$$\begin{aligned} g & : [0; 1] \rightarrow [0; 1] \\ y & \mapsto ay(1 - y), a \in [0; 4] \end{aligned}$$

s'appelle l'application logistique.

Après sa découverte par Pierre François Verhulst, l'application logistique a été oubliée jusqu'au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Deux mathématiciens biologistes, dans les années 1920, travaillent sur l'évolution des différentes populations animales et constatent que les populations évoluent différemment d'une espèce à une autre : certaines se stabilisent tandis que d'autres suivent des cycles réguliers et enfin d'autres fluctent aléatoirement. De quoi dépend cette évolution ?

L'application logistique réapparaît alors pour tenter de répondre à cette question. Toujours



dans le même but, dans les années 1970, James Yorke<sup>3</sup> et Robert May<sup>4</sup>, tous deux écologistes, auront trouvé la réponse. Pour eux, l'évolution de chaque population animale se calcule à l'aide de l'application logistique  $g(y) = ay(1 - y)$  et dépend de la valeur de  $a$ .

En effet, pour certaines valeurs de  $a$ , le comportement de l'application se change significativement. Plus tard, ces paramètres sont appelés bifurcations. Pour plus de clarté, May a compilé ses résultats dans un graphique, c'est l'apparition du diagramme de bifurcation. Il remarque que jusqu'à un certain point, la population converge vers une valeur, puis deux, puis quatre, etc. Au delà de ce point, ce comportement prévisible s'arrête, c'est le chaos.

Par ailleurs, à la même période, Mitchell Feigenbaum<sup>5</sup>, physicien, s'intéresse à son tour à l'application logistique dans le cadre de recherche sur la turbulence. Dans un premier temps, il fait les mêmes constatations que Robert May : il existe des valeurs de  $a$  pour lesquelles le comportement de l'application logistique se change. Puis durant l'été 1975, il assiste à une conférence sur la transition entre la périodicité et le chaos qui lui pousse à étudier l'application logistique sous un angle différent. Il admet les bifurcations et il se concentre sur la distance entre deux bifurcations successives. Il remarque alors que le rapport entre deux distances successives converge. Il a repris son étude sur d'autres applications dépendant d'un paramètre et constate que le rapport entre deux périodes converge toujours vers le même nombre. C'est la découverte de la constante de Feigenbaum.

---

<sup>3</sup>James Yorke (né en 1941), mathématicien américain, il a le sens de la formule : "le terme de chaos", qu'il a choisi en 1975 pour décrire des phénomènes très irréguliers, a été unanimement repris par les scientifiques. Mais James Yorke a fait bien plus, en mettant au point des méthodes pour étudier ces phénomènes, et aussi pour les utiliser dans des applications pratiques.

<sup>4</sup>Robert McCredie May, (né en 1938), physicien australien, au début de sa carrière, il s'intéresse à la dynamique des populations animales ainsi qu'à la relation entre la complexité et la stabilité en synécologie<sup>2</sup>. Ses travaux jouent un rôle clé dans le développement de l'écologie théorique (en) lors des années 1970 et 1980.

<sup>5</sup>Mitchell Jay Feigenbaum (né en 1944), est un physicien théoricien américain, il a découvert un scénario de transition vers le chaos par doublement de période, lors d'un séjour à Los Alamos. Cette transition est caractérisée par deux constantes universelles, baptisées depuis « nombres de Feigenbaum » en son honneur.

### 2.1.2 Définition de l'application logistique

**Définition 2.1** *Le système dynamique associé est : Partant d'une condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on pose :*

$$x_1 = g_a(x_0); x_2 = g_a(x_1); \dots; x_{n+1} = g_a(x_n).$$

Où

$$x_1 = g_a(x_0); x_2 = g_a(x_1) = g_a(g_a(x_0)) = g_a^2(x_0); \dots; x_n = g_a^n(x_0).$$

*On dit que c'est un système dynamique de dimension 1 car  $x \in \mathbb{R}$ , et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment, la loi de mouvement est simplement  $x_{n+1} = g_a(x_n)$ .*

**Définition 2.2** *L'application logistique est l'application notée usuellement  $g_a$  définie par :*

$$\begin{aligned} g_a &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto ax(1-x) \end{aligned}$$

avec  $a \in [0, 4]$ .

Cette application peut être appliquée plusieurs fois de suite, ce qui permet de définir par récurrence une suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} = g_a(u_n)$ .

### 2.1.3 Propriétés de l'application logistique

On va prendre un exemple vu en mathématiques et en écologie pour étudier la croissance des populations c'est le modèle logistique. La population de la période  $t + 1$  sera  $x_{t+1}$  en fonction de la population qui la précède de la période  $t$  et donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t)$$

avec  $(1-x_t)$  représente la diminution de la population due à des facteurs extérieurs.

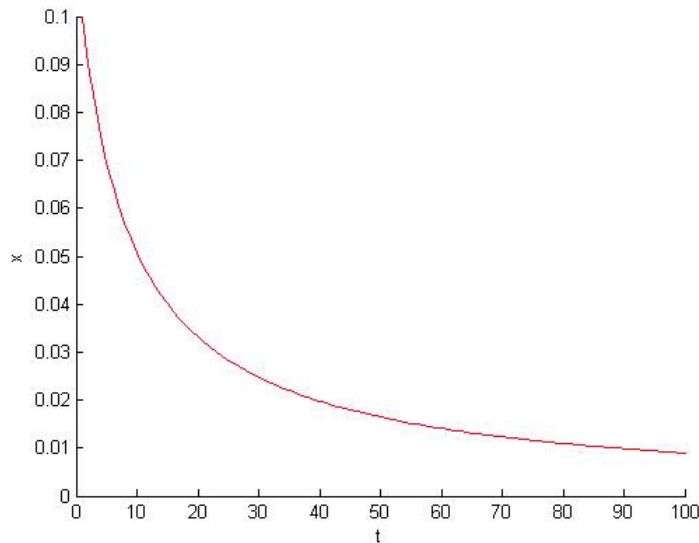
$ax_t$  représente le rapport de croissance.

Nous allons voir que selon la valeur de taux de croissance effectif  $a$ , une population se stabilise à une certaine valeur ou oscille entre deux ou plusieurs valeurs ou fluctue aléatoirement. Donc l'évolution de chaque population se calcule à l'aide de l'application logistique :  $x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$

Dans ce but, nous allons étudier l'évolution des populations animales pour un taux de croissance effectif compris entre 0 et 4. Nous allons étudier numériquement et graphiquement cette évolution grâce à la fonction logistique.

**Population dont le taux de croissance  $a = 1$**

Si on prend comme donnée initiale  $x_0 = 0,1$  on peut voir le comportement de l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique dans la figure ci-dessous :

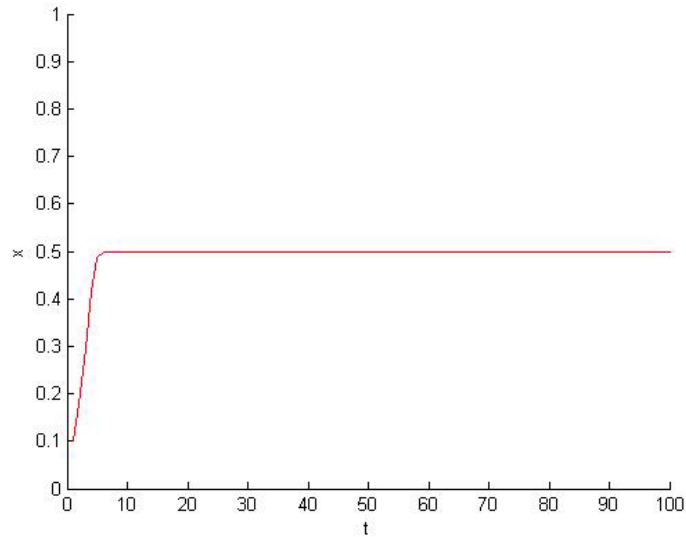


**Fig 2-1.** Population dont le taux de croissance  $a = 1$  avec  $x_0 = 0,1$

On prévoit pour cette valeur de  $a$  une diminution de la population et une convergence vers zéro, voir Fig (2.1.)

**Population dont le taux de croissance  $a = 2$**

Pour une population initiale  $x_0 = 0,1$  l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la figure ci-dessous :

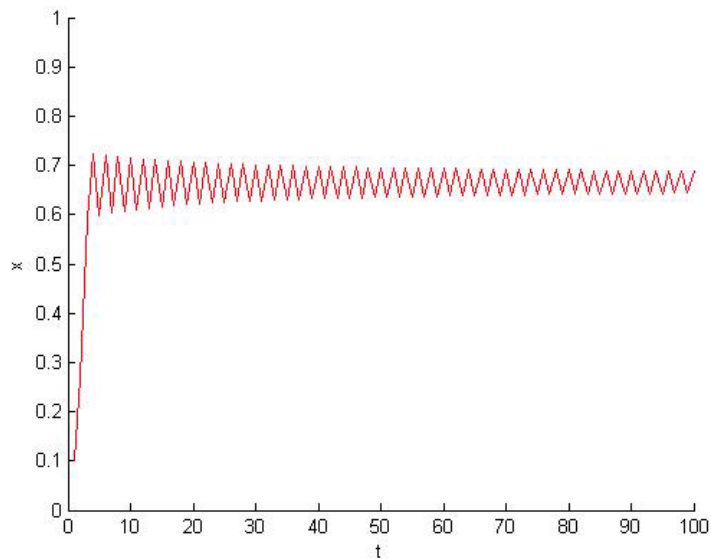


**Fig 2-2.** Population dont le taux de croissance  $a = 2$  avec  $x_0 = 0,1$

On constate que la population se stabilise vers une certaine valeur correspond à 0,5, voir Fig (2.2.)

**Population dont le taux de croissance  $a = 3$**

Maintenant pour la même valeur prise de la population initiale  $x_0 = 0,1$  l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la figure ci-dessous :

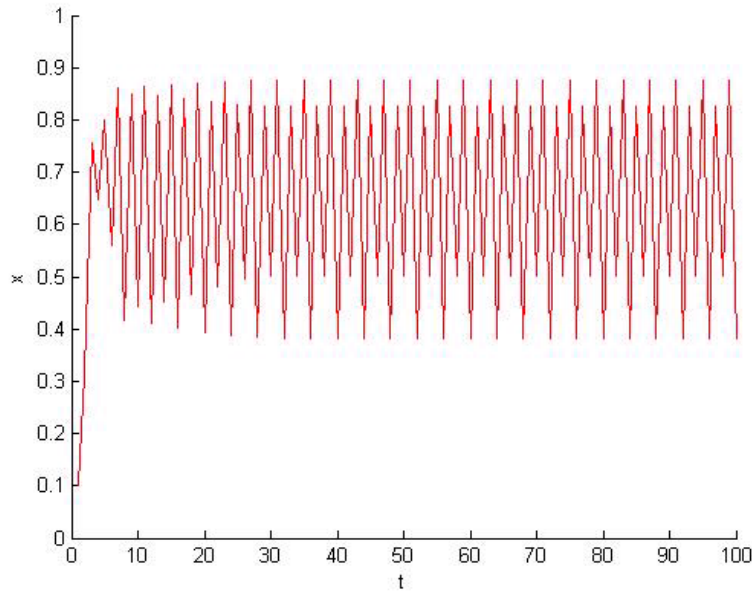


**Fig 2-3.** Population dont le taux de croissance  $a = 3$  avec  $x_0 = 0,1$

On constate que la population pour ce taux de croissance oscille entre deux valeurs que l'on peut calculer à l'aide du Matlab 0,64 et 0,68, voir Fig (2.3).

**Population dont le taux de croissance  $a = 3,5$**

Pour une même valeur de la population initiale  $x_0 = 0,1$  l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la figure ci-dessous :

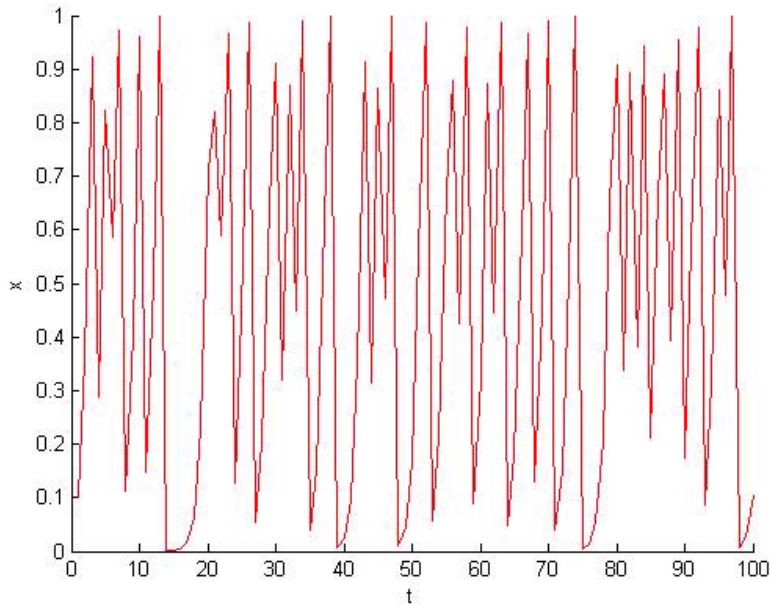


**Fig 2-4.** Population dont le taux de croissance  $a = 3,5$  avec  $x_0 = 0,1$

On constate que la population pour ce taux de croissance oscille entre quatre valeurs que l'on peut calculer à l'aide de Matlab 0,39 et 0,83 puis 0,49 et enfin 0,87, voir Fig (2.4.)

**Population dont le taux de croissance  $a = 4$**

Pour une population initiale  $x_0 = 0,1$  l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la figure ci-dessous :



**Fig 2-5.** Population dont le taux de croissance  $a = 4$  avec  $x_0 = 0, 1$ .

Nous constatons dans la figure précédente que le nombre de la population oscille irrégulièrement donc devient imprévisible, et donc la poursuite de l'évolution des points résultats de récurrence devient non atteinte, voir Fig (2.5).

Que peut-on dire quand on choisit une autre valeur de la population initiale ?

• **La sensibilité aux conditions initiales**

Pour les simulations précédentes avec une population initiale  $x_0 = 0, 1$  nous avons vu que le nombre d'individus par génération semble se stabiliser pour une valeurs de taux de croissance inférieur à 3, puis osciller entre deux puis quatre valeurs pour un taux de croissance supérieur à 3. Et enfin ce nombre oscille irrégulièrement au-delà d'un certain seuil.

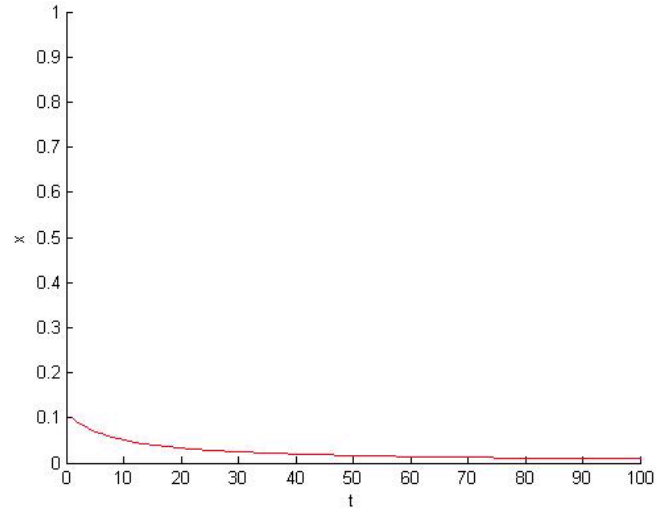
Essayons maintenant de constater la différence en reprenant les simulations précédentes pour une population initiale différente soit  $x_0 = 0, 8$ .

**Population dont le taux de croissance  $a = 1$**

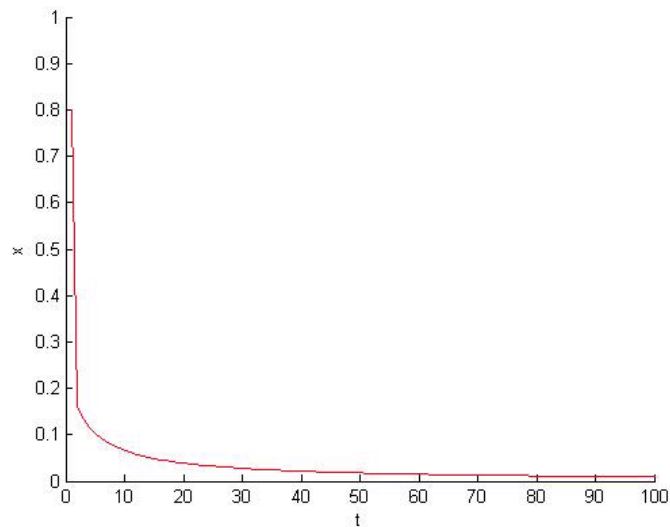
L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = x_t(1 - x_t)$$

Donc, nous obtenons :



**Fig 2-6.** Population dont le taux de croissance  $a = 1$  avec  $x_0 = 0,1$



**Fig 2-7.** Population dont le taux de croissance  $a = 1$  avec  $x_0 = 0,8$ .

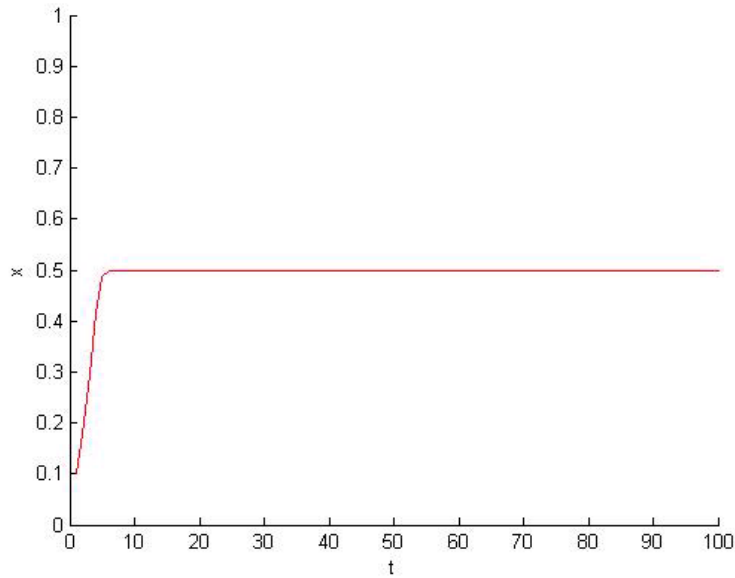
Nous constatons que la population tend vers zéro pour les deux populations initiales, voir Fig (2.6) et Fig 2-7.

**Population dont le taux de croissance  $a = 2$**

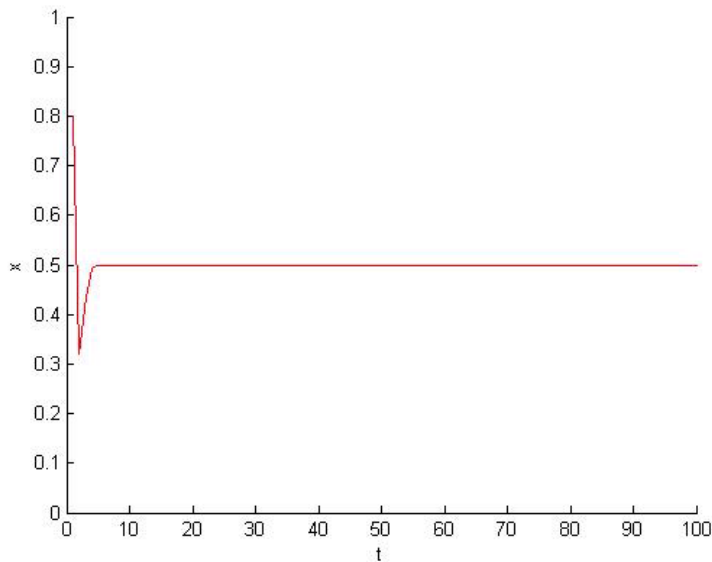
L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = 2x_t(1 - x_t)$$

Donc, nous obtenons :



**Fig 2-8.** Population dont le taux de croissance  $a = 2$  avec  $x_0 = 0, 1$ .



**Fig 2-9.** Population dont le taux de croissance  $a = 2$  avec  $x_0 = 0, 8$ .

Nous ne constatons aucune différence vu le comportement de l'évolution de la population, elle tend vers la même valeur (vers la moitié du diagramme), voir Fig (2.8.) et Fig (2.9.).

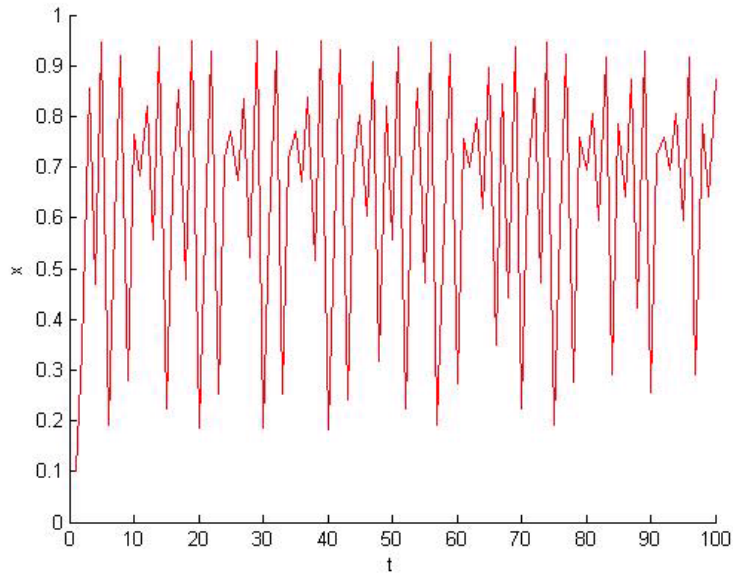
**Population dont le taux de croissance  $a = 3, 8$**



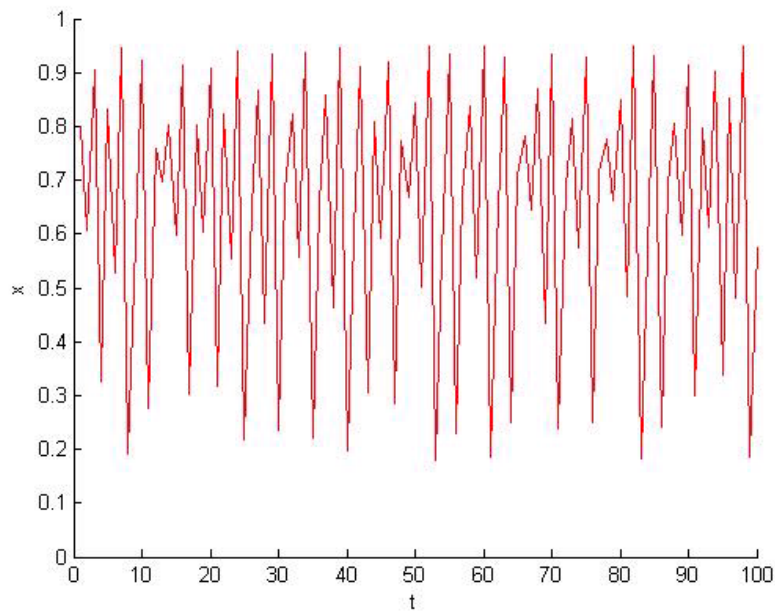
L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = 3,8x_t(1 - x_t)$$

Donc, nous obtenons :

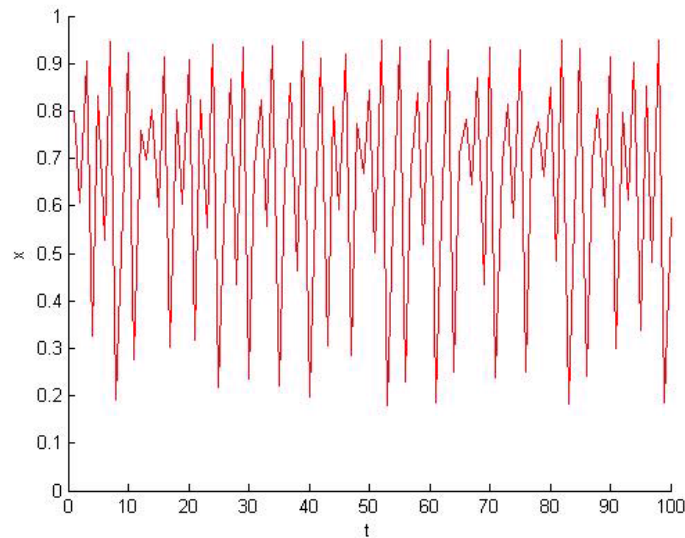


**Fig 2-10.** Population dont le taux de croissance  $a = 3,8$  avec  $x_0 = 0,1$ .

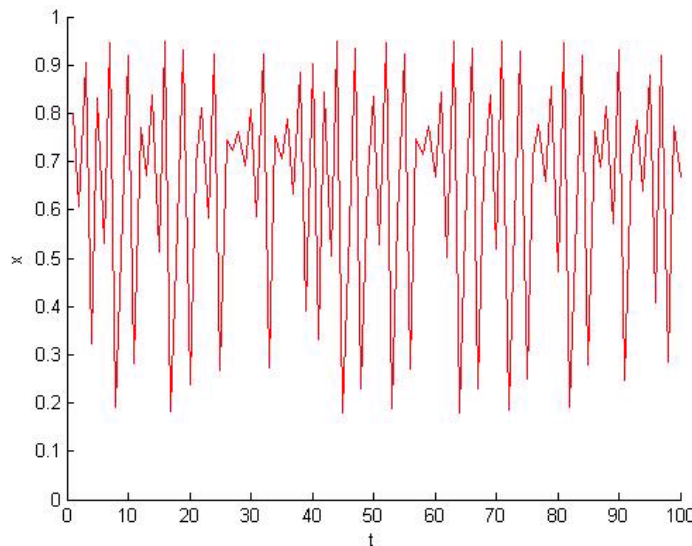


**Fig 2-11.** Population dont le taux de croissance  $a = 3,8$  avec  $x_0 = 0,8$ .

Nous constatons ici, une évolution de population très différente, voir Fig (2.10.) et Fig (2.11.).  
Maintenant si on prend des populations initiales voisines que peut-on voir ?



**Fig 2-12.** Population dont le taux de croissance  $a = 3,8$  avec  $x_0 = 0,8$ .



**Fig 2-13.** Population dont le taux de croissance  $a = 3,8$  avec  $x_0 = 0,8001$ .

Nous constatons ici que l'évolution des populations se comporte différemment même si elles étaient très proches initialement, voir Fig (2.12.) et Fig (2.13.).

C'est bien la sensibilité aux conditions initiales qui est un élément important dans la théorie du chaos.

### 2.1.4 Points fixes et orbites périodiques :

On considère l'application logistique :

$$g_a(x) = ax(1 - x), x \in [0, 1] \text{ et } a \in [0, 4]$$

$$g_a(x) = x \Leftrightarrow x(a - ax - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{a-1}{a} \end{cases}$$

Donc l'application logistique a deux points fixes  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \frac{a-1}{a}$  ( $a > 1$ ).

#### Stabilité des points fixes

On a :

$$g'_a(x) = -2ax + a$$

D'où

$$g'_a(x_1) = a > 0.$$

Donc  $x_1$  est un point fixe attractif si et seulement si  $a < 1$ . Il est répulsif pour  $a > 1$ , et on ne peut rien dire quant à sa nature pour  $a = 1$ .

D'autre part, on a :

$$g'_a(x_2) = 2 - a,$$

$x_2$  est attractif si,

$$|g'_a(x_2)| = |2 - a| < 1$$

$$-1 < 2 - a < 1$$

$$1 < a < 3.$$

Le point fixe  $x_2$  est alors attractif pour  $1 < a < 3$ , et il est répulsif pour  $a < 1$  et  $a > 3$ , et douteux pour  $a = 1$  et  $a = 3$ .

• **Les points fixes de  $g_a^2$**

On a :

$$g_a^2(x) = ag_a(x)(1 - g_a(x)) = a^2x(1 - x)(1 - ax + ax^2).$$

On a deux points fixes répulsifs :

$$\begin{aligned}x_1(a) &= 0 \\x_2(a) &= \frac{a-1}{a} \quad (a > 3)\end{aligned}$$

Et on a deux nouveaux points fixes :

$$\begin{aligned}x_3(a) &= \frac{a+1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \\x_4(a) &= \frac{a+1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}\end{aligned}$$

On a donc une orbite périodique de période 2. On peut conclure sa stabilité sachant qu'elle est stable si  $|g'(x_4)g'(x_3)| < 1$ , on a :

$$g'(x_4)g'(x_3) = -a^2 + 2a + 4$$

Donc l'orbite est stable si  $a \in ]3, 1 + \sqrt{6}[$ .

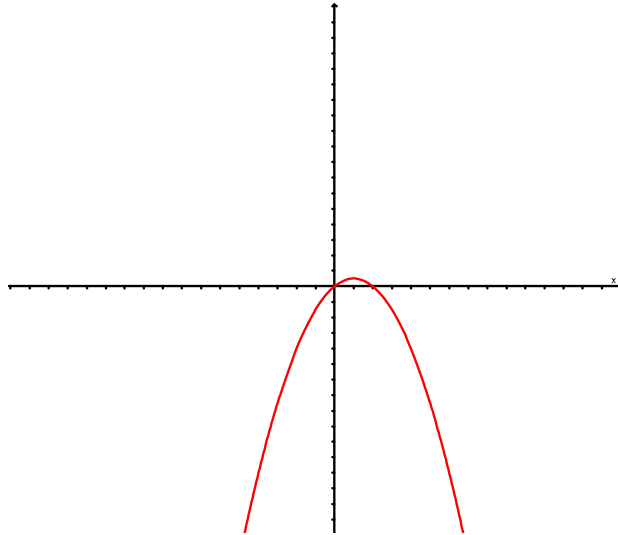


Fig 2-14. Graphe de  $g_a(x)$ .

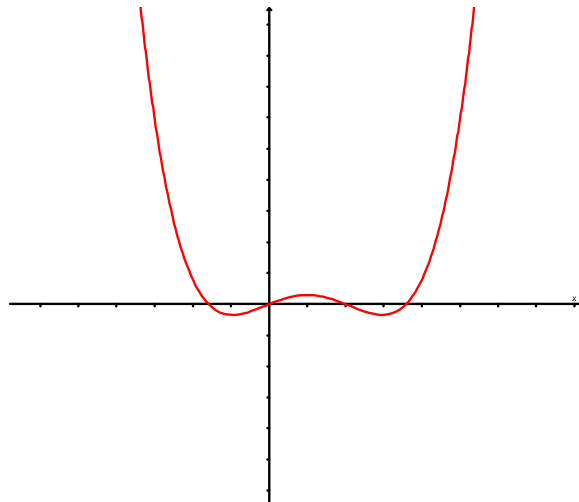


Fig 2-15. Graphe de  $g_a^2(x)$ .

### Points fixes super attractifs

**Proposition 2.1** *Pour  $a = 2$  l'application  $g_a$  a un point fixe super attractif.*

**Preuve:** Commençons par chercher le sommet de la parabole  $g_a(x) = ax(1-x)$ . Nous avons :

$$g'_a(x) = a(1 - 2x)$$

$g'_a(x) > 0$  pour  $x < \frac{1}{2}$ .

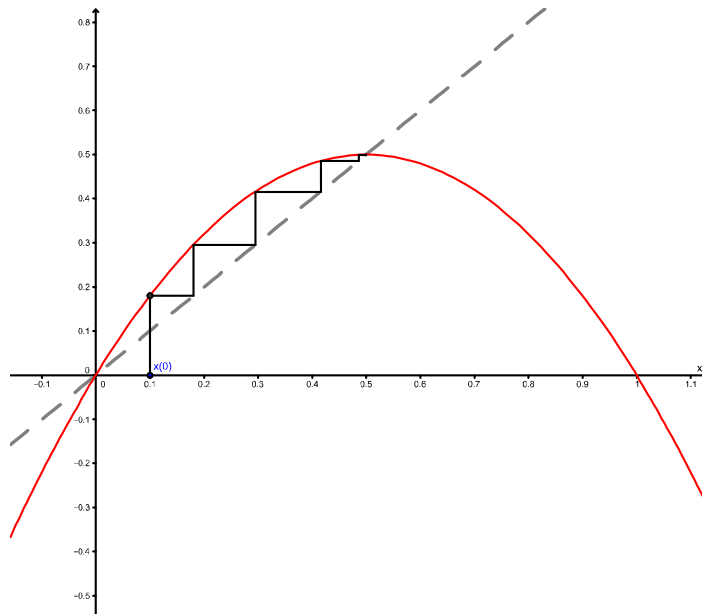
x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'_a(x)$	+	0	-
$g_a(x)$	$\frac{a}{4}$		
	↗	↘	
	0		0

Tableau de variation de l'application  $g_a$ .

Le sommet de la parabole est

$$g_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}, g_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

ce qui implique que  $a = 2$  . ■



**Fig 2-16.** Point fixe super attractif de l'application logistique

Justifiant maintenant le terme "super attractif" pour un point fixe de l'application  $g_a$ .

Rappelons que  $g_a(x) = ax(1 - x)$  et  $p_a = \frac{a-1}{a}$ , son point fixe.

Nous commençons l'itération de  $g_a$  par un point proche de  $p_a$  :

$$x_0 = \frac{a-1}{a} + \varepsilon$$

avec  $\varepsilon > 0$ .

Notons  $x_i = g_a^i(x_0)$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_1 &= g_a(x_0) \\ &= ax_0(1-x_0) \\ &= a\left(\frac{a-1+a\varepsilon}{a}\right)\left(1-\frac{a-1+a\varepsilon}{a}\right) \\ &= \frac{a-1}{a} - a\varepsilon + 2\varepsilon - a\varepsilon^2 \\ &= x_0 + \varepsilon - a\varepsilon - a\varepsilon^2. \end{aligned}$$

De plus,  $|\varepsilon - a\varepsilon - a\varepsilon^2| < \varepsilon$  ce qui montre bien que  $p_a$  est attractif. En effet  $x_1$  est proche de  $x_0$  (donc de  $p_a$ ), et en réitérant cet argument,  $x_2$  est proche de  $x_1$ , donc de  $x_0$  et de  $p_a$ .

Regardons ce qui se passe pour le cas super attractif, c'est-à-dire pour  $a = 2$ . Ici,  $p_a = \frac{1}{2}$  et  $x_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= g_a(x_0) \\ &= \frac{1}{2} - 2\varepsilon + 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \\ &= \frac{1}{2} - 2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Contrairement au cas précédent, il ne reste qu'un terme quadratique en  $\varepsilon$ . Ainsi,  $x_1$  se rapproche plus rapidement de  $\frac{1}{2}$ . En effet, les termes en  $\varepsilon$  et les constantes qui atténuent l'effet du terme en  $\varepsilon^2$  ne sont plus présents.

- **Convergence de l'application logistique**

**Théorème 2.1** *Pour  $0 < a < 3$ , et pour toute valeur initiale  $x_0 \in I$ , la suite  $(x_n)_N$  est convergente*

Pour  $3 < a < 3,44$ , la suite  $(g_a^n(x))$ ,  $x$  dans le voisinage de  $[0, 1]$ , oscille entre deux valeurs,  $g_a$  a une orbite périodique de période 2.

**Preuve:** Regardons graphiquement le comportement de  $g_a$ . Tout d'abord, pour  $a = 1,5$ ; c'est-à-dire  $0 < a < 3$ , la suite  $(g_a^n(x))$ , dans le voisinage de  $[0, 1]$ , converge vers le point fixe, voir Fig (2.17.) .

**Le cas  $0 < a < 1$**

Il y a un unique point fixe dans  $I$ , le point 0, qui attractif.

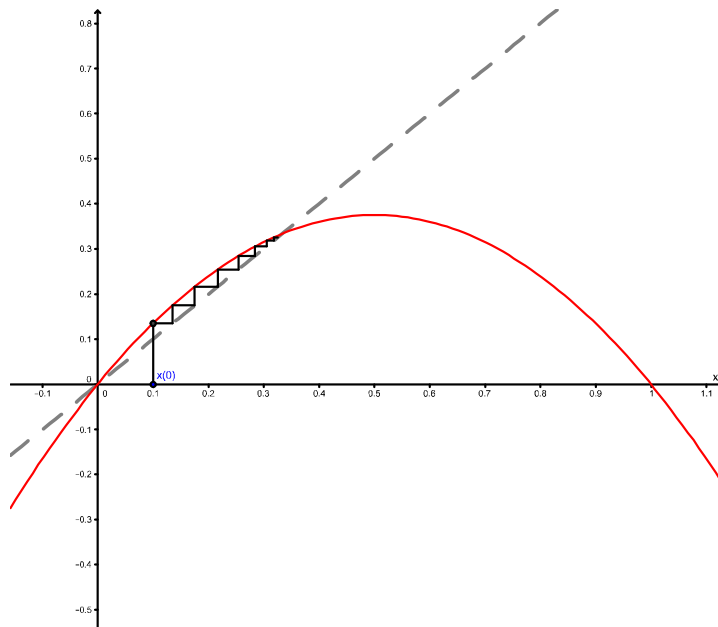
Soit  $x_0 \in I$ .

1. Pour  $x_0 = 0$ , la suite est constante. Pour  $x_0 = 1$  la suite est constante et égale à 0.

2. On suppose  $x_0 \in ]0; 1[$ , la suite  $(x_n)_{\mathbb{N}}$  décroît et converge géométriquement vers 0.

**Le cas  $a = 2$**

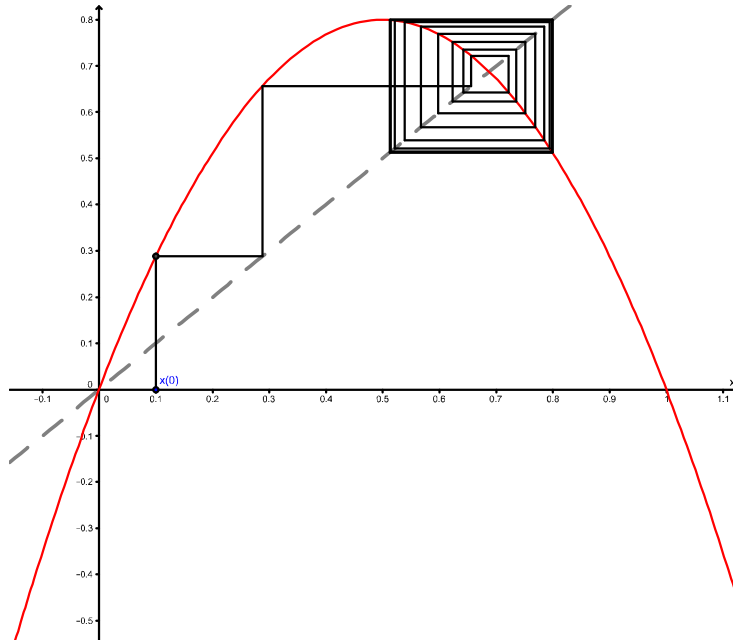
On a  $p_2 = \frac{1}{2}$  et  $f'(p_2) = 0$  donc  $p_2$  est un point super attractif.



**Fig 2-17.** Convergence de la suite  $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ,  $x_{n+1} = g_{1,5}(x_n)$  et  $x_0 = 0, 1$

Pour  $a = 3,2$  c'est-à-dire  $3 < a < 3,44$ , la suite  $(g_a^n(x))$ ,  $x$  dans le voisinage de  $[0, 1]$ , oscille entre deux valeurs,  $g_a$  a une orbite périodique de période 2, voir Fig (2.18.).

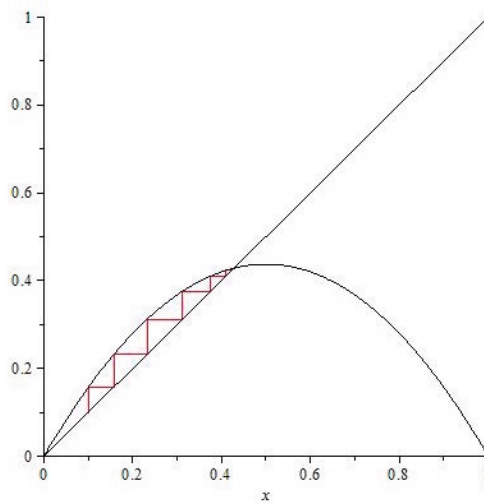




**Fig 2-18.** Convergence de la suite  $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ,  $x_{n+1} = g_{3,2}(x_n)$  pour  $x_0 = 0,1$ .

■

Il y a deux manières de converger vers le point fixe. Plaçons nous dans le cas  $1 < a < 3$ . Tout d'abord, les points fixes sont 0 (répulsif) et  $p_a = \frac{a-1}{a}$  (attractif). On distingue alors deux comportements : Si la bissectrice  $y = x$  coupe la parabole  $g_a$  avant son sommet, les itérations convergent en escalier vers  $p_a$ , voir Fig (2.19.). En revanche si elle coupe la parabole après son sommet, les itérations convergent en spirale vers  $p_a$ , voir Fig (2.20.).



**Fig 2-19.** Convergence en escalier

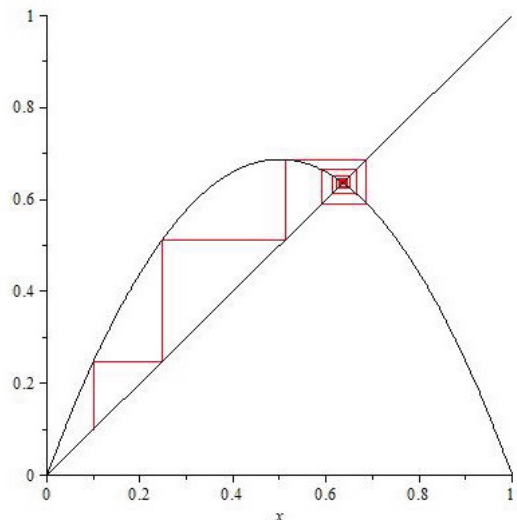


Fig 2-20. Convergence en spirale.

• **Divergence grossière vers  $\pm\infty$  de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$**

\* En étudiant les variations de l'application  $g_a$  on constate que s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $u_p \in ]-\infty, 0[$  ou  $u_p \in ]1, +\infty[$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tends vers  $-\infty$ .

\* Une application directe du théorème des valeurs intermédiaires montre que  $g_a([0, 1]) = [0, \frac{a}{4}]$ . Donc pour  $u_0 \in [0, 1]$  si  $a \leq 4$  alors  $[0, 1]$  est stable par  $g_a$  alors la divergence grossière vers l'infinie n'a pas lieu. Si dans ce cas  $a > 4$  alors on sort de cet intervalle et la suite diverge vers l'infini [3].

### 2.1.5 Les bifurcations de l'application logistique

**Proposition 2.2** *L'application  $g_a$  a une première bifurcation en 1 et une deuxième en 3.*

**Proposition 2.3** *L'application  $g_a$  a une troisième bifurcation en 3, 44.*

◆ **Classification des bifurcations**

#### Bifurcations selle-noeud

**Proposition 2.4** *L'application  $g_a$  a une bifurcation selle-noeud en  $a = 1$ . C'est l'unique bifurcation de ce type.*

**Preuve:** On a :

$$g'_a(x) = a - 2ax$$

Donc :

$$g'_1(x) = 1 - 2x$$

De plus, pour  $a = 1$  le point fixe est 0. D'où,  $g'_1(0) = 1$ . Donc, d'après la définition (1.15)  $a = 1$  est une bifurcation selle-noeud . ■

### Bifurcation par doublement de la période

**Proposition 2.5** *L'application  $g_a$  a une bifurcation par doublement de la période en 3.*

**Preuve:** Nous avons :

$$g'_3(x) = 3 - 6x$$

Pour  $a = 3$  le seul point fixe dans  $I$  est

$$x_3^* = \frac{3 + 1 + \sqrt{(3 + 1)(3 - 3)}}{6} = \frac{2}{3}$$

De plus,

$$g'_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Donc, d'après la définition (1.17)  $a = 3$  est une bifurcation par doublement de la période . ■

**Proposition 2.6** *L'application  $g_a^2$  a une bifurcation fourche en 3,44. Par généralisation c'est une bifurcation par doublement de la période de  $g_a$ .*

**Preuve:** Les points  $x_3$  et  $x_4$  sont fixes pour  $g_a^2$ . Pour  $a = 3,44$ ; nous avons :

$$x_3 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}$$

Et

$$x_4 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}$$

$$g_a^2(x) = ax(1 - x)(1 - ax(1 - x)).$$

$$\text{De plus, } g_{3,44}^2(x_3) = g'_{3,44}(x_3)g'_{3,44}(x_3) = -a^2 + 2a + 4 = -1.$$

$$\text{De même, } g_{3,44}^2(x_4) = -1.$$

Donc, 3, 44 est une bifurcation par doublement de la période de  $g_a^2$ . ■

Cette démonstration montre de plus, que les points  $x_3$  et  $x_4$  subissent la même bifurcation.

Ainsi lorsque  $x_3$  change de stabilité, il donne naissance à deux points fixes de  $g_a^4$ . Le point  $x_4$  se comporte exactement de la même façon, créant lui aussi deux points fixes de  $g_a^4$ . Il y a création de 4 points fixes pour  $g_a^4$ , et par conséquent d'une orbite périodique de période 4 pour  $g_a$ .

Les bifurcations jouent un rôle important dans le diagramme de bifurcation puisqu'elles indiquent un changement de comportement. Nous définissons alors la suite  $(a_n)_\mathbb{N}$ , suite des bifurcations par doublement de la période de l'application logistique. Les premiers termes de cette suite sont  $a_1 = 3$  et  $a_2 = 3,44$ . Une deuxième suite de paramètre est également fondamentale dans l'étude du diagramme, c'est la suite  $(s_n)_\mathbb{N}$  définie de telle sorte que pour  $a = s_n$ , l'application  $g_a^{2n-1}$  a un point fixe super attractif. Les termes de cette suite sont appelés paramètres super attractifs et ses premiers termes sont  $s_1 = 2$  et  $s_2 = 1 + \sqrt{5}$ .

**Proposition 2.7** *Il y a toujours un paramètre super attractif entre deux bifurcations successives.*

**Preuve:** Regardons ce qui se passe pour les premières bifurcations. La première bifurcation  $a_0 = 1$  est une bifurcation selle-noeud. Si  $p_0$  est le point fixe de  $g_{a_0}$  ( $p_0 = 0$ ), alors  $g'_{a_0}(p_0) = 1$ . Puis, il y a création de deux points fixes  $p_1(a)$  et  $p_2(a)$  ( $p_1(a) = \frac{a-1}{a}$  et  $p_2(a) = 0$ ) tel que :

$$|g'_{a_0+\varepsilon}(p_2(a_0 + \varepsilon))| = a_0 + \varepsilon > 1$$

Et

$$|g'_{a_0+\varepsilon}(p_1(a_0 + \varepsilon))| = \frac{1}{a_0 + \varepsilon} < 1$$

La deuxième bifurcation  $a_1$  apparaît lorsque  $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = -1$ . Comme  $g'_{a_0}(p_1(a_0)) > 0$  et  $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = -1$ , il existe  $s_1$  tel que  $a_0 < s_1 < a_1$  et  $g'_{s_1}(p_1(s_1)) = 0$ . Le point  $s_1$  est donc

un paramètre super attractif.

Cette nouvelle bifurcation donne naissance à deux points fixes  $q_1(a)$  et  $q_2(a)$  de  $g_a^2$  avec  $0 < |(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon))| < 1$ , ( $i = 1; 2$ ).

La troisième bifurcation apparaît lorsque  $(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon)) = -1$ ,  $i = 1; 2$ . Il existe donc un paramètre super attractif  $s_2$  tel que

$$a_1 < s_2 < a_2$$

Ce raisonnement se généralise à toutes les bifurcations. Juste après une bifurcation, les points fixes ou les points de l'orbite périodique qui ont été créés, ont une dérivée inférieure à 1 et positive. La bifurcation suivante apparaît lorsque ces points ont une dérivée égale à  $-1$ . Le changement de signe prouve que ces dérivées passent par 0 avant la nouvelle bifurcation, il y a donc un paramètre super attractif. ■

**Proposition 2.8** *Si la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une certaine valeur, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers cette même valeur.*

**Preuve:** Nous connaissons les premiers termes des deux suites  $a_1 = 3$  et  $s_1 = 2$ . Ainsi  $s_1 < a_1$ ,

de plus, nous avons :

$$s_1 < a_1 < s_2 < a_2 < s_3 < a_3 < \dots$$

Donc :

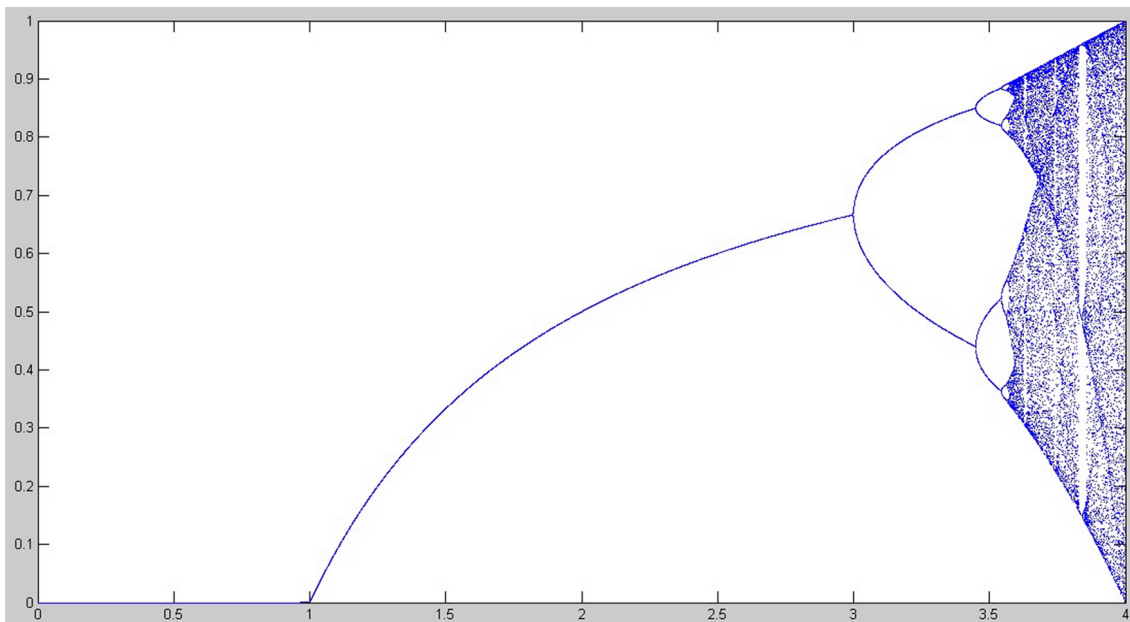
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n < a_n < s_{n+1}$$

Si  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une valeur  $l$ , alors d'après le théorème des gendarmes la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la même valeur  $l$ . En effet, elles convergent tous deux vers un point appelé point de Feigenbaum noté  $s_\infty$  et correspond à 3,5699456 [9]. Ce point marque un changement radical dans la dynamique de l'application logistique  $g_a$ . ■

### 2.1.6 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation rend compte le comportement de l'application logistique en fonction du paramètre  $a$ . Sur ce diagramme, en abscisses, sont représentées les différentes valeurs

du paramètre  $a$  et en ordonnées celles de  $g_a$ . Nous construisons le diagramme en repérant pour chaque valeur de  $a$  le ou les points de convergence de la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in [0; 1]$  et  $u_{n+1} = g_a(u_n)$ . Nous obtenons ainsi :



**Fig 2-21.** Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

Nous retrouvons, bien évidemment, le comportement de l'application logistique décrit dans les parties précédentes.

Pour  $1 < a < 3$ , il n'y a qu'une seule branche. La suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  précédemment définie converge vers le point fixe.

Pour  $3 < a < 3,44$ , il y a deux branches. Ceci correspond au comportement périodique, l'application  $g_a$  a une orbite périodique de période 2.

En effet l'orbite suivie par  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  sera 4-périodique et que de même les orbites continuent de doubler cette période à 8, 16, 32 vers l'infini sur des intervalles de plus en plus petits tels que le rapport entre deux intervalles tendent à diminuer et ce comportement a lieu jusqu'à la constante de Feigenbaum  $s_{\infty} = 3,5699456$ . Et  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, a_{n+1} \in [3, s_{\infty}[$  tel que l'orbite suivie par  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  soit périodique sur  $]a_n, a_{n+1}[$ . La démonstration de ce résultat et d'autres résultats beaucoup plus détaillés ont été réalisés par Feigenbaum.

Sur  $[s_{\infty}, 4]$ , le comportement est globalement chaotique, et nous ne pouvons plus prévoir le comportement de l'application logistique.

## 2.2 Attracteur de Hénon

### 2.2.1 Historique du système de Hénon

L'astronome Michel Hénon<sup>6</sup> exploita la suggestion de Lorenz[4], pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau<sup>7</sup> passe en revue adéquatement cette perspective de ses spéculations. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon et correspond à l'application suivante :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -ax_n^2 + y_n + 1 \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

où  $a, b$  sont des constantes.

Il est intéressant de saisir que c'est le démontage du système de Lorenz par Pomeau qui emmène Hénon vers son système. L'étirement et le repliement sont des éléments qui guident Hénon. Le choix des valeurs des paramètres est plus approximatif et c'est par tâtonnements que des valeurs adéquates de  $a$  et  $b$  sont retenues.

Tout l'intérêt du système de Hénon réside dans la facilité de programmer cette opération extrêmement simple, une itération à deux dimensions, simulant les comportements plus complexes des systèmes du type Lorenz. Il devient un système numérique de référence. Ainsi l'attracteur de Hénon est manipulé et les ensembles de Cantor<sup>8</sup> sont visualisés avec leur structure auto-similaire.

---

<sup>6</sup>Michel Hénon (1931-2013) un mathématicien et astronome français. Il est connu pour ses contributions dans le domaine de la dynamique stellaire, et pour l'étude de l'évolution des anneaux de Saturne. Il s'implique dans la dynamique des amas d'étoiles, en particulier des amas globulaires. Il développe une technique numérique pour suivre la dynamique d'un amas globulaire sphérique.

<sup>7</sup>Yves Pomeau (né en 1942) est un physicien français, il découvre par Paul Manneville en 1979, le phénomène de l'intermittence dans la théorie du chaos dans l'enquête numérique de l'attracteur de Lorenz.

<sup>8</sup>Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) est un mathématicien allemand, connu pour être le créateur de la théorie des ensembles. Il établit l'importance de la bijection entre les ensembles, définit les ensembles infinis et les ensembles bien ordonnés.

D'autres comportements sont mis en évidence. Pour  $b = 0,3$  par exemple, la forme de l'attracteur évolue de manière significative selon les valeurs de  $a$  : pour  $a$  petit, l'attracteur est un point, et lorsque  $a$  augmente il se transforme successivement en 2 points, puis 4, 8 et ainsi de suite par doublement. Hénon rapproche la situation de celle évoquée par May en 1976, et annonce l'existence d'une valeur critique  $a_c = 1.06$  pour laquelle il affirme obtenir un attracteur étrange.

## 2.2.2 Définition du système de Hénon

**Définition 2.3** *Le système dynamique de Hénon est défini par :*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -ax_n^2 + y_n + 1 \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

Partant d'un point du plan de coordonnées  $(x_0, y_0)$  on peut calculer les coordonnées  $(x_1, y_1)$  du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Hénon :

$$H^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2)$$

Où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels, où la valeur de la constante  $a$  contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de  $b$  traduit le rôle de la dissipation.

En effet, la matrice Jacobienne  $DH_{a,b}$  est :

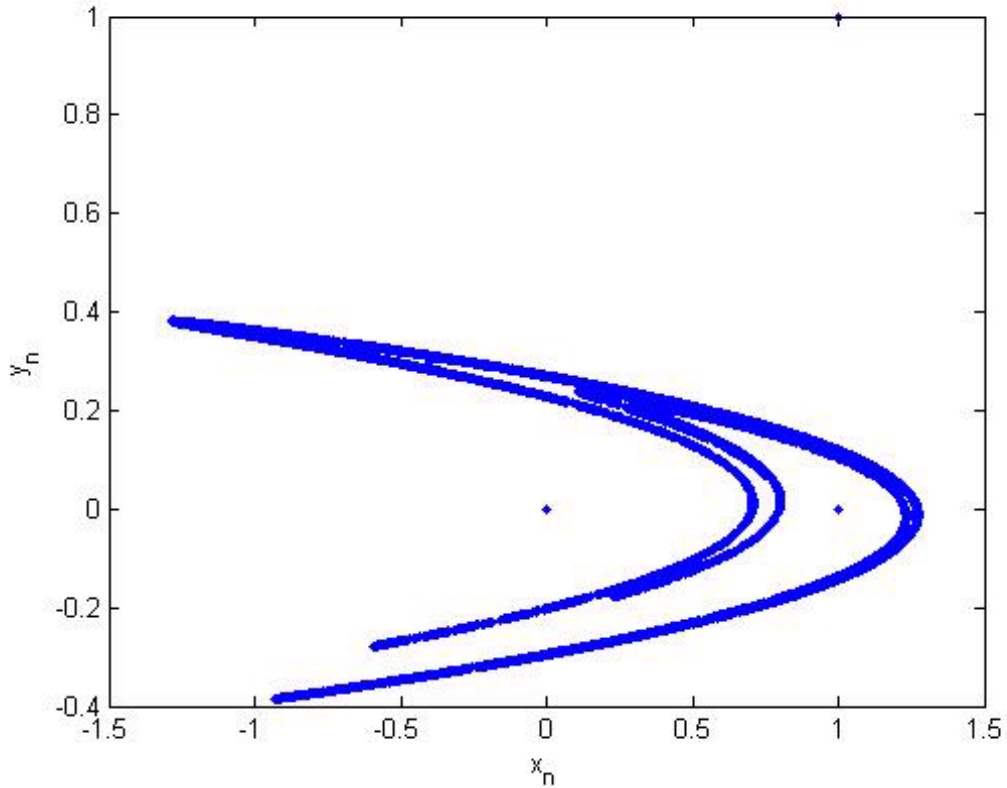
$$DH_{a,b} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne  $\det(DH_{a,b}) = -b$ .

Les valeurs habituellement utilisées pour  $a$  et  $b$  sont  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$ .



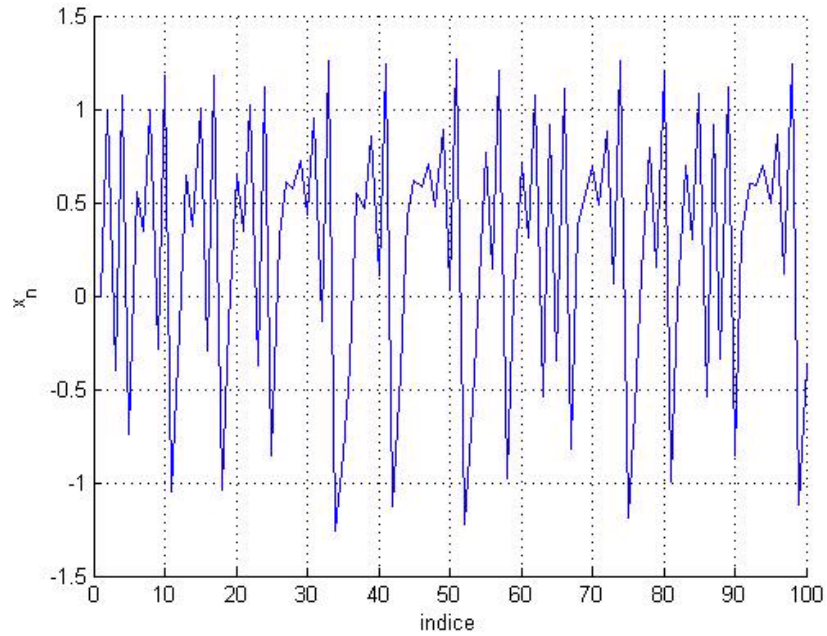
Nous avons fait un programme sur Matlab avec une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  à travers lequel on peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, voir Fig (2.22).



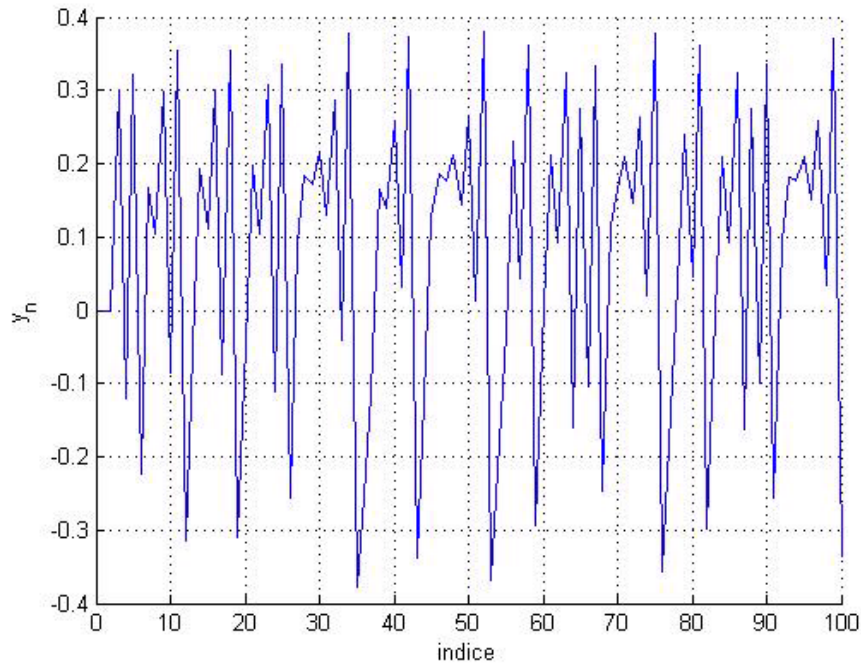
**Fig 2-22.** Attracteur de Hénon pour  $H_{a,b}$  pour  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables  $x$  et  $y$  pour une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , voir Fig (2.23.) et Fig (2.24.) respectivement.



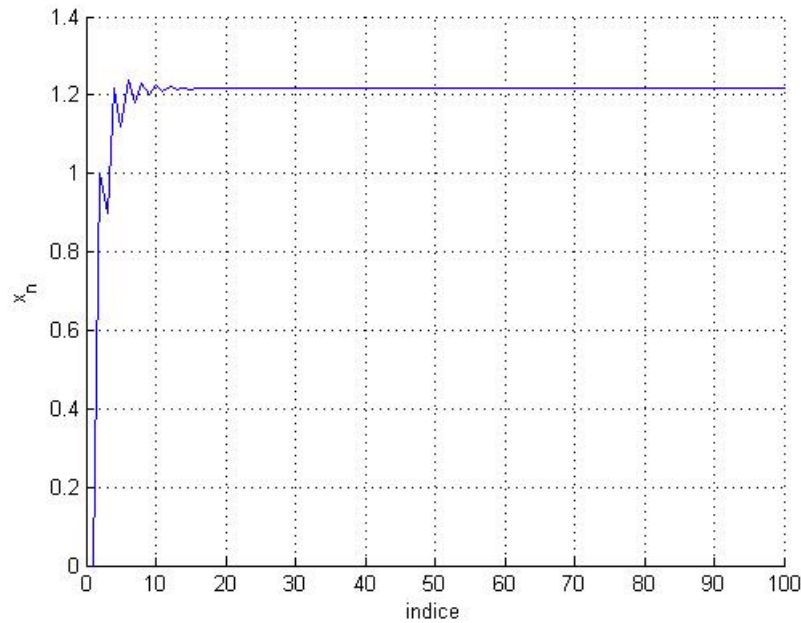
**Fig 2-23.** Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .



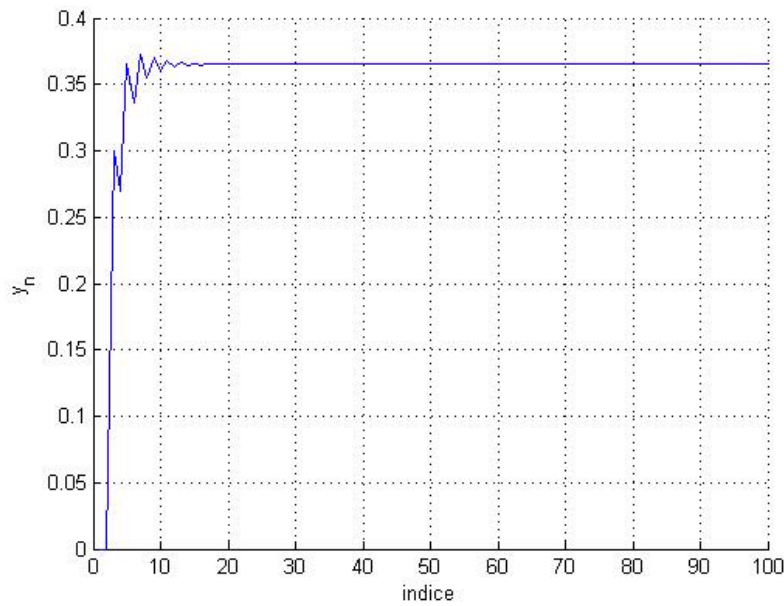
**Fig 2-24.** Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables.

Voyons maintenant que se passe-t-il pour les valeurs  $a = 0,1$ ; et  $b = 0,3$ ?



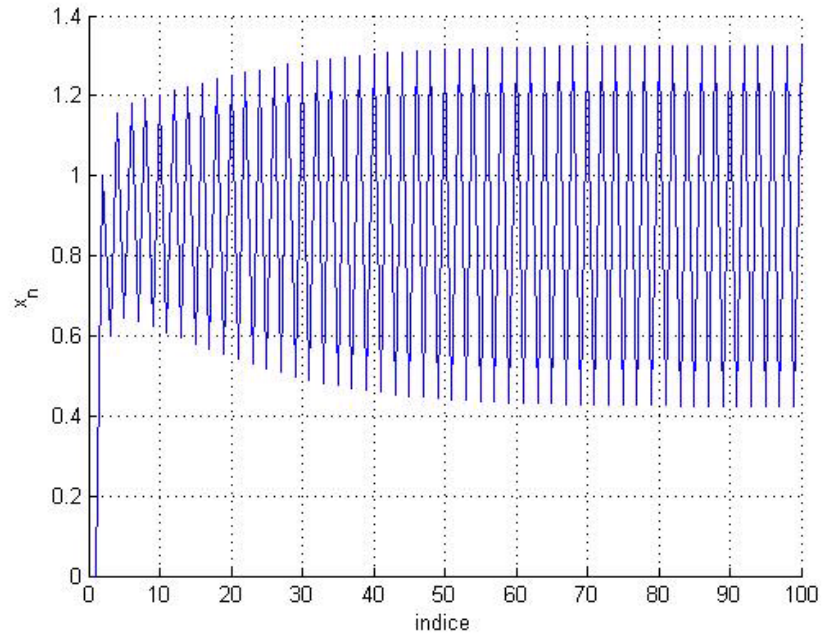
**Fig 2-25.** Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 0,1$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .



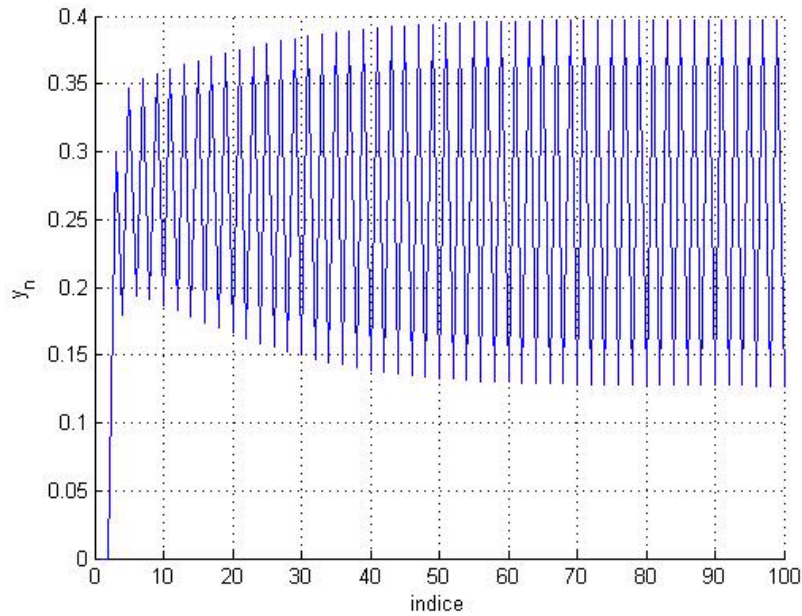
**Fig 2-26.** Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 0,1$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

On constate une stabilisation de l'évolution de  $x_n$  autour de la valeur 1,2 et de  $y_n$  autour de 0,36, voir Fig (2.25.) et Fig (2.26.).

Prenons maintenant les valeurs des paramètres  $a = 0.4$  et  $b = 0.3$ .



**Fig 2-27.** Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 0,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .



**Fig 2-28.** Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 0,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

On constate que l'évolution pour ces valeurs des paramètres est périodique et elle va se stabiliser à un cycle périodique, voir Fig (2.27.) et Fig (2.28.).

• Sensibilité aux conditions initiales :

Que-ce passe-t-il quand on choisit des conditions initiales extrêmement voisines ? Prenons par exemple  $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$ .

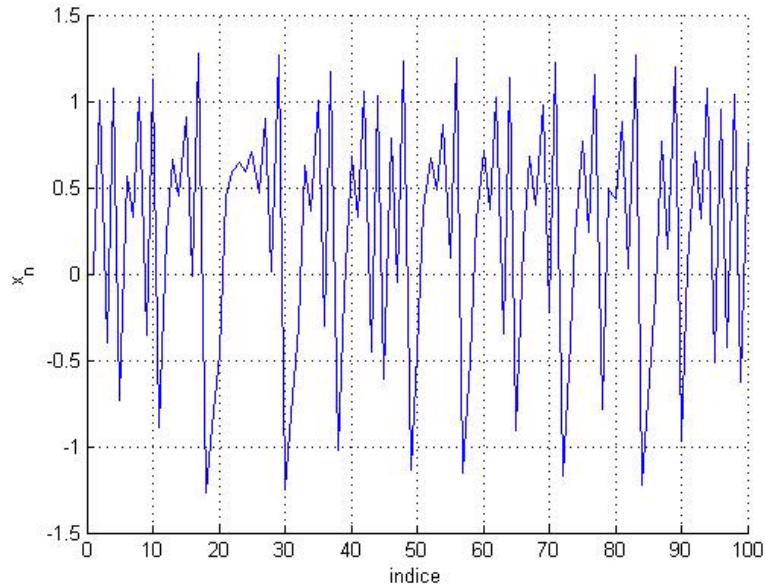


Fig 2-29. Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  et  $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$ .

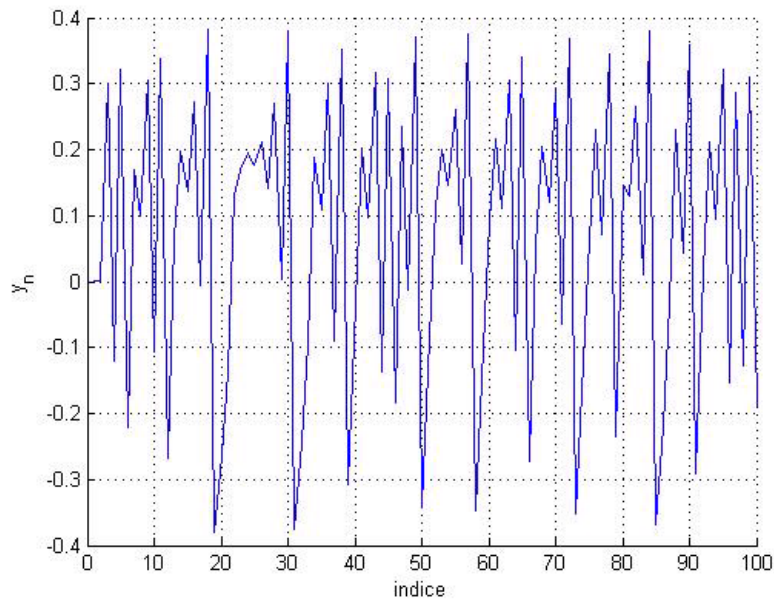


Fig 2-30 .Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  et  $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$ .

On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quant à  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , voir Fig (2.29.) et Fig (2.30.).

### 2.2.3 Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations

#### Première itération

La première itération [7] du système de Hénon introduit déjà dans la section précédente est considéré comme le système original de Hénon donné par :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -ax_n^2 + y_n + 1 \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation  $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$  :

$$H_{a,b}(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow -ax^2 + (b-1)x + 1 = 0 \tag{2.1}$$

**Théorème 2.2** [6] Pour  $|b| < 1$ , et  $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  on a :

1. Si  $a < a_0(b)$ ,  $H_{a,b}$  n'a aucun point fixe.
2. Si  $a = a_0(b)$ ,  $H_{a,b}$  a un seul point fixe.
3. Si  $a > a_0(b)$ ,  $H_{a,b}$  a deux points fixes.

**Preuve:** Nous obtenons du discriminant de l'équation (2.1) l'équation  $(b-1)^2 + 4a = 0$ , ce qui implique que :  $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2 = a_0(b)$ .

1. Pour  $a < a_0(b)$ ,  $x_{\pm}(a, b) \notin \mathbb{R}^2$ , donc dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour  $H_{a,b}$ .
2. Pour  $a = a_0(b)$ , nous obtenons  $x_+(a, b) = x_-(a, b) = \frac{b-1}{2a}$ . Donc dans ce cas le système  $H_{a,b}$  admet exactement un seul point fixe  $(x_1, y_1) = (\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ .
3. Pour  $a > a_0(b)$ , nous avons  $x_+(a, b)$  et  $x_-(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $x_+(a, b) \neq x_-(a, b)$ . Dans ce cas

nous avons deux points fixes de la forme :

$$(x_1, y_1) = \left( \begin{array}{c} \frac{b-1-\beta}{2a} \\ b \left( \frac{b-1-\beta}{2a} \right) \end{array} \right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left( \begin{array}{c} \frac{b-1+\beta}{2a} \\ b \left( \frac{b-1+\beta}{2a} \right) \end{array} \right) \quad (2.2)$$

■

Et les valeurs propres en ces points d'équilibre sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right)$$

et :

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{a} \left( \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(b + \beta - 1)^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right)$$

Où  $\beta = \sqrt{4a + (b - 1)^2}$ .

Il peut être également démontré que l'un de ces deux points est stable à la signe positive devant le radical, l'autre est toujours instable.

En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont  $(-1, 1314; -0, 3394)$  et  $(0, 6314; 0, 1894)$ , les valeurs propres au premier point d'équilibre sont  $(2, 3284; -0, 0657)$  et les valeurs propres au deuxième point sont  $(0, 5657; -1, 8284)$ . D'où le premier est un point selle et le deuxième est clairement un point stable.

## Deuxième itération

La deuxième itération du système original de Hénon est d'intérêt depuis qu'une bifurcation par doublement de la période est un mécanisme éminent comme révélé dans le diagramme de bifurcation.

Selon la variation de Jacobi la deuxième itération du système de Hénon est donnée par :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -a^3 x_n^4 + 2a^2 x_n^2 y_n + 2a^2 x_n^2 - a y_n^2 - 2a y_n - a + b x_n + 1 \\ y_{n+1} &= b(-a x_n^2 + y_n + 1) \end{aligned}$$

Ce système dispose de quatre points d'équilibre dont deux sont hérités du système original de Hénon et les deux autres points d'équilibre sont :

$$(x_3, y_3) = \left( -\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}; -b\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2} \right)$$

et

$$(x_4, y_4) = \left( -\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}; -b\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2} \right)$$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$DH_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} -4a^3x^3 + 4a^2xy + 4a^2x + b & 2a^2x^2 - 2ay - 2a \\ -2abx & b \end{pmatrix}$$

## 2.2.4 Analyse de bifurcation

Nous procédons en donnant les résultats de stabilité pour le système original de Hénon. Nous rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour  $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$ .

**Lemme 2.1** Pour  $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  et  $\beta = 0$  le système original de Hénon a un unique point d'équilibre en  $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$  avec les valeurs propres  $\{1, -b\}$  indiquant une bifurcation selle-noeud.

**Preuve:** En substituant  $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  et  $\beta = 0$  dans l'équation (2.2) les deux points d'équilibre se trouvent à s'imbriquer les uns les autres en  $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ . Le jacobien du système en ce point d'équilibre est :

$$\begin{pmatrix} 1-b & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Et ainsi les valeurs propres sont  $\{1, -b\}$ . ■

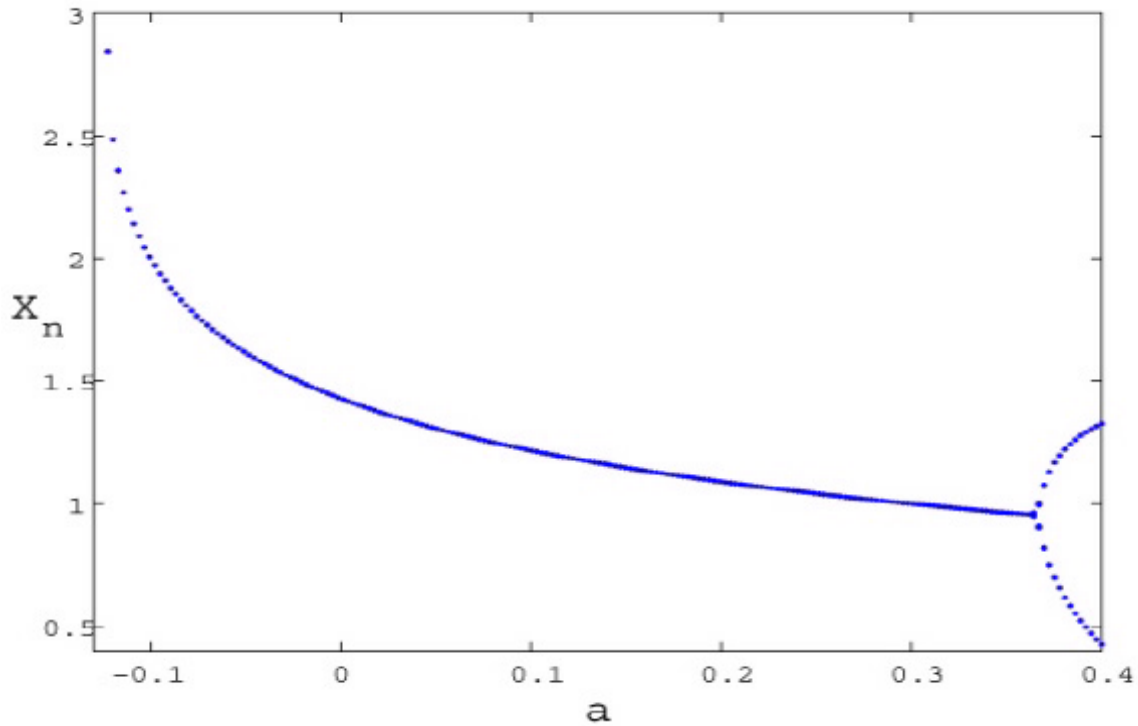
On considère la bifurcation selle-noeud avec un exemple numérique.

**Proposition 2.9** Pour  $b = 0,3$  et  $a = -0,1225$ , on a une bifurcation selle-noeud.



**Preuve:** Pour  $b = 0,3$  et  $a = -0,1225$ ; le point d'équilibre du système est  $(2,8571; 0,8571)$  indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la Figure (2.31.). La région de  $a$  de la branche stable est comprise entre  $-0,1225 \leq a \leq 0,3675$ .

■



**Fig 2-31.** Diagramme de Bifurcation pour le système original de Hénon pour  $-0,15 \leq a \leq 0,4$  et  $b = 0,3$ .

**Proposition 2.10** Pour le cas particulier de  $a = 0,3675$  une bifurcation par doublement de la période est observée.

**Preuve:** Pour  $a = \frac{3}{4}(b - 1)^2 = 0,3675$ ; le système original de Hénon et la deuxième itération du système original de Hénon a deux points d'équilibre complètement imbriqués en  $(0,9524; 0,2857)$ . Les valeurs propres pour le système original de Hénon sont  $\{-1; 0,3\}$  et  $\{2,2343; -0,1343\}$ , et les valeurs propres pour la deuxième itération du système original de Hénon sont  $\{1; 0,09\}$  et  $\{4,9920; 0,0180\}$ . En effet, quand  $a$  s'approche de  $0,3675$ , une orbite périodique

de période 2 est constatée.

■

De plus, l'analyse de stabilité pour la valeur du paramètre  $a = 0,2$  donne les deux points d'équilibre  $(1,08945; 0,326836)$  et  $(-4,58945; -1,376836)$  et les valeurs propres  $\{0,371580; -0,80736213\}$  et  $\{1,986779; -0,1509981\}$  respectivement. Le premier point d'équilibre est un point stable et le deuxième est un point selle.

Pour les mêmes valeurs des paramètres la deuxième itération du système de Hénon a quatre points d'équilibre, dont deux sont complexes conjugués i.e.  $(1,75 \pm 2,046338i; 0,525 \mp 0,6139i)$  et les deux autres sont hérités du système original de Hénon respectivement. Les valeurs propres pour les points d'équilibre complexes conjugués sont  $\{1,7072; 0,05271\}$  et les valeurs propres pour le troisième point d'équilibre sont  $\{0,138072; 0,6518336\}$  et pour le quatrième point d'équilibre  $\{0,0228; 3,9472\}$ . Les points d'équilibres complexes conjugués sont des point selles, le troisième est stable et le quatrième est un point selle comme prévu.

Les points d'équilibre en  $a = 0,3675$  sont  $(0,95238; 0,285714)$  et  $(-2,857142; -0,857142)$  et leurs valeurs propres associées sont  $\{0,3; -1\}$  et  $\{2,234271; -0,134271\}$ . Par conséquent, le premier point d'équilibre donne naissance à une bifurcation par doublement de la période et le deuxième point d'équilibre est un point selle.

En  $a = 0,9125$  un attracteur de période 4 a lieu comme montré dans la figure (2.32.).

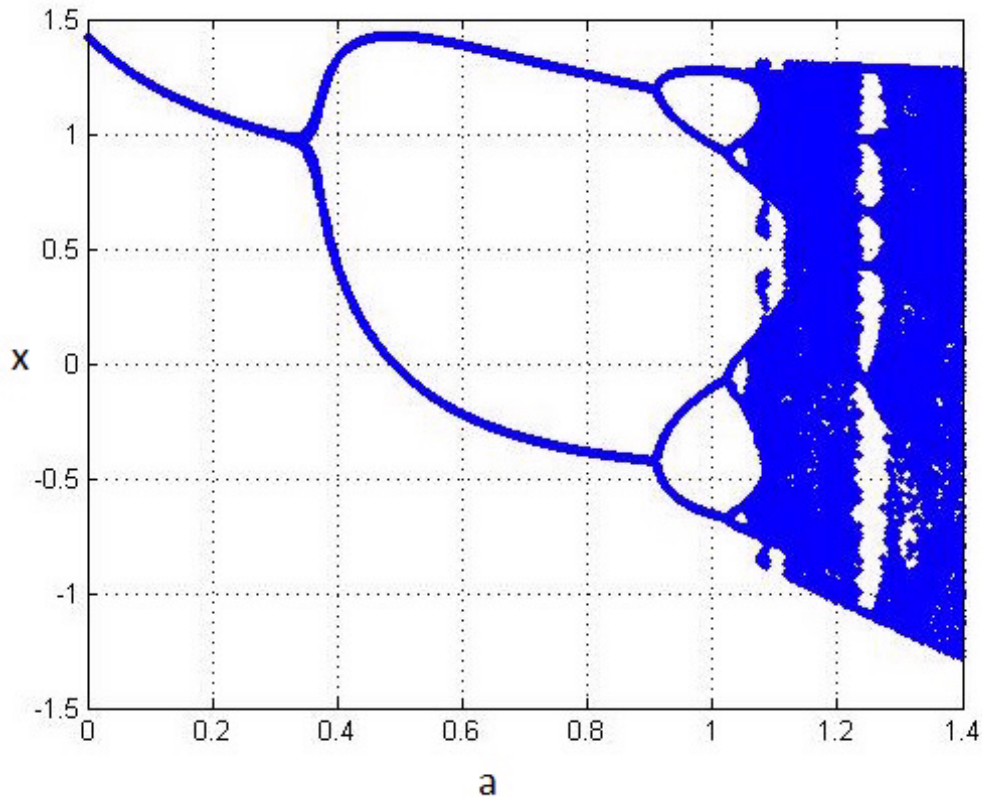
Pour  $a = 1$ , les points d'équilibre sont  $(0,70948; 0,21284)$  et  $(-1,40948; -0,42284)$  et les valeurs propres sont  $\{0,186824; -1,60578\}$  et  $\{2,921643; -0,102681\}$  respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles.

Pour  $a = 1,2$  et  $b = -0,1$  les points d'équilibre sont  $(0,563137; -0,0563137)$  et  $(-1,4798; 0,14798)$  et les valeurs propres sont  $\{-0,0785562; -1,2729739\}$  et  $\{0,0283838; 3,523146\}$  respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles. Autour du premier point d'équilibre une orbite périodique de période 2 est observée. Considérons la deuxième itération du système original de Hénon avec les mêmes conditions, y en a quatre points d'équilibre dont deux sont les mêmes qu'on avait de la première itération. Les valeurs propres sont  $\{1,620462; 0,0061710\}$  et  $\{12,41256; 0,000805\}$ . Encore les deux points d'équilibre sont des points selles. Le système fait disparaître son comportement périodique observé pour la première itération et l'incrément

de l'itération du système fait de ce système plus chaotique et compliqué qu'un multipériodique.

### 2.2.5 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre  $a$  de 0 à 1.4 avec un pas de 0,001 ;  $b$  est égale à 0,3. On obtient le diagramme suivant :



**Fig 2-32.** Diagramme de bifurcation de Hénon

- Si  $-0.1225 < a < 0.3675$ , les itérations convergent vers un point du plan,
- Si  $0.3675 < a < 0.9$ , les itérations tendent à constituer une suite  $(x_n, y_n)$  telle que  $(x_{2n}, y_{2n})$  converge vers un point et  $(x_{2n+1}, y_{2n+1})$  converge vers un autre point. On a donc deux points limites : on observe un doublement de période.
- Si  $0.9 < a < 1.02$ , on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour  $a \geq 1,02$ , on ne distingue plus les cycles : le système est chaotique.

## 2.2.6 Bassin d'attraction de Hénon

Les itérations ne convergent pas pour toutes les conditions initiales  $(x_0, y_0)$ . L'ensemble des conditions initiales pour lequel les itérations convergent est le bassin d'attraction de l'attracteur. Un calcul numérique permet de construire une partie de ce bassin d'attraction ; voir Fig (2.33.).

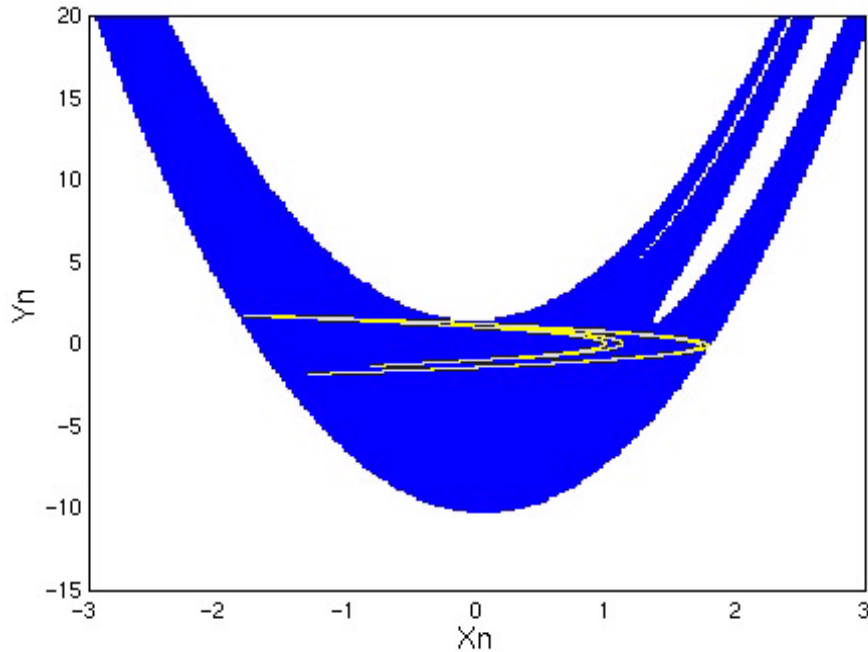


Fig 2-33. Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

## 2.3 Système de Lozi

### 2.3.1 Historique du système de Lozi

En 1978, Lozi a introduit un système bidimensionnel ayant des équations et des attracteurs semblent pareils à ceux du système célèbre précité de Hénon. Simplement le terme quadratique du système de Hénon est remplacé par une contribution linéaire continue par morceau, ceci permet de prouvé rigoureusement le caractère chaotique du système itéré de Lozi  $L(x, y)$  suivant :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -a|x_n| + y_n + 1 \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Où  $a$  et  $b$  sont des paramètres non-nuls. Sur la région où les orbites restent bornées, le système de Lozi peut présenter un comportement régulier ou un comportement chaotique.

### 2.3.2 Définition du système de Lozi

**Définition 2.4** *Le système dynamique de Lozi est défini par :*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -a|x_n| + y_n + 1 \\y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

La seule différence entre le système de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire  $x^2$  du système de Hénon est remplacé par  $|x|$  dans le système de Lozi qui fait de ce système une application non-différentiable.

Pour le cas particulier de  $a = 0$  cette application est linéaire donc on pose  $a \neq 0$ .

Partant d'un point du plan de coordonnées  $(x_0, y_0)$  on peut calculer les coordonnées  $(x_1, y_1)$  du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Lozi :

$$L^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-1}|y|^{-1})$$

Où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels.

### 2.3.3 Points fixes du système de Lozi

Le système de Lozi possède deux points fixes hyperboliques définis par :

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left( \frac{1}{1+a-b}; \frac{b}{1+a-b} \right) \text{ si } b < a+1$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = \left( \frac{1}{1-a-b}; \frac{b}{1-a-b} \right) \text{ si } b < -a+1$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces deux points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne en ces points.

### 2.3.4 Stabilité des points fixes

Pour des considérations de stabilité on a besoin de la matrice jacobienne de  $L(x, y)$  qui s'écrit :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne  $\det(DH_{a,b}) = -b$ .

Remarquons que  $J(x, y)$  dépend au point de l'orbite seulement avec  $\operatorname{sign}(x)$ . Accordialement, on note ses valeurs par  $J_+ = J(x > 0, y)$  et  $J_- = J(x < 0, y)$ . De plus, comme  $\det J_{\pm} = -b$  on va considérer le système de Lozi seulement pour  $|b| \leq 1$ . De plus  $J(P_1) = J_+$  et  $J(P_2) = J_-$ .

Le polynôme caractéristique de  $J$  aux points fixes s'écrit :

$$\lambda^2 + a\lambda - b \text{ Pour } P_1$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b \text{ Pour } P_2$$

**Proposition 2.11** [2] *Le point fixe  $P_1$  peut être stable quand  $(b, a)$  se trouve dans le triangle de sommets  $(1; 0)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(-1; -2)$  sur l'espace des paramètres et instable si :  $b < -1$ ,  $b < a + 1$ ,  $b < 1 - a$*

**Preuve:** Le discriminant du polynôme caractéristique vaut  $\Delta = a^2 + 4b$ .

Pour  $b > \frac{-a^2}{4}$ , les valeurs propres sont des réelles. Elles sont de module inférieur à 1 si :  $b - 1 < a < 1 - b$ .

Pour  $b < \frac{-a^2}{4}$ , les valeurs propres sont des complexes. Elles sont de module inférieur à 1 si :  $b > -1$ .

D'où la stabilité de  $P_1$ .

Pour  $b < -1$ ,  $b < a + 1$ ,  $b < 1 - a$  les valeurs propres sont de module supérieur à 1 (i.e. le point  $P_1$  est instable). ■

**Proposition 2.12** *Le point  $P_1$  est un point selle pour  $b > a + 1$ ,  $b > 1 - a$ .*

**Preuve:** La preuve est immédiate en calculant les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  on obtient  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  si :  $b > a + 1$ ,  $b > 1 - a$ .

Et le point  $P_1$  est un point selle. ■

• **Stabilité de  $P_2$**

**Proposition 2.13** [2] *Le point fixe  $P_2$  est instable si :  $b > -a + 1$ ,  $b > a + 1$ .*

**Preuve:** Le discriminant du polynôme caractéristique vaut  $\Delta = a^2 + 4b$ .

$P_2$  existe si  $b > -a + 1$ , alors  $\Delta > 0$ , et les valeurs propres sont toujours des réelles. Elles sont de module supérieur à 1 si  $b > -a + 1$ ,  $b > a + 1$ . ■

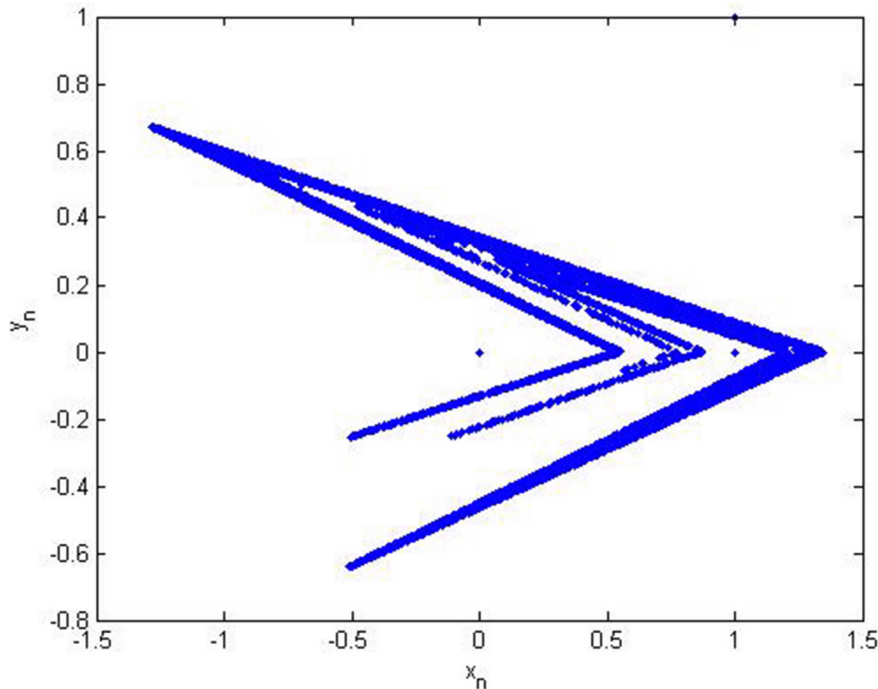
**Proposition 2.14** *Le point  $P_2$  est un point selle si  $b > -a + 1$ ,  $b > a + 1$ .*

**Preuve:** La preuve est immédiate aussi en calculant les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  on obtient  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  si :  $b > a + 1$ ,  $b > 1 - a$ .

Et le point  $P_2$  est un point selle. ■

### 2.3.5 Attracteur de Lozi

Nous avons fait un programme sur Matlab similaire au code source de Hénon avec une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  à travers lequel on peut voir la forme d'attracteur dans la figure (2.34.).

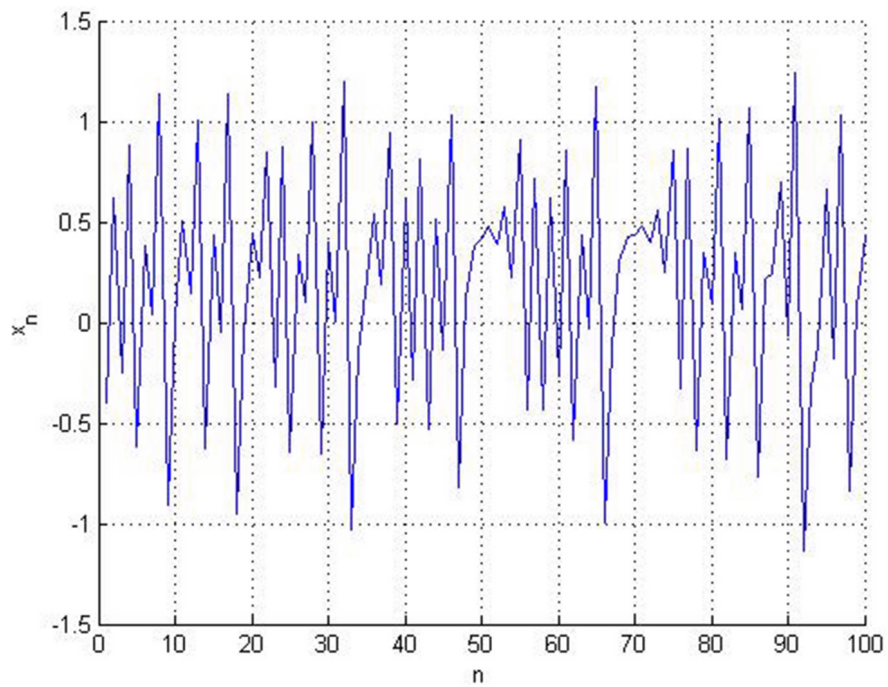


**Fig 2-34.** Attracteur de Lozi pour  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$ .

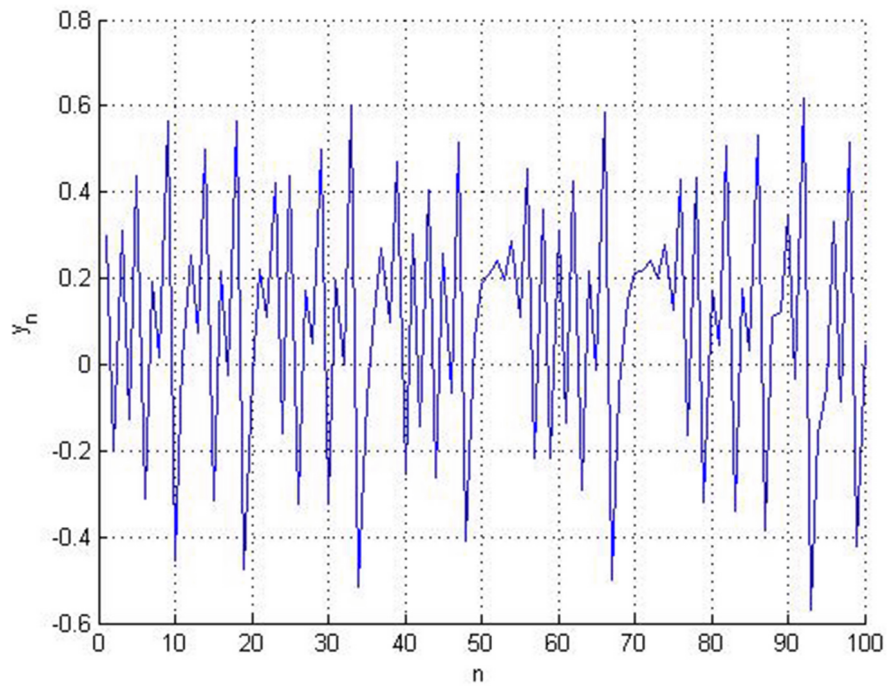
On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan ; elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables  $x$  et  $y$  pour une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , voir Figure (2.35.) et Figure (2.36.) respectivement.



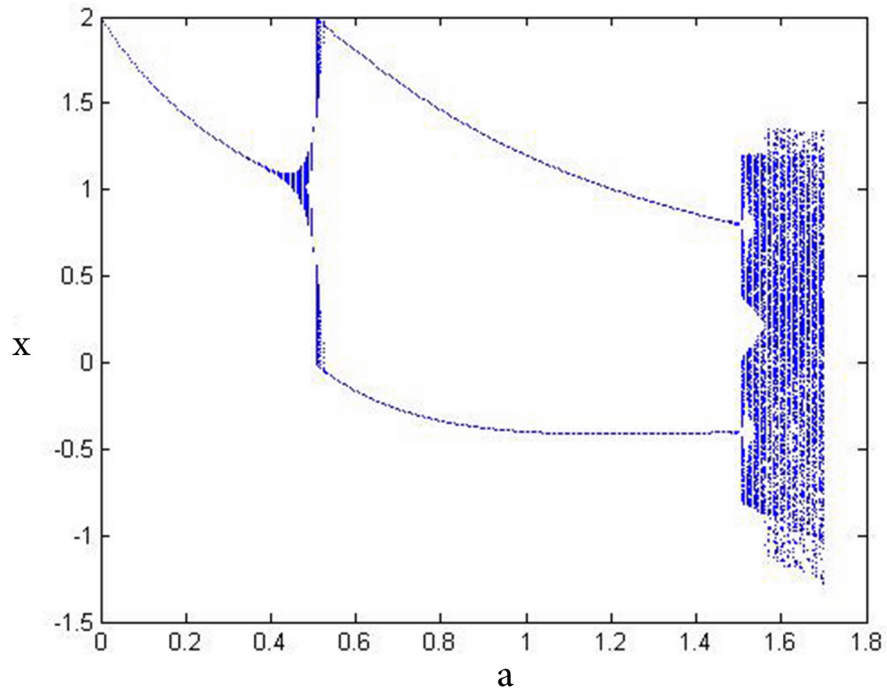


**Fig 2-35.** Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$ .



**Fig 2-36.** Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$ .

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables (voir Fig (2.36.) et Fig (2.37.)), qui se justifie par le diagramme de bifurcation sur la figure (2.37.).



**Fig 2-37.** Diagramme de bifurcation de Lozi.

# Chapitre 3

## Initiation au chaos dans les systèmes dynamiques discrets

Dans les sections suivantes, nous examinerons le côté historique de cette théorie. Ensuite, nous l'accorderons une définition précise, afin de parvenir à ses applications concrètes.

### 3.1 Historique

L'origine du mot chaos [12] provient de la Theogenie d'Hésiode 8 siècles avant J.C. "*Au début il y avait du chaos, rien sauf le vide, espace infini.*"

Le chaos est aussi mentionné dans "*Othello*" de Shakespeare et dans "*Printemps Noir*" d'Henry Miller comme un indésirable aspect du désordre.

Historiquement, l'idée du désordre dans le chaos a été intégré par notre vernaculaire. Le chaos est défini comme confusion, agitation, abime essentiel et aléatoire indésirable...

Scientifiquement, "*le chaos souvent produit la vie quand l'ordre produit l'habitude*", selon Henry Adams.

En 1889, Henri Poincaré a remporté le prix offert par le roi Oscar II de Norvège pour la solution du problème : "*si le système solaire était stable*". En revanche, un collègue a réussi à trouver une erreur dans les calculs de Poincaré qui a été accordé six mois pour rétablir son erreur afin de pouvoir conserver son prix. Dans ces nouvelles conditions, Poincaré n'a pas réussi à atteindre

une solution ce que lui a permis de constater que l'univers est exclusivement déterministique. En 1890, il a exposé l'incapacité des lois de Newton pour livrer une solution convaincante au "problème des trois corps". En d'autres mots, les prédictions concernant la terre, la lune et le soleil. La découverte de Poincaré a contrarié un concept primordial en physique. Si on connaît les équations qui dirigent un système, on pourra en effet prédire son évolution. Par le biller du calcul, les données fournies par les conditions initiales permettent de précisément connaître l'état d'un système et aussi loin dans le temps que désiré.

L'aspect erratique provient du nombre considérable de chocs indépendants qui administre un hasard d'origine statistique indiquant que l'utilisation des modèles simplistes est l'absence des mesures précises des paramètres divers, tels que la pression, la température, la vitesse du vent peuvent être l'origine des erreurs rencontrées dans les prévisions météorologiques. Nous constaterons plus loin que la mécanique des fluides est parfaitement déterminée par des équations qui incorporent une cause intrinsèque.

En 1908, l'idée de "chance" a été publié par Poincaré qui est en premier temps comme un facteur déterminant dans les systèmes dynamiques dus à l'absence des outils comme le théorème ergodique dans les mathématiques de mesure et les ordinateurs simulateurs de ce que les théorèmes démontrent.

En 1898, la divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par Jacques Hadamard, puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discuté par Pierre Duhem qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'Hadamard ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

À la fin du XIX<sup>ième</sup> siècle, Jacques Hadamard a réussi à prouver un théorème sur la dépendance sensible aux conditions initiales concernant le courant géodésique sur une surface de courbure négative et le mouvement sans friction d'un point sur une surface.

Le comportement indécis "occasionnel" d'un circuit oscillatoire du tube électronique géré par une équation différentielle non linéaire simpliste a été constaté par Bathazar Van Del Pol en 1927. Environ treizeans après, selon Mary Cartwright Tôt et John Littlewood cette équation avait le potentiel de démontrer des solutions sensibles à tous les chiffres dans ces conditions initiales.

En suivant la tradition de Poincaré, l'étude des systèmes hamiltoniens non linéaires a été

poursuivi par des nombreux mathématiciens comme Kolmogorov, Arnold et Moser entre les années 1920 et 1960.

Les applications des oscillateurs sont linéaires à la technologie de la radio, du radar et du laser avaient pareillement sollicité l'intérêt des ingénieurs.

Les caractérisations de formes possibles de comportement dans les équations différentielles avaient été présenté par le champ de la théorie des systèmes dynamiques en 1930.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la révolution cognitive. Considérer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon Miller, Gallanter et Pribram. En 1972, Newell et Simon ont proposé une nouvelle approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.

En 1960, Steve Smale a fourni des preuves mathématiques permettant d'établir des équations différentielles avec une sensibilité générique. La fin des années 1960 a marqué le commencement des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe sur les calculatrices analogiques ensuite sur les calculatrices numériques.

Dans les années 1962, Edward Lorenz a remarqué un comportement complexe sensiblement dépendable des conditions initiales après avoir mené une simulation en ordinateur d'un ensemble d'équations différentielles simplifiées pour une convection d'un fluide.

Une large série de champs a incorporé la théorie des systèmes dynamiques dans le comportement prédateur-proie, parole et langue, développement de l'enfant, et l'intelligence artificielle.

En 1977, Ilya Prigogine a remporté le Prix Noble en chimie. Il a focalisé sur l'entropie des systèmes ouverts. En d'autres mots, l'accumulation et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement. Prigogine a dévoilé à travers un système dissipatif que l'évolution des structures complexes peut être simple et organisé.

C'est en 1984 que T. Matsumoto et L.O. Chua avaient leurs première observation d'un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments. Le développement de la théorie des circuits non linéaires a commencé à partir de cette observation, suivi par

les circuits électroniques chaotiques. Matsumoto a vérifié la nature chaotique de ce circuit avec ses expériences numériques.

Avec ses étudiants ils étaient parvenus à modifier les circuits de Rosenthal afin d'obtenir deux résistances non linéaires terminales avec une fonction linéaire par morceaux qui devraient être précocement désignés.

L'adaptation du circuit de Rosenthal a été réussite par Takumaso deux ans après dans le but d'en arriver à la non-linéarité requise.

## 3.2 Définition du chaos

**Définition Larousse :** [12] n.m. (gr. Khaos). Confusion générale des éléments, de la matière, avant la création du monde. Fig. Désordre.

**Définition de E .Lorenz :** Un système agité par des forces où seules existent trois fréquences indépendantes, peut se déstabiliser, ses mouvements devenant alors totalement irréguliers et erratiques.

## 3.3 Outils de quantification du chaos

Les équations différentielles non linéaires soient discrètes soient continues peuvent décrire des modèles chaotiques comme déjà vécu. Pour des cas nombreux, ces équations différentielles ne sont pas explicitement intégrables. On ne peut alors se servir que d'un raisonnement numérique pour pouvoir calculer ses solutions. Les théoriciens du chaos mettent en oeuvre actuellement de nombreux outils afin d'évaluer un caractère chaotique en basant sur les équations différentielles qui en découle. Nous ne citons ici que ceux qu'on peut mettre en exergue numériquement et qui fournissent assez de renseignements en vue de l'analyse explicite des phénomènes concernés. Quelques-uns de ces outils sont en outre complémentaires l'un à l'autre.

### **3.3.1 Espace des phases**

Il est possible de suivre l'évolution de l'état d'un système physique dans le temps. Pour cela, on construit d'abord un modèle avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisants pour caractériser le système. Ce modèle est bien souvent constitué par des équations différentielles. On définira, à un instant donné, un point dans un « repère ». Ce point caractérisera l'état du système dans l'espace à cet instant. Cet espace est appelé « l'espace des phases ». L'espace des phases est une notion purement mathématique qui comporte autant de dimensions qu'il y a de paramètres dans le système dynamique étudié.

des systèmes qui convergent vers un état d'équilibre après maintes oscillations, ce qui correspond dans l'espace des phases à des boucles qui convergent vers un point. On a d'autres qui se répètent périodiquement, ce qui correspond dans l'espace des phases à une orbite cyclique. et d'autres ont également un mouvement périodique mais plus complexe ; ils se répètent seulement après deux oscillations différentes : on dit qu'ils possèdent un cycle de période 2. Cela correspond à des boucles plus compliquées dans l'espace des phases. Enfin des systèmes qui sont chaotiques, et dans l'espace des phases, ils possèdent une forme de trajectoire aléatoire.

### **3.3.2 Attracteurs**

Un attracteur est un élément ou un ensemble des éléments vers lesquelles évoluent le système en question, quelles que soient ses conditions initiales, c'est-à-dire une forme géométrique vers laquelle tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases. Autrement dit, c'est l'objet vers lequel évoluent les trajectoires formées à partir des points du bassin d'attraction. On peut alors extraire plusieurs attracteurs pour un même espace des phases et y on a deux types : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques. Les attracteurs étranges comportent des lois déterministes et des lois aléatoires en même temps, ce qui rend irréalisable toute prévoyance de l'évolution sur le long terme.

## Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers spécifient l'évolution des systèmes non chaotiques, et se divisent en deux catégories :

**Un point fixe :** ou bien état d'équilibre du système. Ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles elle empêche d'évoluer quand on progresse dans le temps.

**Un cycle limite :** Ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles l'évolution au cours du temps est cyclique c'est-à-dire, que la trajectoire s'enferme sur elle-même. .

Pour tous les attracteurs réguliers, des trajectoires qui prennent leurs départ à partir des points extrêmement voisins dans l'espace de phase restent infiniment proches. On peut cependant présager l'évolution de ces systèmes, à partir d'un état connu.

## Attracteurs étranges

Ils sont spécifiques à l'évolution des systèmes chaotiques, c'est-à-dire que tous les points de l'espace des phases qui découlent du bassin d'attraction de l'attracteur fournissent des trajectoires qui tendent à construire l'attracteur étrange au cours d'un certain temps.

De manière importante, un attracteur étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface introvertie souvent sur elle-même. Effectivement, les trajectoires des points s'écartent du moment que deux points ne subissent pas la même évolution, mais comme l'attracteur a des dimensions finies, et ainsi l'attracteur doit se replier sur lui-même et ce procès de repliement tend à se renouveler indéfiniment et donne lieu à un nombre infini de plis chevauchés qui ne se rencontrent pas. Par conséquent, deux conditions initialement proches peuvent avoir deux positionnement différents de l'attracteur au-delà d'un certain rang. Cela exprime le caractère divergent des systèmes non-réguliers.

### 3.3.3 Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

La sensibilité des trajectoires aux conditions initiales est un autre outil qui sert à quantifier un caractère chaotique. En choisissant deux états initiaux à proximité peu importe, les trajectoires qui en découlent s'écartent bientôt l'une de l'autre. Elles restent cependant attachées au même



attracteur dès lors, enfermées dans un espace borné. Il est notamment facile à comprendre que, de plus faible erreur dans la condition initiale, empêche à prévoir quelle sera la trajectoire suivie après un certain temps et, donc, de faire une prédiction d'autre que statistique sur le long terme du système.

### 3.3.4 Exposants de Lyapunov

On a vu que certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux variations de leurs conditions initiales, ces variations peuvent brusquement faire un boum. Le mathématicien russe Alexander Markus-Lyapunov a examiné ce phénomène et a défini une quantité lui permettant d'estimer l'allure d'amplification de ces petites variations, cette quantité et qui porte le nom de son fondateur « exposant de Lyapunov » mesure en vérité l'amplitude de sensibilité d'un système dynamique, c'est-à-dire, le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires appartenant à l'attracteur étrange et qui découlent des conditions initialement voisines au sein d'espace des phases et il est montré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de cet espace.

#### Cas d'une application discrète unidimensionnelle

**Théorème 3.1** *Soit une application discrète  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui applique  $x_{n+1}$  sur  $x_n$ , l'exposant de Lyapunov  $\lambda$  qu'il indique le taux moyen de divergence est défini par :*

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

**Preuve:** Choisissons deux conditions initiales très proches, soient  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra trouver un réel  $\lambda$  tel que après  $n$  itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \simeq \varepsilon e^{n\lambda}$$

D'où :

$$n\lambda = \frac{\ln |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

Et pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned} n\lambda &\simeq \frac{\ln |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} \\ &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

Finalement pour  $n \rightarrow +\infty$  on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

■

**Théorème 3.2** Soit  $\lambda$  un exposant de Lyapunov d'une application discrète.

- Si  $\lambda > 0$  alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si  $\lambda \leq 0$  les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

**Preuve:** la preuve de ce théorème est bien détaillée dans [8]. ■

### Cas d'une application discrète multidimensionnelle

**Définition 3.1** Soit  $f$  une application discrète de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système  $m$ -dimensionnel possède  $m$  exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume

initial  $V_0$  évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n}$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un  $\lambda_i$  soit positif. Tout d'abord nous devons calculer les  $\lambda_i$ . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace  $m$ -dimensionnel de rayon  $\varepsilon$  (assez petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme déjà évoqué, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons  $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ , on a le développement limité d'ordre 1 de  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x'_0$  Osuivant :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) \\ &\approx Df(x_0)Df(x_1)\dots Df(x_n)(x_0 - x'_0) \\ &\approx \prod_{i=1}^n Df(x_i)(x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note  $\prod_{i=1}^n Df(x_i)$  par  $Df^n(x_0)$ , ainsi

$$x_n - x'_n \approx Df^n(x_0)(x_0 - x'_0)$$

$Df^n(x_0)$  dénote la matrice jacobienne de  $f^n$  au point  $x_0$  : Il s'agit d'une matrice carrée  $m \times m$ , si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible  $P_n$  telle que  $D_m^t = P_n^{-1} Df^n P_n$ ,  $D_m^t$  est une matrice diagonale des valeurs propres  $\sigma_i(f^n(x_0))$ ;  $i = 1, \dots, m$  de  $Df^n$ .

On définit alors les  $m$  exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |\sigma_i(f^n(x_0))|, i = 1, \dots, m \quad (3.1)$$

Pour le point d'équilibre  $x^*$  la formule (3.1) devient :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |\sigma_i(x^*)|, i = 1, \dots, m$$

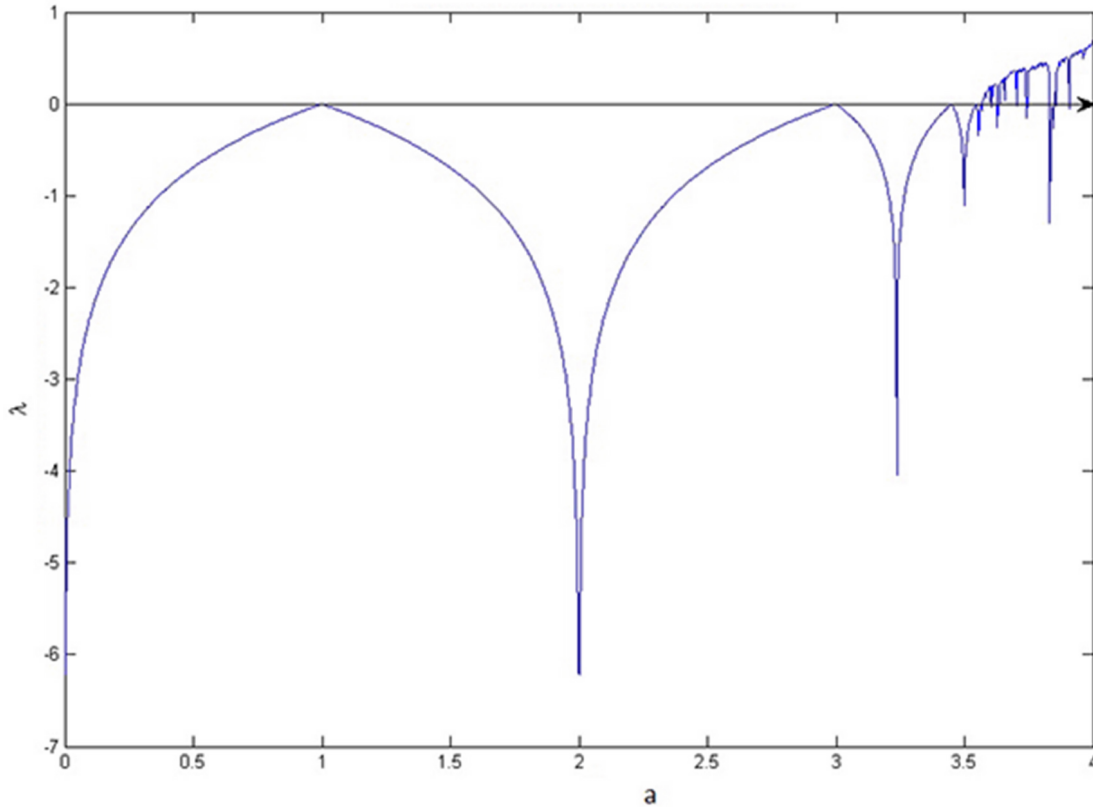
## 3.4 Le chaos dans les systèmes précités

### 3.4.1 L'application logistique

Par exemple, [3] on se servira des exposants de Lyapunov pour mesurer la sensibilité aux conditions initiales de la suite logistique pour des différentes valeurs de  $a$ . On a vu dans les résultats précédents que lorsque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet un point fixe ou périodique, celui-ci est indépendant des conditions initiales. Les régions chaotiques devront être très sensibles aux conditions initiales donc dans le cas de ce système discret à une dimension, son exposant de Lyapunov doit être positif. Et plus cet exposant est grand, plus l'orbite est sensible aux petites variations dans les conditions initiales. Sachant cela, il serait intéressant de tracer la courbe des exposants en fonction de  $a$ .

On a pour  $N$  grand :

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(g_a^n)'(x_0)| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{i=0}^{n-1} |g_a'(x_i)| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |g_a'(x_i)| \\
 &= \ln |a| + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |1 - 2x_i|
 \end{aligned}$$



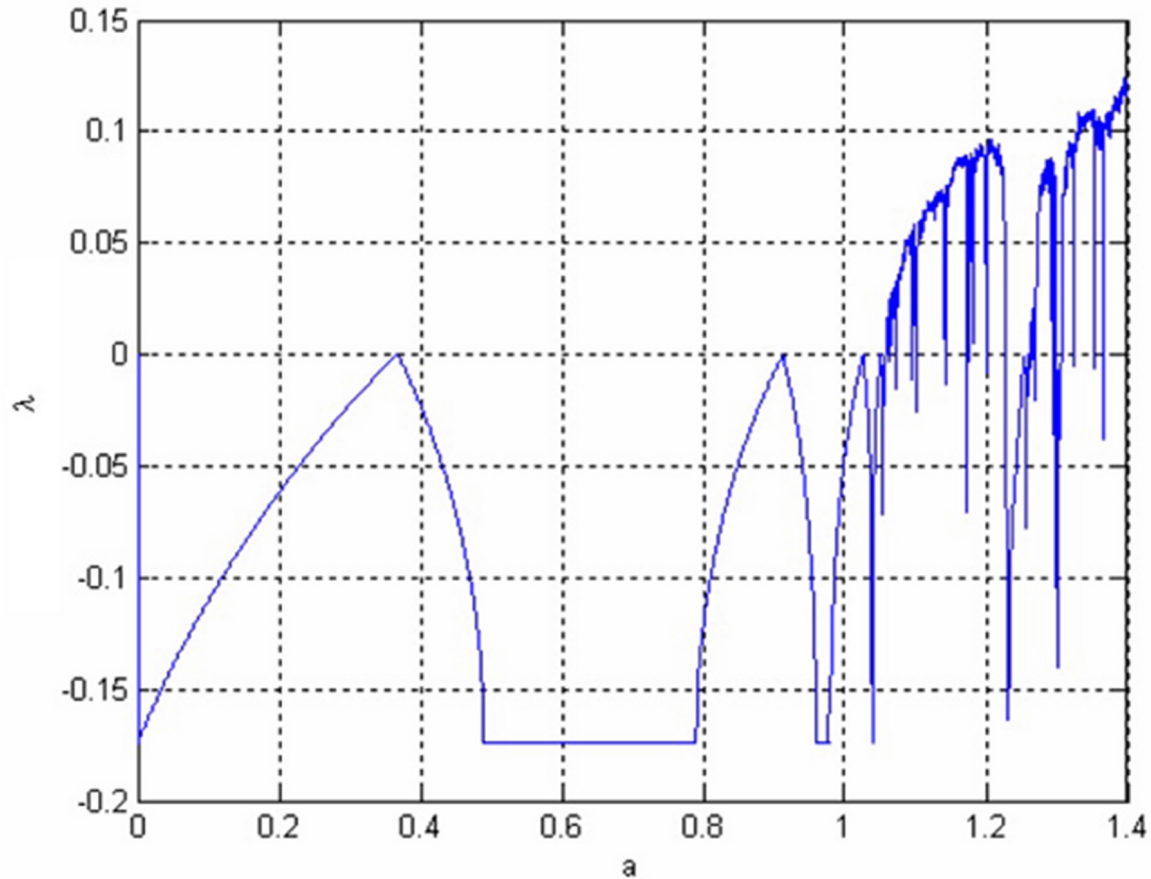
**Fig 3-1.** L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de l'application logistique en fonction de  $a$ .

On constate que sur des intervalles correspondants aux points fixes ou périodiques attractifs, l'exposant de Lyapunov est négatif. On peut remarquer des points où il devient très négatif (serait  $-\infty$  si on ne faisait pas une approximation), c'est lorsqu'un point périodique ou fixe devient super attractif : la convergence est très rapide. Plus l'exposant est positif, plus les orbites sont sensibles aux conditions initiales, donc chaotiques.

### 3.4.2 Système de Hénon

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon [5], on remarque que les valeurs propres sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$ .

On fixe  $b = 0,3$ , et on laisse  $a$  varier entre 0 et 1,4.



**Fig 3-2.** L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de Henon en fonction de  $a$ .

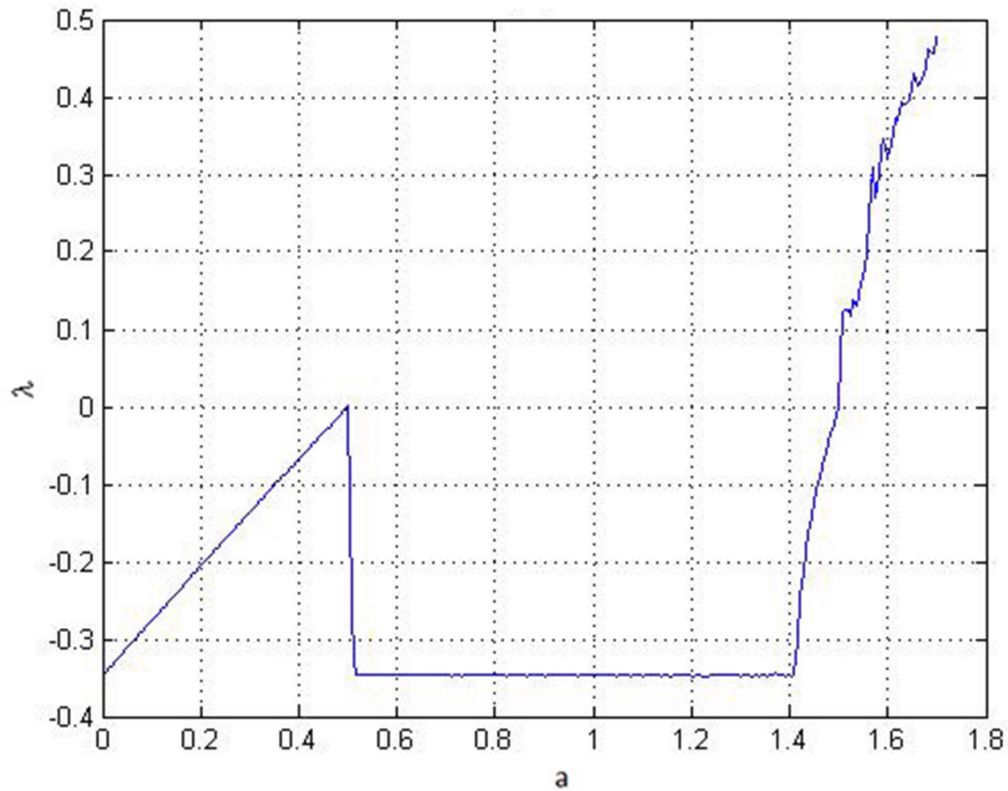
A partir de la Figure (3.2.) on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0; 1,052]$ .
- une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1,052; 1,4]$ .

### 3.4.3 Système de Lozi

De même on peut calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$  pour le système de Lozi.

On fixe  $b = 0,5$ , et on laisse  $a$  varier entre 0 et 1,8.



**Fig 3-3.** L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de Lozi en fonction de  $a$ .

A partir de la Figure (3.3.) on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0; 1, 5]$ .
- une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1, 5; 1, 8]$ . voir ([1]).

### **Conclusion**

La notion du chaos reste très utile à nos jours dans plusieurs domaines. En effet, en physique, en mathématique et en météorologie évidemment, mais aussi en biologie et chimie, en astrophysique, en économie et sciences sociales..., bref dans une diversité de domaines. Par exemple, en biologie, dans l'étude de populations, les savants ont remarqué que la croissance présente un comportement chaotique. Bien qu'en chimie pour l'étude des gaz et des particules comme le mouvement brownien<sup>1</sup>. D'autre part, en astrophysique, lors d'intégrations numériques (pour de grandes durées mais qui sont toujours largement inférieures à l'âge du système solaire) des mouvements des planètes proches du Soleil comme Mercure, Vénus, la Terre et Mars, il a été remarqué que ces systèmes sont très sensibles aux conditions initiales et que par conséquent la prévision de l'emplacement de celles-ci dans le futur lointain est tout simplement impossible. De plus, des physiciens ont récemment remarqué que la Terre, si elle n'avait pas de lune, aurait une rotation chaotique. Ce qui signifierait que sur Terre, il n'y aurait plus ce système régulier des saisons tel que nous le connaissons. En outre, en économie, l'étude de marché montre que la bourse est un système chaotique (au sens technique...). Enfin, et surtout, dans la cryptographie, la découverte des signaux chaotiques, ces signaux de nature très imprévisibles et qui ne semblaient pas être faciles à contrôler, ils sont déterministes mais fortement sensibles aux conditions initiales et présentent une allure pseudo-aléatoire. Ces propriétés peuvent être affinées pour simuler les caractéristiques d'un bruit blanc ou d'un autre signal aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher des signaux d'informations afin de transmettre ceux-ci d'une manière sécurisée.

---

<sup>1</sup>Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une grosse particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les petites molécules du fluide environnant.



# Bibliographie

- [1] **Aziz Alaoui, Carl Robert, Celso Grebogi**, Dynamics of a Henon-Lozi type map, university of California, 2000.
- [2] **Hamaizia Tayeb**, Systemes Dynamiques et Chaos, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, l'Université de Constantine 1, 2013.
- [3] **HOET Thomas, LORENZI Baptiste, SAHIN Serdar**, La cryptographie chaotique, 2 IMACS-Promotion 48, 2011-2012.
- [4] [http://theses.univ-lyon2.fr/documents/getpart.php?id=lyon2.2004.petitgirard\\_l&part=194207](http://theses.univ-lyon2.fr/documents/getpart.php?id=lyon2.2004.petitgirard_l&part=194207)
- [5] **Lkhlef Ameer**, Contrôle, chaotification et hyperchaotification des système dynamiques, Thèse de Magistère, Université Mentouri de Constantine, 2007.
- [6] **Md. Jahurul Islam, Md. Shahidul Islam and M. A. Rahman**, Two Dimensional Hénon Map with the Parameter Values  $1 < a < 2$ ,  $|b| < 1$  in Dynamical Systems, Bangladesh,2012.
- [7] **O. Ozgur Aybar, I. Kusbeyzi Aybar, and A. S. Hacinliyan**, Stability and Bifurcation in the Henon Map and its Generalizations, Yeditepe University, Istanbul, Turkey, 2013.
- [8] Rouvière, Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 3<sup>ème</sup> édition Cassini, p.
- [9] **Seigneur Agathe** sous la direction de Rechtman Ana, Les bifurcations de l'application logistique, Septembre 2012.

- [10] **Talbi Ibtissem**, Systèmes dynamiques non-linéaires et phénomène de chaos, Thèse de Magistère, Université Mentouri de Constantine, 2010.
- [11] [www.jdotec.net](http://www.jdotec.net), Critère de ROUTH.doc.doc, v1.3 – 24.03.2004
- [12] **Zeraoulia Elhadj**, Etude de quelques types de systèmes chaotiques : généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen, Thèse de 3ème cycle, Université Mentouri de Constantine, 2006.