Table des matières

Notations et Symboles

$S-R-D$	Système de réaction-diffusion.
$\mathbb{R}^n$	L'ensemble des réels de dimensions n.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega$	Frontière de Ω.
$\dfrac{\partial u}{\partial t}$	Dérivée partielle de u par rapport au temps t.
∇u	Le gradient de u.
$\nabla \cdot u$	La divergence de u.
$\triangle u$	Le Laplacien de u.
$d\sigma$	La mesure de surface sur $\partial\Omega$.
$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$	La dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$.
$\sum$	Région invariante.
$supp f$	Support de la fonction f.
$L(t)$	Fonction de Lyapunov.

Introduction Générales

Il est bien connu que beaucoup de phénomènes dans la nature sont gouvernés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique dits " Systèmes de Réaction -Diffusion". Ces systèmes s'écrivent dans leur forme la plus simple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\triangle u = f(t, x, u(t, x))$$

où

$$u(t, x) = (u_1(t, x), ..., u_n(t, x))$$

est l'inconnue,

$$f(t, x, u(t, x)) = (f_1(t, x, u(t, x)), ..., f_n(t, x, u(t, x)))$$

est la réaction (généralement non linéaire), et D est une matrice carrée $n \times n$ définie positive et diagonalisable, appelée matrice de diffusion.

Notre contribution dans ce travail est d'essayer d'étendre les résultats connus dans le cas diagonal à la situation pleine. Pour cela, nous construisons des régions invariantes où nous pouvons montrer que pour toute donnée initiale dans la région $\sum$ la solution reste dans $\sum$, le problème posé est équivalent à un problème dont l'existence globale résulte par une technique usuelle basée sur la fonctionnelle de Lyapunov (voir **Kouachi** ([19],[20]), **Kouachi et Youkana**[24]).

Ce travail, se compose de trois chapitres :

Chapitre 1 : Notations et notions générales

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notations, notions préliminaires, symboles utilisés dans ce travail, certains opérateurs et quelques espaces avec leurs normes, définitions, théorèmes, propositions et des remarques qui nous utilisées dans les chapitres suivants, aussi on donnera introduction générale au système de réaction-diffusion, ainsi que la notion de l'existence locale et l'existence globale.

Chapitre 2 : Existence globale pour les S-D-R à matrice de diffusion diagonale

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence globale des systèmes de réaction-diffusion à la matrice de diffusion est diagonale, pour cette raison on utilise une fonctionnelle de lyapunov de la forme

$$t \longmapsto L(t) = \int_{\Omega} H_n(u(t, x), v(t, x), w(t, x), z(t, x))dx,$$

où

$$H_n(u, v, w, z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{j^2} \theta_3^{k^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{n-k}$$

Le système que nous étudions est la suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f_1(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta v = f_2(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - c\Delta w = f_3(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - d\Delta z = f_4(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

et les données initiales :

$$u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x), w(0,x) = w_0(x), z(0,x) = z_0(x) \quad \text{sur } \Omega$$

Troisième chapitre : Existence globale pour les S-D-R à matrice de diffusion pleine

Nous étudions, à l'aide de la région invariante, l'existence globale de solutions de systèmes de réaction-diffusion à matrice de diffusion pleine de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v - c\Delta w - d\Delta z = f_1(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - a\Delta v - b\Delta z = f_2(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - b\Delta u - a\Delta w - c\Delta z = f_3(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - d\Delta u - c\Delta v - b\Delta w - a\Delta z = f_4(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

et les donnée initiales :

$$u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x), w(0,x) = w_0(x), z(0,x) = z_0(x)$$

Le technique usuelle basée sur la fonctionnelle de lyapunov.

Chapitre 1

Notions et résultat préliminaires

L'objectif de ce chapitre est rappelé quelques notions et résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs. On donne des définitions, des théorèmes, des propositions, des remarques et des symboles utilisés dans ce travail, certains opérateurs et quelques espaces avec leurs normes, afin de faciliter aux lecteurs la compréhension de notre travail.

1.1 Notations et notions générales

1.1.1 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, x_2 ...., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.
On appelle champ des vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, x_2 ...., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), v_2(x) ...., v_n(x))$.
Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, son gradient est le champ de vecteurs défini par

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right), \tag{1.1}$$

alors

$$| \nabla u |^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$$

Pour un champ des vecteurs $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de v la fonction définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x) &= \nabla \cdot v = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + ... + \frac{\partial v}{\partial x_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{1.2}$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, avec frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ et $d\sigma$ est une mesure de surface sur Γ.
On appelle normale à Γ un champ des vecteurs $\eta(x)$ défini sur le bord Γ tel qu'en tout point $x \in \Gamma$, $\eta(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.
On appelle normale extérieure une normale qui point vers l'extérieure du domaine en tout point.
On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord Γ la fonction définie sur les points de Γ par $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x) \cdot \vec{\eta}$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $\eta(x)$).[17]

1.1.2 Espaces fonctionnels

$L(E, F)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires et continues (ou bornés) de E dans F muni de la norme

$$\| A \|_{L(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \| Ax \|_F \tag{1.4}$$

On pose $L(E, E) = L(E)$
On désigne par $L^P(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace des fonctions définie par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable : } \int_\Omega | u |^p \, dx < \infty, \ 1 \leq p \leq \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\| u \|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{| \Omega |} \int_\Omega | u |^p \, dx. \tag{1.5}$$

On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables et vérifient

$$| u | \leq c \quad \text{p.p sur } \Omega$$

où c est une constante positive. $L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c, | u | \leq c \quad \text{p.p sur } \Omega \} \tag{1.6}$$

On définit les espaces $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty(0,T,X)$ comme suit :

$$L^p(0,T,X) = \left\{ u : [0,T] \longrightarrow X \quad \text{mesurable, } \int_0^T \| u \|_X^p \, dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| u \|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \| u \|_X^p \, dt \tag{1.7}$$

$$L^\infty(0,T,X) = \left\{ u : [0,T] \longrightarrow X \text{ mesurable, } \sup_{t\in(0,T)} ess \ \| u \|_X < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| u \|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \| u \|_X \tag{1.8}$$

D'autre terme :

$$u(t,x) \in L^\infty(0,T; L^p(\Omega)) \Longleftrightarrow \sup_{t\in(0,T)} \| u(t,x) \|_{L^P(\Omega)} < \infty$$

Naturellement on a

$$L^P(0,T,L^P(\Omega)) = L^P((0,T)\times\Omega), 1 \leq p \leq \infty.$$

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\| u \|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} | u(x) | \tag{1.9}$$

$C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égal à k existent et sont continue dans Ω.
$C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne les sous-espaces vectoriel des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.
$D(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions C^∞ à support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ 1 \leq i \leq n \right\} \tag{1.10}$$

muni de la norme

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega | u |^2 \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \tag{1.11}$$

$$= \int_{\Omega} | u |^2 \, dx + \int_{\Omega} | \nabla u |^2 \, dx$$

donc

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u |_{\Gamma} = 0 \right\} \tag{1.12}$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ vérifient } | \alpha | \leq m \right\}, \tag{1.13}$$

muni de la norme

$$\| u \|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} | D^\alpha u |^2 \, dx \tag{1.14}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), | \alpha | \leq m \}, \tag{1.15}$$

muni de la norme

$$\| u \|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)}, \tag{1.16}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots . \partial x_n^{\alpha_n}}; \quad | \alpha | = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

est la dérivée au sens des distribution.
Naturellement on a : $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ et $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.[17]

1.2 Théorèmes et formules fondamentaux

Nous présentons des propositions, des théorèmes avec démonstrations utilisés dans les chapitres suivants

Théorème 1.1 ***(D'ostrogradski ou théorème de la divergence)*** *Soit S une surface fermée, frontière d'un domaine de volume V. Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieure du domaine à l'extérieur, et désignons par α, β et λ les angles que fait cette normale* *avec la direction des x, y et z positifs respectivement alors, si A_1, A_2 et A_3 sont des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans le domaine, le théorème de la divergence s'exprime ainsi*

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv = \int\limits_S A_1 dxdz + A_2 dzdx + A_3 dxdy$$

sous forme vectorielle avec $A = (A_1, A_2, A_3)$, ceci peut s'écrire simplement

$$\int\limits_V \nabla \cdot A dv = \int\limits_S A \cdot \eta ds$$

Ce théorème est appelé encore la théorème de Green dans l'espace.[4]

Preuve. *Voir (**M.R.Spiegel** [15])* ■

1.2.1 Formules de Green

Nous rappelons maintenant quelques formules de Green qui généralisent au cas multidimensionnel la formule d'intégration par parties de la dimension un. Elles s'écrivent de la manière suivante :

Théorème 1.2 *On suppose que Ω est un domaine ouvert de frontière $\partial\Omega$ continue par morceaux. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma \,,\ 1 \leq i \leq n \tag{1.17}$$

on désigne par η_i le $i^{éme}$ cosinus directeur de la normale η à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieure de Ω et on écrit $\eta_i = (\overrightarrow{\eta}.\overrightarrow{e})$. $d\sigma$ la mesure de surface sur Γ.

Preuve. *Si u (resp v) appartient à $H^1(\Omega)$, il existe une suite (u_m)(resp v_p) de $D(\bar{\Omega})$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$(resp vers v dans $H^1(\Omega)$)*

$D(\overline{\Omega})$ dense dans $H^1(\Omega)$. On a pour les fonctions u_m et v_p de $D(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_p dx = -\int\limits_\Omega u_m \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u_m v_p \eta_i d\sigma \ \ , \quad 1 \leq i \leq n$$

on obtient l'expression (1.17) par passage à la limite dans la formule de Green précédent. ■

Corollaire 1.1 *Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green*

$$\int\limits_\Omega (\Delta u) v = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Preuve. *Donnons une conséquence de théorème précédente* (1.2)
on pose $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, *le Laplacien d'une distribution* u. *Alors, si* u *est fonction de* $H^2(\Omega)$,*d'après* (1.17) *pour toute fonction* v *de* $H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\Delta u)v &= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i} v\eta_i d\sigma\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma\right) \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma. \end{aligned}$$

■

1.2.2 Inégalité de Hôlder

Soient $u \in L^p$ et $v \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 < p, q < \infty$. Alors l'inégalité de Hôlder s'écrit :

$$\int_\Omega \mid uv \mid dx \leq \left(\int_\Omega \mid u \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \mid v \mid^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(i.e) $u.v \in L^1$ et

$$\| uv \|_{L^1} \leq \| u \|_{L^P} \cdot \| v \|_{L^q}$$

1.2.3 Formes quadratiques

Définition 1.1 *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré relativement aux n variables $u_1, u_2, \ldots.u_n$. Une forme quadratique a toujours la représentation*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

est une matrice symétrique.

Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, \ldots., u_n)$ par u et la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$ par $A(U, U)$,

$$A(U,U) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \tag{1.18}$$

nous pouvons écrire

$$A(U,U) = U^t AU = AU.U$$

Définition 1.2 *Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice symétrique réelle, la forme (1.18) est dite forme quadratique réelle.*
Dans ce travail, on s'intéresse que des formes quadratiques réelles.

Définition 1.3 *Une forme quadratique (1.18) est dite définie positive si*

$$A(U,U) > 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^n, \ u \neq 0$$

Théorème 1.3 *Une forme quadratique (1.18) est définie positive si et seulement si tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs*

$$\det 1 > 0, \det 2 > 0, \ldots., \det n > 0$$

Preuve. Voir (**F. R. Gantmacher** [7]). ■

Définition 1.4 ***(Régions invariantes)*** *Un sous- ensemble fermé $\sum \subset \mathbb{R}^n$ est appelé une région invariante pour le système de réaction-diffusion si, toute solution $u(t,x)$ ayant ses valeurs initiales dans $\sum$ pour tout $(t,x) \in [0, T_{\max}) \times \Omega$*

1.3 Semi-groupe et générateurs infinitésimaux

Définition 1.5 *Soit X un espace de Banach, on dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe fortement continu sur X (en abrégé semi-groupe sur X) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) $S(0) = I$.
b) $S(t)S(s) = S(t+s)$, pour tout t et $s \geq 0$.
c) $\lim\limits_{t \to 0^+} S(t)u - u = 0$ dans X, pour tout $u \in X$.

Définition 1.6 *On dit que $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est un générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, si*

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \text{ pour tout } u \in D(A).$$

Proposition 1.1 *Soit $S(t)$ un semi-groupe continu sur X de générateur infinitésimal A, alors :*

a) A est un opérateur linéaire fermé, de domaine $D(A)$ dense dans X ($D(A)$ est muni de la norme du graphe).
b) pour $u \in D(A)$; $S(t)u \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} S(t)u = AS(t)u = S(t)Au, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

c) pour $u \in X$, $\int_0^t S(s)uds \in D(A)$ et $A(\int_0^t S(s)uds) = S(s)u - u_0$.
Preuve. Voir **A. Pasy** [2] page 5. ■

Théorème 1.4 ***(de Hille-Yoshida)*** *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine dense dans X soit un générateur d'un semi-groupe fortement continu est qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ tel que :*

i) $(\lambda I - A)^{-1}$ existe pour tout $\lambda : \operatorname{Re} \lambda > w$,
ii) $\|(\lambda I - A)^{-k}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^k}$, $k = 1, 2, ...$ pour $\operatorname{Re} \lambda > w$.
Preuve. Voir **H.Bresis** [9] page 105. ■

Proposition 1.2 *Le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (d'autre choix sont possible, par exemple $X = H_0^1(\Omega)$).*

Preuve. Voir **H.Bresis** [9]. ■

1.4 Notion de l'existence locale et globale

1.4.1 Existence locale et unicité

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire, $f : X \longrightarrow X$. Etant donné $u_0 \in X$; considérons le problème d'évolution non homogène à valeur initiale :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = f(u), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Définition 1.7 *On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t \geq 0$ à valeurs dans X est solution locale du problème (1.19), s'il existe u définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$ qui pour tout $t < T^*$ est l'unique solution de (1.19) dans $C^1([0, T^*[\,, X)$.*

En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu.
i) $T^* = \infty$,
ii) $T^* < \infty$ et $\lim\limits_{t \to T^*} \|u\| = \infty$.

Remarque 1.1 *Si la propriété (i) est satisfaite, on dit que la solution u est globale. Si (ii) est satisfaite, on dit que la solution explose en temps fini.*

Exemple 1.1 *Considérons le problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

- Si $f(u) = u^2$, la solution du problème est donnée, pour $0 \leq t < 1$, par $u(t) = \dfrac{1}{1-t}$. La solution explose lorsque t s'approche de 1, donc il y a une solution non globale.
- Si $f(u) = u$, la solution du problème est donnée par $u(t) = e^t$, donc le problème de Cauchy admet une solution unique globale.

Théorème 1.5 *On suppose que A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $G(t)$ dans X. Alors pour tout $u_0 \in X$ et tout f localement lipchitzienne, il existe une fonction u unique solution du problème (1.19).*

De plus, u est donné par la formule :

$$u(t) = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds,$$

où

$$G(t) = e^{tA}$$

Pour la preuve de ce théorème voir **D. Henry** [6].

1.4.2 Existence globale

Nous donnons dans ce paragraphe une idée de l'état des connaissances sur l'existence globale des solutions. Il est bien connu que (voir **J. Smoller** [11]), pour démontrer l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion, il suffit de montrer que les termes de réaction sont dans $L^{\infty}(0,T;L^{p}(\Omega))$ pour un certain $p > \dfrac{n}{2}$.

Théorème 1.6 ***(Existence globale par l'effet régularisant)***

Soit le problème

$$\begin{cases} u_t - a\triangle u = f(t,x,u) & \text{sur } [0,T[\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur } [0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

Si $f(t,x,u) \in L^{\infty}(0,T;L^{p}(\Omega))$ pour $p > \dfrac{n}{2}$, où $n = \dim\Omega$, (i.e)

$$\begin{aligned} f(t,x,u) \quad &\in \quad L^{\infty}(0,T;L^{p}(\Omega)) \Longleftrightarrow \sup_{0\le t<T^*} \|f(t,x,u)\|_{L^{p}(\Omega)} < \infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{\Omega} \mid f(t,x,u) \mid^{p} dx \le C, \qquad \forall t\in[0,T[\end{aligned}$$

alors la solution de l'équation est globale (voir **D. Henry** [6]).

Exemple 1.2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = -u^3 & \textit{sur } [0,T[\times\Omega \\ u = 0 & \textit{sur } [0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x\in\Omega \end{cases} \tag{1.20}$$

Nous allons étudier l'existence globale du problème (1.20) en appliquant le théorème de l'effet régularisant (théorème 1.6). on prend $n = \dim\Omega = 1$, d'après le (théorème 1.6), il faut montrer que $\int_{\Omega} \mid -u^3 \mid^{p} dx < C$ pour un certain $p > \dfrac{n}{2}$, alors il suffit de montrer que $\int_{\Omega} u^2 dx < C$. On multiplie l'équation du problème (1.20) par u :

$$u\, u_t - u\triangle u = -u^4$$

et on intègre sur Ω

$$\int_\Omega u\ u_t dx - \int_\Omega u\triangle u dx = -\int_\Omega u^4 dx \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \mid \triangle u \mid^2 dx \leq 0$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \leq 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \int_\Omega u^2(t,x)dx \leq \int_\Omega u^2(0,x)dx = C$$

$\Longrightarrow$ la solution est globale.

1.5 Système de réaction-diffusion

1.5.1 Introduction

Dans un milieu continu, soient N espèces chimiques (ou constituants fluides). On note $i = 1, 2, ..., N$ l'une de ces espèces, soient alors $u_i(x,t)$ sa concentration (ou densité) au temps t et au point $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et D_i son coefficient de diffusion. Les concentrations $u_i(x,t)$ représentent les variables étudiées dans un modèle de réaction-diffusion dont l'évolution est régie par le système d'équations aux dérivées partielles suivantes, appelées équations de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\triangle u = f(u) \tag{1.21}$$

où

$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$$

est un vecteur de variables,

$$f(x, t, u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_n(x,t,u(x,t)))$$

est une fonction vectorielle (généralement non linéaire) qui se nomme les termes de réaction, et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $n \times n$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u :
En chimie u est vecteur de concentrations chimiques et f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\triangle u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

En dynamiques des populations, u représente le vecteur de densités des populations et f l'effet des relations prédateurs-proie, des relations de compétitions ou de symbiose. Le terme $D\triangle u$ représente des mouvements aléatoires d'individus de la population étudiée.(voir **M. Kirane and Kouachi**) [12], [13] et [14].
En biologie, par exemple, lors du transport sanguin du sucre ;$u = (u_1, u_2, u_3)$ désigne les concentrations respectives en sucre complexe (sucrose) et sucres simple (glucose et fructose) :

$$\textbf{sucrose} \ \xrightarrow{hydrolysis\ by\ acid}\ \textbf{glucose} \oplus \textbf{fructose}$$
$$u_1 \longrightarrow u_2 \oplus u_3$$

$f(u)$ représente les réactions chimiques sur les sucres et $D\triangle u$ désigne, comme toujours, le flus de ces sucres à travers la frontière de la surface où se produit cette réaction...
(voir **F.Roth**[8],**J.Morgan**[10],**W.Feng**[26]).

1.5.2 Modélisation

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (1.21) ; d'ailleurs qui est la même pour tous les phénomènes cités dans l'introduction, puis nous donnons un exemple en chimie.
On considère une région bornée Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ses réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire, d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).
Si on note par $u_i(x,t)$ la concentration de la $i^{ième}$ espèce prenant part dans ces réactions,
$f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_n(x,t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$ et soit J_i le flux de ces espèces à travers la frontière Γ de notre région Ω. Considérons un volume V infiniment petit de la région Ω de frontière $S = \partial V$. La vitesse de formation de la $i^{iéme}$ espèce dans le volume V est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers S ; en termes d'équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_i(x,t)dx = \int_V f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_n(x,t))dx - \int_S J_i d\sigma \tag{1.22}$$

donc

$$\int_V (\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla\cdot J_i)dx = 0, \quad i = 1,...,n \tag{1.23}$$

Puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, on en déduit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla\cdot J_i = f_i, \qquad i = 1,..,n \tag{1.24}$$

Remarque 1.2 *Dans le cas d'une réaction chimique, le terme de réaction f_i vient de l'application (sur le plan microscopique) de la loi d'action des masses (ou loi de Gulberg et Waage). D'ailleurs dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable. Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick)*

$$J_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \nabla u_j \tag{1.25}$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion. En substituant (1.25) dans (1.24), on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \nabla u_j) = f_i \tag{1.26}$$

normalement les a_{ij} sont constants, quoi qu'ils peuvent dépendre de t, x et u. Aussi on va considérer des termes de réactions dépendant seulement de u, dans ce cas on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \triangle u = f(u) \tag{1.27}$$

Remarque 1.3 *Par un simple changement de variables linéaire, la matrice A peur être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, ..., d_n)$ avec $d_i > 0$, $i = 1, ..., n$, et le système (1.27) devient :*

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D \triangle v = g(v) \tag{1.28}$$

Remarque 1.4 *Remarquons que, pour établir (1.27), on a simplifié plusieurs termes, sinon on aboutirait à des équations très compliquées et difficiles à étudier.*

Exemple 1.3 ***En chimie***

Considérons le schéma réactionnel

$$\sum_{i \in I} n_i R_i \rightleftharpoons_{l}^{h} \sum_{j=I} n_i R_j \quad \text{avec } I \cup J = \{1, ..., p\} \text{ et } I \cap J = \varnothing, \tag{1.29}$$

où $n_1, n_2, ..., n_p$ sont respectivement les nombres de molécules des réactants $R_1, R_2, ..., R_p$ intervenants dans la réaction, les constantes h et l dépendent de la température, de la position x et du temps t. L'application de la loi de conservation de masse et de la seconde loi de Fick (flux) donne :

$$\begin{aligned} n_k \frac{\partial c_k}{\partial t} &= \nabla \cdot d_k \nabla c_k - h \prod_{i \in I} c_i^{n_i} + l \prod_{j \in J} c_j^{n_j}, \quad k \in I \\ &= \nabla \cdot d_k \nabla c_k + h \prod_{i \in I} c_i^{n_i} - l \prod_{j \in J} c_j^{n_j}, \quad k \in J \end{aligned} \tag{1.30}$$

où $c_1, c_2, ..., c_p$ représentent les concentrations des réactants $R_1, R_2, ..., R_p$ et $n_1, n_2, ..., n_p$ sont des constantes positives appelées ordres de $R_1, R_2, ..., R_p$ respectivement. Les constantes h et l sont positives.

Remarque 1.5 *La matrice diagonale D peut dépendre de t, x et u, comme elle peut ne pas etre diagonale (c'est le cas où la diffusion d'une espèce affecte le taux de production des autres).*

Pour l'ébullition de l'eau, par exemple, on prend dans (1.29)
$p = 3$, $I = \{1, 2\}$, $J = \{3\}$, $n_1 = n_3 = 2$ et $n_2 = 1$, $R_1 = hydrogène$, $R_2 = oxygène$ et $R_3 = l'eau$, on obtient la réaction classique :

$$2H_2 + O_2 \rightleftharpoons_l^h 2H_2O \tag{1.31}$$

Les équations décrivant cette réaction s'écrivent alors d'aprés (1.30) :

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial [H_2]}{\partial t} &= d_1 \triangle [H_2] - h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2 \\ \frac{\partial [O_2]}{\partial t} &= d_2 \triangle [O_2] - h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O] \qquad\qquad x \in \Omega,\ t > 0 \\ 2\frac{\partial [H_2O]}{\partial t} &= d_3 \triangle [H_2O] + h [H_2]^2 [O_2] - l [H_2O]^2 \end{aligned} \tag{1.32}$$

avec conditions aux bords appropriées par exemple

$$\frac{\partial [H_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial [O_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial [H_2O]}{\partial \eta} = 0,\ \ t > 0,\ x \in \partial\Omega$$

et conditions initiales positives (i.e)

$$[H_2]_{t=0} = [H_2]_0 > 0,\ \ [O_2]_{t=0} = [O_2]_0 > 0,\ \ [H_2O]_{t=0} = [H_2O]_0 > 0$$

Les coefficients h et l sont supposés des constantes positives, qu'ils peuvent dépendre de la température :

$$h,\ l \approx cT^{\beta} \exp - \left(\frac{E}{R} T \right),\ 1 \leq \beta \leq 2 \tag{1.33}$$

voir **S.L.Hollis**[25] ,**J.Morgan**[10] avec différentes conditions aux bords.

1.5.3 existence locale et l'unicité

Les normes usuelles dans les espaces $L^P(\Omega), L^\infty(\Omega)$ et $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ sont notées respectivement par :

$$\| u \|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega | u(x) |^p \, dx,$$

$$\| u \|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess \, | u(x) |$$

pour toute donnée initiale dans $\mathbb{C}(\bar{\Omega})$ ou dans $L^P(\Omega)$, $p \in]1, +\infty[$ l'existence locale et l'unicité de solutions du problème $(3.1.3)$ découlent de la théorie de base de l'existence pour les équations différentielles abstraites semi-linéaires (voir **A.Friedman**[1] **D.Henry** [6] et **A.Pazzy**[2]). Les solutions sont classiques sur $]0, T^*[$ où T^* est le temps maximal d'existence des solutions.

Chapitre 2

Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion diagonale

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion à matrice de diffusion de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f_1(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ v_t - b\Delta v = f_2(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ w_t - c\Delta w = f_3(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ z_t - d\Delta z = f_4(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

Définition 2.1 *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de n équations, toute fonction*

$$L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que $\dfrac{dL\left(u_1(t,.),...,u_n(t,.)\right)}{dt} \leq 0$ *, pour tout $t > 0$ et tout solution $(u_1(t,.),...,u_n(t,.))$.*

Dans ce paragraphe, on montre l'existence globale en temps des solutions (non nécessairement bornée) des systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique (systèmes (2.1)), avec conditions aux bords homogènes de Neumann (2.2) et conditions initiales positives (2.3). Ce sont des systèmes de réaction-diffusion dont la matrice de diffusion est diagonale. L'idée de la démonstration est basée sur une fonctionnelle polynomiale $L(t)$ de la forme :

$$t \longmapsto L(t) = \int_\Omega H_n(u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x))dx,$$

où

$$H_n(u,v,w,z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{n-k}$$

où

$\theta_1^{i^2}, \theta_2^{j^2}$ et $\theta_3^{k^2}$ sont trois suites numériques.

2.1 Construction de la fonctionnelle polynomiale

Considérons le système formé de quatre équations aux dérivées partielles du type réaction-diffusion :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f_1(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ v_t - b\Delta v = f_2(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ w_t - c\Delta w = f_3(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ z_t - d\Delta z = f_4(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{2.2}$$

et les données initiales :

$$u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x), w(0,x) = w_0(x), z(0,x) = z_0(x) \quad \text{sur } \Omega \tag{2.3}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, a, b, c et d sont des constantes positives. Les conditions initiales sont supposées être non négatives. Les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont continûment différentiables sur $\mathbb{R}_+^4$ avec

$$f_1(0,v,w,z) \geq 0, f_2(u,0,w,z) \geq 0, f_3(u,v,0,z) \geq 0, f_4(u,v,w,0) \geq 0$$

pour tout $u, v, w, z \geq 0$ et vérifient

$$(C_{11}f_1 + C_{12}f_2 + C_{13}f_3 + f_4)(u,v,w,z) \leq C_1(u+v+w+z+1) \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned} \mid f_1(u,v,w,z) \mid, \mid f_2(u,v,w,z) \mid \leq C_2(u+v+w+z+1)^m \text{ sur } [0\ T^*[\times\Omega \\ \mid f_3(u,v,w,z) \mid, \mid f_4(u,v,w,z) \mid \leq C_2(u+v+w+z+1)^m \text{ sur } [0\ T^*[\times\Omega \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_1, C_2$ des constantes strictement positives, m entier positif.
Soient

$$A = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}, B = \frac{a+c}{2\sqrt{ac}}, C = \frac{a+d}{2\sqrt{ad}},$$

$$D = \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}, E = \frac{b+d}{2\sqrt{bd}}, F = \frac{c+d}{2\sqrt{cd}}$$

Soient θ_1, θ_2 et θ_3 trois constantes positives telles que :

$$\theta_1 > A \tag{2.6}$$

$$(\theta_1^2 - A^2)(\theta_2^2 - D^2) > (B - AD)^2 \tag{2.7}$$

$$(\theta_1^2 - A^2)(\theta_2^2 - D^2)(\theta_3^2 - F^2) > (B - AD)^2 + (C - BE)^2 \tag{2.8}$$

Le résultat principal de cette section est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Voir (**N Boumaza and A Toualbia** [16]) Soit* $(u(t,.), v(t,.), w(t,.), z(t,.))$ *une solution positive de* $(2.1), (2.2)$ *et* (2.3)*, on introduit la fonctionnelle*

$$t \longmapsto L(t) = \int_{\Omega} H_n(u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x))dx, \tag{2.9}$$

où

$$H_n(u,v,w,z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{j^2} \theta_3^{k^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{n-k} \tag{2.10}$$

avec n un entier positif et $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Alors la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T]$.

Pour démontrer le théorème (2.1), nous avons besoin de quelques lemmes préparatoires.

Lemme 2.1 *Voir (**N Boumaza and A Toualbia** [16]) Soit* H_n *le polynôme homogène défini par* (2.10)*. Alors*

$$\frac{\partial H_n}{\partial u} = n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{(i+1)^2} \theta_2^{(j+1)^2} \theta_3^{(k+1)^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial v} = n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{(j+1)^2} \theta_3^{(k+1)^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial w} = n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+1)^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial z} = n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \tag{2.14}$$

Preuve. Voir (**A. Salem[4]**)
Dérivons H_n par rapport à u, nous obtenons

$$\frac{\partial H_n}{\partial u} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} iC_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} u^{i-1} v^{j-i} w^{k-j} z^{n-k}$$

En utilisant le fait que

$$iC_j^i = jC_{j-1}^{i-1},\ jC_k^j = kC_{k-1}^{j-1} \text{ et } kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \tag{2.15}$$

pour $i = 1, 2, ..., j$,$j = 1, 2, ..., k$ et $k = 1, 2, ...n$, on obtient

$$\frac{\partial H_n}{\partial u} = n\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} C_{n-1}^{k-1} C_{k-1}^{j-1} C_{j-1}^{i-1} \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} u^{i-1} v^{j-i} w^{k-j} z^{n-k}.$$

Si en changeant dans les sommes les indices $i-1, j-1$ et $k-1$ par i, j et k respectivement, on déduit (2.11).
Pour la formule (2.12), la dérivation de H_n par rapport à v donne

$$\frac{\partial H_n}{\partial v} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{j-1} (j-i) C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} u^{i-} v^{j-i-1} w^{k-j} z^{n-k}$$

En tenant compte de

$$\begin{cases} C_j^i = C_j^{j-i} & \text{pour } i = 0, ..., j-1, j = 1, ..., k \\ C_k^j = C_k^{k-j} & \text{pour } j = 0, ..., k-1, k = 1, ...n \end{cases} \tag{2.16}$$

En utilisant (2.15) et en changeant l'indice $j-1$ et $k-1$ par j et k respectivement, on obtient (2.12).
Pour la formule (2.13), la dérivation de H_n par rapport à w donne

$$\frac{\partial H_n}{\partial w} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j} (k-j) C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} u^{i-1} v^{j-i} w^{k-j-1} z^{n-k}.$$

Appliquons (2.16) et puis (2.15) et en changeant l'indice $k-1$ par k, on déduit (2.13).

Enfin, si nous dérivons H_n par rapport à z, nous obtenons

$$\frac{\partial H_n}{\partial z} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}(n-k)C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}u^{i-1}v^{j-i}w^{k-j}z^{n-k-1}.$$

Comme $(n-k)C_n^k = (n-k)C_n^{n-k} = nC_{n-1}^{n-k-1} = nC_{n-1}^k$, alors on déduit(2.14). ■

Lemme 2.2 *Voir (**N Boumaza and A Toualbia** [16]) Les dérivées partielles secondes de H_n sont données par*

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u^2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial v} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial w} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial z} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial v^2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial v\partial w} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial v\partial z} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w^2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w\partial z} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}u^i v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k} \tag{2.26}$$

Preuve. Voir (**A. Salem[4]**)

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial u}$, donnée par la formule (2.11) par tapport à u, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u^2}=n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} iC_{n-1}^{k}C_k^jC_j^i\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^{i-1}v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-1)-k}.$$

Utilisons (2.15), on déduit (2.17).

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial u}$, donnée par la formule (2.11) par rapport à v, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial v}=n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{j-1}(j-i)C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^i\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^{i}v^{j-i-1}w^{k-j}z^{(n-1)-k}.$$

Utilisons (2.15) et (2.16), et en changeant l'indice $j-1$ et $k-1$ par j et k respectivement, on obtient (2.18).

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial u}$, donnée par la formule (2.11) par rapport à w, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial w}=n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}(k-j)C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^i\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^{i}v^{j-i}w^{k-j-1}z^{(n-1)-k}$$

Utilisons (2.15) et (2.16),et en changeant l'indice $k-1$ par k, on obtient (2.19).

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial u}$, donnée par la formule (2.11) par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial z}=n\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}(n-k-1)C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^i\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^{i}v^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k}$$

Comme $(n-1-k)C_{n-1}^k=(n-1-k)C_{n-1}^{n-1-k}=(n-1)C_{n-2}^{n-2-k}=(n-1)C_{n-2}^k$, on déduit (2.20).

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial v}$, donnée par la formule (2.12) par rapport à v, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial v^2}=n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{j-1}(j-i)C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^i\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^{i}v^{j-i-1}w^{k-j}z^{(n-1)-k}.$$

En utilisant (2.16) et puis (2.15), et en changeant l'indice $j-1$ et $k-1$ par j et k respectivement, on obtient (2.21).

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial v}$, donnée par la formule (2.12), par rapport à w, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial v\partial w}=n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}(k-j)C_{n\ -1}^{k}C_k^jC_j^i\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}u^{i}v^{j-i}w^{k-j-1}z^{(n-1)-k}$$

En utilisant (2.16) et puis (2.15) et en changeant l'indice $k-1$ par k, on obtient (2.22).

Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial v}$, donnée par la formule (2.12), par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial v \partial z} = n \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} (n-1-k) C_{n\ -1}^{k} C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{j^2} \theta_3^{k^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-2)-k}$$

Comme $(n-1-k)C_{n-1}^{k} = (n-1-k)C_{n-1}^{n-1-k} = (n-1)C_{n-2}^{n-2-k} = (n-1)C_{n-2}^{k}$, on obtient (2.23).
Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial w}$, donnée par la formule (2.13), par rapport à w, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w^2} = n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j} (k-j) C_{n\ -1}^{k} C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{j^2} \theta_3^{(k+1)^2} u^i v^{j-i} w^{k-j-1} z^{(n-1)-k}$$

En utilisant (2.16) et puis (2.15) et en changeant l'indice $k-1$ par k, on obtient (2.24).
Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial w}$, donnée par la formule (2.13), par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial w \partial z} = n \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} (n-1-k) C_{n\ -1}^{k} C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{j^2} \theta_3^{(k+1)^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-2)-k}$$

Comme $(n-1-k)C_{n-1}^{k} = (n-1-k)C_{n-1}^{n-1-k} = (n-1)C_{n-2}^{n-2-k} = (n-1)C_{n-2}^{k}$, on obtient (2.25).
Dérivons $\dfrac{\partial H_n}{\partial z}$, donnée par la formule (2.14), par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} = n \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} (n-k-1) C_{n\ -1}^{k} C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2} \theta_2^{j^2} \theta_3^{k^2} u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-2)-k}$$

Comme $(n-1-k)C_{n-1}^{k} = (n-1-k)C_{n-1}^{n-1-k} = (n-1)C_{n-2}^{n-2-k} = (n-1)C_{n-2}^{k}$, alors on déduit (2.26). ■

Preuve. [Preuve du théorème (2.1)] Dérivons $L(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial H_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} dx \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(a\frac{\partial H_n}{\partial u}\triangle u + b\frac{\partial H_n}{\partial v}\triangle v + c\frac{\partial H_n}{\partial w}\triangle w + d\frac{\partial H_n}{\partial z}\triangle z \right) dx \\ &\quad + \int_\Omega \left(f_1\frac{\partial H_n}{\partial u} + f_2\frac{\partial H_n}{\partial v} + f_3\frac{\partial H_n}{\partial w} + f_4\frac{\partial H_n}{\partial z} \right) dx \end{aligned}$$

$$L'(t) = I + J$$

Où

$$I = \int_\Omega \left(a\frac{\partial H_n}{\partial u}\triangle u + b\frac{\partial H_n}{\partial v}\triangle v + c\frac{\partial H_n}{\partial w}\triangle w + d\frac{\partial H_n}{\partial z}\triangle z \right) dx.$$

$$J=\int_{\Omega}\left(f_1\frac{\partial H_n}{\partial u}+f_2\frac{\partial H_n}{\partial v}+f_3\frac{\partial H_n}{\partial w}+f_4\frac{\partial H_n}{\partial z}\right)dx.$$

En appliquant la formule de Green à la première intégrale, on obtient $I=I_1+I_2$, où

$$I_1=\int_{\partial\Omega}\left(a\frac{\partial H_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta}+b\frac{\partial H_n}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta}+c\frac{\partial H_n}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \eta}+d\frac{\partial H_n}{\partial z}\frac{\partial z}{d\eta}\right)d\sigma.$$

$$\begin{aligned}I_2=-\int_{\Omega}\Bigg[&a\frac{\partial^2 H_n}{\partial u^2}\mid\nabla u\mid^2+b\frac{\partial^2 H_n}{\partial v^2}\mid\nabla v\mid^2+c\frac{\partial^2 H_n}{\partial w^2}\mid\nabla w\mid^2+d\frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2}\mid\nabla z\mid^2\\&+(a+b)\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial v}\nabla u\nabla v+(a+c)\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial w}\nabla u\nabla w+(a+d)\frac{\partial^2 H_n}{\partial u\partial z}\nabla u\nabla z\\&+(b+c)\frac{\partial^2 H_n}{\partial v\partial w}\nabla v\nabla w+(b+d)\frac{\partial^2 H_n}{\partial v\partial z}\nabla v\nabla z+(c+d)\frac{\partial^2 H_n}{\partial w\partial z}\nabla w\nabla z\Bigg]dx\end{aligned}$$

Alors $I_1=0$ sur $[0,T^*]$, maintenant nous prouvons $I_2\leq 0$. En appliquant le lemme (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}I_2=-n(n-1)\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}&C_{n-2}^{k}C_k^jC_j^iu^iv^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k}\\\times\Big[&a\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}\mid\nabla u\mid^2+b\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}\mid\nabla v\mid^2+c\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2}\mid\nabla w\mid^2\\&+d\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}\mid\nabla z\mid^2+(a+b)\,\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}\nabla u\nabla v+(a+c)\,\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}\nabla u\nabla w\\&+(a+d)\,\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}\nabla u\nabla z+(b+c)\,\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2}\nabla v\nabla w+(b+d)\,\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}\nabla v\nabla z\\&+(c+d)\,\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2}\nabla w\nabla z\Big]dx.\end{aligned}$$

$$I_2=-n(n-1)\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^{k}C_k^jC_j^iu^iv^{j-i}w^{k-j}z^{(n-2)-k}\left(TB_{ijk}\right)T^tdx. \tag{2.27}$$

Où

$$B_{ijk}=\begin{bmatrix}a\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{a+b}{2}\right)a_{12} & \left(\frac{a+c}{2}\right)a_{13} & \left(\frac{a+d}{2}\right)a_{14}\\ \left(\frac{a+b}{2}\right)a_{12} & b\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{b+c}{2}\right)a_{23} & \left(\frac{b+d}{2}\right)a_{24}\\ \left(\frac{a+c}{2}\right)a_{13} & \left(\frac{b+c}{2}\right)a_{23} & c\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{c+d}{2}\right)a_{34}\\ \left(\frac{a+d}{2}\right)a_{14} & \left(\frac{b+d}{2}\right)a_{24} & \left(\frac{c+d}{2}\right)a_{34} & d\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}\end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Où

$$a_{12}=\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2},a_{13}=\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2},a_{14}=\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2},$$
$$a_{23}=\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2},a_{24}=\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2},a_{34}=\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+1)^2}$$

Pour $i=0,1,...,j$, $j=0,1,...,k$, et $k=0,1,...,n-2$, et $T=(\nabla u,\nabla v,\nabla w,\nabla z)$. Les formes quadratiques (par rapport aux $\nabla u,\nabla v,\nabla w$ et ∇z) associées aux matrice B_{ijk} sont positives, puisque leurs déterminant principaux successifs $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3$ et $\triangle_4$ sont aussi, selon critère de sylvister. Pour voir ceci, nous avons :

1· $\triangle_1 = a\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} > 0,$

Pour $i = 0, 1, ..., j$, $j = 0, 1, ..., k$, et $k = 0, 1, ..., n-2$.

2·
$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{a+b}{2}\right)a_{12} \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)a_{12} & b\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} \end{vmatrix}$$
$$= ab\theta_1^{2(i+1)^2}\theta_2^{2(j+2)^2}\theta_3^{2(k+2)^2}(\theta_1^2 - A^2)$$

Pour $i = 0, 1, ..., j$, $j = 0, 1, ..., k$, et $k = 0, 1, ..., n-2$.

En utilisant (2.6) on obtient $\triangle_2 > 0$.

3·
$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} a\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{a+b}{2}\right)a_{12} & \left(\frac{a+c}{2}\right)a_{13} \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)a_{12} & b\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{b+c}{2}\right)a_{23} \\ \left(\frac{a+c}{2}\right)a_{13} & \left(\frac{b+c}{2}\right)a_{23} & c\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2} \end{vmatrix}$$
$$= abc\theta_1^{2(i+1)^2}\theta_1^{2(i+2)^2}\theta_2^{2(j+1)^2}\theta_2^{2(j+2)^2}\theta_3^{2(k+2)^2}\theta_3^{k^2}\left[\left(\theta_1^2 - A^2\right)\left(\theta_2^2 - D^2\right) - (B - AD)^2\right].$$

Pour $i = 0, 1, ..., j$, $j = 0, 1, ..., k$, et $k = 0, 1, ..., n-2$.

En utilisant (2.7) on obtient $\triangle_3 > 0$.

4·
$$\triangle_4 = \mid B_{ijk} \mid$$
$$= abcd\theta_1^{2(i+1)^2}\theta_1^{2(i+2)^2}\theta_2^{2(j+1)^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{2(k+2)^2}\theta_3^{k^2}$$
$$\times \left[\left(\theta_1^2 - A^2\right)\left(\theta_2^2 - D^2\right)\left(\theta_3^2 - F^2\right) - (B - AD)^2 - (C - BE)^2\right]$$

Pour $i = 0, 1, ..., j$, $j = 0, 1, ..., k$, et $k = 0, 1, ..., n-2$.

En utilisant (2.8) on obtient $\triangle_4 > 0$. Par conséquent, nous avons $I_2 \leq 0$.

Concernant le terme J, nous substituons les expressions des dérivées partielles données par le lemme (2.1) dans la deuxième intégrale, nous obtenons :

$$J = \int_\Omega \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \right)$$
$$\times \left(\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2} f_1 + \theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2} f_2 + \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+1)^2} f_3 + \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} f_4 \right) dx.$$

$$J = \int_\Omega \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \right)$$
$$\times \left(\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}} \frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}} \frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}} f_1 + \frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}} \frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}} f_2 + \frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}} f_3 + f_4 \right) \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} dx.$$

En utilisant la condition (2.4), il résulte que :

$$J \leq C_3 \int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \left(u+v+w+z+1\right) \right) dx$$

Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} C_{n-1}^k C_k^j C_j^i u^i v^{j-i} w^{k-j} z^{(n-1)-k} \left(u+v+w+z+1\right) = R_n\left(u,v,w,z\right) + S_{n-1}\left(u,v,w,z\right)$$

Où $R_n\left(u,v,w,z\right)$ et $S_{n-1}\left(u,v,w,z\right)$ sont deux polynômes homogènes de dégrées n, $n-1$ respectivement.

Puisque les polynômes H_n et R_n sont les deux de degré n, il existe une constante positive C_4 telle que :

$$\int_\Omega R_n(u,v,w,z)dx \leq C_4 \int_\Omega H_n(u,v,w,z)dx \tag{2.29}$$

Pour majorer la deuxième polynôme $S_{n-1}(u,v,w,z)$, utilisons l'inégalité de Hôlder. Donc

$$\int_\Omega S_{n-1}(u,v,w,z)dx = \int_\Omega 1 \cdot S_{n-1}(u,v,w,z)dx$$

$$\leq \left[\int_\Omega 1dx\right]^{\frac{1}{n}} \left[\int_\Omega \left(S_{n-1}(u,v,w,z)\right)^{\frac{n}{n-1}} dx\right]^{\frac{n-1}{n}}$$

Comme

$$\frac{\left(S_{n-1}(u,v,w,z)\right)^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(u,v,w,z)} = \frac{\left(S_{n-1}(x,y,e,1)\right)^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(x,y,e,1)}$$

Pour $u \geq 0$ et $v,w,z > 0$ où $x = \frac{u}{z}$, $y = \frac{v}{z}$, $e = \frac{w}{z}$ et

$$\lim_{x,y,e \longmapsto +\infty} \frac{\left(S_{n-1}(x,y,e,1)\right)^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(x,y,e,1)} < +\infty$$

Alors il existe une constante positive C_5 telle que

$$\frac{\left(S_{n-1}(u,v,w,z)\right)^{\frac{n}{n-1}}}{H_n(u,v,w,z)} \leq C_5 \qquad \text{pour tout } u,v,w,z \geq 0$$

Alors

$$\left(S_{n-1}(u,v,w,z)\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq C_5 H_n(u,v,w,z) \tag{2.30}$$

de (2.29) et (2.30), il est aisé de voir que :

$$L'(t) \leq C_6 L(t) + C_7 L^{\frac{n-1}{n}}(t)$$

C_6 et C_7 deux constantes positives, posons

$$M = L^{\frac{1}{n}}$$

On obtient :

$$nM'M^{n-1} \leq C_6 M^n + C_7 M^{n-1}$$

d'où

$$nM' \leq C_6 M + C_7$$

La solution de cette inégalité différentielle est majorée par la formule

$$M(t) \leq \left(M(0) + \frac{C_7}{C_6} \right) e^{\frac{C_6}{n}} - \frac{C_7}{C_6}$$

Ainsi, la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T]$, ce qui termine la preuve du théorème (2.1). ■

2.2 Conséquences de la construction

Théorème 2.2 *On suppose que les fonctions $f_1(u, v, w, z), f_2(u, v, w, z)$, $f_3(u, v, w, z)$,$f_4(u, v, w, z)$ sont continûment différentiables sur $\mathbb{R}_+^4$ et vérifient la condition* (2.4)*, alors les solutions positives du problèmes* $(2.1), (2.2), (2.3)$ *appartiennent à l'espace* $L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$.

Preuve. Supposons d'abord $p \in \mathbb{N}^*$, il est évident que :

$$\int_\Omega (u(t,x) + v(t,x) + w(t,x) + z(t,x))^p \, dx \leq L(t) \qquad \text{sur } [0, T^*[\,,$$

et comme $L(t)$ est bornée, alors il existe une constante C_1 telle que

$$\int_\Omega (u(t,x) + v(t,x) + w(t,x) + z(t,x))^p \, dx \leq C_1 \qquad \text{sur } [0, T^*[\,,$$

ce qui implique $u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$.
Reste dans le cas où p est réel, utilisons l'inégalité de Hôlder

$$\int_\Omega (u(t,x) + v(t,x) + w(t,x) + z(t,x))^p \, dx \leq (mes\Omega)^{\frac{r-p}{r}} \left(\int_\Omega (u(t,x) + v(t,x) + w(t,x) + z(t,x))^r \right)^{\frac{p}{r}},$$

où r est le premier entier supérieur à p, et donc

$$\int_\Omega (u(t,x) + v(t,x) + w(t,x) + z(t,x))^p \, dx \leq C_2 \, (L(t))^{\frac{p}{r}}$$
$$\leq C_3.$$

■

Proposition 2.1 *Si les seconds membres f_1, f_2, f_3, f_4, remplissent les condition* (2.4)*, alors la solution du système* (2.1) *vérifiant les conditions initiales* (2.2) *et aux limites* (2.3)*, existe pour tout* $t > 0$.

Preuve. Soit $mp > \dfrac{mn}{2}$, d'après (Théorème (2.2)), il existe une constante C_2 telle que

$$\int_\Omega (u(t,x) + v(t,x) + w(t,x) + z(t,x) + 1)^{mp}\, dx \leq C_2 \qquad \text{sur } [0, T^*[\,, \tag{2.31}$$

et grâce à la condition (2.5), il s'ensuit que

$$\int_\Omega \mid f_1(u,v,w,z) \mid^p \leq C_3$$

par conséquent

$$f_1\left(u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x)\right) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega)).$$

De façon analogue, utilisant les formules (2.4), (2.5) et (2.31), on obtient

$$f_2\left(u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x)\right), f_3(u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x)) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$$

et

$$f_4\left(u(t,x), v(t,x), w(t,x), z(t,x)\right) \in L^\infty(0, T, L^p(\Omega)).$$

D'autre part, d'après (2.5) on a

$$\left.\begin{array}{l} \mid f_1(u,v,w,z) \mid^{\frac{p}{m}}, \mid f_2(u,v,w,z) \mid^{\frac{p}{m}} \\ \mid f_3(u,v,w,z) \mid^{\frac{p}{m}}, \mid f_4(u,v,w,z) \mid^{\frac{p}{m}} \end{array}\right\} \leq C_4(u+v+w+z+1)^p \qquad \text{sur } [0, T^*[\, \times \Omega.$$

Comme u, v, w, z sont dans $L^\infty(0, T, L^p(\Omega))$, alors la solution du système (2.1) vérifiant les conditions initiales (2.2) et aux limites (2.3), existe globalement. ■

Chapitre 3

Existence globale pour les S-R-D à matrice de diffusion pleine

Nous nous intéresserons dans ce chapitre l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion à matrice de diffusion pleine sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u - b\Delta v - c\Delta w - d\Delta z = f_1(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ v_t - c\Delta u - a\Delta v - b\Delta z \qquad\qquad = f_2(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ w_t - b\Delta u - a\Delta w - c\Delta z \qquad\qquad = f_3(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ z_t - d\Delta u - c\Delta v - b\Delta w - a\Delta z = f_4(u,v,w,z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \tag{3.2}$$

et les donnée initiales :

$$u(0,x) = u_0(x), v(0,x) = v_0(x), w(0,x) = w_0(x), z(0,x) = z_0(x) \tag{3.3}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, a, b, c et d sont des constantes positives vérifiant la condition $(a + \frac{1}{2}(d-\mu))(a-d) \geq 0$ (la parabolicité du système) qui implique en même temps que la matrice de diffusion :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & 0 & b \\ b & 0 & a & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

est définie positive et aussi que les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 de A^t sont positives. Les conditions initiales sont supposées être non négatives et dans la region

$$\sum = \begin{cases} (u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \end{cases} \\ \\ (u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

on va traiter le premier cas de $\sum$, nous pouvons utiliser la même méthode pour traiter le $2^{ème}$ cas.
où

$$\mu = \sqrt{4b^2 + 8bc + 4c^2 + d^2}$$

les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, non négative sur $\sum$ avec

$$(-f_1 - \frac{2(b-c)}{d+\mu}(f_2 - f_3) + f_4)(-\frac{2(b-c)}{d+\mu}(v-w) + z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.4}$$

$$(-f_1 - \frac{2(b-c)}{d-\mu}(f_2 - f_3) + f_4)(-\frac{2(b-c)}{d-\mu}(v-w) + z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.5}$$

$$(f_1 + \frac{2(b+c)}{d-\mu}(f_2 + f_3) + f_4)(-\frac{2(b+c)}{d-\mu}(v+w) - z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.6}$$

$$(f_1 + \frac{2(b+c)}{d+\mu}(f_2 + f_3) + f_4)(-\frac{2(b+c)}{d+\mu}(v+w) - z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.7}$$

et vérifient

$$(C_{11}f_1 + C_{12}f_2 + C_{13}f_3 + f_4)(u, v, w, z) \leq C_1(u + v + w + z + 1) \tag{3.8}$$

pour tout $u, v, w, z \geq 0$ et $C_1, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ sont des constantes positives telle que $C_{11}, C_{12}, C_{13} \leq 1$

le système (3.1) peut recopier sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \\ z_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & 0 & b \\ b & 0 & a & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(u,v,w,z) \\ f_2(u,v,w,z) \\ f_3(u,v,w,z) \\ f_4(u,v,w,z) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & 0 & b \\ b & 0 & a & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

est la matrice de diffusion.

3.1 Construction d'une région invariante

Dans ce section, notre objectif est de prouver que la région $\sum$ citée au-dessus est invariante. Introduisons le système diagonal :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - d_1 \Delta U = F_1(U,V,W,Z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} - d_2 \Delta V = F_2(U,V,W,Z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} - d_3 \Delta W = F_3(U,V,W,Z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} - d_4 \Delta Z = F_4(U,V,W,Z) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0 \qquad sur \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

et les données initiales :

$$U(0,x) = U_0(x) \geq 0, V(0,x) = V_0(x) \geq 0, W(0,x) = W_0(x) \geq 0, Z(0,x) = Z_0(x) \geq 0 \;\; sur \Omega$$

où $F_i : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de class C^1 ; $d_1, d_2, d_3, d_4 > 0$. Supposons que les fonctions $(F_i)_{i=1,4}$ sont quasi positive, c-à-d

$$\forall U, V, W, Z \geq 0, F_1(0,V,W,Z), F_2(U,0,W,Z), F_3(U,V,0,Z), F_4(U,V,W,0) \geq 0$$

Lemme 3.1 *Si les fonctions* $(F_i)_{i=1,4}$ *sont quasi positive alors :*

$$U_0(x), V_0(x), W_0(x), Z_0(x) \geq 0 \Longrightarrow U(t,x), V(t,x), W(t,x), Z(t,x) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0, T^*[$$

Preuve. *Voir (A. Friedman [1]).* ■

Proposition 3.1 *Voir* ***(A. Salem[3])*** *Supposons que les hypothèses* $(3.4), (3.5), (3.6), (3.7)$ *sont satisfaites, alors pour tout* (u_0, v_0, w_0, z_0) *dans* $\sum$ *la solution* (u, v, w, z) *du problème* $(3.1), (3.2), (3.3)$ *reste dans* $\sum$ *pour tout* $t \in [0\ T^*[$

Preuve. Le système $(3.1), (3.2), (3.3)$ peut recopier sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & 0 & b \\ b & 0 & a & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

La matrice de diffusion A est pleine,

$$\begin{cases} \lambda_1 = (a - \frac{1}{2}(d+\mu)) \\ \lambda_2 = (a - \frac{1}{2}(d-\mu)) \\ \lambda_3 = (a + \frac{1}{2}(d-\mu)) \\ \lambda_4 = (a + \frac{1}{2}(d+\mu)) \end{cases}$$

sont les vecteurs propre de A^t, et

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2(b-c)}{d+\mu} \\ \frac{2(b-c)}{d+\mu} \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2(b-c)}{d-\mu} \\ \frac{2(b-c)}{d-\mu} \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(b+c)}{d+\mu} \\ \frac{2(b+c)}{d+\mu} \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(b+c)}{d-\mu} \\ \frac{2(b+c)}{d-\mu} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés aux valeurs propre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 respectivement.
On va transformer le système $(3.1), (3.2), (3.3)$ à un système dont la matrice de diffusion est diagonale, pour cela

-En multipliant successivement la première équation dans (3.1) par -1, la deuxième équation par $-\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}$, la troisième équation par $\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}$, et la quatrième équation par 1, et additionnons les équations résultantes, on obtient la première équation dans $(3.1)^*$.

-En multipliant successivement la première équation dans (3.1) par -1, la deuxième équation par $-\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}$, la troisième équation par $\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}$, et la quatrième équation par 1, et additionnons les équations résultantes, on obtient la deuxième équation dans $(3.1)^*$.

-En multipliant successivement la première équation dans (3.1) par 1, la deuxième équation et la troisième équation par $\dfrac{2(b+c)}{d+\mu}$, et la quatrième équation par 1, et additionnons les équations résultantes, on obtient la troisième équation dans $(3.1)^*$.

-En multipliant successivement la première équation dans (3.1) par 1, la deuxième équation et la troisième équation par $\dfrac{2(b+c)}{d-\mu}$, et la quatrième équation par 1, et additionnons les équations résultantes, on obtient la quatrième équation dans $(3.1)^*$.

-additionnons les équations dans (3.1), on obtient la deuxième équation dans $(3.1)^*$

$$\left\{\begin{array}{ll} U_t - (a - \frac{1}{2}(d+\mu))\Delta U = F_1(U,V,W,Z) & \text{sur }]0\ T^*[\times\Omega \\ V_t - (a - \frac{1}{2}(d-\mu))\Delta V = F_2(U,V,W,Z) & \text{sur }]0\ T^*[\times\Omega \\ W_t - (a + \frac{1}{2}(d-\mu))\Delta W = F_3(U,V,W,Z) & \text{sur }]0\ T^*[\times\Omega \\ Z_t - (a + \frac{1}{2}(d+\mu))\Delta Z = F_4(U,V,W,Z) & \text{sur }]0\ T^*[\times\Omega \end{array}\right. \tag{3.1*}$$

avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur }]0\ T^*[\times\partial\Omega \tag{3.2*}$$

et les données initiales :

$$U(0,x) = U_0(x), V(0,x) = V_0(x), W(0,x) = W_0(x), Z(0,x) = Z_0(x) \ \text{ sur } \Omega \tag{3.3*}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} U(t,x) = -u(t,x) + \dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(w(t,x) - v(t,x)) + z(t,x) \\ V(t,x) = -u(t,x) + \dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(w(t,x) - v(t,x)) + z(t,x) \\ W(t,x) = u(t,x) + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(w(t,x) + v(t,x)) + z(t,x) \\ Z(t,x) = u(t,x) + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(w(t,x) + v(t,x)) + z(t,x) \end{array}\right. \tag{3.9}$$

pour tout $(t,x) \in]0, T^*[\times\Omega$

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(U,V,W,Z) = (-f_1 + \dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(f_3 - f_2) + f_4)(u,v,w,z) \\ F_2(U,V,W,Z) = (-f_1 + \dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(f_3 - f_2) + f_4)(u,v,w,z) \\ F_3(U,V,W,Z) = (f_1 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(f_3 + f_2) + f_4)(u,v,w,z) \\ F_4(U,V,W,Z) = (f_1 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(f_3 + f_2) + f_4)(u,v,w,z) \end{array}\right. \tag{3.10}$$

pour tout (u,v,w,z) dans $\sum$.

Il faut noter que la condition de la parabolicité du système $(3.1), (3.2), (3.3)$ implique aussi la parabolicité du système $(3.1)^{*}, (3.2)^{*}, (3.3)^{*}$, puisque $(a+\frac{1}{2}(d-\mu))(a-d)\geq 0 \Longrightarrow (a+\frac{1}{2}(d-\mu))>0, (a-\frac{1}{2}(d+\mu))>0$ et $(a-\frac{1}{2}(d-\mu))>0$.
Pour prouver que (u,v,w,z) reste dans $\sum$, il suffit de prouver que la région

$$\{(U_0,V_0,W_0,Z_0) : U_0\geq 0, V_0\geq 0, W_0\geq 0, Z_0\geq 0\} = \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$$

est invariante pour le système $(3.1)^{*}, (3.2)^{*}, (3.3)^{*}$.
On peut voir facilement que sous les hypothèses $(3.4), (3.5), (3.6), (3.7)$, on a $F_1(0,V,W,Z)\geq 0$, $\forall V,W,Z\geq 0$; $F_2(U,0,W,Z)\geq 0, \forall U,W,Z\geq 0$;
$F_3(U,V,0,Z)\geq 0, \forall U,V,Z\geq 0$ et $F_4(U,V,W,0)\geq 0, \forall U,V,W\geq 0$ donc d'après la proposition (3.1), la région est invariante. ■

3.2 Existence globale

Comme le déterminant du système algébrique (3.9) est différent de zéro, alors pour prouver l'existence globale du système $(3.1), (3.2), (3.3)$ (dépend de u,v,w,z dont la matrice de diffusion est pleine) il suffit de le prouver pour le système $(3.1)^{*}, (3.2)^{*}, (3.3)^{*}$(dépend de U,V,W,Z dont la matrice de diffusion est diagonale).
D'après (Théorème de l'effet régularisant), pour démontrer l'existence globale des solution d'un système de réaction diffusion, il suffit de monter que les termes de réactions sont dans $L^{\infty}(0,T;L^{p}(\Omega))$ pour un certain $p>\frac{n}{2}$. La méthode suivie pour appliquer ce théorème, est basée sur la construction d'une fonctionnelle de lyapunov

$$L(t)=\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}U^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{n-k}dx$$

où $\theta_1^{i^2}, \theta_2^{j^2}$ et $\theta_3^{k^2}$ sont trois suites numériques.
Considérons le système $(3.1)^{*}$ avec les conditions aux bords $(3.2)^{*}$ et les données initiales $(3.3)^{*}$.
Soient

$$A_{12}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, A_{13}=\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_3}}, A_{14}=\frac{\lambda_1+\lambda_4}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_4}},$$

$$A_{23}=\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}, A_{24}=\frac{\lambda_2+\lambda_4}{2\sqrt{\lambda_2\lambda_4}}, A_{34}=\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2\sqrt{\lambda_3\lambda_4}},$$

Soient θ_1, θ_2 et θ_3 trois constantes positives telles que :

$$\theta_1 > A_{12} \tag{3.11}$$

$$(\theta_1^2 - A_{12}^2)(\theta_2^2 - A_{23}^2) > (A_{13} - A_{12}A_{23})^2 \tag{3.12}$$

$$(\theta_1^2 - A_{12}^2)(\theta_2^2 - A_{23}^2)(\theta_3^2 - A_{34}^2) > (A_{13} - A_{12}A_{23})^2 + (A_{14} - A_{13}A_{24})^2 \tag{3.13}$$

Théorème 3.1 *Soient $U(t,.), V(t,.), W(t,.), Z(t,.)$ sont la solution du $(3.1)^*, (3.2)^*, (3.3)^*$, on introduit la fonctionnelle*

$$t \longmapsto L(t) = \int_\Omega H_n(U(t,x), V(t,x), W(t,x), Z(t,x))dx,$$

où

$$H_n(U,V,W,Z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} C_n^k C_k^j C_j^i \theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2} U^i V^{j-i} W^{k-j} Z^{n-k}$$

avec n un entier positif et $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
alors, la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$,$T^* < T_{\max}$

Preuve. Dérivons $L(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \int_\Omega (\frac{\partial H_n}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial H_n}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t})dx \\
&= \int_\Omega (\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial U}\Delta U + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial V}\Delta V + \lambda_3 \frac{\partial H_n}{\partial W}\Delta W + \lambda_4 \frac{\partial H_n}{\partial Z}\Delta Z)dx \\
&\quad + \int_\Omega (F_1 \frac{\partial H_n}{\partial U} + F_2 \frac{\partial H_n}{\partial V} + F_3 \frac{\partial H_n}{\partial W} + F_4 \frac{\partial H_n}{\partial Z})dx \\
&= I + J
\end{aligned}$$

où

$$I = \int_\Omega (\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial U}\Delta U + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial V}\Delta V + \lambda_3 \frac{\partial H_n}{\partial W}\Delta W + \lambda_4 \frac{\partial H_n}{\partial Z}\Delta Z)dx$$

$$J = \int_\Omega (F_1 \frac{\partial H_n}{\partial U} + F_2 \frac{\partial H_n}{\partial V} + F_3 \frac{\partial H_n}{\partial W} + F_4 \frac{\partial H_n}{\partial Z})dx.$$

En appliquant la formule de Green à la première intégrale, on obtient $I = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_1 \frac{\partial H_n}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial H_n}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \lambda_3 \frac{\partial H_n}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \eta} + \lambda_4 \frac{\partial H_n}{\partial Z}\frac{\partial Z}{d\eta}\right) d\sigma.$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = -\int_{\Omega}\Big[&\lambda_1\frac{\partial^2 H_n}{\partial U^2}\mid\nabla U\mid^2+\lambda_2\frac{\partial^2 H_n}{\partial V^2}\mid\nabla V\mid^2+\lambda_3\frac{\partial^2 H_n}{\partial W^2}\mid\nabla W\mid^2+\lambda_4\frac{\partial^2 H_n}{\partial Z^2}\mid\nabla Z\mid^2\\
&+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 H_n}{\partial U\partial V}\nabla U\nabla V+(\lambda_1+\lambda_3)\frac{\partial^2 H_n}{\partial U\partial W}\nabla U\nabla W+(\lambda_1+\lambda_4)\frac{\partial^2 H_n}{\partial U\partial Z}\nabla U\nabla Z\\
&+(\lambda_2+\lambda_3)\frac{\partial^2 H_n}{\partial V\partial W}\nabla V\nabla W+(\lambda_2+\lambda_4)\frac{\partial^2 H_n}{\partial V\partial Z}\nabla V\nabla Z+(\lambda_3+\lambda_4)\frac{\partial^2 H_n}{\partial W\partial Z}\nabla W\nabla Z\Big]dx
\end{aligned}
$$

Alors $I_1 = 0$ sur $[0,T^*]$, maintenant nous prouvons $I_2 \leq 0$. En appliquant le lemme (2.2), (avec remplaçant u,v,w,z par U,V,W,Z respectivement), on obtient

$$
I_2 = -n(n-1)\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-2}^{k}C_k^jC_j^iU^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{(n-2)-k}\left[TB_{ijk}\right]T^t dx
$$

Où

$$
B_{ijk}=\begin{bmatrix}
\lambda_1\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)a_{12} & \left(\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}\right)a_{13} & \left(\frac{\lambda_1+\lambda_4}{2}\right)a_{14}\\
\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)a_{12} & \lambda_2\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)a_{23} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_4}{2}\right)a_{24}\\
\left(\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}\right)a_{13} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)a_{23} & \lambda_3\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{\lambda_3+\lambda_4}{2}\right)a_{34}\\
\left(\frac{\lambda_1+\lambda_4}{2}\right)a_{14} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_4}{2}\right)a_{24} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_4}{2}\right)a_{34} & \lambda_4\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}
\end{bmatrix}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
a_{12}=\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2},\ a_{13}=\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2},\ a_{14}=\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2},\\
a_{23}=\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+2)^2},\ a_{24}=\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2},\ a_{34}=\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+1)^2}
\end{aligned}
$$

Pour $i=0,1,...,j$, $j=0,1,...,k$, et $k=0,1,...,n-2$, et $T=(\nabla u,\nabla v,\nabla w,\nabla z)$. Les formes quadratiques (par rapport aux $\nabla u,\nabla v,\nabla w$ et ∇z) associées aux matrice B_{ijk} sont positives, puisque leurs déterminant principaux successifs $\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3$ et $\triangle_4$ sont aussi, selon critère de sylvister. Pour voir ceci, nous avons :

1· $\triangle_1=\lambda_1\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}>0,$

Pour $i=0,1,...,j$, $j=0,1,...,k$, et $k=0,1,...,n-2.$

2·

$$
\triangle_2=\begin{vmatrix}
\lambda_1\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)a_{12}\\
\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)a_{12} & \lambda_2\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda_1\lambda_2\theta_1^{2(i+1)^2}\theta_2^{2(j+2)^2}\theta_3^{2(k+2)^2}(\theta_1^2-A_{12}^2)
$$

Pour $i=0,1,...,j$, $j=0,1,...,k$, et $k=0,1,...,n-2.$

En utilisant (3.11) on obtient $\triangle_2>0$.

3·

$$
\triangle_3=\begin{vmatrix}
\lambda_1\theta_1^{(i+2)^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)a_{12} & \left(\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}\right)a_{13}\\
\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)a_{12} & \lambda_2\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+2)^2}\theta_3^{(k+2)^2} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)a_{23}\\
\left(\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}\right)a_{13} & \left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)a_{23} & \lambda_3\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+2)^2}
\end{vmatrix}
$$

$$= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\theta_1^{2(i+1)^2}\theta_1^{2(i+2)^2}\theta_2^{2(j+1)^2}\theta_2^{2(j+2)^2}\theta_3^{2(k+2)^2}\theta_3^{k^2}\left[\left(\theta_1^2-A_{12}^2\right)\left(\theta_2^2-A_{23}^2\right)-\left(A_{13}-A_{12}A_{23}\right)^2\right].$$

Pour $i=0,1,...,j$, $j=0,1,...,k$, et $k=0,1,...,n-2$.

En utilisant (3.12) on obtient $\triangle_3>0$.

4.

$$\triangle_4 = \mid B_{ijk} \mid$$
$$= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\theta_1^{2(i+1)^2}\theta_1^{2(i+2)^2}\theta_2^{2(j+1)^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{2(k+2)^2}\theta_3^{k^2}$$
$$\times\left[\left(\theta_1^2-A_{12}^2\right)\left(\theta_2^2-A_{23}^2\right)\left(\theta_3^2-A_{34}^2\right)-\left(A_{13}-A_{12}A_{23}\right)^2-\left(A_{14}-A_{13}A_{24}\right)^2\right]$$

Pour $i=0,1,...,j$, $j=0,1,...,k$, et $k=0,1,...,n-2$.

En utilisant (3.13) on obtient $\triangle_4>0$. Par conséquent, nous avons $I_2\le 0$.

Concernant le terme J, nous substituons les expressions des dérivées partielles données par le lemme (2.1) dans la deuxième intégrale, nous obtenons :

$$J=\int_\Omega\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^iU^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{(n-1)-k}\right)$$
$$\times\left(\theta_1^{(i+1)^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}F_1+\theta_1^{i^2}\theta_2^{(j+1)^2}\theta_3^{(k+1)^2}F_2+\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{(k+1)^2}F_3+\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}F_4\right)dx.$$

$$J=\int_\Omega\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^iU^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{(n-1)-k}\right)$$
$$\times\left(\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}F_1+\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}F_2+\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}F_3+F_4\right)\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}dx.$$

En utilisant la condition (3.10), on obtient :

$$J=\int_\Omega n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-1}^{k}C_k^jC_j^iU^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{(n-1)-k}$$
$$\times\left[\left(\frac{-\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}-\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+1}{\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+1}\right)f_1\right.$$
$$+\left(\frac{-\frac{2(b-c)}{d+\mu}\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}-\frac{2(b-c)}{d-\mu}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{2(b+c)}{d-\mu}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{2(b+c)}{d+\mu}}{\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+1}\right)f_2$$

$$+\left(\frac{\frac{2(b-c)}{d+\mu}\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{2(b-c)}{d-\mu}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{2(b+c)}{d-\mu}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{2(b+c)}{d+\mu}}{\frac{\theta_1^{(i+1)^2}}{\theta_1^{i^2}}\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_2^{(j+1)^2}}{\theta_2^{j^2}}\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+\frac{\theta_3^{(k+1)^2}}{\theta_3^{k^2}}+1}\right)f_3$$

$$+f_4]\,\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}dx.$$

$$J=\int_\Omega n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-1}^kC_k^jC_j^iU^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{(n-1)-k}\left(C_{11}f_1+C_{12}f_2+C_{13}f_3+f_4\right)\theta_1^{i^2}\theta_2^{j^2}\theta_3^{k^2}dx.$$

En utilisant la condition (3.8) et la relation (3.9) successivement, on obtient pour une constante C_4 :

$$J\leq C_4\int_\Omega\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}C_{n-1}^kC_k^jC_j^iU^iV^{j-i}W^{k-j}Z^{(n-1)-k}\left(U+V+W+Z+1\right)\right)dx$$

de façon analogue au paragraphe (2.1) on peut montre que

$$L'(t)\leq C_6L(t)+C_7L^{\frac{n-1}{n}}(t)$$

C_6 et C_7 deux constantes positives, posons

$$M=L^{\frac{1}{n}}$$

On obtient :

$$nM'\leq C_6M+C_7$$

Ainsi, la fonctionnelle L est uniformément bornée sur l'intervalle $[0,T^*]$. ■

Corollaire 3.1 *On suppose que les fonctions* $f_1(u,v,w,z), f_2(u,v,w,z),\ f_3(u,v,w,z)$ *,*$f_4(u,v,w,z)$ *sont continûments différentiables sur* $\mathbb{R}^+\times\ \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ *et vérifient la condition* (3.8)*, alors les solutions positives du problèmes* $(3.1),(3.2),(3.3)$ *avec des données initiales dans* Σ *et uniformément bornées sur* Ω *sont dans l'espace* $L^\infty(0,T,L^p(\Omega))$ *pour tout* $p\geq 1$.

Preuve. La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate du Théorème (3.1), l'inégalité évidente

$$\int_\Omega (U+V+W+Z+1)^p\,dx\leq L(t)\quad \text{sur }\ [0,T^*[$$

et les expressions (3.9). ■

Proposition 3.2 *Sous les hypothèses du Corollaire* (3.1)*, si* f_1, f_2, f_3 *et* f_4 *sont polynomialement bornées sur* Σ*, alors toutes les solutions de* (3.1), (3.2), (3.3) *avec des données initiales dans* Σ *et uniformément bornées sur* Ω *sont globales.*

Preuve. Comme il a été mentionné ci-dessus, il suffit de trouver des estimations uniformes de $\| F_1(U,V,W,Z) \|_p, \| F_2(U,V,W,Z) \|_p, \| F_3(U,V,W,Z) \|_p$ et $\| F_4(U,V,W,Z) \|_p$ sur $[0,T^*[$ pour certain $p > \frac{N}{2}$. Puisque les réactions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont polynomialement bornées sur Σ, en utilisant les relations (3.9), (3.10).
Nous obtenons que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont aussi polynomialement bornées et la preuve devient une conséquence immédiate du Corollaire (3.1). ■

3.3 Remarques

Dans la formule de la région invariante citée au-dessus, nous étudions le deuxième, troisième et le quatrième cas avec la même manière que nous avons fait avec le premier cas.
le deuxième cas : le système (3.1), (3.3) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} u_t - a\triangle u - b\triangle v - c\triangle w & = f_1 \\ v_t - c\triangle u - a\triangle v - d\triangle w - b\triangle z & = f_2 \\ w_t - b\triangle u - d\triangle v - a\triangle w - c\triangle z & = f_3 \\ z_t \qquad\quad - c\triangle v - b\triangle w - a\triangle z & = f_4 \end{cases} \tag{3.14}$$

avec les mêmes conditions aux bords (3.2) et les données initiales (3.3).
Dans ce cas, la matrice de diffusion du système devient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ c & a & d & b \\ b & d & a & c \\ 0 & c & b & a \end{pmatrix}$$

Alors tous les résultats précédentes reste vrais dans la région

$$\Sigma = \left\{ (u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \end{cases} \right.$$

et le système (3.12) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - (a - \dfrac{1}{2}(d-\mu))\triangle U = F_{11} \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} - (a - \dfrac{1}{2}(d+\mu))\triangle V = F_{21} \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} - (a + \dfrac{1}{2}(d-\mu))\triangle W = F_{31} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t} - (a + \dfrac{1}{2}(d+\mu))\triangle Z = F_{41} \end{cases} \tag{3.15}$$

où

$$\begin{cases} U(t,x) = -u + \dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(w-v) + z \\ V(t,x) = -u + \dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(w-v) + z \\ W(t,x) = u + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(w+v) + z \\ Z(t,x) = u + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(w+v) + z \end{cases} \tag{3.16}$$

pour tout (t,x) dans $]0,T^*[\times\Omega$

$$\begin{cases} F_{11} = -f_1 + \dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(f_3 - f_2) + f_4 \\ F_{12} = -f_1 + \dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(f_3 - f_2) + f_4 \\ F_{13} = f_1 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(f_2 + f_3) + f_4 \\ F_{14} = f_1 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(f_2 - f_3) + f_4 \end{cases} \tag{3.17}$$

pour tout (u,v,w,z) dans Σ.

avec les meme conditions aux bords $(3.2)^*, (3.3)^*$:

Les conditions $(3.4)-(3.7)$ devient respectivement :

$$\left(f_1 + \frac{2(b+c)}{d-\mu}(f_2+f_3) + f_4\right)(-\frac{2(b+c)}{d-\mu}(v+w) - z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.18}$$

$$\left(-f_1 - \frac{2(b+c)}{d-\mu}(f_2-f_3) + f_4\right)(-\frac{2(b-c)}{d+\mu}(v-w) + z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.19}$$

$$\left(f_1 + \frac{2(b+c)}{d-\mu}(f_2+f_3) + f_4\right)(-\frac{2(b+c)}{d-\mu}(v+w) - z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.20}$$

$$\left(f_1 + \frac{2(b+c)}{d+\mu}(f_2+f_3) + f_4\right)(-\frac{2(b+c)}{d+\mu}(v+w) - z, v, w, z) \geq 0 \tag{3.21}$$

le troisième cas : le système (3.1) peut être récrit comme suit :

$$\begin{cases} u_t - a\triangle u - b\triangle v - c\triangle w \ - d\triangle z = f_1 \\ v_t - c\triangle u - a\triangle v - b\triangle w = f_2 \\ w_t - b\triangle u - a\triangle w - c\triangle z = f_3 \\ z_t - d\triangle u - c\triangle v - b\triangle w - a\triangle z = f_4 \end{cases} \tag{3.22}$$

avec les mêmes conditions aux bords (3.2) et les données initiales (3.3).
Dans ce cas, la matrice de diffusion du système devient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & 0 \\ 0 & b & a & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Alors tous les résultats précédentes reste vrais dans la région

$$\Sigma = \left\{ (u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \end{cases} \right.$$

le quatrième cas : le système (3.1) peut être récrit comme suit :

$$\begin{cases} u_t - a\triangle u - b\triangle v - c\triangle w \ - d\triangle z = f_1 \\ v_t - a\triangle v - c\triangle w - b\triangle z = f_2 \\ w_t - b\triangle u - c\triangle v - a\triangle w = f_3 \\ z_t - d\triangle u - c\triangle v - b\triangle w - a\triangle z = f_4 \end{cases} \tag{3.23}$$

avec les mêmes conditions aux bords (3.2) et les données initiales (3.3).
Dans ce cas, la matrice de diffusion du système devient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & c & b \\ b & c & a & 0 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Alors tous les résultats précédentes reste vrais dans la région

$$\Sigma = \left\{ (u_0, v_0, w_0, z_0) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d-\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 \leq -\dfrac{2(b-c)}{d+\mu}(v_0 - w_0) + z_0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d-\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \\ u_0 + \dfrac{2(b+c)}{d+\mu}(v_0 + w_0) + z_0 \geq 0 \end{cases} \right.$$

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons présenter quelques résultats concernant l'existence en temps de solutions pour des systèmes de réaction diffusion où la structure des termes non linéaire assure a priori que la masse totale de la solution est bornée.

Ces résultats vont dans deux directions :

Dans la première partie, nous avons présenter un résultat d'existences globales pour des systèmes de réaction-diffusion 4×4 , l'idée est basé sur l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov

Dans la seconde partie, nous avons présente un résultat d'existences globales pour des systèmes de réaction-diffusion 4×4 , l'idée est basé sur l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov et techniques des régions invariantes.

Bibliographie

[1] **A. Friedman**, Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall Englewood Chiffs. **N.J** ;1964.

[2] **A. Pazy,** Semi groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York (1983).

[3] **A. Salem**, Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions.

[4] **A. Salem**, Mémoire Existence Globale des Solutions des Systèmes de Réaction - Diffusion via des Méthodes Fonctionnelle.

[5] **S. Abdelmalek and S. Kouachi**, Proof of existence of global solutions for m-component reaction-diffusion systems with mixed boundary conditions via the Lyapunov functional method, Journal of Physics A, $(2007) vol.40, 12335$-12350.

[6] **D. Henry,** Geometric Theory of Semi-linear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlage, New-York, 1984.

[7] **F. R. Gantmacher,** "Théorie des matrices. Tome 1 : Théorie générale", Dunod, Paris, 1966. (Cité page 12)

[8] **F. Roth,** Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. Lecture Notes in Mathematics. 1072, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[9] **H. Brezis,** Analyse Fonctionnelle théorie et application. Masson, Paris, 1983..

[10] **J. Morgan,** Global Existence for Semilinear Parabolic Systems. SIAM.J.Math. Anal 20, $(1989), 1128 - 1144$.

[11] **J. Smoller,** Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, New-York (1983).

[12] **M. Kirane and S. Kouachi,** A strongly Nonlinear Reaction Diffusion Model for a deterministic Diffusive Epidemic. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. Vol $12, n°1$, (1995), JAPAN.

[13] **M. Kirane and S. Kouachi,** Asymptotic Behaviour for a system Describing Epidemics with Migration and Spatial Spread of Infection. Dynamics Systems and Applics, Vol $2, n°1$, (1993), USA.

[14] **M. Kirane and S. Kouachi,** Global Solutions to a System of Strongly Coupled Reaction-Diffusion Equations. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Application. Vol $26, n°8$, (1996), USA.

[15] **M. R. Spiegel,** Théorie et applications de L'analyse (1982).

[16] **N. Boumaza and A. Toualbia,** On the Invariant Regions and Global Existence of Solutions for Four Component Reaction-diffusion systems With a Full Matrix of Diffusion Coefficients and Nonhomogeneous Boundary Conditions. Gen. Math. Notes, Vol. 16, No. 2, June, 2013, pp. 32-47.

[17] **R. Belgacem ,** Mémoire de Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse.

[18] **R. Weihera,** Bounded Solutions for Reaction-Diffusion Systems With Nonlinear Boundary Conditions, Nonlin. Analysis. Theory. Methods and Applications, Vol $14, n°12$, (1990), 1051-107.

[19] **S. Kouachi,** Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional. Electron. J. Diff. Equ vol. 2001(2001), No.68, pp. 1-10.

[20] **S. Kouachi,** Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional. Electron. J. Diff. Equ vol. 2002(2002), No.2, pp. 1-13.

[21] **S. Kouachi,** Existence of global solutions for reaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary condition. Electron. J. Diff. Equ vol. 2002(2002), No.2, pp. 1-10.

[22] **S. Kouachi,** Invariant regions and global existence of solution for reaction-diffusion systems with a full matrix of diffusion coefficient and nonhomogeneous boundary conditions. Georgian mathematical journal volume $11(2004)No2, 349$-359

[23] **S. Kouachi and Belgacem Rebai,** Invariant regions and the global existence for reaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients. Memoirs on differential Equation and mathematical Physics volume $51, 2010, 93$-108.

[24] **S. Kouachi et A. Youkana,** Global Solutions to a System of Strongly Coupled Reaction-Diffusion Equation. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. Vol 26, (1996). USA.

[25] **S. L. Hollis,** On the Question of Global Existence for Reaction-Diffusion Systems Mixed Boundary Conditions. Quaterly of Applied Mathematics LI, number 2, June 1993, 241-250.

[26] **W. Feng,** Coupled Systems of Reaction-Diffusion Equations and Applications. Ph.D.Thesis, North Carolina State University (1988).