



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi – Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département : mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématique
Option: Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Thème:

Synchronisation des Systèmes Chaotiques Fractionnaires

Présenté Par :
Amel Benkhelifa et Aicha Ghoul

Devant le jury:

Nouri Boumaza	M.C.B	Université de Tébessa	Président
Adel Ouannas	M.C.B	Université de Tébessa	Rapporteur
Ahlem Gasri	M.A.A	Université de Tébessa	Examineur

Date de soutenance: 29/05/2016

Note:..... Mention :.....

Remerciement

Nous remercions avant tout Dieu de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.

Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études ainsi que nos amis.

*Nous exprimons toutes notre profonde reconnaissance à notre encadreur **Dr. Adel Ouannas** pour tout l'effort qu'il a fournis pour nous faciliter et aider à accomplir notre travail de fin d'étude.*

*Nous remercions profondément Mr. **Dr. Boumaaza Nouri** pour avoir accepté de présider Notre jury.*

*Nos remerciement sont aussi adresse Mm. **Gasri Ahlem** d'être membre de jury et ayant de présenter notre thèse devant elle.*

*Aussi nous adressons nos sincères remerciements à l'ensemble des enseignants et tout le personnel du département de **Mathématiques et Informatique**.*

Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire porte sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires,

Il est articulé autour deux schémas fondamentaux de synchronisation ; La synchronisation par rapport à l'ordre de la dérivée fractionnaire du système esclave, et la synchronisation par rapport à l'ordre de la dérivée fractionnaire du système maître.

Au début nous avons fait quelques préliminaires sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos, ensuite quelques notions de base sur les systèmes fractionnaires sont données, en outre nous avons présenté des exemples des systèmes chaotiques fractionnaires. En fin nous avons mentionné à quelques types et méthodes de synchronisation.

Mots clés :

Systèmes dynamiques, chaos, calcul fractionnaire, synchronisation.

ملخص

نهتم في هذه المذكرة بدراسة المزامنة المتعلقة بالأنظمة الفوضوية ذات اشتقاق كسري.

نتناول مخططين للمزامنة الأول يتمثل في المزامنة المتعلقة برتبة اشتقاق النظام التابع, و الثاني يتمثل في المزامنة المتعلقة برتبة اشتقاق النظام القائد.

قمنا ابتداء بعرض بعض المفاهيم الأساسية للأنظمة الحركية و نظرية الفوضى, ثم تطرقنا كذلك للأنظمة ذات الاشتقاق الكسري, كما قدمنا بعض الأمثلة عن أنظمة فوضوية ذات اشتقاق كسري, أخيرا عرضنا بعض أنواع و طرق المزامنة.

كلمات مفتاحية

الأنظمة الديناميكية , الفوضى , الحساب الكسري , المزامنة .

Abstract

The work discussed in this paper addresses the synchronization of chaotic systems fractional.

It is articulated around two basic schemes of synchronization; Synchronization with respect to the fractional derivative order of the slave system and Synchronization with respect to the fractional derivative order of the master system

At first we did some preliminary dynamical systems and chaos theory, then some basics about fractional systems are given, in addition we have presented examples of fractional chaotic systems. In the end we mentioned a few types and synchronization methods.

Key words :

Dynamical systems, chaos, Fractional calculus, Synchronization.

Table des matières

1	Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques	1
1.1	Systèmes dynamiques	2
1.1.1	Définition	2
1.1.2	Points d'équilibres	2
1.1.3	Points périodiques et p-cycles	2
1.2	Stabilité	2
1.2.1	Définitions	3
1.2.2	Linéarisation	3
1.2.3	Fonction de Lyapunov	4
1.3	Bifurcations	5
1.3.1	Définitions	5
1.3.2	Types de bifurcations	5
1.4	Chaos	6
1.4.1	Définition du chaos	6
1.4.2	Propriétés du chaos	6
1.4.3	Scénarios chaotiques	8
2	Notions de base sur les systèmes fractionnaires	10
2.1	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	11
2.1.1	Définition	11
2.1.2	Propriétés	11
2.2	Dérivation fractionnaire au sens de Caputo	11
2.2.1	Définition	11
2.2.2	Propriétés	12
2.3	Stabilité des systèmes fractionnaires	12

2.3.1	Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires	12
2.3.2	Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires	13
3	Exemples de systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires	14
3.1	Système chaotique fractionnaire de dynamos couplé	15
3.2	Système chaotique fractionnaire unifié	16
3.3	Système hyperchaotique fractionnaire de Lorenz	17
3.4	Système hyperchaotique fractionnaire de Chen	18
4	Synchronisation	19
4.1	Types de synchronisation	20
4.1.1	Synchronisation complète	20
4.1.2	Anti-Synchronisation	20
4.1.3	Synchronisation projective	21
4.1.4	Synchronisation généralisée	21
4.1.5	Synchronisation Q-S	21
4.2	Méthode du contrôleur actif	22
5	Nouveaux schémas de synchronisation	24
5.1	Résultats analytiques	25
5.1.1	Synchronisation par rapport à l'ordre de la dérivée fractionnaire du système esclave	25
5.1.2	Synchronisation par rapport à l'ordre de la dérivée fractionnaire du système maître	26
5.2	Teste numérique	28
5.2.1	Cas I :	28
5.2.2	Cas II :	30

Liste des Figures.

- p. 15 Figure 3.1 : Attracteurs chaotiques du système fractionnaire de dynamos couplé.
- p. 16 Figure 3.2 : Attracteurs chaotiques du système fractionnaire unifié.
- p. 17 Figure 3.3 : Attracteurs en 3D hyperchaotique du système (3.3).
- p. 18 Figure 3.4 : Attracteurs en 3D hyperchaotique du système (3.4).
- p. 30 Figure 5.1 : L'évolution du système d'erreur (5.24) entre les systèmes (5.20) et (5.21).
- p. 32 Figure 5.2 : L'évolution du système d'erreur (5.24) entre les systèmes (5.20) et (5.28).

Introduction générale

Dans les dernières années, le calcul fractionnaire est devenu un excellent outil dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques [1, 2] et des problèmes d'ingénierie [3, 4, 5, 6, 7]. L'un des domaines d'application très important du calcul fractionnaire est la théorie du chaos. Le chaos est un phénomène non linéaire très intéressant qui a été intensivement étudiée au cours des deux dernières décennies [8, 9]. La théorie du chaos se trouve être utile dans de nombreux domaines tels que le cryptage des données [10], les systèmes financiers [11] et de génie biomédical [12].

Les systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire ont commencé à attirer beaucoup d'attention dans ces dernières années. Les systèmes dynamiques chaotiques d'ordre fractionnaire peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques chaotiques d'ordre entier. Les chercheurs ont démontré que les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent aussi exhiber un comportement chaotique tels que, le système de Lorenz fractionnaire [13], le système de Chua fractionnaire [14], le système de Chen fractionnaire [15, 16], le système de Lü fractionnaire [17], le système de Rössler fractionnaire [18], le système Duffing fractionnaire [19] et le système d'Arneodo fractionnaire [20]. Il a été démontré que certains systèmes fractionnaires peuvent produire des attracteurs chaotiques avec ordre inférieur à 3 [21]. De plus, des études récentes montrent que les systèmes de fractionnaires chaotiques peuvent également être synchronisés [22, 23].

Récemment, l'étude de la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est devenu un domaine de recherche actif en raison de ses applications potentielles dans la communication sécurisée et la cryptographie [24, 25, 26, 27]. Jusqu'à présent, une grande variété d'approches et de techniques ont été proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires tels que méthode de contrôleur en mode glissant [28], méthodes de contrôleur actif et adaptif [29], méthode de contrôle feedback [30], techniques de contrôle linéaire et non linéaire [31, 32], technique du signal scalaire [33]. En outre, de nombreux types de synchronisation pour les systèmes chaotiques fractionnaires ont été présentés, tels que synchronisation complète [34], anti-synchronisation [35], synchronisation projective [36], synchronisation de phase [37], synchronisation en temps finie [38], synchronisation généralisée [39], etc.

Les objectifs de ce mémoire sont :

1. Développement de nouveaux schémas de synchronisation pour les systèmes chaotiques fractionnaires.
2. Recherche de nouveaux critères de synchronisation dans le cas des systèmes chaotiques fractionnaires.

Ce travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre : nous faisons un panorama sur les systèmes dynamiques non-linéaires et la théorie du chaos déterministe.

Le deuxième chapitre, est consacré aux notions de base sur les systèmes fractionnaires tels que : l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo et la stabilité systèmes fractionnaires

Dans le troisième chapitre : des exemples concrets sur des systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires sont donnés.

Dans le quatrième chapitre : on trouve des différents types connus de synchronisation et les méthodes les plus usées.

Le cinquième chapitre, expose le contenu de notre travail qui consiste en quelques nouveaux schémas sur la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires.

À la fin, notre mémoire sera terminé par une conclusion générale suivie d'une bibliographie.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Dans ce chapitre, après un rappel sur les systèmes dynamiques non linéaires et leurs propriétés générales, nous présentons des différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique.

1.1 Systèmes dynamiques

1.1.1 Définition

Un système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x} = F(x, t, \lambda) \quad (1.1)$$

$x \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état, $\lambda \in \mathbf{R}^d$ est le vecteur des paramètres et $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ est appelé champ de vecteur.

1.1.2 Points d'équilibres

On appelle "**point d'équilibre**" d'un système dynamique tout point x tel que

$$F(x) = 0 \quad (1.2)$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points stables

1.1.3 Points périodiques et p-cycles

S'il existe $k \geq 1$, tel que $F^k(x) = 0$, on dit que x est un point **périodique**. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que :

$$F^k(x) = 0 \quad (1.3)$$

Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :

$$\begin{cases} F(x(i)) = 0, & i = 0, 1, \dots, p-1, \\ F(x(p-1)) = x(0). \end{cases} \quad (1.4)$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour F^p où $F^p(x(i)) = 0$, pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ et n'est pas un point fixe pour F^k si $k < p$.

1.2 Stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points d'équilibres. Nous n'aborderons ici que le problème du point d'équilibre et pour les points périodiques de période p , il suffit de considérer la p -ième itérée de l'application.

Soit le système dynamique non linéaire

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (1.5)$$

dont la réponse est telle que :

$$x(t) = x(t, t_0, x(t_0)) \quad (1.6)$$

et les condition initiales définies par

$$x(0) = x_0 \quad (1.7)$$

Soit x_e un point d'équilibre du système, on a :

$$F(x_e) = 0 \quad (1.8)$$

1.2.1 Définitions

Définition 1.1 Le système est dit **stable au sens de Lyapunov** par rapport au point d'équilibre x_e si pour des conditions initiales $x(t_0)$ suffisamment proches du point d'équilibre soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.9)$$

Définition 1.2 Le point d'équilibre x_e est **asymptotiquement stable** si

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_e\| = 0 \quad (1.10)$$

Définition 1.3 Le point d'équilibre x_e est **exponentiellement stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, a, b > 0 : \|x(t_0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_e\| < a \|x(t_0) - x_e\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0. \quad (1.11)$$

Définition 1.4 Le point d'équilibre x_e est **instable** si l'équation (1.9) n'est pas satisfaite.

1.2.2 Linéarisation

On considère le cas où le système non linéaire décrit par (1.5) admet, au voisinage de x_e , un développement limité de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + r(\|x\|), \quad (1.12)$$

tel que

$$A = \mathbf{DF}(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_e)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x_e)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_e)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(x_e)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(x_e)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(x_e)}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|r(\|x\|)\|}{\|x\|} = 0. \quad (1.14)$$

Le système linéaire décrit par la relation :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.15)$$

peut être considéré comme la linéarisation de (1.5) autour x_e il permet de statuer, localement, sur la stabilité du système non linéaire au point x_e .

Théorème 1.1 1- Si les valeurs propres de $\mathbf{DF}(x_e)$ sont toutes à partie réelle strictement négative, alors x_e est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

2- Si l'une des valeurs propres de $\mathbf{DF}(x_e)$ possède une partie réelle strictement positive alors x_e n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapunov.

3- Si la matrice $\mathbf{DF}(x_e)$ admet au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive, on ne peut pas conclure si l'équilibre est stable ou instable

1.2.3 Fonction de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov permet l'analyse de la stabilité directement à partir des équations qui décrivent le système et ne nécessitent pas la détermination explicite de leurs solutions. Nous introduisons une fonction continue $V(x) : R^n \rightarrow R^+$, dite de Lyapunov, vérifiant : $V(x(t))$ définie positive, c'est-à-dire $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x \neq x_e$.

Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de x vers $x_e = 0$ par celle de $V(x(t)) = V(x(t, t_0, x(t_0)))$. En effet, si $V(x(t))$ est définie négative pour tout t et pour $x(t)$ au voisinage de x_e tels que $\dot{V}(x(t)) < 0$, (V décroît le long de toutes les trajectoires) nous pouvons alors conclure à la stabilité du point fixe x_e .

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

1.3 Bifurcations

1.3.1 Définitions

Soit le système dynamique non-linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = F(x(t), \alpha), \quad (1.16)$$

d'où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition 1.5 Une **bifurcation** est un **changement qualitatif** de la solution x_e du système (1.16) lorsqu'on modifie le **paramètre de contrôle** α , c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Définition 1.6 Un **diagramme de bifurcation** est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

1.3.2 Types de bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions $F(x(t), \alpha)$. Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation. Parmi les différents types de bifurcation on trouve [41, 42, 43] :

1- Bifurcation de type noeud-col (ou tangente, ou pli) : Sur le diagramme des bifurcation on observe, dans ce cas, une courbe de points fixes continue tangente à la ligne droite verticale. Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.

2- Bifurcation transcritique : sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux branches différentes de points fixes qui se croisent en un point et par le changement de stabilité des deux branches au passage par le point d'intersection.

3- Bifurcation de doublement de période (ou flip) : Un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$. Un point fixe stable d'ordre 1, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

1.4 Chaos

1.4.1 Définition du chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Avant de donner la définition du chaos, due à **R.L Devaney**, quelques définitions de base sont nécessaires [45, 46].

Définition 1.7 *Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\overline{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .*

Définition 1.8 *f est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que pour $x(0) \in I$ et tout $\varepsilon > 0$ il exist un point $y(0) \in I$ point et un entier $j \geq 0$ satisfaisant : $l(x(0), y(0)) > \varepsilon \Rightarrow d(F^{(j)}(x(0)), F^{(j)}(y(0))) > \delta$, ou l représente la distance et $F^{(j)}$ la j ieme itération de F .*

Définition 1.9 *f est dite topologiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans I , il exist $x(0) \in U$ et un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $F^{(j)}(x(0)) \in V$ ou, de façon équivalente, il exist un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $F^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

On est maintenant en position d'énoncer la défintion du chaos, au sens de **Devaney** [47].

Définition 1.10 *Une fonction $F : I \rightarrow I$ est dite constituée d' une dynamique chaotique si :*

- (i) F possède une sensibilité aux conditions initiales,
- (ii) F est topologiquement transitive,
- (iii) L'ensemble des points périodiques de F est denses dans I .

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables.

1.4.2 Propriétés du chaos

Sensibilité aux conditions initiales

Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de

sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système [48, 49].

Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov servent à mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines et permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases [50, 51, 52]. L'un des algorithmes utilisés pour le calcul est celui appelé algorithme de Wolf. Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Changement du paramètre de contrôle,
2. Choix aléatoire d'une condition initiale,
3. Evolution du système dans le but d'atteindre un attracteur,
4. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation,
5. Evolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calculs de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires,
6. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence,
7. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné,
8. Retour au point (1)
9. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

Dimension fractale

Il existe plusieurs types de dimensions fractales (dimension de capacité, dimension d'information, dimension de corrélation,...) pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

Dimension de Hausdorff La dimension de Hausdorff de $M \subset \mathbb{R}^n$ est définie par, [53] :

$$D_H = \sup \{d, \mu_d(M) = +\infty\} = \inf \{d, \mu_d(M) = 0\}, \quad (1.17)$$

d'où $\mu_d(M)$ est la mesure d -dimensionnelle de Hausdorff de l'ensemble M . Ce type de dimension dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble (attracteur ou non).

Dimension de Lyapunov La dimension de Lyapunov est donnée par, [54] :

$$D_L = \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} + j, \quad (1.18)$$

d'où $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ sont les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et j le grand entier naturel tel que : $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$. Ce type de dimensions tient compte de la dynamique du système .

Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qui on trouve dans la littérature sont restrictives [55, 56, 57, 58, 59].

Définition 1.11 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U est entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*
- 2) *Les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.*
- 3) *A est un objet fractal.*
- 4) *Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.*

1.4.3 Scénarios chaotiques

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

Doublements de période

Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc.,. Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [60, 61].

Par intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes,

et finalement, la turbulence domine.[62, 63].

Via la quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** [64]. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

Chapitre 2

Notions de base sur les systèmes fractionnaires

Dans ce chapitre, nous avançons un rappelle récapitulatif sur le calcul fractionnaire et la stabilité des systèmes fractionnaires.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

2.1.1 Définition

L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de la fonction $f(t)$ est définie comme suit [65] :

$$(J^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

d'où Γ la fonction de Gamma, donnée par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, et $t \in [a, b]$.

L'opérateur J^α , est défini sur $L_1[a, b]$, existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction $J^\alpha f$ elle-même est un élément de $L_1[a, b]$ [66, 67].

2.1.2 Propriétés

1- Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a [68] :

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t), \quad (2.2)$$

2- La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire Riemann-Liouville est décrite comme suit :

$$L\{J^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), \quad (\alpha > 0). \quad (2.3)$$

Certaines propriétés de l'opérateur J^α peuvent être trouvés, par exemple, dans [69].

2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Il existe plusieurs définitions de dérivés fractionnaires. Dans les applications réelles, la dérivation au sens de Caputo est plus populaire puisque les conditions initiales non homogènes sont autorisées.

2.2.1 Définition

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo [70] est définie par

$${}^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

i.e

$${}^C D_t^p f(t) = J^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad (2.5)$$

2.2.2 Propriétés

1- L'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$${}^C D_t^p [I_a^p f(t)] = f(t) \quad (2.6)$$

mais il n'est pas un inverse droite

$$I_a^p [{}^C D_t^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} \quad (2.7)$$

3- La formule de transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est la suivante :

$$L \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (\alpha > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n), \quad (2.8)$$

en particulier, lorsque $\alpha \in (0, 1]$, nous avons

$$L \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) \quad (2.9)$$

Pour plus d'informations sur la dérivation fractionnaire au sens de Caputo voir [70].

2.3 Stabilité des systèmes fractionnaires

2.3.1 Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

Soit le système fractionnaire linéaire suivant

$${}^C D_t^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

d'où α_i est un nombre rationnel entre 0 et 1 et $D_t^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α_i , pour $i = 1, 2, \dots, n$. Soit M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Théorème 2.1 [71] Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, alors le système (2.10) est asymptotiquement stable s'il $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Théorème 2.2 [72] Si α_i sont différents nombres rationnels, alors le système (2.10) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$, satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$, d'où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

2.3.2 Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires

Maintenant, considérons un système fractionnaire non linéaire donné par

$${}^C D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

d'où $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles secondes continues dans une boule centrée sur un point d'équilibre $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ c'est dire $f_i(x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$, alors nous avons les résultats suivants :

Théorème 2.3 [73] Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, alors le point d'équilibre x^* du système (2.11) est asymptotiquement stable si $|\arg(\text{spec}(\mathbf{J}|_{x^*}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$, d'où \mathbf{J} est la matrice jacobienne du système (2.11).

Théorème 2.4 [74] Si α_i sont différents nombres rationnels, alors le point d'équilibre x^* du système (2.11) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$, satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$.

Chapitre 3

Exemples de systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires

Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples sur les systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires. Ces systèmes sont utilisés ultérieurement comme des applications de simulations.

3.1 Système chaotique fractionnaire de dynamos couplé

Le système chaotique fractionnaire de dynamos couplé, est donné comme suit

$$\begin{cases} D^{p_1} x_1 = -\alpha x_1 + (x_3 + \beta) x_2 \\ D^{p_2} x_2 = -\alpha x_2 + (x_3 - \beta) x_1 \\ D^{p_3} x_3 = x_3 - x_1 x_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce système, comme indiqué dans [75], présente des comportements chaotiques lorsque $(p_1, p_2, p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$. Les attracteurs chaotiques du système de dynamos couplé sont présentés dans la figure 3.1.

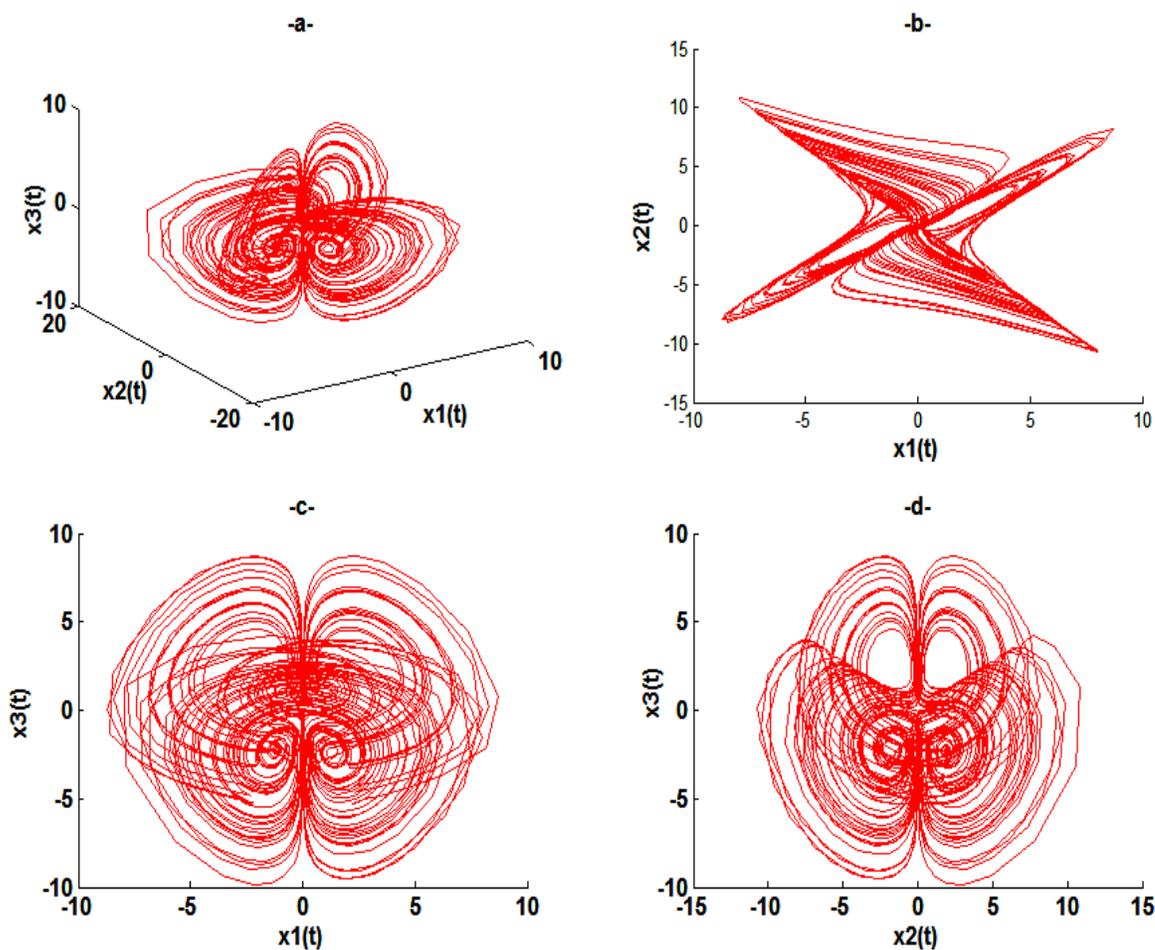


Figure 3.1 : Les attracteurs chaotiques du système fractionnaire de dynamos couplé pour les valeurs $(p_1, p_2, p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$.

3.2 Système chaotique fractionnaire unifié

Le système chaotique fractionnaire unifié, est défini par

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1 = (25a + 10)(x_2 - x_1) \\ D^{q_2} x_2 = (28 - 35a)x_1 + (29a - 1)x_2 + x_1x_3 \\ D^{q_3} x_3 = \frac{-(a+8)}{3}x_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ce système, comme indiqué dans [76], présente des comportements chaotiques lorsque $(q_1, q_2, q_3) = (0.85, 0.9, 0.95)$ et $a = 1$. Les attracteurs chaotiques du système (3.2) sont présentés dans la figure 3.2

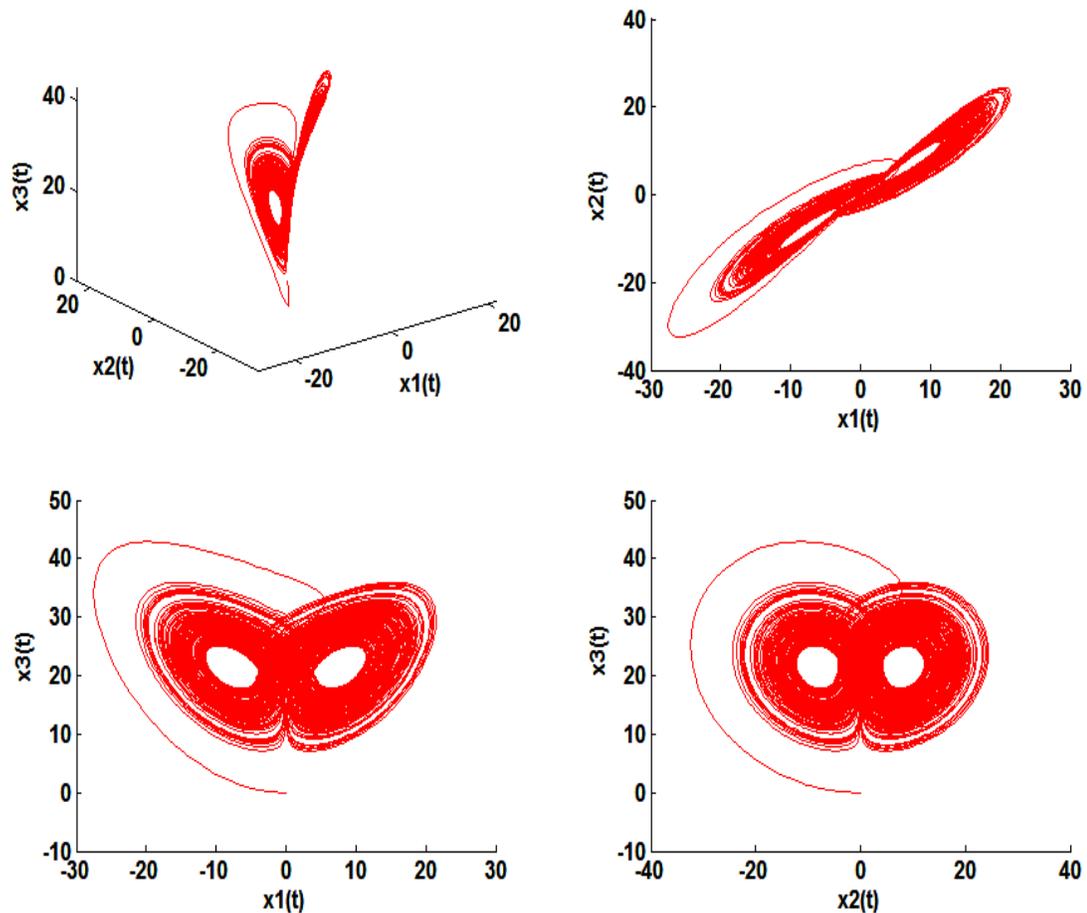


Figure 3.2 : Les attracteurs chaotiques du système fractionnaire unifié

$(q_1, q_2, q_3) = (0.85, 0.9, 0.95)$ et $a = 1$.

3.3 Système hyperchaotique fractionnaire de Lorenz

Le système hyperchaotique fractionnaire de Lorenz, est représenté par :

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x_1 = a(x_2 - x_1) + x_4 \\ D_t^{q_2} x_2 = cy_1 - y_2 - x_1 x_3 \\ D_t^{q_3} x_3 = -by_3 + x_1 x_2 \\ D_t^{q_4} x_4 = dx_4 + x_2 x_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) est hyperchaotique lorsque les valeurs des paramètres de bifurcation sont considérés comme $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0.94, 0.96, 0.97, 0.99)$ et $(a, b, c, d) = (10, \frac{8}{3}, 28, -1)$ [77]. La projection de l'attracteur hyperchaotique du système (3.3) est représenté sur la figure 3.3.

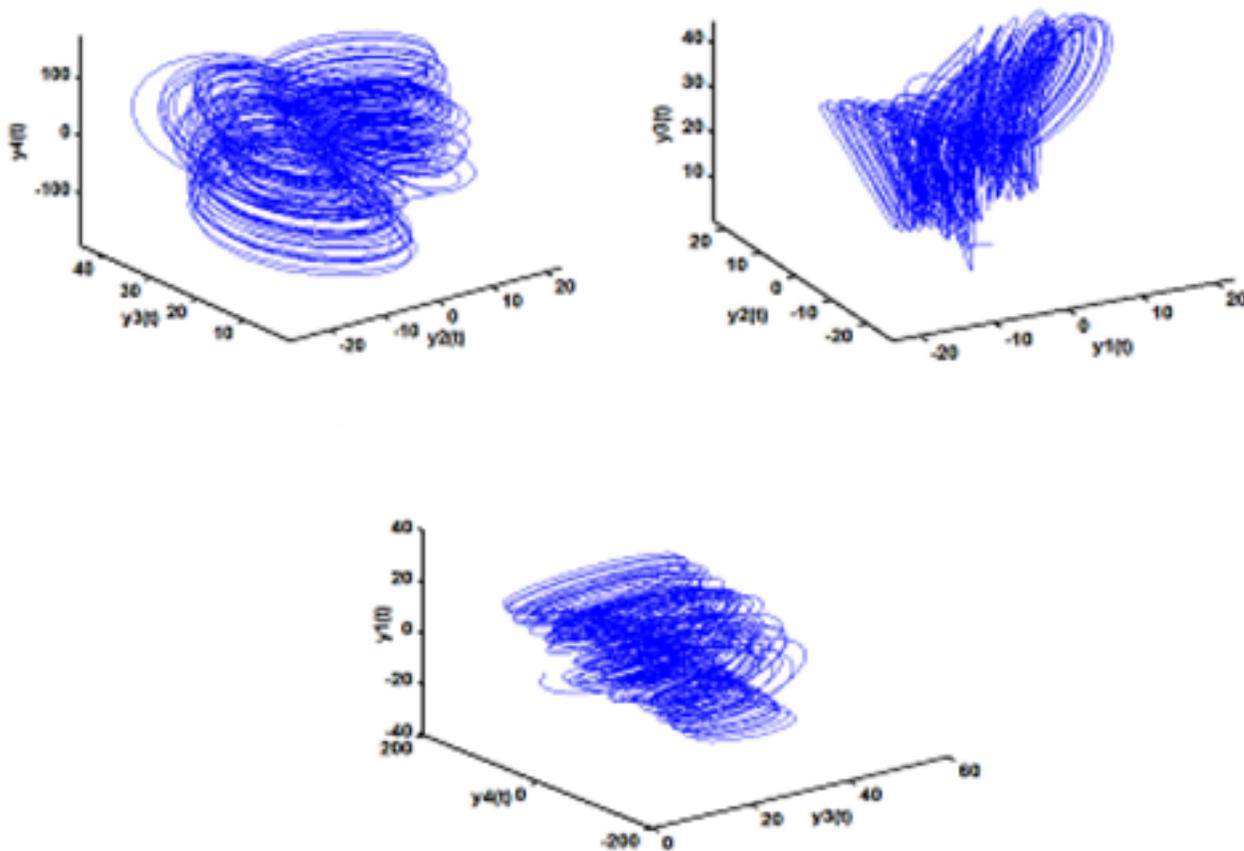


Figure 3.3 : des attracteurs en 3D hyperchaotique du système (3.3).

3.4 Système hyperchaotique fractionnaire de Chen

Le système hyperchaotique fractionnaire de Chen donné par

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = a(x_2 - x_1) \\ D_t^q x_2 = dy_1 + cy_2 - x_1x_3 \\ D_t^q x_3 = -by_3 + x_1x_2 \\ D_t^q x_4 = kx_4 + x_2x_3 \end{cases} \quad (3.4)$$

a été présenté dans [77]. Le système (3.4) a un comportement hyperchaotique, voir la figure 3.4.

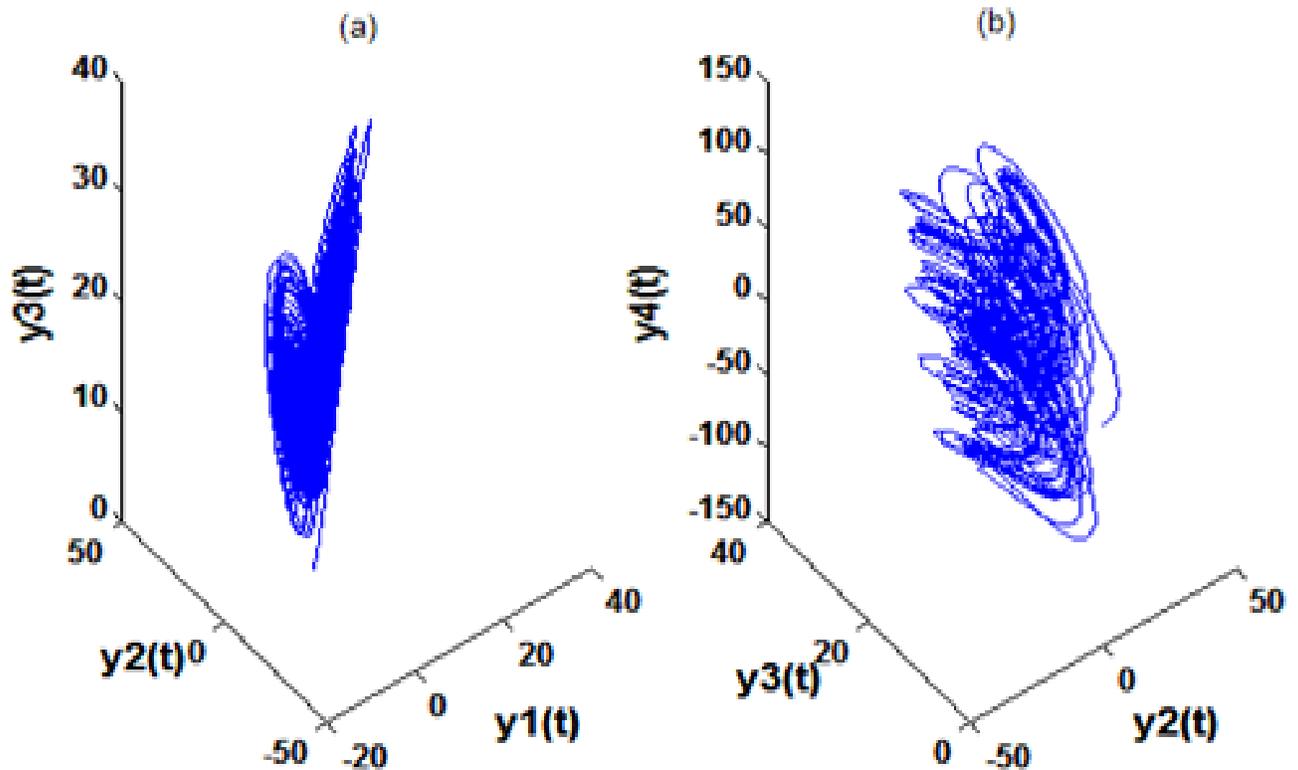


Figure 3.4 : des attracteurs en 3D hyperchaotique du système (3.4).

Chapitre 4

Synchronisation

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter, des différents type de synchronisation et une méthode de synchronisation la plus performante.

4.1 Types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

4.1.1 Synchronisation complète

On considère un système chaotique maître représenté par

$$D^\alpha X(t) = F(X(t)), \quad (4.1)$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.1) et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leq 1$, ${}^C D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α .

Et un système chaotique esclave donné par

$$D^\beta Y(t) = G(Y(t)) + U, \quad (4.2)$$

d'où $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.2), $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < \beta \leq 1$, ${}^C D_t^\beta$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre β et $U \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que

$$e(t) = Y(t) - X(t). \quad (4.3)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0. \quad (4.4)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés [78].

4.1.2 Anti-Synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [79]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$e(t) = Y(t) + X(t). \quad (4.5)$$

4.1.3 Synchronisation projective

On dit qu'on a une **synchronisation projective** si les variables d'état $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique esclave se synchronisent avec une constante multiple de l'état $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ du système chaotique maître, tels que [80] :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(t) - \alpha_i x_i(t)| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.1.4 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective pour synchroniser des systèmes chaotiques de dimensions et de modèle différent [81]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par

$$\begin{cases} {}^C D_t^p X(t) = F(X(t)), \\ {}^C D_t^q Y(t) = G(Y(t)) + U, \end{cases} \quad (4.7)$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les états du système maître et système esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $0 < p, q \leq 1$, ${}^C D_t^p$, ${}^C D_t^q$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordres p et q , respectivement, et $U \in \mathbb{R}^m$ est un contrôleur à déterminer.

S'il existe un contrôleur $U \in \mathbb{R}^m$ et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$, vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0, \quad \forall x(0), \forall y(0), \quad (4.8)$$

alors, les systèmes maître-esclave (4.7) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ . Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(t)) = \Lambda X(t)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective** [82].

4.1.5 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [83]. Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnelle, $X(t)$ et un système

esclave, m -dimensionnelle, $Y(t)$ sont en synchronisation $Q - S$ dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U \in \mathbb{R}^n$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t)), \quad (4.9)$$

vérifie $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

4.2 Méthode du contrôleur actif

La méthode du contrôleur actif est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes non identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes hyperchaotiques [84, 85]. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$${}^C D_t^q x(t) = F(x(t)), \quad (4.10)$$

et

$${}^C D_t^q y(t) = G(y(t)) + U, \quad (4.11)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < q \leq 1$, ${}^C D_t^q$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordres q et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (4.12)$$

alors,

$$\begin{aligned} {}^C D_t^q e(t) &= {}^C D_t^q y(t) - {}^C D_t^q x(t) \\ &= G(y(t)) - F(x(t)) + U. \end{aligned}$$

Si on peut écrire la quantité $G(y(t)) - F(x(t))$ de la façon suivante

$$G(y(t)) - F(x(t)) = Ae(t) + N(x(t), y(t)), \quad (4.13)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$${}^C D_t^q e(t) = Ae(t) + N(x(t), y(t)) + U, \quad (4.14)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(t), y(t)), \quad (4.15)$$

d'où V est le **contrôleur actif**, défini par :

$$V = -Le(t), \quad (4.16)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$${}^C D_t^\alpha e(t) = (A - L)e(t). \quad (4.17)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (4.10) et le système esclave (4.11) est transformé en problème de zero-stabilité du système (4.17). Le théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires.

Théorème 4.1 *Le système maître (4.10) et le système esclave (4.11) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (4.15), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que $|\arg(\text{spec}(A - L))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.*

Chapitre 5

Nouveaux schémas de synchronisation

Le présent chapitre expose quelques nouveaux schémas de synchronisation pour des systèmes chaotiques fractionnaires.

5.1 Résultats analytiques

5.1.1 Synchronisation par rapport à l'ordre de la dérivée fractionnaire du système esclave

Dans ce cas, considérons le système maître sous la forme suivante

$${}^C D_t^{p_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

d'où $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ est le vecteur d'état du système maître (5.1), $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $0 < p_i \leq 1$, et ${}^C D_t^{p_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre p_i .

Comme système esclave, nous considérons le système chaotique suivant

$${}^C D_t^{q_i} y_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2)$$

d'où $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ est le vecteur d'état du système esclave (5.2), $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions non linéaires, $0 < q_i \leq 1$, and ${}^C D_t^{q_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q_i et u_i , $1 \leq i \leq n$, sont des contrôleurs.

Notre but, pour réaliser la synchronisation entre le système maître (5.1) et le système esclave (5.2), est de déterminer les contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq n$, qui stabilisent les erreurs de synchronisation suivantes

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.3)$$

alors le but de la synchronisation est de faire $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Théorème 5.1 *Le système maître (5.1) et le système esclave (5.2) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôle suivante*

$$u_i = -g_i(Y(t)) - {}^C D_t^{q_i} x_i(t) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4)$$

d'où

$$v_i = -|b_{ii}| e_i(t) - \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t) \quad (5.5)$$

Preuve. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q_i du système d'erreur (5.3) peut être décrite comme

$${}^C D_t^{q_i} e_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) + u_i - {}^C D_t^{q_i} x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

En substituant l'équation (5.4) dans l'équation (5.6), les erreurs de synchronisation peuvent être donnés sous la forme

$${}^C D_t^{q_i} e_i(t) = -|b_{ii}| e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

Le système d'erreur (5.7) peut être écrit sous la forme compacte comme suit

$${}^C D_t^q e(t) = B e(t) \quad (5.8)$$

d'où $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))^T$, ${}^C D_t^q = [{}^C D_t^{q_1}, {}^C D_t^{q_2}, \dots, {}^C D_t^{q_n}]$ et

$$B = \begin{pmatrix} -|b_{11}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -|b_{22}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -|b_{nn}| \end{pmatrix}.$$

Alors, nous pouvons voir que toutes les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M_1 q_1}, \dots, \lambda^{M_1 q_n}) - B) = 0$, d'où M_1 est le multiple commun des dénominateurs des q_i , peuvent être écrites comme suit $\lambda = |b_{ii}|^{\frac{1}{M_1 q_i}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_1 q_i}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{M_1 q_i}\right) \right]$, $i = 1, 2, \dots, n$, cela implique que $\arg(\lambda) = \frac{\pi}{q_i M_1} > \frac{\pi}{2M_1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. En suite, selon le lemme 1, le système d'erreur (5.8) est asymptotiquement stable. Par conséquent, les systèmes (5.1) et (5.2) sont globalement synchronisés. ■

5.1.2 Synchronisation par rapport à l'ordre de la dérivée fractionnaire du système maître

Maintenant, le système maître et le système esclave sont donnés par

$${}^C D_t^{p_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.9)$$

$${}^C D_t^{q_i} y_i(t) = g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.10)$$

d'où $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ sont les vecteurs d'état du système maître (5.9) et du système esclave (5.10), respectivement, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions non linéaires, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < p_i, q_i \leq 1$, ${}^C D_t^{p_i}$ et ${}^C D_t^{q_i}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordres p_i et q_i , respectivement, et u_i , $1 \leq i \leq n$, sont des contrôleurs. Dans ce cas, les erreurs de synchronisation, entre le système maître (5.9) et le système esclave (5.10), peuvent être définies comme suivants

$$e_i(t) = x_i(t) - y_i(t), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.11)$$

Le système d'erreur (5.11) peut être décrit comme suit :

$${}^C D_t^{p_i} e_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) - {}^C D_t^{p_i} y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.12)$$

Dans ce cas, nous supposons que $q_i < p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Théorème 5.2 *Le système maître (5.9) et le système esclave (5.10) sont globalement synchronisés par les contrôleurs suivants*

$$u_i = -g_i(Y(t)) + J^{p_i - q_i}(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.13)$$

d'où

$$v_i = |a_{ii}| e_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)). \quad (5.14)$$

Preuve. En insérant Eq. (5.13) dans Eq. (5.10), on peut réécrire le système esclave comme suit :

$${}^C D_t^{q_i} y_i(t) = J^{p_i - q_i}(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.15)$$

L'application de la transformée de Laplace à Eq. (5.15), nous donne

$$s^{q_i} \mathbf{F}_i(s) - s^{q_i - 1} y_i(0) = s^{q_i - p_i} \mathbf{L}(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.16)$$

d'où $\mathbf{F}_i(s) = \mathbf{L}(y_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$. Multipliant l'équation (5.16) par $s^{p_i - q_i}$ et par l'application de la transformée de Laplace inverse au résultat, nous obtenons

$${}^C D_t^{p_i} y_i(t) = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.17)$$

Par substitution de Eq. (5.17) dans Eq. (5.12), les erreurs de synchronisation peuvent être écrite comme suit

$${}^C D_t^{p_i} e_i(t) = -|a_{ii}| e_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.18)$$

Le système d'erreur (5.18) peut être écrit sous la forme compacte comme suit

$${}^C D_t^p e(t) = A e(t), \quad (5.19)$$

d'où $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))^T$, ${}^C D_t^p = [{}^C D_t^{p_1}, {}^C D_t^{p_2}, \dots, {}^C D_t^{p_n}]$, et

$$A = \begin{pmatrix} -|a_{11}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -|a_{22}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -|a_{nn}| \end{pmatrix}.$$

Alors, nous pouvons voir que toutes les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M_2 p_1}, \dots, \lambda^{M_2 p_n}) - A) = 0$, d'où M_2 est le multiple commun des dénominateurs des q_i , peuvent être écrites comme suit $\lambda = |a_{ii}|^{\frac{1}{M_2 p_i}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_2 p_i}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{M_2 p_i}\right) \right]$, $i = 1, 2, \dots, n$, cela implique que $\arg(\lambda) = \frac{\pi}{M_2 p_i} > \frac{\pi}{2M_2}$, $i = 1, 2, \dots, n$. En suite, selon le lemme 1, le système d'erreur (5.19) est asymptotiquement stable. Par conséquent, les systèmes (5.9) et (5.10) sont globalement synchronisés. ■

5.2 Teste numérique

Dans cette section, pour valider les résultats théoriques dérivés ci-dessus, nous considérons le système chaotique fractionnaire de dynamos couplé comme système maître et le système chaotique fractionnaire unifié comme système esclave. Le système maître est décrit comme suit :

$$\begin{cases} D^{p_1} x_1 &= -\alpha x_1 + (x_3 + \beta) x_2, \\ D^{p_2} x_2 &= -\alpha x_2 + (x_3 - \beta) x_1, \\ D^{p_3} x_3 &= x_3 - x_1 x_2. \end{cases} \quad (5.20)$$

d'où $(p_1, p_2, p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$.

Le système esclave est défini comme suit :

$$\begin{cases} D^{q_1} y_1 &= (25a + 10)(y_2 - y_1) + u_1 \\ D^{q_2} y_2 &= (28 - 35a)y_1 + (29a - 1)y_2 + y_1 y_3 + u_2 \\ D^{q_3} y_3 &= \frac{-(a+8)}{3} y_3 + y_1 y_2 + u_3 \end{cases} \quad (5.21)$$

d'où u_i , $1 \leq i \leq 3$, sont les des contrôleurs, $(q_1, q_2, q_3) = (0.85, 0.9, 0.95)$ et $a = 1$.

5.2.1 Cas I :

Selon le théorème 5.1, les contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq 3$, peuvent être choisis comme suit

$$\begin{cases} u_1 &= -35y_1 + 35x_1 - 35y_2 + D^{0.85} x_1 \\ u_2 &= -56y_2 + 28x_2 + 7y_1 - y_1 y_3 + D^{0.9} x_2 \\ u_3 &= -3y_3 + 3x_3 - y_1 y_2 + D^{0.95} x_3 \end{cases} \quad (5.22)$$

et le système d'erreurs peut être décrit comme

$$\begin{cases} D^{0.85} e_1 &= -35e_1 \\ D^{0.9} e_2 &= -28e_2 \\ D^{0.95} e_3 &= -3e_3 \end{cases} \quad (5.23)$$

Le système d'erreur (5.23) peut être donné dans la forme compacte

$$(D^{0.85}e_1, D^{0.9}e_2, D^{0.95}e_3)^T = B \times (e_1, e_2, e_3)^T, \quad (5.24)$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Dans ce cas, les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M_1 q_1}, \lambda^{M_1 q_2}, \lambda^{M_1 q_2}) - B) = 0$, d'où M_2 est le multiple commun des dénominateurs des q_i , sont données par $\lambda_1 = 35^{\frac{1}{M_1 0.85}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_1 0.85}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{M_1 0.85}\right) \right]$, $\lambda_2 = 28^{\frac{1}{M_1 0.9}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_1 0.9}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{M_1 0.9}\right) \right]$ and $\lambda_3 = 3^{\frac{1}{M_1 0.95}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_1 0.95}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{M_1 0.95}\right) \right]$. Il est facile de voir que $\arg(\lambda_i) > \frac{\pi}{2M_1}$, $i = 1, 2, 3$, cela implique que les systèmes (5.20) et (5.21) sont globalement synchronisés. Les simulations numériques de l'évolution du système d'erreur (5.24)

sont représentées sur la figure 5.1.

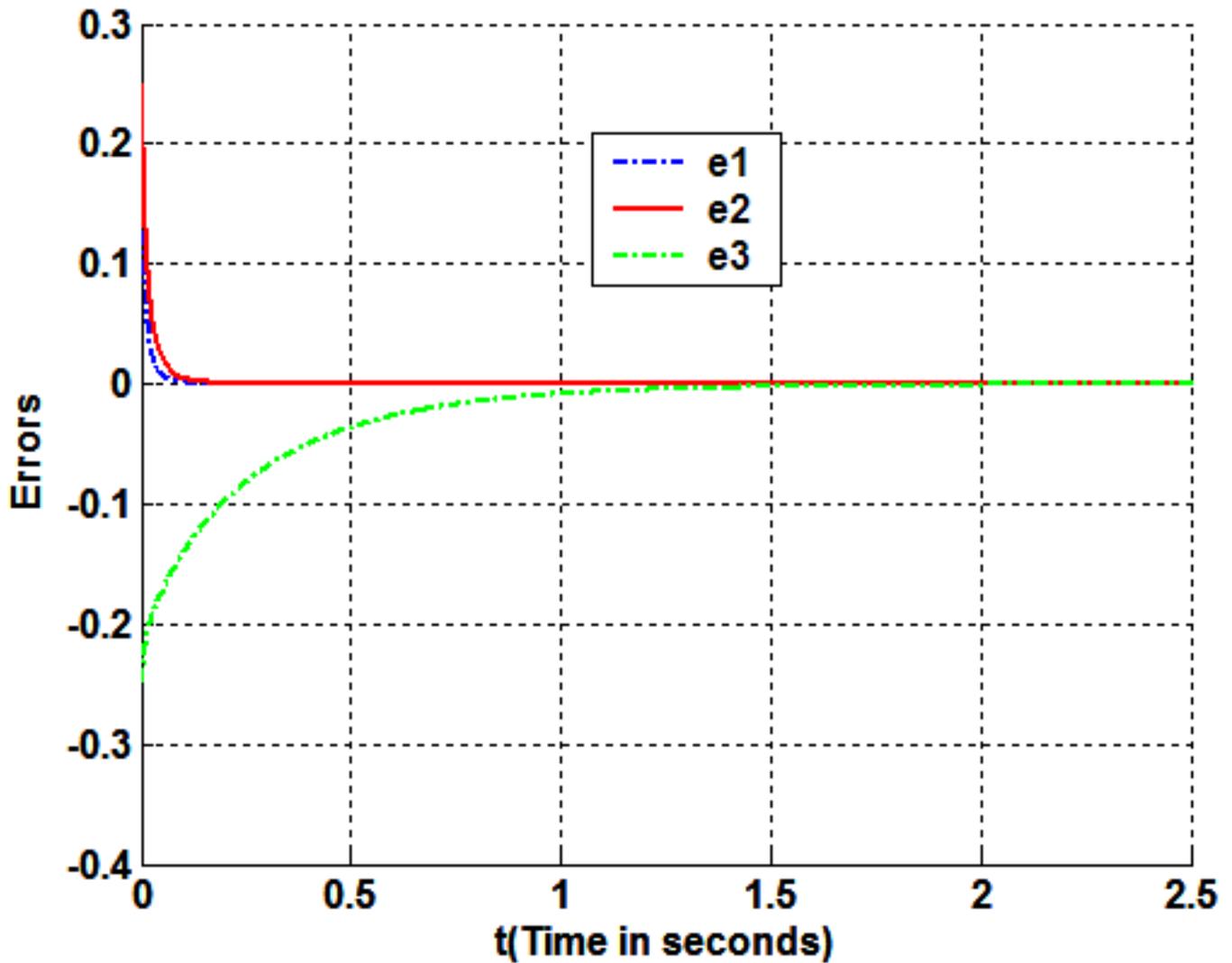


Figure 5.1 : L'évolution du système d'erreur (5.24) entre les systèmes (5.20) et (5.21).

5.2.2 Cas II :

Dans ce cas, le système d'erreur entre le système maître (5.20) et le système esclave (5.21), est définie comme suit

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 - x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \end{cases} \quad (5.26)$$

alors, par application direct du théorème 5.2, les contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq 3$, peuvent être choisis comme suit

$$\begin{cases} u_1 = 35(y_2 - y_1) + J^{0.05}(-2y_1 + 2x_1 - (x_3 + \beta)x_2) \\ u_2 = -7y_1 + 28)y_2 + y_1y_3 + J^{0.03}(-2y_2 + 2x_2 - (x_3 - \beta)x_1) \\ u_3 = -3y_3 + y_1y_2 + J^{0.01}(-y_3 + x_1x_2) \end{cases} \quad (5.27)$$

et le système d'erreur (5.26) peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} D^{0.9}e_1 \\ D^{0.93}e_2 \\ D^{0.96}e_3 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

d'où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Dans ce cas, les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M_2^{0.9}}, \lambda^{M_2^{0.93}}, \lambda^{M_2^{0.96}}) - A) = 0$, d'où M_2 est le multiple commun des dénominateurs des p_i , sont données par $\lambda_1 = 2^{\frac{1}{M_2^{0.9}}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_2^{0.9}}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{M_2^{0.9}}\right) \right]$, $\lambda_2 = 2^{\frac{1}{M_2^{0.93}}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{M_2^{0.93}}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{M_2^{0.93}}\right) \right]$ and $\lambda_3 = \cos\left(\frac{\pi}{M_2^{0.96}}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{M_2^{0.96}}\right)$. Il est facile de voir que $\arg(\lambda_i) > \frac{\pi}{2M_2}$, $i = 1, 2, 3$, cela implique que les systèmes (5.20) et (5.21) sont globalement synchronisés. Les simulations numériques de l'évolution du système d'erreur (5.28) sont représentées sur la figure 5.2.

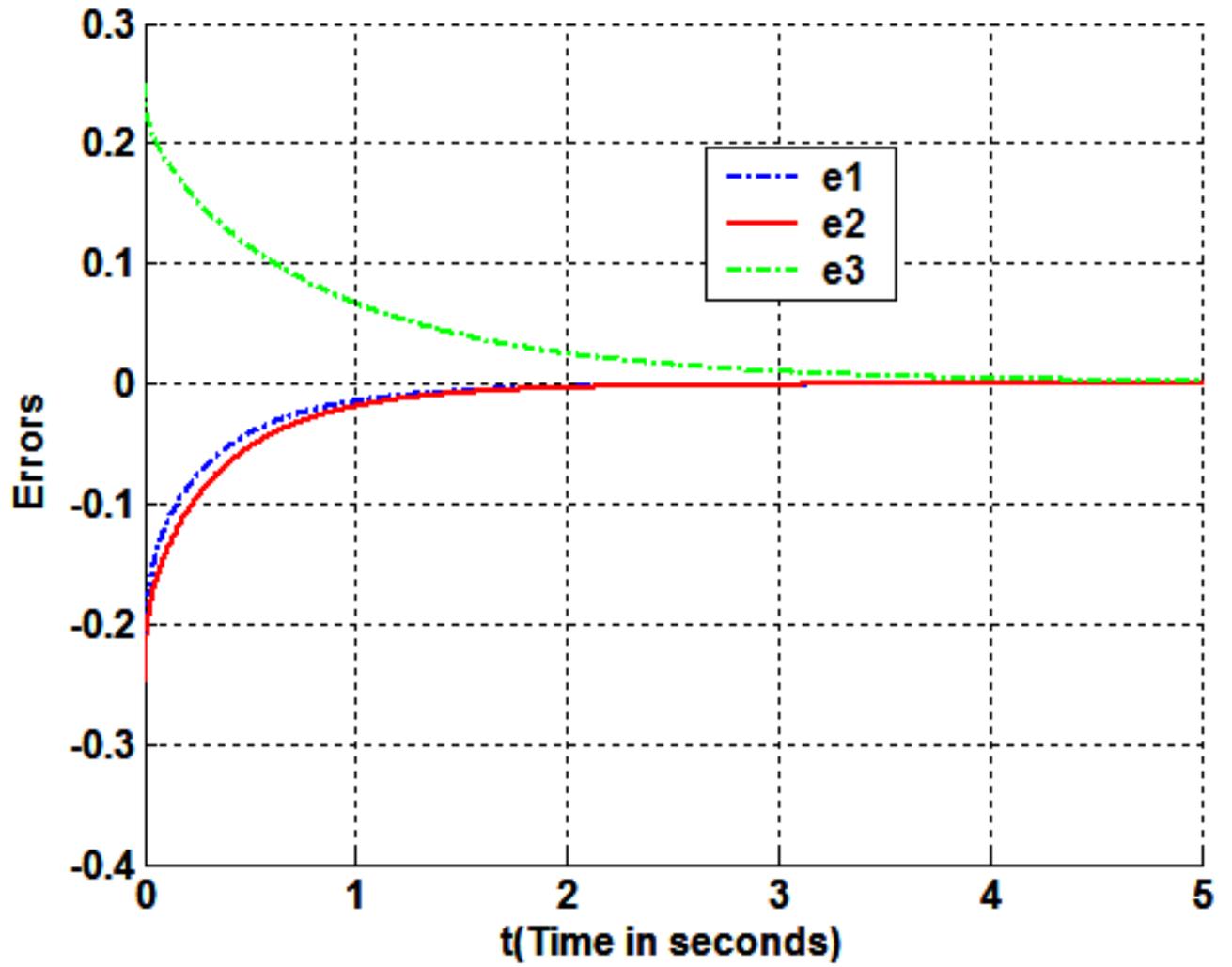


Figure 5.2 : L'évolution du système d'erreur (5.28) entre les systèmes (5.20) et (5.21).

Conclusion générale

Pour arriver aux buts visés, nous avons commencé par présenter des chapitres préliminaires sur les systèmes dynamiques chaotiques et une vue panoramique sur le calcul fractionnaire et quelques exemples sur les systèmes chaotiques et hyperchaotiques fractionnaires, puis nous sommes passés à la théorie de synchronisation en évoquant les grands axes tels que : les types et les méthodes de la synchronisation chaotique.

D'après la présentation de nos résultats, nous sommes parvenus à :

- 1- Nous pouvons trouver d'autres critères de synchronisation plus efficaces que les critères classiques qui sont utilisés dans le cas de systèmes dynamiques chaotiques d'ordre entier.
- 2- Modifier et appliquer les méthodes utilisées dans la synchronisation chaotique d'ordre entier d'une façon efficace dans le cas des systèmes fractionnaires.

Nos futurs travaux seront concentrés sur la recherche de nouveaux critères de synchronisation, qui sont moins coûteux et très compliqués. La recherche de nouveaux systèmes chaotiques (et hyperchaotiques) à dérivées fractionnaires sera aussi prise en considération.

.

Bibliographie

- [1] **Hilfer R** (200) Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, New Jersey
- [2] **Parada FJV, Tapia JAO, Ramirez JA** (2007) Effective medium equations for fractional Fick's law in porous media. Physica A 373 :339–353
- [3] **Pires EJS, Machado, J.A.T, de Moura PB** (2003) Fractional order dynamics in a GA planner. Signal Processing 83 :2377–2386
- [4] **Magin RL** (2006) Fractional Calculus in Bioengineering. Begell House Publishers, Redding
- [5] **Tseng CC** (2007) Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators. Signal Processing 87 :1045–1057
- [6] **da Graca Marcos M, Duarte FBM, Machado JAT** (2008) Fractional dynamics in the trajectory control of redundant manipulators. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 13 :1836–1844
- [7] **Hedrih KS, Stanojevic VN** (2010) A model of gear transmission : fractional order system dynamics. Mathematical Problems in Engineering Article ID 972873
- [8] **Alaoui MA** (2006) Synchronization of chaos. Encyclopedia of Mathematical Physics 213-226
- [9] **Gan Q** (2013) Synchronization of unknown chaotic neural networks with stochastic perturbation and time delay in the leakage term based on adaptive control and parameter identification. Neural Comput Applic 22(6) :1095-1104
- [10] **Sheikhan M, Shahnazi M, Garoucy, S** (2013) Hyperchaos synchronization using PSO-optimized RBF-based controllers to improve security of communication systems. Neural Comput Applic 22(5) :835-846
- [11] **Fernando J** (2011) Applying the theory of chaos and a complex model of health to establish relations among financial indicators. Procedia Comput Sci 3 :982–986.

-
- [12] **Zsolt B** (1997) Chaos theory and power spectrum analysis in computerized cardiocography. *Eur J Obstet Gynecol Reprod Biol* 71(2) :163–168.
- [13] **Grigorenko I, Grigorenko E** (2003) Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system. *Phys Rev Lett* 91(3) :034101-034107.
- [14] **Hartley T, Lorenzo C, Qammer H** (1995) Chaos in a fractional order Chua's system, *IEEE Trans CAS-I*, 42 :485-490.
- [15] **Li C, Chen G** (2004) Chaos in the fractional order Chen system and its control. *Chaos Solition Fract* 22(3) :549-554.
- [16] **Lu JG, Chen G** (2006) A note on the fractional-order Chen system. *Chaos Solition Fract* 27(3) :685-688.
- [17] **Deng WH, Li CP** (2005) Chaos synchronization of the fractional Lü system. *Physica A* 353 :61-72.
- [18] **Li C, Chen G** (2004) Chaos and hyperchaos in fractional order Rössler equations. *Physica A* 341 :55-61.
- [19] **Ge ZM, Ou CY** (2007) Chaos in a fractional order modified Duffing system. *Chaos Solition Fract* 34(2) :262-291.
- [20] **Arneodo A, Couillet P, Spiegel E, Tresser C** (1985) Asymptotic chaos. *Physica D* 14(3) :327-347.
- [21] **Petrás I** (2011) *Fractional-Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation*. HIGHER EDUCATION PRESS, springer.
- [22] **Peng G** (2007) Synchronization of fractional order chaotic systems. *Phys Lett A* 363(5-6) :426-432.
- [23] **Yan J, Li C** (2007) On chaos synchronization of fractional differential equations. *Chaos Solition Fract* 32(2) :725-735.
- [24] **Liu H, Zhu Z, Yu H, Zhu Q** (2014) Modified. Projective Synchronization between Different Fractional-Order Systems Based on Open-Plus-Closed-Loop Control and Its Application in Image Encryption. *Math Probl Eng Article ID* 567898 :1-10.
- [25] **Wu X, Wang H, Lu H** (2012) Modified generalized projective synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system and its application to secure communication. *Nonlinear Anal Real World Appl* 13 :1441–1450.
- [26] **Muthukumar P, Balasubramaniam P** (2013) Feedback synchronization of the fractional order reverse butterfly-shaped chaotic system and its application to digital cryptography. *Nonlinear Dyn* 74(4) :1169-1181.

-
- [27] **Liang H, Wang Z, Yue Z, Lu R** (2012) Generalized synchronization and control for incommensurate fractional unified chaotic system and applications in secure communication. *Kybernetika* 48(2) :190–205
- [28] **Zhang L, Yan Y** (2014) Robust synchronization of two different uncertain fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control. *Nonlinear Dyn* 76(3) :1761-1767
- [29] **Agrawal SK, Das S** (2013) A modified adaptive control method for synchronization of some fractional chaotic systems with unknown parameters. *Nonlinear Dyn* 73(1-2) :907-919
- [30] **Odibat Z** (2010) Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems. *Nonlinear Dyn* 60(4) :479-487
- [31] **Odibat Z, Corson N, Aziz-Alaoi MA, Bertelle C** (2010) Synchronization of chaotic fractional-order systems via linear control. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 20(1) :81–97.
- [32] **Chen XR, Liu CX** (2012) Chaos Synchronization of fractional order unified chaotic system via nonlinear control. *INT J MOD PHYS B* 25(3) :407-415
- [33] **Peng G, Jiang Y** (2008) Generalized projective synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a scalar transmitted signal. *Phys Lett A* 372 :3963-3970
- [34] **Zhang R, Gong J** (2014) Synchronization of the fractional-order chaotic system via adaptive observer. *Systems Science and Control Engineering* 1-4
- [35] **Srivastava M, Ansari SP, Agrawal SK, Das S, Leung AYT** (2014) Anti-synchronization between identical and non-identical fractional-order chaotic systems using active control method. *Nonlinear Dynamics* 76(2) :905-914.
- [36] **Wang D-F, Zhang J-Y, Wang XY** (2013) Robust modified projective synchronization of fractional-order chaotic systems with parameters perturbation and external disturbance. *Chin. Phys. B* 22(10) :100504-6
- [37] **Odibat, Z** (2012) A note on phase synchronization in coupled chaotic fractional order systems. *Nonlinear Anal Real World Appl* 13 :779–789
- [38] **Aghababa MP** (2012) Finite-time chaos control and synchronization of fractional-order nonautonomous chaotic (hyperchaotic) systems using fractional nonsingular terminal sliding mode technique. *Nonlinear Dyn* 69(1-2) :247-261.
- [39] **Martínez-Guerra R, Mata-Machuca JL** (2014) Fractional generalized synchronization in a class of nonlinear fractional order systems. *Nonlinear Dyn* 77(4) :1237-1244
- [40] **Chai Y, Chen L, Wu R, Dai J** (2013) Q-S synchronization of the fractional-order unified system. *Pramana* 80(3) :449–461.

-
- [41] **Guckenheimer J, Holmes P** (1983) *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition.
- [42] **Hale JK, Kocak H** (1991) *Dynamics and Bifurcations*. Applied Mathematics, Publisher Springer-Verlag New York.
- [43] **Dang-Vu H, Delcarte C** (2000) *Bifurcations et Chaos*. Paris, Ellipses.
- [44] **Yoshizawa T** (1975) *Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*. Applied Mathematical Sciences Series, Publisher Springer-Verlag New York.
- [45] **Lakshmanan M, Rajaseekar S** (2003) *Nonlinear Dynamics Integrability, Chaos and Patterns*. Advanced Texts in Physics, Publisher Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [46] **Wiggins S** (2003) *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York.
- [47] **Devaney RL** An introduction to chaotic dynamical systems. In *Adission-wisley*, Redwood City, CA 37.
- [48] **Mira C, Gardini L, Bugola A, Cathala JC** (1996) *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*. World Scieniific.
- [49] **Alligood KT, Sauer TD, Yorke JA** (1996) *Chaos : an Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag édition.
- [50] **Rosenstein M, Collins J, Deluca C** (1993) A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets. *Physica* 65 :117-134.
- [51] **Parker TS, Chua LO** (1989) *Pratical Numerical Algorithms For Chaotic Systems*. Edition Springer-Verlay.
- [52] **Wolf A, Swift J, Swinney H, Vastano J** (1985) Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16 :285-317.
- [53] **Chorin AJ** (1981) Estimates of intermittency, Spectra and blow-up in devloped turbulence. *Comm. Pure Appl. Math.* 4 :853-6
- [54] **Li TY, York JA** (1975) Period three implies chaos. *Amer. Math. Mon.* 82 :985-992.
- [55] **Guckenheimer J, Holmes P** (1986) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York
- [56] **Sparow C** (1981) Chaos in three dimensional single loop feedback systems with a piecewise linear feedback function. *J. Math. Anal. Appl.*, 83.
- [57] **Grebogi C, OTT E, Pelikan S, Yorke JA** (1984) Strange attractors that are not chaotic. *Physica D* 13 :261-268.

-
- [58] **Mindlin GB, Hou XJ, Solari HG, Gilmore R, Tufilaro NB** (1990) Classification of strange attractors by integers. *Phys. Rev. Lett.* 64 :2350.
- [59] **Farmer JD, Sidorowich JJ** (1987) Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 59 :845.
- [60] **Kaplan D, Glass L** (1995) *Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics.* New-York : Springer-Verlag, 1-53.
- [61] **Hilborn R** (1994) *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford Student Edition.
- [62] **Pomeau Y, Manneville P** (1980) Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. *Commun. Math. Phys.* 74(2) :189–197.
- [63] **Eckmann JP** (1981) Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.* 53 :643-5.
- [64] **Ruelle D, Takens F.** (1971) On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* 20 :67-192.
- [65] **Podlubny I** (1999) *Fractional Differential Equations.* Academic Press, New York.
- [66] **Oldham KB, J Spanier** (1974) *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York.
- [67] **Hilfer R** (2000) *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, New Jersey.
- [68] **Samko SG, Klibas AA, Marichev OI** (1993) *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam.
- [69] **Gorenflo R, Mainardi F** (1997) Fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order. In the book *Fractals and fractional calculus* , (eds. : Carpinteri and Mainardi), New York.
- [70] **Caputo M** (1967) Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II, *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 13 :529—539.
- [71] **Matignon D** (1996) Stability results of fractional differential equations with applications to control processing, In : *IMACS, IEEE-SMC, Lille, France.*
- [72] **Deng W, Li C, Lü J** (2007) Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, *Nonlinear Dynam.* 48 :409–416.
- [73] **Ahmed E, El-Sayed AM, El-Saka H** (2007) Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models. *J. Math. Anal. Appl.* 325(1) :542–553.
- [74] **Tavazoei MS, Haeri M** (2009) A note on the stability of fractional order systems. *Math. Comput. Simulation* 79 (5) :1566–1576.

- [75] **Wang MJ, Wang XY** (2010) Dynamic analysis of the fractional order Newton-Leipnik system. *ACTA PHYS SIN* 59(3) :01583-7.
- [76] **Deng W, Li C** (2008) The evolution of chaotic dynamics for fractional unified system. *Phys Lett A* 372(4) :401–407.
- [77] **Li TZ, Wang Y, Luo MK** (2014) Control of fractional chaotic and hyperchaotic systems based on a fractional order controller. *Chin. Phys. B* 23(8) :080501-5.
- [78] **Razminia A, Baleanu D** (2013) Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control. *Mechatronics* 23(7) :873–879.
- [79] **Al-sawalha MM, Alomari AK, Goh SM, Nooran MSM** (2011) Active Anti-Synchronization of two Identical and Different Fractional-Order Chaotic Systems. *International Journal of Nonlinear Science* 11(3) : 267-274.
- [80] **Cafagna D, Grassi.G** (2012) Observer-based projective synchronization of fractional systems via a scalar signal : application to hyperchaotic Rössler systems. *Nonlinear Dynamics* 68 (1-2) :117-128.
- [81] **Jun WM, Yuan WX** (2011) Generalized synchronization of fractional order chaotic systems, *International Journal of Modern Physics B* 25 :1283–1292.
- [82] **Razminia A** (2013) Full state hybrid projective synchronization of a novel incommensurate fractional order hyperchaotic system using adaptive mechanism. *Indian Journal of Physics* 87(2) :161-167.
- [83] **Chai Y, Chen L, Wu R, Dai J** (2013) Q-S synchronization of the fractional-order unified system, *Pramana*. 80 (3) :449–461.
- [84] **Hadi T, Erjaee GH** (2011) Phase and anti-phase synchronization of fractional order chaotic systems via active control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*. 16(10) :4079-4088
- [85] **Sachin B, Varsha DG** (2010) Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*. 15 :3536-3546