Table des matières

Notations

Nous utilisera dans cette mémoire les notations et les définitions suivantes :

$\mathbf{H}$: Espace de Hilbert complexe.

$\mathcal{L}(\mathbf{H})$: L'agèbre des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert.

$\mathbf{R}(\mathbf{A})$: L'image d'un opérateur.

$\ker(\mathbf{A})$: Le noyau d'un opérateur.

$\mathbf{E}^{\circ}$: L'intérieur de E.

$\overline{\mathbf{E}}$: L'adhérence de E.

$\mathbf{E}^{\perp}$: L'orthogonale de E.

$\mathbf{A}_{|\overline{\mathbf{R}(\mathbf{T})}}$: La restriction de A sur $\overline{R(\delta_A)}$

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A})$: Spectre de A.

$\mathbf{co}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A})$: Enveloppe convexe de $\sigma(A)$.

$\boldsymbol{\sigma}_p(\mathbf{A})$: Spectre ponctuelle de A.

$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A})$: La résolvanre de A.

$\mathbf{r}(\mathbf{A})$: Le rayon spectrale de A.

$\oplus$: Signe de somme directe.

$\otimes$: Signe de produit tensoriel.

$\mathbf{K}(\mathbf{H})$: L'ensemble des applications compacts.

$\mathcal{A}$: L'algèbre de Banach.

$\mathcal{P}$: L'ensemble d'états.

$\mathbf{tr}(\mathbf{A})$: La trace de A.

$\mathbf{W}(\mathbf{A})$: L'image numérique de A.

$\mathbf{w}(\mathbf{A})$: Le rayon numérique de A.

$\mathbf{W}_0(\mathbf{A})$: L'image numérique maximale de A.

$\mathbf{W}_N(\mathbf{A})$: L'image numérique maximale normalisée de A.

$\mathbf{dist}$: Distance.

$\partial\mathbf{W}(\mathbf{A})$: La frontière de $W(A)$.

$\mathbf{w}(\mathbf{A})$: Le rayon numérique de A.

$\boldsymbol{\delta}_A$: La dérivation intérieur induite par A.

$\boldsymbol{\delta}_{A,B}$: La dérivation généralisée induite par A et B.

$\boldsymbol{\Delta}_{A,B}$: L'opérateur élémentaire

$\{\mathbf{A}\}'$: Le commutant de A.

$\{\mathbf{A}\}''$: Le bicommutant de A.

$\mathbf{C}_1(\mathbf{H})$: La classe de trace.

$\mathbf{C}_2(\mathbf{H})$: La classe de Hilbert Schmidth.

$\mathbf{C}_\infty(\mathbf{H})$: La classe des opérateurs compacts

$\mathbf{JA}(\mathbf{H})$: Classe de Joel Anderson.

$\mathbf{P}(\mathbf{H})$: L'ensemble des opérateurs P-symmétrique.

$\mathbf{D}(\mathbf{H})$: L'ensemble des opérateurs D-symmétrique.

$\mathcal{F}(\mathbf{H})$: L'ensemble des opérateurs finis.

$\mathcal{GF}(\mathbf{H})$: L'ensemble des opérateurs finis généralisés.

Introduction générale

Il n'est secret pour personne que la théorie des opérateurs a joué un rôle fondamental dans les mathématiques pures et appliquées. Dans ce travail on s'intéresse aux dérivations et dérivations généralisées dans un espace de dimension fini, il s'agit de la connaissance des applications
$X \to AX - XA$, pour $A, X \in \mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H (ie) :

$$\delta_A(X) = AX - XA,\ \forall A, X \in \mathcal{L}(H).$$

Nous définissons la dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ sur $\mathcal{L}(H)$ comme suit :

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB,\ \forall A, B, X \in \mathcal{L}(H).$$

Puis l'opérateur élémentaire par :

$$\Delta_{A,B}(X) = AXB - X,\ \forall A, B, X \in \mathcal{L}(H).$$

Les propriètés consernant ces opérateurs comme : image, noyau et norme (voir$[15]$) sont été exprimés ces dernières années.
L'objectif principale de cet travail est une initiation aux dérivations qui permettre au chercheur débutant de faire une étude avec les outils de base et de voir les plusieurs problèmes ouverts qui restent encore sans réponse dans ce domaine. Nous étudions le cas spécial de la dimension finie.
L'organisation de ce travail est réalisée comme suit :
Chapitre 01 : Ce chapitre est un chapitre introductif dans le quel nous avons rassemblés l'ensemble de quelques définitions, propriétés et des théorèmes relatives à notre thématique, les propriètés fomdamentales des opérateurs linéaires dans l'espace de Banach et de Hilbert, propriètés spectrale et les classes des opérateurs (voir $[9]$, $[21]$).
Chapitre 02 : Dans ce chapitre rappellons quelques propriètés de l'image numérique dans un espace de Hilbert, quelques résultats sur l'image d'une dérivation (voir $[19]$, $[20]$, $[30]$). Il est connu que l'opérateur identité I n'est pas un commutateur, (ie) : pour tout $A \in \mathcal{L}(H), I \notin R(\delta_A)$ où $R(\delta_A)$ désigne l'image d'une dérivation δ_A. J.Anderson $[15]$ a prouvé l'existance d'un opérateur $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $I \in \overline{R(\delta_B)}$. Cela a permis de définir une nouvelle classe non vide d'opérateurs :

$$JA(H) = \left\{ A \in \mathcal{L}(H), I \in \overline{R(\delta_A)} \right\}.$$

Nous intéressons à l'étude de l'orthogonalité de l'image au noyau de dérivation intérieure, généralisée et l'opérateur élémentaire selon théorème de Fuglede-Putnam et J.H.Anderson (voir $[2]$, $[3]$, $[7]$, $[30]$).

Chapitre 03 : Nous intéressons à l'étude de classe des opérateurs D-symmétrique, (A est D-symétrique si $\overline{R(\delta_A)} = \overline{R(\delta_{A^*})}$) qui ont été étudier par J. H. Anderson, J. W. Bunce, J. A. Deddens et J. P. Williams [17]. S. Bouali et J. Charles [13] introduissent la classe des opérateurs P-symétrique (ie) pour $A \in \mathcal{L}(H)$, si $T \in \ker(A)$ implique $T^* \in \ker(A)$, $\forall T \in C_1(H)$, donnons quelques propriétés concernant cette classe. On a aussi donné quelques propriétés fondamentales relatives aux opérateurs finis, (i.e). les opérateurs $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $dist(I, R(\delta_A)) = 1$. Cet classe est introduite par J.Williams[18]. Ensuite présentons un exemple d'un opérateur fini par l'utilisation les travaux de J.Williams[18] .

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions de base utilisé dans ce travail comme quelques définitions et propriètés importante consernant les opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach et de Hilbert.

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1 *Soit E un ensemble non vide, $\Bbbk$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$, E muni par deux lois addition et multiplication par un scalaire , on dit que E est un espace vectoriel si*
$\forall (x, y) \in E^2, \lambda \in \Bbbk$.
i) $x + y \in E$.
ii) $\lambda x \in E$.

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\Bbbk$, $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \Bbbk$*

i) $-(-x) = x$.
ii) $o_k x = 0$.
iii) $-(\lambda x) = (-\lambda x) = \lambda (-x)$.

1.1.2 Sous espace vectoriel

Définition 1.2 *Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$, F sous ensemble dans E. On dit que $(F, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ si et seulement si*

i) F non vide (c - à -d) $F \neq \phi$.
ii) $\forall x \in F, \forall y \in F$
$$x + y \in F.$$
iii) $\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in F, \lambda x \in F$.

1.1.3 Espaces vectoriels normés

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On appelle norme sur E toute application $\|.\|$ définie de E vers $\mathbb{R}^+$ (ie)*
$\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant* $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \Bbbk$

i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
iii) $\|\lambda x\| =| \lambda | \, \|x\|$.
Donc la couple $(E, \|.\|)$ est appellée espace vectoriel normé.

Proposition 1.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance $d(x, y) = \|y - x\|$ toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfant : $\forall x, y, z \in E$*

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
ii) $d(x,y) = d(y,x)$.
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Exemple 1.1 *Pour* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on définit les normes*

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid,$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}},$

et $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$.

Proposition 1.3 $\forall (x,y) \in E^2$

i) $\|x - y\| = \|y - x\|$.
ii) $\mid \|x\| - \|y\| \mid \leq \|x - y\|$.
iii) $\|x\| \geq 0$.

Définition 1.4 *Deux normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes s'il existe deux constantes* α *et* β *strictement positives telles que, Pour tout* $x \in E, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Définition 1.5 (***Suite de Cauchy***)
Soient E *un espace vectoriel,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy ssi :*

$$\forall \varepsilon \rangle 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \rangle N : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.1 *Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Définition 1.6 *Soit* E *un espace vectoriel, on dit que* E *est complet ssi toute suite de Cauchy est convergente.*

Définition 1.7 (***Banach***)
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

1.2 Espaces topologiques

On appelle espace topologique un couple (E, θ) formé d'un ensemble E et d'une topologie θ sur E, c'est -à dire un ensemble de parties de E qu'on appelle les ouverts de E, satisfaisant les propriétès suivantes
i) E et ϕ appartient à θ.

ii) θ est stable par intersection finie.
iii) θ est stable par union quelconque.

Définition 1.8 *Un espace topologique (E, θ) est dit séparé si pour tout couple (x, y) de points distincts, il existe deux ouverts disjoints U et V contenant respectivement x et y.*

Définition 1.9 *Dans un espace topologique, une partie V est appelée voisinage d'un point x s'il existe un ouvert U contenant x et contenu dans V.*

Théorème 1.1 *Une partie X de E est ouverte ssi elle est un voisinage de chacun de ses points.*

Définition 1.10 *Un point x et dit adhérent à une partie X de l'espace topologique E si tout voisinage de x rencontre X.*

Théorème 1.2 *Soit X une partie de l'espace topologique E, on appelle intérieur de X, La plus grand ouvert contenu dans X. La plus petit fermé contenant X dite l'adhérence de X.*

Topologie faible des opérateurs

Définition 1.11 *Une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs converge faiblement vers 0, ce qu'on note $A_n \overset{w}{\to} 0$, si $\langle A_n x, y\rangle \underset{n\to\infty}{\to} 0, \forall x, y \in H$.*

La fermeture faible d'un sous-ensemble E de $\mathcal{L}(H)$ est $\overline{E}^w$.

Topologie ultra-faible des opérateurs

Définition 1.12 *Une suite $(A_n)_n$ d'opérateur converge ultra-faiblement vers 0, lorsque $f(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, pour toute forme linéaire f sur $\mathcal{L}(H)$.*

Si E est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(H)$, $\overline{E}^u$ est la fermeture ultra-faible de E.

1.3 Espace de Hilbert

1.3.1 Produit scalaire

Définition 1.13 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ $(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.*
On appelle produit scalaire sur E une application $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{k}^2$ vérifiant les propriétès suivantes
i) $\forall y \in E$ l'application $x \to \langle x, y\rangle$ est linéaire.

ii) $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
iii) $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}^{+}$.
iv) $\forall x \in E, \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Théorème 1.3 (***Inégalité de Cauchy-Schwarz***)
Soit l'application $\langle ., .\rangle$ un produit scalaire sur E, pour tout x et y de E on a l'inégalité

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Théorème 1.4 *Soit $\langle ., .\rangle$ un produit scalaire sur E, l'application $x \rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.*

Définition 1.14 *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire tel que :$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.*

Théorème 1.5 (***Identité de polarisation***)
Soit E un espace préhilbertien, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est donné par
$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$.

Définition 1.15 *On appelle espace de* ***Hilbert*** *un espace préhilbertien complet .*

Définition 1.16 (***L'orthogonalité***)
Soient x et y deux vecteurs d'un espace de Hilbert, on dit que x est orthogonal à y ssi $\langle x, y\rangle = 0$ que l'on note $x \perp y$.

Définition 1.17 *Soit M un sous espace d'un espace de Hilbert H, la complémentaire orthogonal de M $\left(\text{noté } M^{\perp}\right)$ définie par*
$M^{\perp} = \{y \in H, \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in M\}$, *tel que $M^{\perp}$ est un sous espace fermé de H.*

Définition 1.18 *Soit E un ensemble non vide et M une partie de E, on dit que M est convexe ssi $\forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in M$.*

1.4 Les opérateurs dans un espace de dimension fini

1.4.1 Opérateur borné dans un espace de Banach

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques de dimension fini sur le corps $\mathbb{k}$, A est un opérateur linéaire de E dans F si

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \forall x, y \in E,$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x), \forall \lambda \in \Bbbk.$$

On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Dans le cas où $E = F$ on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$. Rappelons que la norme de $A \in \mathcal{L}(E,F)$ est défini par

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F.$$

Définition 1.19 *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné de E dans F toute application linéaire continue de E dans F. Pour $A \in \mathcal{L}(E,F)$, on note par*

$$R(A) = \{Ax, x \in E\}, \text{ l'image de } A,$$
$$Ker(A) = \{x \in E, Ax = 0\}, \text{ le noyau de } A.$$

Définition 1.20 *Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. A est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ tel que $\|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in E$.*

Définition 1.21 *Soient E et F deux espaces de Banach, A une application linéaire de E dans F. On dit que A est inversible, s'il existe un opérateur de $\mathcal{L}(F,E)$, donc (linéaire et borné) notée A^{-1} tel que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*

Corollaire 1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach, A un opérateur linéaire continu et bijectif de E dans F. Alors il existe A^{-1} continu de F dans E.*

Adjoint d'un opérateur

Soient E et F deux espaces de Banach, A un opérateur borné de E dans F. L'adjoint de A noté A', est l'opérateur borné de F^* dans E^* vérifiant

$\left(A'\ell\right)(x) = \ell\left(A(x)\right)$, pour tout $\ell \in F^*$ et $x \in E$.

On a les relations d'ortogonalité suivantes

$\ker(A) = R\left(A'\right)^{\perp}$,

$\ker\left(A'\right) = R(A)^{\perp}$,

$\ker(A)^{\perp} \supseteq \overline{R(A')}$,

$\ker\left(A'\right)^{\perp} = \overline{R(A)}$.

1.4.2 Opérateur borné dans un espace de Hilbert

Adjoint dans un Hilbert

Définition 1.22 *Soient H, H' deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H,H')$, il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(H',H)$ tel que pour tout $x \in H$ et tout $y \in H'$ on ait $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$.*

On a de plus $\|A^*\| = \|A\|$.

Proposition 1.4 *Pour tout* $A \in \mathcal{L}(H)$*, on a les relations*
$\ker(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$ *et* $\ker(A^*) = R(A)^{\perp}$.

Les opérateurs particuliers

Définition 1.23 *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert. Un élément* $A \in \mathcal{L}(E)$ *est appelé*
1) ***Hermitien** ou **auto-adjoint** si* $A = A^*$.
2) ***Normal** si* $AA^* = A^*A$.
3) ***Sous-normal**, s'il admet une extension normal.*
4) ***Paranormal,** si* $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \|x\|$ *pour tout* $x \in H$.
3) ***Positif** si* A *est auto-adjoint et si* $\forall x \in E, \langle Ax, x\rangle \geq 0$.
4) ***Inversible** s'il existe* B *borné tel que*
$BA = AB = I$.
Un élément $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *est appelé*
1) ***Isométrie** si* $AA^* = A^*A = I$ *ou* $\|Ax\| = \|x\|$.
2) ***Unitaire** si* $AA^* = Id_F$ *et* $A^*A = Id_E$.
3) ***Hyponormal** si* $A^*A - AA^* \geq 0$.
4) ***P-hyponormal** si* $(A^*A)^P - (AA^*)^P \geq 0$*, pour* $0 < P \leq 1$.
5) ***Quasi-hyponormal** si* $A^*(A^*A - AA^*)A \geq 0$.
6) ***Algèbrique** si* $P(A) = 0$*, pour quelque polynome* P *non trivial.*
7) ***Dominant,** si* $R(A-\lambda) \subseteq R(A-\lambda)^*$*, pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Spectre d'un opérateur

Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 1.24 *On définit le spectre de* A *par l'ensemble des nombres complexes* λ *tel que l'opérateur* $(A - \lambda I)$ *n'est pas inversible, noté*
$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$.
-On appelle ensemble résolvante de A*, le complémentaire de* $\sigma(A)$ *est noté*
$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I \text{ est inversible}\}$.
-Si $\lambda \in \rho(A)$*, on définit la résolvante* $R_\lambda(A)$ *de* A *au point* λ *par*
$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$.

Définition 1.25 *Un nombrle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre de* A *s'il existe un vecteur non nul* $x \in H$ *tel que* $Ax = \lambda x$.

- Chaque vecteur non nul x qui satisfait $Ax = \lambda x$ s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres de A est appellée spectre ponctiel de A et noté par $\sigma_p(A)$.

Rayon spectral

Définition 1.26 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on définit le rayon spectral $r(A)$ de A par*
$r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.
Si $\sigma(A) = \emptyset$, alors on pose $r(A) = 0$.

Théorème 1.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $\|A\| < 1$, alors $(I - A)$ est inversible et son inverse*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

1) $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\}$.
2) En dimension finie $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.
3) $\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}$.
4) $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.
5) $r(A) \leq \|A\|$.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$.

Proposition 1.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $A = A^*$, alors $\sigma_p(A) \in \mathbb{R}$.*

1.4.3 Opérateurs compacts

Applications linéaires compacts

Soit E est un espace vectoriel normé. On note $B_E(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B}_E(0, r)$ la boule fermée. Dans le cas où $r = 1$, on note $B_E = B_E(0, 1)$ et $\overline{B}_E = \overline{B}_E(0, 1)$.

Définition 1.27 *Soient E et F deux espaces de Banach, une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite compacte si l'image $A(\overline{B}_E)$ par l'application A de la boule unité fermée $\overline{B}_E$ de l'espace E est relativement compacte dans F. On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $K(E) = K(E, E)$.*

La proposition suivante donne des propriétés fondamentaux des opérateurs compacts.

Proposition 1.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivants sont équivalents*
(i) A est compact.
(ii) Pour toute partie B bornée de E, l'ensemble $A(\overline{B})$ est relativement compact dans F.

Proposition 1.7 *Soient E et F deux espaces de Banach, l'ensemble $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$. E,F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{L}(F,G)$, si S ou A est compact alors AS est compact.*

Proposition 1.8 *Soit E un espace de Banach. Pour $A \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivants sont équivalents*
i) $A \in K(E)$,
ii) $A^* \in K(E^*)$.

1.5 C$^*-$Algébres

1.5.1 L'Algébre de Banach

Définition 1.28 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|.\|$, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

i) $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{C}-$espace de Banach (ie) (un $\mathbb{C}-$ espace vectoriel normé complet) .
ii) Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, on a $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Remarque 1.2 *S'il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ tel que*
$xe = ex = x, \forall x \in \mathcal{A}$, $\|e\| = 1$, alors $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire, e s'appelle l'élément unité d'algèbre $\mathcal{A}$.
- On dit que $\mathcal{A}$ est un algèbre commutative si $xy = yx, \forall x, y \in \mathcal{A}$.

Involution

Définition 1.29 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, on appelle involution une application I de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ vérifiant*

i) $I^2(a) = a, \forall a \in \mathcal{A}$.
ii) $I(ab) = I(b) I(a), \forall a, b \in \mathcal{A}$.
iii) $I(\alpha a + b) = \overline{\alpha} I(a) + I(b), \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall a, b \in \mathcal{A}$.
iv) $I(a) = a^*$.

Définition 1.30 (**C$^*-$*Algèbre***)
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire posséde une involution tel que
$\|a^* a\| = \|a\|^2, \forall a \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est une C^*-Algèbre.

Proposition 1.9 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-Algèbre. Si $a \in \mathcal{A}$, alors*

i) $\|a^*\| = \|a\|$.
ii) $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Idéaux

Définition 1.31 *Soit* $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ *un anneau. On appelle idéal à droite (respectivement à gauche) de l'anneau* A*, tout ensemble* $I \subset \mathcal{A}$ *tel que*
1) I est un sous groupe de $(\mathcal{A}, +)$.
2) $\forall x \in \mathcal{A}$, $(\forall y \in I, x \bullet y \in I$ (respectivement $y \bullet x \in I$)).

Remarque 1.3 *Si I est un idéal à droite et à gauche de A, alors I est un idéal bilatère de A.*

L'algèbre de Calkin

Définition 1.32 *Soit $K(H)$ l'idéal des opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(H), C(H)$ noté l'algèbre de Calkin tel que :*

$C(H) = \mathcal{L}(H)/K(H) = \{[A], A \in \mathcal{L}(H)\}$, où
$[A] = \{A + K, K \in K(H)\}$.

Chapitre 2

Dérivations et dérivations généralisées dans un espace de dimension fini

Dans ce chapitre nous présentons quelques propriètés des dérivations, l'image numérique, puis définissons une nouvelle classe non vide d'opérateurs nomée la classe de Joel Anderson, la théorème de Fuglede-Putnam qui joue un role très important dans la théorie des opérateurs, puis exposons quelques résultats sur l'orthogonalité de l'image et noyau d'une dérivation dans $\mathcal{L}(H)$.

2.1 Forme canonique d'un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, trace de $A \in \mathcal{L}(E)$

2.1.1 Forme canonique d'un élément de $\mathcal{L}(E,F)$

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes de dimension n et p respectivement, $\{e_i, i = 1, .., n\}$ une base de E, $\{f_j, j = 1, ..., p\}$ une base de F, on utilise le base $\{e^i\}$ de E', le dual de E, définie par

$$(e^j, e_k) = \delta_k^j = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}, k = \overline{1,n}\,,$$

qui est la base duale de le base $\{e_i\}$.

Définition 2.1 *Soit $y' \in E'$ et $x \in F$. Le produit tensoriel $x \otimes y'$ est l'élément de $\mathcal{L}(E,F)$ définie par*

$$x \otimes y' = \left\{E \to F,\ z \to \left(y', z\right) x\right\},$$

par la méme manière $y' \otimes x$, l'élément de $B(F', E')$ est donnée par

$$y' \otimes x = \left\{F' \to E',\ t' \to \left(t', x\right) y'\right\}.$$

Proposition 2.1

(i) $(f_i \otimes e^j) = (e^j \otimes f_i)$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{L}(F,G), \forall B \in \mathcal{L}(H,E)$,
$A(f_i \otimes e^j)B = (Af_i) \otimes \left(B'e^j\right)$où B est l'adjoint de B.
(iii) Si $E = F$, $(e_i \otimes e^j)\left(e_k \otimes e^l\right) = \delta_k^j e_i \otimes e^l$, $(e_i \otimes e^j)^2 = (e_i \otimes e^j)$.

Preuve. Calcule direct de l'action sur un vecteur arbitraire x.
(i) $\langle y', (f_i \otimes e^j)\rangle = \langle e^j, x\rangle\langle y', f_i\rangle = \langle\langle y', f_i\rangle e^j, x\rangle$.
(ii) $A(f_i \otimes e^j)Bx = \langle e^j, Bx\rangle Af_i = \langle B'e^j, x\rangle Af_i$.
(iii) $(e_i \otimes e^j)\left(e_k \otimes e^l\right) = e_i \otimes \left\{\left(e^l \otimes e_k\right) e^j\right\} = \delta_k^j e_i \otimes el$. ■

2.1.2 La trace d'un élément de $\mathcal{L}(E)$

Définition 2.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, où E de dimension fini n. E muni d'une base $\{e_i\}$, où $\{e^i\}$ la duale de $\{e_i\}$, alors le $tr A$ défini par*

$$tr A = \sum_{i=1}^{n} \langle e^i, Ae_i\rangle.$$

Proposition 2.2 [12]

$i)$ $tr\left(x \otimes y'\right) = \left(y', x\right), y' \in E'$ et $x \in E$.

$ii)$ trA est indépendante à la base choisi dans E, l'application

$$\mathcal{L}(E) \to C$$
$$A \to trA, \text{ est un application linéaire.}$$

$iii)$ $tr(AB) = tr(BA)$, pour tout $A, B \in \mathcal{L}(E)$.

$iv) tr(SAS^{-1}) = trA$, pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$, et pour tout inversible $S \in \mathcal{L}(E)$.

$v)$ Il existe un unique élément B dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $h(A) = tr(AB)$, pour tout $h \in \mathcal{L}(E)'$ (forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$).

Proposition 2.3 *Si $\{e_i\}$, $i = 1, ..., n$, une base orthonormée de E alors*
$trA = \sum\limits_{i=1}^{n}(Ae_i, e_i)$,

Définition 2.3 $trA^* = \overline{trA}$ *(l'imaginaire conjugué de trA),*
$tr(x \otimes y) = \langle x, y\rangle$.

2.1.3 Schatten P-classe

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H, $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et $S_1(A) \geq S_2(A) \geq ... \geq 0$ les valeurs singulière de A (ie) les valeurs propres de $\mid A \mid = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, dans leur ordre décroissant.

Définition 2.4 [29] *L'opérateur A appartient à l'espace Schatten P-classe C_P, si*
$\|A\|_p = \left[\sum\limits_{i=1}^{\infty} S_i(A)^p\right]^{\frac{1}{p}} = [tr(A)^p]^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty$ *où tr est la trace fonctionnelle*
C_1 le classe de trace,
C_2 est la classe de Hilbert -Schmidth,
C_∞ est la classe des opérateurs compacts avec
$\|A\|_\infty = S_1(A) = \sup\limits_{\|f\|=1} \|Af\|$, *définissent la norme usuelle de l'opérateur. Alors*
i) On dit que A est la classe de trace si
$\|A\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle \mid A \mid e_n, e_n\rangle < \infty.$
ii) A est classe de Hilbert-Schmidth si
$\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|Ae_n\|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$, *où e_n est la base orthonnormée de H.*

2.2 Produit intérieur de Hilbert-Schmidth

Soit H un espace de Hilbert séparable,$(e_i)_{i\geq 1}$ une base Hilbertienne de H. Par définition, on dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidth si $\|A\|_2^2 = \sum\limits_{i\geq 1}\|A(e_i)\|^2 < \infty$.

Le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidth est finis, partant si A et B deux opérateurs de Hilbert-Schmidth, le produit intérieur de Hilbert-Schmidth définie par
$\langle A, B\rangle = tr(AB^*) = \sum\limits_{i\geq 1}\langle Ae_i, Be_i\rangle$.

2.3 Les commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension fini.
1)Le commutant de $A \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble défini par
$$\{A\}' = \{B \in \mathcal{L}(E), AB = BA\}.$$
2)Le bicommutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par
$$\{A\}'' = \left\{C \in \mathcal{L}(E), CB = BC, \forall B \in \{A\}'\right\}.$$

Proposition 2.4

1) $\{A\}'' = \left\{\{A\}'\right\}'$.
2) $\{A\}'$ est un sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
3) $\{A\}''$ est un sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
4) Tout polynôme de A appartient a $\{A\}''$.
5) L'ensemble des commutateurs de $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des éléments de trace nulle,

$$tr(A) = 0 \Longleftrightarrow [\exists A, B \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que : } X = AB - BA].$$

6)Si E est de dimension fini la distance entre l'identité de $\mathcal{L}(E)$ et chaque commutateur est supérieur ou égale à 1, pour la norme usuelle de $\mathcal{L}(E)$.

2.4 Dérivations et Dérivations généralisées

Soit $\mathcal{L}(H)$ un algbère sur un corps commutatif $\mathbb{k}$.

Définition 2.5 [12] *Une dérivation δ est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(H)$ satisfait la propriètè suivante*

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y), \forall X, Y \in \mathcal{L}(H).$$

Définition 2.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'application de $\mathcal{L}(H)$ vers $\mathcal{L}(H)$ définie par $\delta_A(X) = AX - XA$, pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$, est une dérivation sur $\mathcal{L}(H)$ appellée dérivation intérieure induite par A.*

Définition 2.7 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, l'application de $\mathcal{L}(H)$ vers $\mathcal{L}(H)$ définie par $\delta_{A,B} = AX - XB$, pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$, est appellée dérivation généralisée induite par A et B.*

Proposition 2.5 [12]
1) Une dérivation intérieure est une dérivation.
2) Si E est un espace de Hilbert, alors toute dérivation sur $\mathcal{L}(H)$ est une dérivation intérieur
$\exists A \in \mathcal{L}(H) \ / \ \delta = \delta_A$.
3) Pour $A \in \mathcal{L}(H)$ en $(2)[\delta_A = \delta_B] \Leftrightarrow [B = A - \lambda 1], \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 2.8 *Soient H un espace de Hilbert complexe et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach pour A et $B \in \mathcal{L}(H)$, on définit l'opérateur élémentaire $\Delta_{A,B}$ par $\Delta_{A,B} = AXB - X$.*

Proposition 2.6 *Si A et B deux opérateurs bornés dans H, alors*

$$\begin{aligned} \delta_{A+B} &= \delta_A + \delta_B \\ \delta_{AB-BA} &= \delta_A\delta_B - \delta_B\delta_A. \end{aligned}$$

Donc la somme et le produit de deux dérivations intérieur est une dérivation. Mais le produit $\delta_A\delta_B$ est une dérivation seulement dans le cas trivial.

Théorème 2.1 [19] *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H), \delta_A\delta_B$ est une dérivation ssi δ_A ou δ_B est un scalaire multiple pour l'opérateur identité.*

2.5 L'image numérique dans un espace de Hilbert

Dans cette section, nous allons essayé de presenter quelques résultats et quelques applications de l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert complexe H, et ensuite nous allons énumérer une liste des propriètés importants sur l'image numérique.

2.5.1 Définitions et propriètés

Soient H un espace de Hilbert complexe, A un opérateur borné sur H .
– L'image numérique de A est l'ensemble défini comme suit

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Voici quelques propriètés utilisées pour le calcul de l'image numérique
i) $W(u^*Au) = W(A)$ où u un opérateur unitaire et $A \in \mathcal{L}(H)$.

ii) $W(\alpha A+\beta I)=\alpha W(A)+\beta=\{\alpha Z+\beta, Z\in W(A)\}, \forall\alpha,\beta\in C, \forall A,B\in\mathcal{L}(H)$.

iii) $W(A^*)=\{\overline{z},\ z\in W(A)\}$, pour tout $A\in\mathcal{L}(H)$.

iv) $W(A+B)\subset W(A)+W(B), \forall A,B\in\mathcal{L}(H)$.

v) $A\in\mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint ssi $W(A)\subset R$.

Exemple 2.1 *-Dans $\mathbb{C}^2$, on définit l'opérateur A par la matrice*

$$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}, a\in\mathbb{C},$$

alors

$$W(A)=\left\{z, \mid z\mid\leq\frac{|a|}{2}\right\}.$$

- Nous posons $H=l^2$, et on définit l'opérateur sur H comme ceci

$$S(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,...)=S\left(\varepsilon_1,\tfrac{1}{2}\varepsilon_2,\tfrac{1}{3}\varepsilon_3,...\right),$$

On a $W(S)=(0,1]$.

2.5.2 Le rayon numérique

Nous voyons précédemment le rayon spectrale qui est le réel positif définie par

$$r(A)=\sup\{\mid\lambda\mid,\lambda\in\sigma(A)\}.$$

Dans cette section nous allons présenter le rayon numérique d'un opérateur qui est analogue à rayon spectrale, mais cella pour l'image numérique.

Définition 2.9 *Soit A un opérateur linéaire borné. Le rayon numérique de A que l'on note $w(A)$ est défini comme ceci*

$$w(A)=\sup\{\mid z\mid, z\in W(A)\}.$$

La théorème suivante montre que $w(A)$et $\|A\|$ sont deux normes équivalentes.

Théorème 2.2 $w(A)\leq\|A\|\leq 2w(A)$.

Preuve. *Soit $x\in H$ tel que $||x||=1$.*

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$\mid\langle Ax,x\rangle\mid\leq\|Ax\|\|x\|\leq\|A\|\|x\|^2=\|A\|$,

d'où $w(A)\leq\|A\|$. De l'identité de polarisation, on obtient

$$\begin{aligned}4\mid\langle Ax,y\rangle\mid &=\mid\langle A(x+y),x+y\rangle-\langle A(x-y),x-y\rangle+i\langle A(x+iy),x+iy\rangle-i\langle A(x-iy),x-iy\rangle\mid\\ &\leq w(A)\left[\|x+y\|^2+||x-y\|^2+||x+iy\|^2+\|x-iy\|^2\right]\\ &=4w(A)[||x||^2+||y||^2].\end{aligned}$$

En prenant $||x||=||y||=1$, on trouve

$4|\langle Ax,y\rangle|\leq 8w(A)$,

ce qui implique que $\|A\|\leq 2w(A)$. ■

Lemme 2.1 *Soient A, B deux opérateurs linéaires bornés, $\alpha \in \mathbb{C}$, on a*
$i) w(\alpha A) = \mid \alpha \mid w(A).$
$ii) w(A+S) \leq w(A) + w(S).$
Cette lemme est une conséquence à propsition (2.7).

Proposition 2.7 *Soit A un opérateur linéaire borné,on a*
$i) r(A) \leq w(A) \leq \|A\| \leq 2w(A).$
$ii) \forall n \in N, w(A^n) \leq w(A)^n.$

2.5.3 L'image numérique et le spectre

Nous allons discuter précédement le spectre de A qui est l'ensemble des tout les $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
Notre but dans cette sous section est de trouver la relation entre $W(A)$ et $\sigma(A)$.

Théorème 2.3 [24] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ on a $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$.*

Et en générale on a

$$\forall A, S \in \mathcal{L}(H), \sigma(S+A) \subseteq \overline{W(S+A)} \subseteq \overline{W(S)} + \overline{W(A)}.$$

Remarque 2.1 *$W(A)$ n'est pas toujours fermé.*

Proposition 2.8 [12] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ on a*

1) $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$.
2) $\sigma_p(A) \subset W(A)$.
3) $[A \text{ normal}] \Rightarrow [W(A) = co\sigma(A)]$.
4) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, K compact donné de $\mathbb{C}$ alors S' inversible tel que $W\left(S'AS'^{-1}\right) \supset K$.
5) Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, pour tout voisinage V de $co\sigma(A)$, il existe S inversible tel que $W(SAS^{-1}) \subset V$.
6) $co\sigma(A) = \cap \{W(SAS^{-1}), S \text{ inversible}\}$.

2.5.4 Les deux autres images numérique maximale et maximale normalisée

Soit H un espace de Hilbert de dimension fini.

Définition 2.10 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'image numérique maximale de A est défini par*

$$W_0(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}, z = \lim_n (Ax_n, x_n), \|x_n\| = 1, \lim_n \|Ax_n\| = \|A\| \right\}.$$

Proposition 2.9

$i)$ $[0 \in W_0(A)] \Rightarrow [\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|A\|^2 + \mid \lambda \mid^2 \leq \|A + \lambda\|^2]$.
$ii)$ $[\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|A\| \leq \|A + \lambda\|] \Rightarrow [0 \in W_0(A)]$.
$iii)$ $\forall A \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique λ_0 tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|A - \lambda_0\| \leq \|A - \lambda\|.$$

Définition 2.11 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle centre de A la valeur λ_0 tel que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|A - \lambda\| > \|A - \lambda_0\|.$$

Définition 2.12 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on définit l'image numérique maximale normalisée de A par*
-$W_N(A) = W_0\left(\frac{A}{\|A\|}\right)$ *,pour* $A \neq 0$.
-$W_N(0) = \{0\}$.

Proposition 2.10 *Soient A, $B \in \mathcal{L}(H)$, on a*

$$[W_N(A) \cap W_N(-B) \neq \varnothing] \Leftrightarrow [\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|A\| + \|B\| \leq \|A - \lambda I\| + \|B - \lambda I\|].$$

Proposition 2.11 [12] *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ alors*

1) Si λ_0 est le centre de A, alors $\|\delta_A\| = 2\|A - \lambda_0\| = 2\inf\{A - \lambda, \lambda \in \mathbb{C}\}$.
2) Il existe $x \in \mathcal{L}(H)$, $\|x\| = 1$ telque

$$\|\delta_A x\| = \|\delta_A\|.$$

3) $\|\delta_{A,B}\| = \inf\{\|A - \lambda\| + \|B - \lambda\|, \lambda \in \mathbb{C}\}$.
4) Il existe $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ telque $\|\delta_{A,B}\| = \|A - \lambda_1\| + \|B - \lambda_1\|$.
5) $W_N(A) \cap W_N(B) \neq 0 \Leftrightarrow \|\delta_{A,B}\| = \|A\| + \|B\|$.

Preuve. Voir [12] ■

2.6 Enveloppe convexe

Dans cette sous-section nous allons présenter l'enveloppe convexe ainsi que de quelques application à l'image numérique.
Soit E un sous ensemble convexe borné du convexe $\mathbb{C}$.

Définition 2.13 *On note par $co\{E\}$ l'enveloppe convexe de E, qui est la plus petit ensemble convexe qui contient E.*

Théorème 2.4 *$\overline{co\{E\}}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe de E.*

Théorème 2.5 *Soit $N \in \mathcal{L}(H)$ opérateur normal, on a*

$$\overline{W(N)} = \overline{co\{\sigma(N)\}}.$$

2.7 Théorème de Fuglede-Putnam

Dans cette sous section nous intéressons au théorème de Fuglede-Putnam qui joue un role trés important dans la théorie des opérateurs, ce théorie fut établit en 1950 par Bent Fuglede [2] .
La version classique du théorème est la suivante :

Théorème 2.6 *Soient A, B deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert avec B normal si $BA = AB$ alors $B^*A = AB^*$.*

Putnam est donnée la généralisation de la version de Fuglede en 1951.

Théorème 2.7 *Soient A, B, X trois opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, avec B et X normaux et $XA = AB$ alors $X^*A = AB^*$.*

Théorème 2.8 *Soient $A, B, X \in \mathcal{L}(H)$, si (A, B^*) satisfait la propriété de Fuglede-Putnam et $S \in \ker(\delta_{A,B})$, alors on a $\|\delta_{A,B}(X) + S\| \geq \|S\|$.*

Kittaneh est généralisé le résultat pour un opérateur normal sachant que $N^2X = XN^2$ et $N^3X = XN^3, \forall X \in \mathcal{L}(H)$ aux opérateurs sous-normaux tel que A et B^* deux opérateurs sous-normal. Puis A.Bachir généralise cette résultat tel que A un opérateur dominant et B^* un opérateur P-hyponormal. Mais nous généralisons cette résultat pour chacun (A, B^*) satisfait la propriété de Fuglede-Putnam.

Théorème 2.9 *Soient $A, B, X \in \mathcal{L}(H), (A, B^*)$ satisfait la propriété de Fuglede-Putnam si $A^2X = XB^2$ et $A^3X = XB^3$, alors $AX = XB$.*

Kittaneh prouvé aussi $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $A^2 = B^2, A^3 = B^3, \ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B \subset \ker B^*$,alors $A = B$, nous pouvons généralisé cette résultat pour chacun (A, B^*) satisfait la propriété de Fuglede-Putnam.

Corollaire 2.1 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, si (A, B^*) satisfait la propriété de Fuglede-Putnam et $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$ alors $A = B$.*

2.8 Classe de Joel Anderson

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infinie et soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des tous les opérateurs linéaires bornés sur H. La dérivation intérieure induite par $A \in \mathcal{L}(H)$ est l'application définie par

$$\begin{aligned}\delta_A &: \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H) \\ \delta_A(X) &= AX - XA, X \in \mathcal{L}(H).\end{aligned}$$

On sait que l'identité n'est pas un commutateur, $I \notin R(\delta_A)$ pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ où $R(\delta_A)$ notée l'image de δ_A. J.H Anderson [15] a prouvé l'existance d'un opérateur $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $I \in \overline{R(\delta_B)}$, $\left(\text{où } \overline{R(\delta_B)}\right)$ est la fermeture de $R(\delta_B)$, pour la topologie uniforme sur $\mathcal{L}(H)$ (ie) $dist(I, R(\delta_B)) = 0$. Cela a permis de definir une nouvelle classe non vide d'opérateur nomée classe de Joel Anderson

$$JA(H) = \left\{A \in \mathcal{L}(H), I \in \overline{R(\delta_A)}\right\} = \{A \in \mathcal{L}(H), \exists X_n \in \mathcal{L}(H) \text{ tel que } AX_n - X_nA \to I\}.$$

On sait qu'en dimension finie on a toujours $dist(I, R(\delta_A)) = 1$, alors qu'en dimension infinie ceci n'est pas toujours vraie.
Nous intéressons aux opérateurs qui appartient à la classe de Joel Anderson .

2.8.1 La structure algèbrique de $JA(H)$

Proposition 2.12 *Soit* $A \in JA(H)$ *alors*
i) $A^{-1} \in JA(H)$.
ii) $(A - \lambda I) \in JA(H)$.
iii) $\alpha A \in JA(H), \alpha \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.13 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$, *si* $A, B \in JA(H)$. *Alors* $A.B \in JA(H)$.

Remarque 2.2 *Les propositions précédents prouvent que* $JA(H)$ *n'a pas un structure algèbrique.*

2.8.2 Les opérateurs dans $JA(H)$

Donnons quelques conditions vérifiées pour un opérateur appartient à $JA(H)$.

Lemme 2.2 [15] *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors les assertions suivants sont équivalents*

i) $I \in \overline{R(\delta_A)}$,
ii) Il existe un opérateur inversible $B \in \{A\}'$ *tel que* $B \in \overline{R(\delta_A)}$,
iii) $R(\delta_A)$ *contenant tout les opérateurs inversibles dans* $\{A\}'$.

Théorème 2.10 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, f *une fonction analytique sur un ensemble ouverte contenue le spectre de* A, *tel que* $f' \neq 0$ *sur* δ_A, $A \in JA(H)$ *ssi* $f(A) \in JA(H)$ (ie) $I \in \overline{R(\delta_A)}$ *ssi* $I \in \overline{R(\delta_{f(A)})}$.

Lemme 2.3 *Soit* A *un opérateur sous la forme* $\begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$, *si* $T \in JA(H)$ *alors* $A \in JA(H)$.

Théorème 2.11 [15] *Soit* $A, P \in \mathcal{L}(H)$, *tel que* $P^2 = P$ *si* $I + P \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$ *alors* $A \in JA(H)$.

2.9 L'image numérique d'une dérivation généralisée

Soit $\mathcal{A}$ un C^*- algèbre, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est l'ensemble défini par

$$\left\{f \in \mathcal{A}',\ f(I) = \|f\| = 1\right\}.$$

Pour $A \in \mathcal{A}$, l'ensemble $W_0(A) = \{f(A), f \in \mathcal{P}(\mathcal{A})\}$ est dite l'image numérique de A.
Soient $A \in \mathcal{A}$, on définit L_A, R_A comme suit

$$X \to AX,$$
$$X \to XA.\text{respectivement}$$

D'aprés J.H.Anderson et C-Foias [16] on a
$W_0(A) = W_0(L_A) = W_0(R_A)$ et si $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ alors $W_0(A) = \overline{W(A)}$.

Lemme 2.4 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, *alors* $\overline{W_0(A)} = co\sigma(A)$, *ssi*

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq [dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1}. \text{ Pour tout } \lambda \notin co\sigma(A).$$

Théorème 2.12 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq [dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1}$, $\forall \lambda \notin co\sigma(A)$, *et* $\|(B-\lambda)^{-1}\| \leq [dist(\eta, co\sigma(A))]^{-1}$, *pour tout* $\eta \notin co\sigma(A)$ *alors*

$$W_0(\delta_{A,B}) = co\sigma(\delta_{A,B}).$$

Lemme 2.5 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur hyponormal , alors*

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq [dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1}, \text{ pour tout } \lambda \notin co\sigma(A).$$

Cette lemme signifie l'estimation de la norme d'une résolvante par l'inverse de la distance de λ à le spectre d'un opérateur hyponormal.

Corollaire 2.2 *Si* A *et* B *deux opérateurs hyponormaux, alors*

$$W_0(\delta_{A,B}) = co\sigma(\delta_{A,B}).$$

2.10 L'orthogonalité de l'image et du noyau de $\delta_A, \delta_{A,B}$ et $\Delta_{A,B}$

On commence par la définition du l'orthogonalité au sens de Birkhoff.
Soient E un espace de Banach, $a, b \in E$ on dit que b est orthogonale à a au sens de Birkhoff [8] ssi $\forall \lambda \in \Bbbk, \|a + \lambda b\| \geq \|a\|$.

Remarque 2.3 *Si E est un espace de Hilbert, alors $\langle a, b\rangle = 0 \Rightarrow b \perp a$ (ie) l'orthogonalité au sens usuelle.*

Remarque 2.4 *Si E un espace de Banach, l'orthogonalité au sens de Birkhoff dite que l'orthogonalité n'est pas symétrique (ie) a orthogonale à b n'implique pas que b est orthogonale à a, $b \perp a$ ssi la ligne complexe $\{a + \lambda b \,/ \lambda \notin \mathbb{C}\}$ est orthogonale à la boule ouverte $k(0, \|a\|)$.*

Remarque 2.5 *J.H Anderson prouvé que si A et $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que A normal alors $AS = SA$ implique que $\forall X \in \mathcal{L}(H), \|\delta_A(X) + S\| \geq \|S\|$. C'est la sens de l'image d'une dérivation $\delta_A : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$, définie par $\delta_A(X) = AX - XA$, est orthogonal à leur noyau.*

2.10.1 L'image d'une dérivations intérieure

Dans cette sous section nous présenterons autre propriètés de $R(\delta_A)$, par l'utilisation de l'espace vectoriel complexe E, ou par l'utilisation E muni d'un espace de Hilbert avec la norme usuelle $\|A\| = \sup\{\|Ax\|, \|x\| = 1\}$, ou avec la norme $\|.\|_2$, norme de Hilbert-Schmidt associé à le produit intérieur.

Proposition 2.14 *Soit H un espace de Hilbert n-dimensionail et soit $\mathcal{L}(H)$ muni avec produit intérieur (ie) $\mathcal{L}(H) = C_2(H)$. Alors on a*
i) $(\delta_A)^* = \delta_{A^*}$,
ii) $R(\delta_A) = \left[\{A^*\}'\right]^{\perp}$.

Proposition 2.15 *Soit E un espace vectoriel complexe alors on a*
i) $\{A\}'' = \{B \in \mathcal{L}(H), R(\delta_B) \subset R(\delta_A)\}$.
ii) $\{A\}' = \{X \in \mathcal{L}(H), XR(\delta_A) + R(\delta_A)X\}$.
ii) $\{0\} = \{Z \in \mathcal{L}(H), Z\mathcal{L}(H) + \mathcal{L}(H)Z \subset R(\delta_A)\}$.

2.10.2 L'orthogonalité et l'image d'une dérivation généralisée

Lemme 2.6 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$, les assertions suivants sont équivalents*
1) (A, B) *a la propriètè* $(FP)_{\mathcal{L}(H)}, 1 \leq p < \infty$.

2) Si $AT = TB$ *où* $T \in \mathcal{L}(H)$ *, alors* $\overline{R(T)}$ *réduire* A*,* $\ker(T)^{\perp}$ *réduire* B*, et* $A_{|_{\overline{R(T)}}}$ *et* $B_{|_{\ker(T)^{\perp}}}$ *sont des opérateurs normaux.*

Théorème 2.13 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *satisfait* $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$ *alors*
$\|S + \delta_{A,B}(X)\| \geq \|S\|$ *, pour tout* $S \in \ker \delta_{A,B}$ *et* $X \in \mathcal{L}(H)$ *.*

Preuve. [29] ■

Théorème 2.14 *Soit* A *un opérateur normal dans* $\mathcal{L}(H)$ *et* $S \in \ker \delta_A$*, alors*

$\|\delta_A(X) + S\| \geq \|S\|, \forall X \in \mathcal{L}(H)$ *.*

2.10.3 L'image d'un opérateur élémentaire $\Delta_{A,B}$

Lemme 2.7 *Soient* E *et* F *deux espaces de* $\mathcal{L}(H)$*. Alors* $E^{\circ} \subset F^{\circ}$*ssi* $F \subset \overline{E}$*.*

Théorème 2.15 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *alors*
$R(\Delta_{A,B})^{\circ} \simeq R(\Delta_{A,B})^{\circ} \cap K(H)^{\circ} \oplus \ker(\Delta_{B,A}) \cap C_1(H)$ *où*
$R(\Delta_{A,B})$ *est l'image de* $\Delta_{A,B}$*,*
$K(H)$ *l'idéal des tout les opérateurs compacts,*
$\ker(\Delta_{B,A})$ *le noyau de* $\Delta_{B,A}$*,*
Et C_1 *l'opérateur trace classe.*

Théorème 2.16 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *alors les assertions suivants sont équivalents*

i) $\overline{R(\Delta_{A,B})}^{w*} = \mathcal{L}(H)$.
ii) $K(H) \subset \overline{R(\Delta_{A,B})}$.
iii) $\ker(\Delta_{B,A}) \cap C_1(H) = \{0\}$.

Corollaire 2.3 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $\overline{R(\Delta_{A,B})} \cap K(H) = \overline{R(\Delta_{A,B})}^{w*} \cap K(H)$ *.*

Théorème 2.17 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *alors*

i) $\overline{R(\Delta_{A,B})}^{w} = \mathcal{L}(H)$ ssi $\ker(\Delta_{B,A}) \cap B(H) = \{0\}$.
ii) $\overline{R(\Delta_{A,B})}^{w*} = \mathcal{L}(H)$ ssi $\ker(\Delta_{B,A}) \cap C_1(H) = \{0\}$.

Remarque 2.6 *Si* $A, B \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $\|A\|\|B\| < 1$*, alors la théorème* (2.16) *et la théorème* (2.17) *montre que* $\overline{R(\Delta_{A,B})}^{w} = \overline{R(\Delta_{A,B})}^{w*} = \mathcal{L}(H)$ *.*

Théorème 2.18 *Soit* $A, B \in \mathcal{L}(H)$, *alors*
1) $\overline{R(\Delta_B)}^{w} \subset \overline{R(\Delta_A)}^{w}$ *ssi* $\ker(\Delta_A) \cap \mathcal{L}(H) \subset \ker(\Delta_B) \cap \mathcal{L}(H)$.
2) $\overline{R(\Delta_B)}^{w*} \subset \overline{R(\Delta_A)}^{w*}$ *ssi* $\ker(\Delta_A) \cap C_1(H) \subset \ker(\Delta_B) \cap C_1(H)$.

Théorème 2.19 *Si A normal dans $\mathcal{L}(H)$ alors pour tout opérateur $S \in \ker(\Delta_{A,A^*})$, on a* $\|\Delta_{A,A^*}(X) + S\| \geq \|S\|$, *pour tout* $X \in \mathcal{L}(H)$.

Corollaire 2.4 *Soient A, B deux opérateurs normaux et pour $S \in \ker(\Delta_{A,B})$, alors*

$\|\Delta_{A,B}(X) + S\| \geq \|S\|$, pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$.

2.10.4 L'orthogonalité et l'image d'un opérateur $AX - XB$

Lemme 2.8 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$, les assertions suivants sont équivalents*
1) (A, B) *a le propriètè* $(FP)_{C_P}$, $1 \leq p < \infty$.
2) Si $AT = TB$ où $T \in C_P$, alors $\overline{R(T)}$ réduire A, $\ker(T)^{\perp}$ réduire B, et $A_{|\overline{R(T)}}$ et $B_{|\ker(T)^{\perp}}$ sont des opérateurs normaux.

Théorème 2.20 *Soit A et B deux opérateurs normaux de $\mathcal{L}(H)$, alors*

$\|S - \delta_{A,B}(X)\|_p \geq \|S\|_p$, pour tout $S \in \ker \delta_{A,B} \cap C_p$ et $X \in C_p, (1 \leq p < \infty)$.

Lemme 2.9 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ satisfant $(FP)_{C_p}$, alors*

$\|S + \delta_{A,B}(X)\|_p^p \geq \|S\|_p^p$, pour tout $S \in \ker \delta_{A,B} \cap C_p$ et $X \in C_p, (1 \leq p < \infty)$.

Théorème 2.21 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\delta_{A,B}(T) = \delta^*_{A,B}(T) = 0$. Alors*

$T \in \ker \Delta_{A,B} \cap C_p$ si et seulement si, $\|S + \delta_{A,B}(X)\|_p \geq \|S\|_p$, pour tout $X \in C_p$.

Chapitre 3

L'opérateur D-symétrique et P-symétrique

Soient H un espace de Hilbert complexe, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés dans H. La dérivation induite par $A \in \mathcal{L}(H)$ est l'application défini par $\delta_A(X) = AX - XA$. A est dit D-symétrique si $\overline{R(\delta_A)} = \overline{R(\delta_{A^*})}$ selon J-H Anderson et J-P Williams $[17]$. Connaissons bien que si A est un opérateur D-symétrique alors $AT = TA$ implique $AT^* = T^*A$, $\forall T \in C_1(H)$.

À partir l'extension des opérateurs D-symétrique S-Bouali et J-Charles [13] introduire la classe des opérateurs P-symétrique. (ie) la classe des opérateurs qui admet la propriètè $AT = TA$ implique $AT^* = T^*A$.

Dans ce chapitre. Nous allons présenter quelques propriétés concernent les opérateurs P-symétriques, puis donnons quelques properiétés fondamentales relatives aux opérateurs finis qui introduire par J.P.Williams [18] (ie) $dist(I, R(\delta_A)) = 1, \forall A \in \mathcal{L}(H)$. Ensuite présentons un exemple d'un opérateurs fini par l'utilisation les travaux de J.Williams[18].

3.1 L'opérateur D-symétrique

Donnons quelques propriètés des opérateurs D-symétrique.

Définition 3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur A est dit D-symétrique si $\overline{R(\delta_A)} = \overline{R(\delta_{A^*})}$.*

On note par $D(H)$ l'ensemble des opérateurs D-symétrique.
i) Tout opérateur normal est un opérateur D-symétrique
ii) Tout opérateur isométrie est un opérateur D-symétrique.
Pour $A, B \in \mathcal{L}(H)$, la dérivation généralisée induite par A et B est l'application $\delta_{A,B}$ définie par
$\delta_{A,B} : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$
$$X \to \delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

Définition 3.2 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Le paire (A, B) est dit D-symétrique généralisée des opérateurs si $\overline{R(\delta_{A,B})} = \overline{R(\delta_{B^*,A^*})}$.*

Théorème 3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, les assertions suivants sont équivalents*
1) A est D-symétrique.
2) $i)$ $[A]$,classe de A dans l'algèbre de Calkin est D-symétrique et
$ii)$ $T \in \ker(\delta_A)$ implique $T^* \in \ker(\delta_A)$, $\forall T \in C_1(H)$.

Selon cette théorème, S-Bouali et J-Charles introduissent la classe des opérateurs P-symétrique.

3.2 Propriétés et définitions des opérateurs P-symétrique

Définition 3.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si $T \in \ker(\delta_A)$ implique $T^* \in \ker(\delta_A)$,$\forall T \in C_1(H)$, alors A est appellée P-symétrique.*

On désigne par $P(H)$ la classe des opérateurs P-symétrique.

Théorème 3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors*
$i)$ A est P-symétrique ssi $\overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ est auto adjoint.
$ii)$ $P(H) = \{\forall A \in \mathcal{L}(H), T \in \ker(\delta_A)$ implique $T^* \in \ker(\delta_A), \forall T \in C_1(H)\}$ est auto-adjoint.

Théorème 3.3 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs P-symétrique si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, alors $A \oplus B$ est P-symétrique.*

Lemme 3.1 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H), \forall \lambda \in \mathbb{C}$
1) Il existe $x \in H$, $x \neq 0$ *avec* $Ax = \lambda x$ *et* $A^*x \neq \overline{\lambda}x$.
2) Il existe $y \in H$, $y \neq 0$ *avec* $A^*y \neq \overline{\lambda}y$.
Alors $\overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ *n'est pas auto adjoint.*

Exemple 3.1 *Soient* $(e_n)_{n\geq 1}$ *une base orthonormal de* H. $H_0 = vect\{e_1, e_2\}$ *on définit* $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H_0)$. *Considerant l'opérateur* A=$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ *sur* $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$ *clairement* $Ae_2 = e_2$, $A^*e_2 \neq e_2$ *et* $Ae_1 = e_1$ *le lemme précédente prouve que* A *n'est pas P-symétrique.*

Le théorème suivante est une petite généralisation de lemme précédente.

Théorème 3.4 *Soient* $A, B \in \mathcal{L}(H), \forall \lambda \in \mathbb{C}$

1) Il existe $x \in H$, $x \neq 0$ avec $Ax = \lambda x$, $A^*x \neq \overline{\lambda}x$ et $By = \lambda y$
2) Il existe $y \in H$, $y \neq 0$ avec $A^*y = \overline{\lambda}y$.
Alors $\overline{R(\delta_{A,B})}^{w^*}$ n'est pas auto adjoint.

3.2.1 Description de $C_0(A)$, $I_0(A)$ et $B_0(A)$

Puisque l'opérateur P-symétrique est équivalent à $\overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ est auto adjoint, alors il est naturel d'introduire les sous algébres suivants. Pour $A \in \mathcal{L}(H)$,

$$C_0(A) = \left\{C \in \mathcal{L}(H), C\mathcal{L}(H) + \mathcal{L}(H)C \subset \overline{R(\delta_A)}^{w^*}\right\},$$
$$I_0(A) = \left\{Z \in \mathcal{L}(H), ZR(\delta_A) + R(\delta_A)Z \subset \overline{R(\delta_A)}^{w^*}\right\},$$
$$B_0(A) = \left\{B \in \mathcal{L}(H), R(\delta_B) \subset \overline{R(\delta_A)}^{w^*}\right\}.$$

Théorème 3.5 *Si* A *un opérateur P-symétrique , alors*
1) $C_0(A)$, $I_0(A)$ *et* $B_0(A)$ *sont* C^*-*algébres fermées pour la topologie ultra-faible dans* $\mathcal{L}(H)$.
2) $C_0(A)$ *est un idéal bilatére de* $I_0(A)$.
3) $R(\delta_B) \subset \overline{R(\delta_A)}^{w^*}$, *pour tout* $B \in C^*(A)$, *le C*−*algébre engendrée par* A.

Preuve. 1) Il est clair que $C_0(A)$, $I_0(A)$ et $B_0(A)$ sont des algèbres fermées pour la topologie ultra-faible dans $\mathcal{L}(H)$. Puisque
$\overline{R(\delta_A)}^{w^*} = \overline{R(\delta_{A^*})}^{w^*}$ on en déduit qu'elles sont des C*-algèbres.
2) Montrons que $C_0(A)$ est un idéal bilatère de $I_0(A)$. Si $Z \in I_0(A)$ et $C \in C_0(A)$, alors pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$ on a $X(CZ) = (XC)Z \in \overline{R(\delta_A)}^{w^*} Z \subset \overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ et $(CZ)X = C(ZX) \in \overline{R(\delta_A)}^{w^*}$. Ceci montre que $C_0(A)$ est un idéal à droite. Comme $C_0(A)$ est une C*-algèbre, on en déduit qu'elle est un idéal bilatère de $I_0(A)$.

3) Comme $B_0(A)$ est une C*-algèbre contenant A et I, alors elle contient $C^*(A)$. ■

Théorème 3.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalents*
1) A est P-symétrique.
2) $A^*A - AA^* \in C_0(A)$.
3) $A^*R(\delta_A) + R(\delta_A)A^* \subset \overline{R(\delta_A)}^{w^*} \iff A^* \in I_0(A)$.

Lemme 3.2 *Si A un opérateur dans $\mathcal{L}(H)$, alors*
$I_0(A) = \{Z \in \mathcal{L}(H), \delta_Z(A) \in C_0(A)\}$.
Preuve. *Si $Z \in I_0(A)$ et $X \in \mathcal{L}(H)$, alors $\delta_Z(A)X = Z\delta_A(X) - \delta_A(ZX)$ et $X\delta_Z(A) = \delta_A(X)Z - \delta_A(XZ)$. Ceci entraîne que $\delta_Z(A)X \in \overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ et $X\delta_Z(A) \in \overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ en conséquence on a $\delta_Z(A) \in C_0(A)$. Réciproquement, montrons que si $Z \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\delta_Z(A) \in C_0(A)$, alors $Z \in I_0(A)$. En effet, puisque $Z\delta_A(X) = \delta_A(ZX) + \delta_Z(A)X$ et $\delta_A(X)Z = \delta_A(XZ) + X\delta_Z(A)$, il en découle que $Z \in I_0(A)$. Ce qui achève la démonstration.* ■

Corollaire 3.1 *Soient A un opérateur P-symétrique et $X \in \mathcal{L}(H)$. Si $\delta_A(X) \in C_0(A)$, alors $\delta_A(X^*) \in C_0(A)$.*

Lemme 3.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Si $\overline{R(\delta_A)}^{w^*}$ ne contient aucun opérateur positif non nul, alors $C_0(A) = \{0\}$ et $I_0(A) = \{A\}'$.*

Théorème 3.7 [13] *Soit A un opérateur normal. Si $\sigma(A)$ fini, alors on a $C_0(A) = \{0\}$ et $I_0(A) = \{A\}'$ et $B_0(A) = \{A\}''$.*

Théorème 3.8 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ alors A n'est pas P-symétrique.*

Définition 3.4 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et F l'idéal bilatére de $\mathcal{L}(H)$. (A, B) est dit posséde la propriété (FP) si $AT = TB$ et $T \in F$ implique $A^*T = TB^*$.*

Théorème 3.9 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et F l'idéal bilatéré de $\mathcal{L}(H)$. Les assertions suivants sont équivalents*
i) (A, B) a la propritété $(FP)_F$.
ii) Si $AT = TB$ et $T \in F$, alors $\overline{R(T)}$ réduire A, $\ker(T)^{\perp}$ réduire B et la restrition $A|_{\overline{R(T)}}$ et $B|_{\ker(T)^{\perp}}$ sont des opérateurs normaux.

Proposition 3.1 *Soit F l'idéal bilatére de $\mathcal{L}(H)$. Alors l'ensemble des opérateurs*
$\sum(F) = \{A \in \mathcal{L}(H), (A, A) \text{ a la propriété } (FP)_F\}$, *n'est pas fermeture en norme dans $\mathcal{L}(H)$.*

Proposition 3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, pour $1 \leq p < \infty$ et si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors les assertions suivants sont équivalent*

i) (A, A) *a la propriété* $(FP)_{C_p}$.

ii) A est D-symétrique (ie) $\overline{R(\delta_A / C_q)} = \overline{R(\delta_{A^*} / C_q)}$.

iii) Si $T \in \ker(\delta_A / C_p)$, *alors* $\overline{R(T)}$ *et* $\ker(T)^{\perp}$ *réduire* A, *et la restriction* $A_{|_{\overline{R(T)}}}$ *et* $A_{|_{\ker(T)^{\perp}}}$ *sont des opérateurs normaux.*

3.2.2 Application

Soit $\Omega_p(A), \Lambda_p(A)$ et $\Delta_p(A)$ les sous algébres de C_p associé avec A définie au dessous

$\Omega_p(A) = \left\{C \in C_p,\ CC_p + C_pC \subset \overline{R(\delta_A / C_p)}\right\}$,

$\Lambda_p(A) = \left\{Z \in C_p,\ Z\overline{R(\delta_A / C_p)} + \overline{R(\delta_A / C_p)}Z \subset \overline{R(\delta_A / C_p)}\right\}$, et

$\Delta_p(A) = \left\{B \in C_p,\ R(\delta_B / C_p) \subset \overline{R(\delta_A / C_p)}\right\}$.

Dans un espace de dimention fini, $\Omega_p(A), \Lambda_p(A)$ et $\Delta_p(A)$ coincident avec les sous-algèbres introduire dans section$(3.1.1)$.

Conséquent, on obtient $\Omega_p(A) = \{0\}, \Lambda_p(A) = \{A\}'$ et $\Delta_p(A) = \{A\}''$.

Théorème 3.10 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur algébrique. Alors tout opérateur P-symétrique dans* $\overline{R(\delta_A)}^w \cap \{A\}' = 0$.

Corollaire 3.2 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Si B simule A (ie) $SBS^{-1} = A$, pour S inversible. Alors A est P-symétrique ssi* $S^{-1}(A^*A - AA^*)S \in C_0(B)$.

Théorème 3.11 *Soit A un opérateur P-symétrique, alors on a*

i) $C_0(A) \subseteq B_0(A) + \{A\}' \subseteq I_0(A)$.

ii) $B_0(A) / C_0(A)$ *contenu dans centre de* $I_0(A) / C_0(A)$.

iii) $I_0(A) = \{Z \in \mathcal{L}(H), [Z, B_0(A)] \subseteq C_0(A)\}$

$= \{Z \in \mathcal{L}(H), [Z, A] \in C_0(A)\}$.

iv) Si A un opérateur normal, alors $Z \in I_0(A)$ ssi $A^*ZA - Z \in C_0(A)$.

3.3 Les opérateurs finis

Soient H un espace de Hilbert complexe, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaire borné dans H. $A \in \mathcal{L}(H)$ est appellée fini si $\|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)$. l'ensemble des opérateurs finis notée par $\mathcal{F}(H)$.

J.P.Williams a étudié la classe $\mathcal{F}(H)$, ce classe contient tout les opérateurs normals, compacts, tout opérateur qui admet un somme directe de rang fini et $C^{*}-$algébre généralisé positif hyponormal.
Dans cette section donnons quelques propriètès de $\mathcal{F}(H)$.

Définition 3.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur A est dit opérateur fini si $\|\delta_A(X) - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)$. $\mathcal{F}(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs finis.*

Corollaire 3.3 *La classe $\mathcal{F}(H)$ est de norme fermé dans $\mathcal{L}(H)$. De plus, si $A \in \mathcal{F}(H)$ alors le $C^{*}-$algébre généralisée par A est contenu dans $\mathcal{F}(H)$.*

Théorème 3.12 *La classe $\mathcal{F}(H)$ contient les opérateurs suivants*
i) $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\partial W(A) \cap \sigma(A) \neq \phi$.
ii) Opérateur dominant.

Théorème 3.13 *Soit $\mathcal{A}$ un algébre de Banach complexe avec l'identité, si $A \in \mathcal{A}$ tel que $\|A\| = r(A)$ alors $\|\delta_A(X) - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)$.*

Lemme 3.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si A un opérateur normal, quasi-normal, sous-normal, hyponormal et paranormal, alors A est fini.*

3.3.1 Les opérateurs finis généralisées

La classe plus générale que la classe des opérateurs finis est introduit selon l'orthogonalité de l'image d'une dérivation généralisée et l'identité

$$\mathcal{GF}(H) = \{(A, B) \in \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H), \|I - \delta_{A,B}(X)\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)\}.$$

Cette classe est appellé classe des opérateurs finis généralisée.
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe.

Théorème 3.14 *La classe $\mathcal{GF}(H)$ est fermés dans $\mathcal{A}$.*

Théorème 3.15 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs compacts, alors (A, B) est fini généralisée.*

Théorème 3.16 *Pour $A, B \in \mathcal{A}$, les assertions suivantes sont équivalentes*
i)$\|AX - XA - e\| \geq 1$, pour tout $x \in \mathcal{A}$.
ii)Il existe un état f tel que $f(AX) = f(XB)$, pour tout $x \in \mathcal{A}$.
iii)$0 \in W_0(AX - XB)$, pour $x \in \mathcal{A}$.

3.3.2 Exemple

Soit H un espace de Hilbert complexe et $K = H \oplus H \oplus H$, la somme directe orthogonale de trois copies de H. $A \in \mathcal{L}(H)$, on définie $R(A), D(A)$ de $\mathcal{L}(K)$ par

$$R(A) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix}, \ D(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On utilise la méthode de J.P.Williams[18] pour prouver que

$$[A \in \mathcal{F}(H)] \iff [R(A) \in \mathcal{F}(K)] \iff [D(A) \in \mathcal{F}(K)].$$

$[\Longrightarrow]$: Si $A \in \mathcal{F}(H)$, D'aprés le théorème [3.16], il existe un état $f \in \mathcal{L}(H)$ a la propriété : $f(AX) = f(XA)$, pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$ ssi f sous la forme $f(X) = \frac{1}{n} g\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ii}\right)$, oú g est un état de $\mathcal{L}(H)$ tel que : $g(AX) = g(XA)$. Il est claire que $f(I) = \|f\| = 1$.
On prouve que : $f(\ R(A)Y - YR(A)\ ) = 0$, pour tout $Y \in \mathcal{L}(K)$

$$\begin{aligned} R(A)Y - YR(A) &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_{11} + AY_{21} & Y_{12} + AY_{22} & Y_{13} + AY_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_{13} & Y_{11} + Y_{13}A & 0 \\ Y_{23} & Y_{21} + Y_{23}A & 0 \\ Y_{33} & Y_{31} + Y_{33}A & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} Y_{21} - Y_{13} & Y_{22} - Y_{11} - Y_{13}A & Y_{23} \\ -Y_{23} & -Y_{21} - Y_{23}A & 0 \\ Y_{11} + AY_{21} - Y_{33} & Y_{12} + AY_{22} - Y_{31} - Y_{33}A & Y_{13} + AY_{23} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} f\left(R(A)Y - YR(A)\right) &= f\left(\begin{pmatrix} Y_{21} - Y_{13} & Y_{22} - Y_{11} - Y_{13}A & Y_{23} \\ -Y_{23} & -Y_{21} - Y_{23}A & 0 \\ Y_{11} + AY_{21} - Y_{33} & Y_{12} + AY_{22} - Y_{31} - Y_{33}A & Y_{13} + AY_{23} \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3} g\left(Y_{21} - Y_{13} - Y_{21} - Y_{23}A + Y_{13} + AY_{23}\right) \\ &= \frac{1}{3} g(AY_{23} - Y_{23}A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que : $R(A) \in \mathcal{F}(K)$.

[$\Longleftarrow$] : Si $R(A) \in \mathcal{F}(K)$.
Soit f un état de $\mathcal{L}(K)$ tel que

$$\forall Y \in \mathcal{L}(K),\ f(R(A)Y - YR(A)) = 0.$$

entraîne

$$\forall Y \in \mathcal{L}(K),\ f(R(A)(R(A)Y) - (R(A)Y)R(A)) = 0. \tag{3.2}$$

et

$$\forall Y \in \mathcal{L}(K),\ f(R(A)(YR(A)) - (YR(A))R(A)) = 0. \tag{3.3}$$

par sommation de (3.2) et (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} \forall Y &\in \mathcal{L}(K),\ f(R(A)(R(A)Y) - (YR(A))R(A)) = 0. \\ \forall Y &\in \mathcal{L}(K),\ f(R(A)^2Y - YR(A)^2) = 0. \end{aligned}$$

$R(A)^2Y - YR(A)^2 =$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & A & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y_{13} & 0 \\ 0 & Y_{23} & 0 \\ 0 & Y_{33} & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & -Y_{13} & 0 \\ 0 & -Y_{23} & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} - Y_{33} & Y_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On utilise (3.1) et (3.4) pour des Y particulièrs à un seul non nul. On tient compte aussi le fait q'un état est une forme linéaire auto-adjointe.

Soit Y_{13} seul non nul, puis Y_{21} seul non nul, puis Y_{22} seul non nul et puis Y_{23} seul non nul dans (3.4), alors :

$$f(\begin{pmatrix} 0 & Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0,\ f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0,\ f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & 0 \end{pmatrix}) = 0.$$

et

$$f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{23} \end{pmatrix}).$$

De même dans (3.1) pour Y_{21} seul non nul, on a

$$f(\begin{pmatrix} Y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

Comme f un élément auto-adjoint, il résulte que pour U à diagonale nulle, soit

$$U = \begin{pmatrix} 0 & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & 0 & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $f(U) = 0$.Comme $f(I_K) = 1$, on obtient aussi:

$$f(\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}) = \frac{1}{3}.$$

et pour tout $V \in \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned} \left| f(\begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & V \end{pmatrix}) \right| &= \left| f(\begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V \end{pmatrix}) \right| \\ &= 3 \left| f(\begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \right| \leq \|f\| \|V\| = \|V\|. \end{aligned}$$

Maintenant, il faut construire un état g sur $\mathcal{L}(H)$ tel que :

$\forall V \in \mathcal{L}(H)$, $g(V) = 3f(\begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,d'où $|g(V)| \leq \|V\|$, et $g(I) = 1$ donc g est un état de $\mathcal{L}(H)$.
Pour Y associé à X par $X = Y_{23}$ et les autres éléments Y_{ij} nuls, et $V = AX - XA$ on a

$$R(A)Y - YR(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ -X & -XA & 0 \\ 0 & 0 & AX \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
0 &= f(R(A)Y - YR(A)) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ -X & -XA & 0 \\ 0 & 0 & AX \end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -XA & 0 \\ 0 & 0 & AX \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & X \\ -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -XA & 0 \\ 0 & 0 & AX \end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix} AX - XA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{3}g(AX - XA).
\end{aligned}$$

Alors $g(AX - XA)$=0, $\forall X \in \mathcal{L}(H)$.
Ceci explique que $A \in \mathcal{F}(H)$. De même pour $D(A)$.

Bibliographie

[1] **B.P.Duggal**, Range kernel orthogonality of derivations, Linear Algebra Appl. 304(2000), 103-108.

[2] **B.P.Duggal**, Putnam-Fuglede Theorem and the range-kernel orthogonality of derivations, Inter. J. Math. Sc, 27(2001), 573-582.

[3] **C.Chellali,** Sur le théorème de Fuglede-Putnam, thèse pour l'obtenation le magister en maths, Univ-Oran Es-senia, 2011.

[4] **D. Keckic**, Orthogonality of the range and the kernel of some elementary operators, Proc. Amer. Math. Soc. 128-11 (2000), 3369- 3377.

[5] **E.Fricain**, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs cours et exercices, 2009-2010.

[6] **F.Bourgeois,** Introduction à l'analyse fonctionnelle et applications, Math H-402, Univ libre de Bruxelles.

[7] **F. Kittaneh**, Operators that are orthogonal to the range of a derivation, J. Math. Anal. Appl. 203(1997), 868-873.

[8] **G.Birkhoff**, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math.J,v1,(1935), 169-172.

[9] **H.Brézis**, Analyse fonctionnelle, Dunod, 1999.

[10] **H.Klaja**, Autour des projections orthogonales image numérique,principe d'incertitude et problème du sous-espace invariant, Univ de Lille, 2014.

[11] **H.Mechri,** Sur la minimisation de la norme d'un opérateur élémentaire et applications, thèse de doctorat, Univ Mentouri Constantine, 2013.

[12] **J.Charles,** Opérateurs linéaires dérivations est dérivations généralisées, Univ Montpellier 2 (case 051), 1991.

[13] **J.Charles** et **S.Bouali,** Extension de la notion d'opérateur d-symétrique 2, Univ Montpellier 2, France.

[14] **J.H.Anderson**, Derivation range and identity, Bulletin of Amer.Math .Soc.vol 79 N4(1973), 705-708.

[15] **J.H. Anderson**, On normal derivations, Proc. Amer. Math. Soc.38(1973), 135-140.

[16] **J.H.Anderson** and **C.Foias**, Properties which share with normal derivation and related operators, Pacific J. Math., 61(1976) 313-325.

[17] **J.H.Anderson**, **J.W.Bunce**, **J.A.Deddens** and **J.P.Williams**, C^*- algebras and derivation ranges, Acta sci. Math. (Szeged), 40(1978), 211-227.

[18] **J.P. Williams**, Finite operators, Proc. Amer. Math. Soc. 26(1970), 129-135.

[19] **J.P.Williams**, On the range of a derivation, pacific journal of maths, vol.38, no.1, March 1971, 273-279.

[20] **M.Ech-chad**, Image d'une dérivation généralisé et opérateurs D-symétrique, thése de doctorat, Univ de Med-V-AGDAL, Rabat, 2010.

[21] **M.Gradinaru**, Espaces vectorielles normés, licence de math 3éme année, 2007-2008.

[22] **P.R.Halmos**, A Hilbert space problem book, Van Nostrand. Princeton, 1967.

[23] **S.Bouzenada**, Etude des opérateurs finis et leurs caractérisations, thèse présenté pour l'obtenation du Doctorat en maths. Annaba, 2008.

[24] **S.Raoufi**, Image numérique et le théorème de Crouzeix, Univ de Laval, Quebec, 2010.

[25] **S.Mecheri**, Commutants and derivation ranges, czechoslovak mathematical journal, vol.49, no.4, 1999.

[26] **S. Mecheri**, Generalized P-Symmetric Operators, Math. Proc. Roy. Irish. Acad, no.2, 104A(2004), 173-175.

[27] **S.Mecheri**, On the Range of Elementary Operators, Integr. equ. oper. theory 53(2005), 403–409.

[28] **S.Mecheri** and **A.Bachir**, Generalized Derivation Modulo the ideal of All compact operators, Int.Jour.Math.Math.SC, 32(2002), 501-506

[29] **S.Mecheri** and **H.Mecheri**, The gateaux derivate and orthogonality in C_∞, vol.20(1), Univ ouidius Constanta, 2012.

[30] **Y.Bouhafsi,** On the range and the kernel of elementary operators, thése de doctorat, Université Mohammed V-AGDAL, Rabat, 2009.