Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Larbi Tébessi –Tébessa -

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equation aux Dérivées Partielles et Applications

Thème:

Etude d'équations Hyperboliques avec des Conditions aux bords Intégrales

Présenté par:

DJEDDI Nadir

SLIMANI Ali

Devant le jury:

Abderrahmane Zaraï	M. C. A	Université de Tébessa	Président
Nouri Boumaza	M. C. B	Université de Tébessa	Rapporteur
Toualbia Abdelatif	M. A. A	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance: 29/05/2016

Note :………. Mention :………..………………….

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة مسألتين حديتين للمعادلات الزائدية من نوع الأمواج , الأولى خطية و الثانية غير خطية مقرونة بشروط حدية تكاملية , نبرهن وجود و وحدانية الحل و هذا باستخدام بعض التقديرات القبلية وطريقة غلاركين .

Abstract

In this work, we study tow hyperbolic problems, the first is linear and the second is nonlinear, with boundary integral conditions .we prove the existence and uniqueness of the solution.
The proof is based on an a priori estimates and a Faedo-Galerkin method.

Résumé

Dans ce travail, on étudie deux problèmes Hyperboliques de type ondes, le premier est linéaire et la deuxième est non linéaire avec conditions aux limites de type intégrales, on démontre l'existence et l'unicité de la solution.
La démonstration est basée sur des estimations à priori et sur la méthode de Faedo-Galerkin.

Remerciements

Nous remercions Dieu tout puissant qui nous a donnés la patience, la puissance et la force pour finir ce mémoire.

Notre vif remerciement à Dr. Nouri BOUMAZA pour nous avoir encadré, encouragé et c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils et ses orientations que nous avons pu mener à bien ce travail. Pour cela, nous lui adressons un grand merci.

Nous remercions chaleureusement Dr.Abderrahmane ZARAI pour avoir accepté de présider le jury.

De même nous exprimons notre reconnaissance au Mr.Abdelatif TOUALBIA pour l'honneur qu'ils nous ont fait debien vouloir accepter de faire partie du jury et d'examiner ce travail.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier toutes les personnes du qui ont facilité notre tâche et tous ceux que nous avons connus à l'institut de mathématiques qui ontrendu notre séjours au département agréables.

Table des matières

Introduction

Au cours de ces dernières anneés, de nombreux phénomènes en physique ont été modélisés par des problèmes aux limites non classiques avec conditions non locales. L'importance des conditions non locales apparaissent lors de la modélisation mathématique des phénomènes de la physique, la chimie, l'économie, la biologie...etc, qui exigent la présence de termes intégrales sur le domaine spatial.

Le terme intégrale peut apparaître dans des conditions aux limites, dans ce cas, ces conditions sont appeleés non locales ou intégrales, ou dans l'équation aux dérivées partielles elles mêmes, qui est alors souvent appeleé une équation intégro-différentielle. Physiquement, les conditions intégrales représentent une moyenne, énergie totale, masse totale, moments...etc.

L'objet de ce mémoire est d'appliquer la méthode de Faedo-Galerkin dans l'étude de deux problèmes aux limites avec conditions intégrales. Cette méthode a été utilisée par S.Beillin [1], pour construire une solution classique pour les équations hyperboliques dans un espace multidimensionel .

Cette méthode s'est avérée un outil efficace dans l'étude des problèmes non classiques, de tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations paraboliques, hyberboliques et du type mixte.

Notre mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions de la théorie des espaces fonctionnels.

on citera aussi les inégalités utilisées dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on traite un problème multidimensionel linéaire d'une équation hyperbolique de type onde. qui a étudie par S.Beillin [1], par la méthode de Faedo-Galerkin l'auteur a démontré l'existence et l'unicité de la solution faible u dans $W^{1,2}(Q)$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un probleme aux limite pour une équation hyperbolique multidimensionnel non linéaire de type ondes, on s'intéresse à l'étude d'un cas simple du travail de L.T.Phuong Ngoc, Nguyen Anh Triet and Nguyen Thanh Long [16]

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^{p-2}\, u + f(x,t)$$

Avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = u_1(x)$$

Et la condition intégrale

$$-\frac{\partial u}{\partial v} = \int\limits_{\Omega} h(x,y,t)u(y,t)dy \quad x \in \partial\Omega\ ,\ t \geq 0.$$

En appliquant la méthode de Faedo-Galarkin, on établit les estimations nécessaire et on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte.
Nous donnons a la fin les différentes références utilisées dans ce memoire.

Chapitre 1

Rappels d'Analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces de fonctions

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement, comme suit

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^T \quad \text{et} \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$

$$\Delta u\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u\,(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x)\,.$$

Soit $u(x,t), \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$et $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t}$ notées par $u(t), u'(t) = u_t(t)$ et $u''(t) = u_{tt}(t)$ respectivement .On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour $k \geq 1$ entier, $C^k\,(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω. Nous définissons aussi $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, comme étant l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k\,(\mathbb{R}^n)$

1.2 Espace de Hilbert

Soit E un espace vectorielle, on appelle application de $E \times E$ dans le corp $\mathbb{C}$ définit par $\langle .,. \rangle$: $E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ un produit scalaire si

1) $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout $u, v \in E$.

2) $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, pour tout u_1, u_2 et $v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$ tel que $\lambda \in \mathbb{C}$.

4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Un espace de Hilbert est un espace de Banach ($(E, \|.\|)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée

$$\|u\|_E = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \ (i.e) \ \|u\|_E^2 = \langle u, u\rangle .$$

Définition 1.1 *Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$,*.muni d'un produit scalaire, noté* $\langle x, y\rangle$, *qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1.2.1 Système orthonormal

Définition 1.2 *Soit* E *un espace de Hilbert, la suite* $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset E$ *est appelée un système orthonormal si* $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ *telle que* $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$

En d'autres termes : Le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$est orthonormal si

1) $e_n \perp e_m \ , n \neq m$

2) $\|e_n\| = 1$

Si $e_n \perp e_m$ on dit que le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est orthogonal.

Si le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$est orthgonal alors le système $\left\{\frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}_{n\geq 1}$ est orthonormal.

1.2.2 Base Hilbertienne

Définition 1.3 *Soit* E *un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle \ , \ \rangle$ *On appelle base hilbertienne (dénombrable) de* E *une famille dénombrable* $\{e_n\}_{n\geq 1}$*d'éléments de* E *qui est orthonormale pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans* E.

Proposition 1.1 *Soit* E *un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle \ , \ \rangle$. *Soit* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *une base hilbertienne de* E . *Pour tout élément* x *de* E, *il existe une unique suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de réels telle que la somme partielle* $\sum_{n=1}^{n=p} x_n e_n$ *Converge vers* x *quand* p *tend vers l'infini, et cette suite est définie par* $x_n = \langle x, e_n\rangle$. *De plus on a*

$$\| \ x \ \|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{n\geq 1} | \ \langle x, e_n\rangle \ |^2$$

on écrit alors

$$x = \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle \, e_n$$

Définition 1.4 *Un espace vectorielle normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace séparable.*

Théorème 1.1 *Tout espace de Hilbert séparable (i,e admet un ensemble dénombrable dense) admet une base hilbertienne.*

1.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de **Lebesgue** . On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme*

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$, on a

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable, } \exists c > 0,\ \text{telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Il sera muni de la norme du sup-essentiel

$$\|f\|_{L^{\infty}} = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{ c;\ \ |f(x)| \leq c \ \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Théorème 1.2 *L^p muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.3 *De toute suite (u_n) convergente dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente presque partout dans Ω.*

Lemme 1.1 *Si $f \in L^{\infty}(\Omega)$ alors*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^{\infty}} \text{ p.p sur } \Omega.$$

Théorème 1.4 ([10]) *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Proposition 1.2 *$L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach non séparable.*

Remarque 1.1 *L'espace* L^2*muni du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega fg\,dx,\quad f,g\in L^2(\Omega)$$

est un espace de ***Hilbert,***

1.4 Espace de Sobolev

Définition 1.6 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *. on dit que la fonction* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *est la dérivée faible de* u *par rapport a* x_i *si*

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx$$

Par abus de notation,on écrit $v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ *ou* $v = u_{x_i}$

1.4.1 Espace $W^{m,p}$

Définition 1.7 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ *et* p *un nombre réel tel que* $1 \leq p < \infty$ *on définit l'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *comme suit*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ \textit{tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^m, |\alpha| \leq m\}.$$

Où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *est un multi-indice et*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Avec

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \textstyle\sum_{0<|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Théorème 1.5 $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach. De plus* $W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable si* $1 \leq p < \infty$.
1) Si $p = 2$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

2) Les espaces $H^m(\Omega)$ *sont des espaces de* ***Hilbert,*** *avec le produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{H^m} = \langle u,v\rangle + \textstyle\sum_{|\alpha|\leq m}\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle\quad \textit{pour } u,v\in H^m(\Omega)$$

3) Si $m = 0$

$$W^{0,p} = L^p$$

1.5 Espaces $L^p(0,T;X)$

Définition 1.8 *Soit X un espace de Banach, on désigne par*

$$L^p(0,T;X) = \begin{cases} f :]0,T[\to X & \textit{mesurables et telles que} \\ \|f\|_{L^p(0,T;\ X)} = & \begin{cases} \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \textit{ si } 1 \le p < \infty \\ \sup ess \ \|f(t)\|_X < \infty \textit{ si } p = \infty \end{cases} \end{cases}$$

Théorème 1.6 *L'espace $L^p(0,T;X)$ est complet.*

Lemme 1.2 ([11]) *Si $f \in L^p(0,T;X)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,\ T;X), (1 \le p \le \infty.)$ alors f, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $]0,T[$ est continue de $[0,T] \to X$.*

Proposition 1.3 ([10])
1) Pour $1 \le p \le \infty,\ L^p(0,T;\ X)$ est un espace de Banach et on particulier, $L^2(0,T;\ X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.
2) Pour $1 < p < \infty$ et si X réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est aussi réflexif.
3) Pour $1 \le p < \infty$ et si X séparable, alors $L^p(0,T;X)$ est aussi séparable.

1.6 Notion de convergence

Définition 1.9 ([14]) *Soit $1 \le p \le \infty$. On dit que u_n converge fortement vers u dans L^p, et on note $u_n \longrightarrow u$ si $u_n, u \in L^p$ et si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

Définition 1.10 ([14]) *Soit $1 \le p \le \infty$. On dit que u_n converge faiblement vers u dans L^p et on note $u_n \rightharpoonup u$ L^p si $u_n,\ u \in L^p$ et si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\phi(x)dx = 0. \forall \phi \in L^{p'}(\Omega) \textit{ tel que } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \textit{ avec } 1 \le p \le \infty$$

Remarque 1.2 *1) la limite forte ou faible d'une suite de fonction est toujour unique.*
*2) dans le cas $p = \infty$ la symbole * est posé pour montrer que la définition de convergence faible dans L^∞ n'est pas entièrement la meme que dans les espaces L^p, $1 \le p < \infty$. En effet, le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1*
3) la convergence forte dans L^p implique la convergence faible dans L^p pour $1 \le p \le \infty$

Théorème 1.7 ([14]) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$*
1) Si $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u\ \ L^\infty$, alors $u_n \rightharpoonup u\ \ L^p,\ \forall p \ge 1$.

2) Si $u_n \to u \;\; L^p$, *alors* $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$ *dans* $\mathbb{R}$,*pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.
3) Si $1 \leq p < \infty$ *et si* $u_n \rightharpoonup u \;\; L^p$, *alors* $\exists\, K > 0$ *tel que* $\|u_n\|_{L^p} \leq K$ *et* $\|u\|_{L^p} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \|u_n\|_{L^p}$.
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ *et* $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \;\; L^\infty$.
4) Si $1 < p < \infty$ *et si* $\exists K > 0$ *tel que* $\|u_n\|_{L^p} \leq K$, *alors il existe une sous-suite* u_{n_i} *et* $u \in L^p$ *tels que* $u_{n_i} \longrightarrow u \; L^p$.
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ *eton a alors* $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \;\; L^\infty$.
5) Si $1 \leq p \leq \infty$ *et* $u_n \to u \;\; L^p$, *alors il existe une sous-suite* u_{n_i} *telle que* $u_{n_i} \to u$ *presque partout et* $|u_{n_i}| \leq h$ *presque partout avec* $h \in L^p$.

Lemme 1.3 ([11] , *lemme* 1.3, *p*.57)
Soit Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$,u_m *et* u *des fonctions de* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *telles que*

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \; C \;\; , u_m \to u \;\; p.p.dans \; \Omega.$$

Alors $u_m \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$ *faiblement*

Lemme 1.4 *Si* $u_n \rightharpoonup l$ *et si* $\|u_n\| \to ||l||$ *alors* $u_n \to l$.
En d'autres termes : convergence faible + convergence de la norme = convergence forte

1.7 Résultats de compacité

Application linéaire
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous espace vectorielle de F on notera $E \hookrightarrow F$, on dira que cette inclusion est
Continue : Et notera $E \hookrightarrow_{continue} F$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|u\|_F \leq c\|u\|_E$ pour tout $u \in E$.
Compacte : Notée $E \hookrightarrow_{compacte} F$ si de tout borné dans E (pour la norme de E) il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F)
Dense : Si pour tout $u \in F$ il existe une sous-suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).

Théorème 1.8 (Sobolev-Rellich) ([14])
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de bord lipschitzien.*
1) Si $1 \leq p < n$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega), \;\; \forall q \in \left[1, \tfrac{np}{n-p}\right]$$

C'est-à-dire $\exists C>0$ *(qui dépend de* Ω, p *et* q*) tel que* $\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{W^{1,p}}$, $\forall q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$
De plus, l'immersion est compacte (toute ensemble borné de $W^{1,p}(\Omega)$ *est précompact dans* $L^q(\Omega)$*),* $\forall 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.
2) Si $p=n$*, alors*

$$W^{1,n}(\Omega)=W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega),\ \forall q \geq 1.$$

C'est-à-dire $\exists C>0$ *(qui dépend de* Ω, p *et* q*) tel que* $\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{W^{1,p}}$, $\forall q \geq 1$.
De plus, l'immersion est compacte $\forall q \geq 1$.
3) Si $p>n$*, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega})$$

C'est-à-dire $\exists C>0$ *(qui dépend de* Ω, p *et* q*) tel que* $\|u\|_{L^\infty} \leq C_q \|u\|_{W^{1,p}}$.
De plus, l'immersion est compacte.
En particulier, on a toujours $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ *et l'emmersion est compacte,*$\forall 1 \leq p < \infty$.

Remarque 1.3 *Dans le cas ou* $\Omega =]a,b[$ *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}$*,on a donc :*

$$\begin{aligned} C_0^\infty(]a,b[) &\subseteq \ldots \subseteq W^{2,p}(]a,b[) \subseteq C^1([a,b]) \subseteq W^{1,p}(]a,b[) \subseteq C^0([a,b]) \\ &\subseteq L^\infty(]a,b[) \subseteq \ldots \subseteq L^2(]a,b[) \subseteq L^1(]a,b[) \end{aligned}$$

Lemme 1.5 ([16] , *lemme* 2.1)
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné de classe* C^1*. Alors l'injection* $H^1 \hookrightarrow L^q$*, est continue et compact si* $1 \leq q \leq 2^*$*, où* $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, $n \geq 3$.

Lemme 1.6 ([16] , *lemme* 2.3)
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *est un ouvert borné avec une frontière* $\partial\Omega$*. Soit* $2 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2}$, $n \geq 3$*. Alors il existe une constante* $D_p > 0$ *dépendant de* p, n *et* Ω *telle que*
1) $\left\| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right\|$
$\leq D_p \left[1 + (\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1})^{\frac{1}{n}} + (\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1})^{p-2}\right] \|u-v\|_{H^1}$.
2) $\left\| |u|^{p-2} v \right\| \leq D_p \left[1 + \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{n}} + \|u\|_{H^1}^{p-2}\right] \|v\|_{H^1}$
Pour tout $u, v \in H^1$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \left| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right| &= \left| \int_0^1 \tfrac{d}{d\theta} \left[|v+\theta(u-v)|^{p-2} (v+\theta(u-v)) \right] d\theta \right| \\ &= (p-1)\,|u-v| \int_0^1 |v+\theta(u-v)|^{p-2}\, d\theta \\ &\leq (p-1)\,|u-v|\, |W|^{p-2}. \end{aligned}$$

Avec $W = |u| + |v|$.

En appliquant l'inégalité de Holder, on obtient

$$\begin{aligned}\left\| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right\| &\leq (p-1) \left(\int_\Omega |u-v|^2 |W|^{2p-4} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (p-1) \left(\int_\Omega |u-v|^{2\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \left(\int_\Omega |W|^{(2p-4)\alpha'} dx \right)^{\frac{1}{2\alpha'}}\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha > 1$.

Notons que $H^1 \hookrightarrow L^q,\ 1 \leq q < 2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, $n \geq 3$, et $\|v\|_{L^q} \leq C_q \|v\|_{H^1}, \forall v \in H^1, 1 \leq q \leq 2^*$.

En choisit $\alpha = \dfrac{2^*}{2} = \dfrac{\frac{n}{n-2}}{\frac{n}{n-2} - 1} = \dfrac{n}{2}$, et

$$\left(\int_\Omega |u-v|^{2\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2\alpha}} = \|u-v\|_{L^{2^*}} \leq C_{2^*} \|u-v\|_{H^1}.$$

D'après la condition $2 \leq p \leq \dfrac{2n-2}{n-2} = 2 + \dfrac{2}{n-2}$, $n \geq 3$ est equivalent de

$$0 \leq (2p-4)\alpha' \leq 2^* = \tfrac{2n}{n-2}$$

Donc, nous considérons les deux cas suivantes

Cas 1 : $1 \leq (2p-4)\alpha' \leq 2^* = \frac{2n}{n-2}$:

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |W|^{(2p-4)\alpha'} dx \right)^{\frac{1}{2\alpha'}} &= \|W\|^{p-2}_{L^{2(p-2)\alpha'}} \leq \left(C_{2(p-2)\alpha'} \|W\|_{H^1} \right)^{p-2} \\ &= C^{p-2}_{2(p-2)\alpha'} \|W\|^{p-2}_{H^1}\end{aligned}$$

Cas 2 : $0 \leq \beta \equiv (2p-4)\alpha' < 1 \leq 2^* = \frac{2n}{n-2}$:

$$|W|^{(2p-4)\alpha'} = |W|^\beta \leq 1 + |W|,$$

Alors

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega}^{2}|W|^{(2p-4)\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} &= \left(\int_{\Omega}^{2}(1+|W|)\,dx\right)^{\frac{1}{2\alpha'}}\\ &\le \left(|\Omega|+|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|W\|\right)^{\frac{1}{2\alpha'}}\\ &\le \left(|\Omega|+|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|W\|_{H^1}\right)^{\frac{1}{2\alpha'}}\\ &= \left(|\Omega|+|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|W\|_{H^1}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\le |\Omega|^{\frac{1}{n}}+|\Omega|^{\frac{1}{2n}}\|W\|_{H^1}^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

$$\left(\int_{\Omega}^{2}|W|^{(2p-4)\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} \le |\Omega|^{\frac{1}{N}}+|\Omega|^{\frac{1}{2n}}\|W\|_{H^1}^{\frac{1}{n}}+C_{2(p-2)\alpha'}^{p-2}\|W\|_{H^1}^{p-2}$$

Par censéquent

$$\begin{aligned}&\left\||u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right\|\\ &=(p-1)C_{2^*}\|u-v\|_{H^1}\left[|\Omega|^{\frac{1}{N}}+|\Omega|^{\frac{1}{2N}}\|W\|_{H^1}^{\frac{1}{n}}+C_{2(p-2)\alpha'}^{p-2}\|W\|_{H^1}^{p-2}\right]\\ &\le D_p\|u-v\|_{H^1}\left[1+\|W\|_{H^1}^{\frac{1}{n}}+\|W\|_{H^1}^{p-2}\right]\\ &\le D_p\left[1+(\|u\|_{H^1}+\|v\|_{H^1})^{\frac{1}{n}}+(\|u\|_{H^1}+\|v\|_{H^1})^{p-2}\right]\|u-v\|_{H^1}\end{aligned}$$

D'où la preuve de lemme.

■

Lemme 1.7 (de compacité) ([11] , p.57)

Les notations seront les suivantes : on se donne trois espaces de Banach B_0, B et B_1 avec

$$B_0\subset B\subset B_1,\ \ B_i \text{ réflexif, } i=0,1.$$

$$\text{l'injection } B_0\longrightarrow B \text{ est compact}$$

On définit

$$W=\left\{v|\,v\in L^{p_0}(0,T,B_0),v'=\frac{dv}{dt}\in L^{p_1}(0,T,B_1)\right\}$$

Où T est fini et $1<p_i<\infty,\ i=0,1$.

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)}+\|v\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)}$$

W est un espace de Banach.

Evidemment $W\subset L^{p_0}(0,T,B)$ compacte.

Preuve. Ce lemme est classique, pour sa démonstration nous renvoyons le lecteur au livre de Lions, JL [11]

■

Théorème 1.9 ([10]) *Soit E un espace de Banach réflexif ; alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Lemme 1.8 ([20] , *lemme* 3.1.4)
On suppose que Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n, (1 \leq p \leq \infty)$ *et soient* $u_m,\ u$ *sont des fonctions de* $L^p(\Omega)$ *telles que* u_m *converge fortement vers* u *dans* $L^p(\Omega)$ *alors*

$$u_m \longrightarrow u \text{ presque partout}$$

Lemme 1.9 ([20] , *lemme* 3.1.5)
On suppose que Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n, (1 \leq p \leq \infty)$*.et soit* u_m *une suite bornée dans* $L^p(\Omega)$ *et* u_m *converge presque partout vers* u*, alors u dans* $L^p(\Omega)$ *et* u_m *converge faiblement vers u dans* $L^p(\Omega)$*.*

Remarque 1.4 ([20])
Supposons que $(1 \leq p < \infty)$ *et B est un espace de Banach réflexive alors la convergence faible étoile équivalent à la convergence faible*

1.8 Formule de Green

Définition 1.11 *Soit* $u \in H^2(\Omega)$ *et* $v \in H^1(\Omega)$ *. Alors on a*

$$\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds.$$

1.9 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Cauchy-Schwartz
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \forall u, v \quad &\in \quad L^2(\Omega); \left| \int_\Omega uv dx \right| \leq \int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \\ (i.e) \quad &: \quad \|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2 .$$

Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ alors $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon)|b|^q .$$

Où p, q des nombre réels stictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et $.c(\varepsilon) = \frac{1}{p}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

D'autre écriture de inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p}\left|\frac{b}{\varepsilon}\right|^{\frac{p}{p-1}}, .\forall p > 1.$$

Inégalité de Holder

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega),\ |fg| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note p' le conjugué de p, c'est-à-dire le réel tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1,$ et on a l'inégalité :

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

Lorsque $p = p' = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy Schwartz.

Inégalité de Trace

$$\int_{\partial\Omega} |v|^2\, ds \leq \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + c(\varepsilon)|v|^2\right) dx$$

Où $c(\varepsilon)$ est une constante positive dépendant seulement de ε et du domaine Ω.

Lemme 1.10 ([16] , *lemme* 2.2)

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné avec une frontière $\partial\Omega$. Alors

$$\left(\int\limits_{\partial\Omega} v^2(x) dS_x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma_\Omega \|v\|_{H^1} \text{ pour tout } v \in H^1.$$

Lemme de Gronwall

Soit $T > 0$,$\lambda \in L^1(0,T)$,$\lambda \geq 0$ p.p. et $C_1, C_2 \geq 0$. Soit $\phi \in L^1(0,T)$, $\phi \geq 0$ p.p, telle que $\lambda\phi \in L^1(0,T)$ et

$$\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\, \phi(s) ds \text{ , pour presque tout } t \in (0,T) .$$

Alors on a

$$\phi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s) \, ds \right) \text{ , pour presque tout } t \in (0,T) .$$

Chapitre 2

Une équation hyperbolique linéaire de type ondes avec condition non locale

2.1 Formulation du problème

Dans le domaine borné $Q = \Omega \times (0, T)$ où $T < \infty$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on étudie le problème aux limites pour l'équation [1] :

$$u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{2.1}$$

A l'équation (2.1), on associe les conditions initiales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.2}$$

Et la condition intégrale

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \int_0^t \int_\Omega K(x,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau = 0 \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω, $f(x,t)$,$\phi(x)$, $\psi(x)$, $K(x,\xi,\tau)$ sont des fonctions données, et $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$. Où la fonciton $c(x,t)$ satisfont les conditions suivantes :

$$(H) \begin{cases} 0 \leq c_1 \leq c(x,t) \leq c_2 \\ |c'(x,t)| \leq c_3 \end{cases}$$

2.2 Espaces fonctionnels

Soit

$$\hat{W}^{1,2}(Q) = \left\{v(x,t) : v \in W^{1,2}(Q),\ v(x,T) = 0\right\}.$$

L'espace habituel de Sobolev muni de la norme

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(Q)} = \|u\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2(Q)}$$

Considérons l'équation

$$\begin{aligned} &\left\langle u'', v\right\rangle - \langle \Delta u, v\rangle + \langle cu, v\rangle \\ &= \langle f, v\rangle \quad \text{où } v \in \hat{W}^{1,2}(Q) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Où $\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(Q)$, u est supposé la solution de (2.1) et $v \in \hat{W}^{1,2}(Q)$.
Definissons la solution généralisée du problème $(2.1) - (2.3)$.
En évaluant les produits scalaires dans (2.4), on obtient :

$$\int_Q v(x,t)u''(x,t)dxdt = -\int_\Omega \psi(x)v(x,0)dx - \int_Q v'(x,t)u'(x,t)dxdt \tag{2.5}$$

$$\int_Q \Delta u(x,t)v(x,t)dxdt = -\int_Q \nabla u(x,t)\nabla v(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta}dsdt \tag{2.6}$$

En substituant la condition (2.3) dans (2.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta u(x,t)v(x,t)dxdt \quad &= -\int_0^T\int_{\partial\Omega} v(x,t)\int_0^t\int_\Omega K(x,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau dsdt \\ &- \int_Q \nabla u(x,t)\nabla v(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{2.7}$$

Remplaçant les identités (2.5),(2.7) alors (2.4) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega (\nabla u \nabla v - u'v' + cuv)dxdt \\ &+\int_0^T\int_{\partial\Omega} v(x,t)\int_0^t\int_\Omega K(x,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau dsdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega fvdxdt + \int_\Omega \psi(x)v(x,0)dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

Définition 2.1 *on appelle solution généralisée du problème (2.1)-(2.3) toute fonction $u \in W^{1,2}(Q)$ vérifiant l'identité (2.8) pour tout $v \in \hat{W}^{1,2}(Q)$.*

Théorème 2.1 ([1], *Théorème* 1.2)
Si $\phi(x) \in W^{1,2}(Q)$, $\psi(x) \in L^2(\Omega)$, $f(x,t) \in L^2(\Omega)$, $K(x,\xi,\tau) \in C(\Omega \times \Omega \times (0,T))$, *il existe* $\dfrac{\partial K}{\partial \xi_i}$, $i = 1...n$ *et*

$$\max_Q |K| \leq K_0, \tag{2.9}$$

$$\max_Q \left|\frac{\partial K}{\partial \xi_i}\right| \leq K_1. \tag{2.10}$$

Alors il existe une unique solution généralisée du problème $(2.1) - (2.3)$.

2.3 Unicité de la solution

Montons que la solution généralisée du problème $(2.1) - (2.3)$ si elle existe, est unique.

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions généralisées différentes u_1 et u_2 du problème (2.1)-(2.3), il est évident que leur différence $u = u_1 - u_2$ est une solution généralisée du problème (2.1)-(2.3) avec $f = \varphi = \psi = 0$, alors $u(x,t)$ satisfait

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega (\nabla u \nabla v - u'v' + cuv)dxdt \\ &+\int_0^T\int_{\partial\Omega} v(x,t)\int_0^t\int_\Omega K(x,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau ds dt = 0\end{aligned} \tag{2.11}$$

Considérons la fonction

$$v(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^\tau u(x,\eta)d\eta & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \tag{2.12}$$

Notons que $v(x,t) \in \hat{W}^{1,2}(Q)$, et utilisant le fait que $v'(x,t) = -u(x,t)\ \forall t \in [0,\tau]$.
En intégrant par partie l'équation (2.11) il vient :

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdt = -\int_0^\tau\int_\Omega \nabla v' \nabla v dxdt = -\int_0^\tau\int_\Omega \nabla v \nabla v' dxdt - \int_\Omega |\nabla v|^2\Big|_0^\tau dx$$

Par conséquent

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x,0)|^2 dx$$

Et

$$\int_0^T\int_\Omega u'v'dxdt = -\int_0^\tau\int_\Omega u'udxdt = \int_0^\tau\int_\Omega uu'dxdt - \int_\Omega u^2\Big|_0^\tau dx$$

Par conséquent

$$\int_0^T\int_\Omega u'v'dxdt=-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,\tau)dx.$$

Et

$$\int_0^T\int_\Omega cuv\ dxdt=-\int_0^\tau\int_\Omega cv'v\ dxdt=\frac{1}{2}\int_\Omega c\left(x,0\right)v^2\left(x,0\right)\ dx+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega c'\left(x,t\right)v^2\left(x,t\right)\ dxdt$$

Alors (2.11) devient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega(\left|\nabla v(x,0)\right|^2+u^2(x,\tau)+c\left(x,0\right)v^2\left(x,0\right))dxdt\\&=-\int_0^T\int_{\partial\Omega}v(x,t)\int_0^t\int_\Omega K(x,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau dsdt-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega c'\left(x,t\right)v^2\left(x,t\right)\ dxdt\end{aligned}$$

En utilisant $(2,9)$ sur $K(x,\xi,\tau)$ et les conditions (H), on trouve :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega(\left|\nabla v(x,0)\right|^2+u^2(x,\tau)+c_1v^2(x,0))dxdt\\&\leq\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|v(x,t)\right|\int_0^t\int_\Omega\left|K(x,\xi,\tau)\right|\left|u(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau dsdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\left|c'\left(x,t\right)\right|v^2\left(x,t\right)\ dxdt\\&\leq K_0\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left|v(x,t)\right|\int_0^t\int_\Omega\left|u(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau dsdt+\frac{c_3}{2}\int_0^\tau\int_\Omega v^2\left(x,t\right)\ dxdt\ .\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Cauchy-ϵ avec $\epsilon=1$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\left|\nabla v(x,0)\right|^2+u^2(x,\tau)+c_1v^2(x,0))dxdt\\&\leq K_0\int_0^T\int_{\partial\Omega}(v^2(x,t)+T\left|\Omega\right|\int_0^t\int_\Omega u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau)dsdt+c_3\int_0^\tau\int_\Omega v^2\left(x,t\right)\ dxdt\\&\leq K_0\int_0^T\int_{\partial\Omega}v^2(x,t)\ dsdt+K_0T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|\int_0^\tau\int_\Omega u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau)+c_3\int_0^\tau\int_\Omega v^2\left(x,t\right)\ dxdt\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de trace, et posons $L=T^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\left|\nabla v(x,0)\right|^2+u^2(x,\tau)+c_1v^2(x,0))dx\\&\leq K_0\int_0^\tau\int_\Omega\left(\varepsilon\left|\nabla v\right|^2+c(\varepsilon)v^2+Lu^2\right)dxdt+c_3\int_0^\tau\int_\Omega v^2\left(x,t\right)\ dxdt\end{aligned}$$

Notant $C_0 = \max\{K_0\varepsilon, K_0 c(\varepsilon) + c_3, K_0 L\} / \min\{1, c_1\}$, on obtient l'inégalité suivante

$$\int_\Omega (|\nabla v(x,0)|^2 + u^2(x,\tau) + v^2(x,0))dx \leq C_0 \int_0^\tau \int_\Omega \left(|\nabla v(x,t)|^2 + u^2(x,t) + v^2(x,t)\right) dxdt \tag{2.14}$$

Considérons la fonction

$$w(x,t) = \int_0^t u(x,\eta)d\eta$$

Donc

$$v(x,t) = w(x,\tau) - w(x,t)$$

$$\nabla v(x,0) = \nabla w(x,\tau)$$

$$|\nabla v|^2 = |\nabla w(x,\tau) - \nabla w(x,t)|^2 \leq 2|\nabla w(x,\tau)|^2 + 2|\nabla w(x,t)|^2 .$$

Et aussi

$$v^2(x,t) = (w(x,\tau) - w(x,t))^2 \leq 2w^2(x,\tau) + 2w^2(x,t)$$

Alors nous avons

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla v|^2 dxdt \leq 2\tau \int_\Omega |\nabla w(x,\tau)|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega |\nabla w(x,t)|^2 dxdt. \tag{2.15}$$

En remplaçant w dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(|\nabla w(x,\tau)|^2 + w^2(x,\tau) + u^2(x,\tau)\right) dx \\ &\leq 2C_0\tau \int_\Omega (|\nabla w(x,\tau)|^2 + w^2(x,\tau))\, dx + 2C_0 \int_0^\tau \int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + w^2 + u^2\right) dxdt \end{aligned} \tag{2.16}$$

Du moment que τ est arbitraire, on le choisit de façon que $1 - 2\tau C_0 \geq 0$, alors (2.11) devient

$$(1 - 2C_0\tau)\int_\Omega \left(|\nabla w(x,\tau)|^2 + w^2(x,\tau) + u^2(x,\tau)\right) dx \leq 2C_0 \int_0^\tau \int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + w^2 + u^2\right) dxdt \tag{2.17}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall,on trouve

$$\int_\Omega \left(|\nabla w(x,\tau)|^2 + w^2(x,\tau) + u^2(x,\tau)\right) dx \leq 0 \quad \forall \tau \in \left[0, \frac{1}{2C_0}\right]$$

par conséquent, on obtient $u(x,\tau) = 0$, pour tout $x \in \Omega$ et $\tau \in \left[0, \frac{1}{2C_0}\right]$.
Si $T \leq \frac{1}{2C_0}$, alors $u = 0$ dans Q. Dans le cas $T \geq \frac{1}{2C_0}$, comme

$$]0, T[\subset \cup_{n=1}^{n=n_0} \left]\frac{n-1}{2C_0}, \frac{n}{2C_0}\right[,$$

où $n_0 = [C_0 T] + 1$, $[C_0 T]$ est la partie entière de $C_0 T$, répétons le même procédé pour $\tau \in \left]\frac{n-1}{2C_0}, \frac{n}{2C_0}\right[$, on trouve $u(x,t) = 0$ dans Q. Ainsi, l'unicité est prouvée. ■

2.4 Existence de la solution

Pour démontrer l'éxistence de la solution généralisée on applique la méthode de Faedo-Galarkin, soit $w_k(x)$ un système fondamental dans $W^{1,2}(\Omega)$ tel que $\langle w_k, w_l \rangle = \delta_{k,l}$. Cherchons une solution approchée du problème (2.1) - (2.3) sous la forme

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} d_k(t) w_k(x), \tag{2.18}$$

Où les coefficients $d_k(t)$ sont à déterminer, à partir de

$$\begin{gathered} \int_{\Omega} (u_m'' w_l + \nabla u_m \nabla w_l + c u_m w_l) dx \\ + \int_{\partial\Omega} w_l(x) \int_0^t \int_{\Omega} K(x,\xi,\tau) u_m(\xi,\tau) d\xi d\tau ds = \int_{\Omega} f w_l dx \end{gathered} \tag{2.19}$$

$$d_k(0) = \alpha_k, \quad d_k'(0) = \beta_k,$$

Les approximations des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont notées respectivement par

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k w_k(x), \\ \psi^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \psi_k w_k(x), \end{aligned}$$

$$\alpha_k(0) = \varphi_k, \quad \alpha_k'(0) = \psi_k.$$

.

En substituant la solution approchée dans l'équation (2.19), on trouve

$$\begin{gathered} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(d_k'' w_k w_l + d_k \nabla w_k \nabla w_l + c d_k w_k w_l\right) dx \\ + \int_{\partial\Omega} w_l \int_0^t \int_{\Omega} K(x,\xi,\tau) \sum_{k=1}^{m} d_k(\tau) w_k(\xi) d\xi d\tau ds = f_l(t). \end{gathered} \tag{2.20}$$

Où $f_l(t) = \langle f, w_l \rangle$.
Ce qui implique

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} \left(d_k''(t) \langle w_k, w_l \rangle + d_k(t) \langle \nabla w_k, \nabla w_l \rangle + d_k(t) \langle c w_k, w_l \rangle \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \left(d_k(\tau) \int_{\partial\Omega} w_l(x) \int_{\Omega} K(x,\xi,\tau) w_k(\xi) d\xi ds \right) d\tau = f_l(t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

En notant

$$\gamma_{kl}(t) = \langle \nabla w_k, \nabla w_l \rangle + \langle c w_k, w_l \rangle ;$$

$$\kappa_{kl}(\tau) = \int_{\partial\Omega} w_l(x) \int_{\Omega} K(x,\xi,\tau) w_k(\xi) d\xi ds$$

Alors (2.21) devient

$$\sum_{k=1}^{m} \left(d_k''(t)\delta_{kl} + d_k(t)\gamma_{kl}(t) + \int_0^t d_k(\tau)\kappa_{kl}(\tau) d\tau \right) = f_l(t). \tag{2.22}$$

On obtient un système d'équations integro-différentielles,on dérive (2.22) par rapport à t on trouve un système d'équations différentielles du troisième ordre à coefficients réguliers

$$\sum_{k=1}^{m} \left(d_k'''(t)\delta_{kl} + d_k'(t)\gamma_{kl}(t) + d_k(t) \left(\kappa_{kl}(t) + \gamma_{kl}'(t) \right) \right) = f_l'(t) \tag{2.23}$$

Avec des conditions initiales

$$d_k(0) = \alpha_k, \quad d_k'(0) = \beta_k, \quad d_k''(0) = f_l(0) - \alpha_k \gamma_k(0). \tag{2.24}$$

Par conséquent, c'est un problème de Cauchy pour des équations différentielles linéaires à coefficients réguliers qui est particulièrement solvable.
Ainsi, pour chaque m il existe une solution unique $u_m(x,t)$ satisfaisant (2.19)

Lemme 2.1 *La suite $\{u_m\}$ est uniformément bornée.*

Preuve. Multipliant (2.19) par $d_l'(t)$, et sommant par rapport à l de 1 à m,on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(u_m'' u_m' + \nabla u_m \nabla u_m' + c u_m u_m' \right) dx dt \\
&+ \int_{\partial\Omega} u_m' \int_0^t \int_{\Omega} K(x,\xi,\eta) u_m(\xi,\eta) d\xi d\eta ds dt \\
&= \int_{\Omega} f u_m' dx dt
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Intégrant par rapport à t sur $(0,\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left(u_m'' u_m' + \nabla u_m \nabla u_m' + c u_m u_m' \right) dx dt \\
&+ \int_0^{\tau} \int_{\partial\Omega} u_m' \int_0^t \int_{\Omega} K(x,\xi,\eta) u_m(\xi,\eta) d\xi d\eta ds dt \\
&= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} f u_m' dx dt
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Intégrant par parties le membre gauche de (2.26) par rapport à t sur $(0,\tau)$, il vient

- $\displaystyle \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u_m'' u_m' dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_m'(x,\tau) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_m'(x,0) \right)^2 dx$
- $\displaystyle \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla u_m' dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\nabla u_m(x,\tau) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\nabla u_m(x,0) \right)^2 dx$
- $\displaystyle \int_0^{\tau} \int_{\Omega} c u_m u_m' dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x,\tau)(u_m(x,\tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x,0)(u_m(x,0))^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} c'(x,t)(u_m(x,t))^2 dx dt$

Et

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\int_0^{\tau} u'_m \int_0^{t}\int_{\Omega} K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta dtds \\
&= -\int_{\partial\Omega}\int_0^{\tau} u_m(x,t)\int_{\Omega} K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi dtds \\
&\quad + \int_{\partial\Omega}\left(u_m(x,t)\int_0^{\tau}\int_{\Omega} K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\Bigg|_0^{\tau} ds \\
&= -\int_{\partial\Omega}\int_0^{\tau} u_m(x,t)\int_{\Omega} K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi dtds \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} u_m(x,\tau)\int_0^{\tau}\int_{\Omega} K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta ds
\end{aligned}$$

En substituant les quatres dernières identités dans (2.26), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left((u'_m(x,\tau))^2 + (\nabla u_m(x,\tau))^2 + c(x,\tau)(u_m(x,\tau))^2\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left((u'_m(x,0))^2 + (\nabla u_m(x,0))^2 + c(x,0)(u_m(x,0))^2\right)dx \\
&\quad + \int_0^{\tau}\int_{\Omega} c'(x,t)(u_m(x,t))^2 dxdt + \int_0^{\tau}\int_{\Omega} f u'_m dxdt \\
&\quad + \int_0^{\tau}\int_{\partial\Omega} u_m(x,t)\int_{\Omega} K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi dtds \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} u_m(x,\tau)\int_0^{\tau}\int_{\Omega} K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta ds
\end{aligned} \tag{2.27}$$

En appliquant au quatrième terme du membre droit de (2.27) l'inégalité de Cauchy-ε avec $\varepsilon = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau}\int_{\partial\Omega} u_m(x,t)\int_{\Omega} K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi dsdt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_{\partial\Omega}(u_m(x,t))^2 dsdt + \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\Omega} K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi\right)^2 dsdt
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de trace, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(u_m(x,t))^2\,dsdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi\right)^2 dsdt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\left(\varepsilon\left|\nabla u_m(x,t)\right|^2+c(\varepsilon)\left(u_m(x,t)\right)^2\right)dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\varepsilon\left(\int_\Omega\nabla K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi\right)^2 dxdt\\
&+\frac{1}{2}c(\varepsilon)\int_0^\tau\int_\Omega\left(\int_\Omega K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi\right)^2 dxdt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\left(\varepsilon\left|\nabla u_m(x,t)\right|^2+c(\varepsilon)\left(u_m(x,t)\right)^2\right)dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\varepsilon\left|\Omega\right|\int_\Omega\left|\nabla K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)\right|^2 d\xi dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega c(\varepsilon)\left|\Omega\right|\int_\Omega\left(K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)\right)^2 d\xi dxdt
\end{aligned}$$

En utilisant (2.9) et (2.10), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(u_m(x,t))^2\,dsdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi\right)^2 dsdt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\left(\varepsilon\left|\nabla u_m(x,t)\right|^2+c(\varepsilon)\left(u_m(x,t)\right)^2\right)dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega\varepsilon\left|\Omega\right|K_1^2\int_\Omega\left(u_m(\xi,t)\right)^2 d\xi dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega c(\varepsilon)\left|\Omega\right|K_0^2\int_\Omega\left(u_m(\xi,t)\right)^2 d\xi dxdt
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}u_m\int_\Omega K(x,\xi,t)u_m(\xi,t)d\xi dsdt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega(\varepsilon\left|\nabla u_m\right|^2+(c(\varepsilon)+\varepsilon\left|\Omega\right|^2K_1^2+c(\varepsilon)\left|\Omega\right|^2K_0^2)u_m^2)dxdt
\end{aligned}\tag{2.28}$$

En appliquant au cinquième terme du membre droit de (2.27) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on utilise l'inégalité de cauchy avec ε on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} u_m(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\partial\Omega}\left(u_m(x,\tau)\right)^2 ds + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^\tau\int_\Omega K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)^2 ds
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de trace et les conditions (2.9) et (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} u_m(x,\tau)\int_0^\tau\int_\Omega K(x,\xi,\eta)u_m(\xi,\eta)d\xi d\eta ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega\left(\mu\left|\nabla u_m(x,\tau)\right|^2 + c(\mu)\left(u_m(x,\tau)\right)^2\right)dx \\
&\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega\left(\tau\mu\left|\Omega\right|\int_0^\tau\int_\Omega\left|\nabla K(x,\xi,\eta)\right|^2\left(u_m(\xi,\eta)\right)^2 d\xi d\eta\right)dx \\
&\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega\left(\tau c(\mu)\left|\Omega\right|\int_0^\tau\int_\Omega\left(K(x,\xi,\eta)\right)^2\left(u_m(\xi,\eta)\right)^2 d\xi d\eta\right)dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega\left(\mu\left|\nabla u_m(x,\tau)\right|^2 + c(\mu)\left(u_m(x,\tau)\right)^2\right)dx \\
&\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\left(K_1^2\tau\mu\left|\Omega\right|^2 + K_0^2\tau c(\mu)\left|\Omega\right|^2\right)\int_0^\tau\int_\Omega\left(u_m(x,t)\right)^2 dxdt
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En remplaçant les inégalités (2.28) et (2.29) dans (2.27), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\left(u'_m(x,\tau)\right)^2 + (1-\varepsilon\mu)\left|\nabla u_m(x,\tau)\right|^2 + (c_1-\varepsilon c(\mu))\left(u_m(x,\tau)\right)^2\right)dx \\
&\leq \int_\Omega\left(\left(u'_m(x,0)\right)^2 + \left|\nabla u_m(x,\tau)\right|^2 + c_2\left(u_m(x,0)\right)^2\right)dx \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega f^2 dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega c_3(u_m)^2 dxdt + \int_0^\tau\int_\Omega (u'_m)^2 dxdt \\
&\quad+\int_0^\tau\int_\Omega\left((\varepsilon)\left|\nabla u_m\right|^2 + h(\varepsilon)(u_m)^2\right)dxdt \\
&\quad+\frac{\mu}{\varepsilon}K_1^2\tau\left|\Omega\right|^2\int_0^\tau\int_\Omega\left(u_m(x,\tau)\right)^2 dxdt + \frac{c(\mu)}{\varepsilon}K_0^2\tau\left|\Omega\right|^2\int_0^\tau\int_\Omega\left(u_m(x,\tau)\right)^2 dxdt
\end{aligned} \tag{2.30}$$

On choisit ε et μ tels que $\varepsilon\mu < 1, \varepsilon c(\mu) < c_1$.
On note par

$$m = \min\{1, 1-\varepsilon\mu, c_1 - \varepsilon c(\mu)\},$$
$$M = \max\left\{1, c_3 + h(\varepsilon) + \frac{\mu}{\varepsilon} K_1^2 \tau |\Omega|^2 + \frac{c(\mu)}{\varepsilon} K_0^2 \tau |\Omega|^2, \varepsilon\right\}$$

Alors (2.30) devient

$$m \int_\Omega \left((u'_m(x,\tau))^2 + |\nabla u_m(x,\tau)|^2 + (u_m(x,\tau))^2\right) dx$$
$$\leq \int_\Omega \left((u'_m(x,0))^2 + |\nabla u_m(x,0)|^2 + (u_m(x,0))^2\right) dx$$
$$+ M \int_0^\tau \int_\Omega \left((u'_m)^2 + |\nabla u_m|^2 + (u_m)^2\right) dxdt + \int_0^\tau \int_\Omega f^2(x,t) dxdt$$

En appliquant le lemme de Gronwall et en intégrant sur $(0,\tau)$, on obtient

$$\|u_m\|_{W^{1,2}(Q_\tau)} \leq C(T)\left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.31}$$

Puisque $\|f\|_{L^2(Q)}, \|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \|\psi\|_{L^2(\Omega)}$ sont bornées, donc $\{u_m\}$ est borné dans $W^{1,2}(Q)$: $\|u_m\|_{W^{1,2}(Q_\tau)} \leq D(T)$; par conséquent, la suite $\{u_m\}$ est uniformément bornée et par suite on peut extraire une sous suite $\{u_{m_k}\}$ qui converge faiblement. Montrons que sa limite est exactement la solution généralisée du problème posé. ■

Lemme 2.2 *La limite de la sous suite est la solution du problème* $(2.1) - (2.3)$.

Preuve. Pour cela on démontre que la sous suite $\{u_{m_k}\}$ satisfait l'identité (2.8) pour tout fonction $\eta_m(x,t) = \sum_{l=1}^m w_l(x) h_l(t) \in W_T^{1,2}(Q)$. Posons

$$N_m = \left\{\eta_m(x,t) = \sum_{k=1}^n h_l(t) w_l(x),\ h_l(t) \in W^{1.2}(0,T), h_l(T) = 0\right\}$$

Comme $\cup_{m=1}^\infty N_m$ est dense dans $W_T^{1,2}(Q)$, il suffit de démontrer (2.8) pour tout $\eta_m \in N_m$.
En multipliant (2.19) par la fonction $h_l(t) \in W^{1,2}(0,T), h_l(T) = 0$,et prenant la somme de $l = 1$ à n, on obtient

$$\int_\Omega \left(u''_m \eta_m + \nabla u_m \nabla \eta_m + c u_m \eta_m\right) dxdt$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \eta_m \int_0^t \int_\Omega K(x,\xi,\tau) u_m(\xi,\tau) d\xi d\tau ds dt$$
$$= \int_\Omega f \eta_m dxdt$$

Une intégration sur $[0, T]$ donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \left(-u'_m \eta'_m + \nabla u_m \nabla \eta_m + c u_m \eta_m\right) dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta_m \int_0^t \int_\Omega K(x, \xi, \tau) u_m(\xi, \tau) d\xi d\tau ds dt \\
&= \int_\Omega u'_m(x, 0) \eta_m(x, 0) dx + \int_0^T \int_\Omega f \eta_m dxdt
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \eta_m \int_0^t \int_\Omega K(x, \xi, \tau)(u_m(\xi, \tau) - u(\xi, \tau)) d\xi d\tau ds dt \tag{2.33}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega K(x, \xi, \tau)(u_m(\xi, \tau) - u(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
&\leq \left(\int_0^T \int_\Omega K^2(x, \xi, \tau) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_\Omega (u_m(\xi, \tau) - u(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|K\|_{L^2(Q)} \|u_m - u\|_{L^2(Q)}
\end{aligned}$$

De plus, $\|K\|_{L^2(Q)} \leq |Q| K_0$, et $\|u_m - u\|_{L^2(Q)} \longrightarrow 0$. Par passage à la limite dans (2.33), on obtient l'identité (2.19) et par suite u est la solution généralisée du problème (2.1)-(2.3). ■

Chapitre 3

Une équation hyperbolique non linéaire de type ondes avec condtion non locale

3.1 Formulation du problème

Dans le domaine borné $Q_{T_*} = \Omega \times (0, T_*)$ où $T_* < \infty$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on considère le problème aux limites pour l'équation $[16]$

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^{p-2} u + f(x,t) \qquad x \in \Omega \; , \; t \geq 0. \tag{3.1}$$

A l'équation (3.1), on associe les conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Et la condition intégrale

$$-\frac{\partial u}{\partial v} = \int_{\Omega} h(x,y,t)u(y,t)dy \quad x \in \partial\Omega \; , \; t \geq 0. \tag{3.3}$$

Où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω, u_0, u_1, f, et h sont des fonctions données, et $\dfrac{\partial u}{\partial v}$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$.

3.2 Existence de la solution

Théorème 3.1 ($[16]$ *Théorème* 2.4)
On suppose que Ω est un ouvert borné. On donne f, h, u_0, u_1 avec

$$(A_1) \;\; 2 < p \leq \frac{2n-2}{n-2} \quad n \geq 3$$

$$(A_2) \;\; f, f' \in L^1(0,T,L^2)$$

$$(A_3) \;\; h \in L^2(0,T,(\partial\Omega \times \Omega)) \;\; h', \; h'' \in L^2(0,T,(\partial\Omega \times \Omega))$$

$$(A_4) \;\; (u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$$

Alors le problème $(3.1) - (3.3)$ *admet une unique solution locale*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T_*,H^2) \\ u_t &\in L^\infty(0,T_*,H^1) \\ u_{tt} &\in L^\infty(0,T_*,L^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour tout $T_* > 0$ *assez petit.*

Preuve. ([16])

Pour démontrer l'éxistence de la solution on applique la méthode de Faedo-Galarkin.

Le plan de la démonstration est le suivant

1) On construit des solutions (approchées) .

2) On établit sur ces solutions approchées des estimations a priori.

3) Passage a la limite grâce a des propriétés de compacité (pour passer a la limite dans le terme non linéaire).

Etape 1 :(solutions approchées)

On introduit une suite $w_1, w_2, ..., w_m$ des fonctions ayant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} w_i \in H^2 \;\; \forall i. \\ \forall m, \;\; w_1, ..., w_m \text{ sont linéairement indépendantes} \\ \text{Les combinaisons linéaires finies des } w_i \text{ sont dense dans } H^2. \end{cases}$$

Une telle suite existe.

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution (approchée) du problème sous la forme

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} C_{mj}(t) w_j \tag{3.5}$$

Les coeffficients C_{mj} vérifiés le systéme d'équations déffirentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), w_j \rangle + \langle \nabla u_m(t), \nabla w_j \rangle + \langle u_m'(t), w_j \rangle + \displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u_m(t) \rangle \, w_j(x) ds_x \\ = \left\langle |u_m(t)|^{p-2} \, u_m(t), w_j \right\rangle + \langle f(t), w_j \rangle \, . \\ u_m(0) = u_0 \qquad\qquad\qquad\qquad u_m'(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Le problème (3.6) admet une solution locale dans l'intervalle $[0, T_m]$ pour tout m.

Etape 2 : (estimation a priori)

Première estimation

En multiplie (3.6) par $C'_{mj}(t)$ et on somme sur j, on trouve

$$\begin{cases} \langle u''_m(t), u'_m(t)\rangle + \langle \nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)\rangle + \langle u'_m(t), u'_m(t)\rangle + \int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,t)u_m(t)\rangle\, u'_m(t)ds_x \\ = \left\langle |u_m(t)|^{p-2}\, u_m(t), u'_m(t)\right\rangle + \langle f(t), u'_m(t)\rangle\,. \\ u_m(0) = u_0 \qquad\qquad\qquad\qquad u'_m(0) = u_1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u'_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2 + \left\|u'_m(t)\right\|^2 + \int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,s), u_m(s)\rangle\, u'_m(s)ds_x ds$$
$$= \left\langle |u_m(t)|^{p-2}\, u_m(t), u'_m(t)\right\rangle + \langle f(t), u'_m(t)\rangle \tag{3.8}$$

Par intégration de 0 à t, il résulte :

$$\left\|u'_m(t)\right\|^2 + \left\|\nabla u_m(t)\right\|^2 + 2\int\limits_0^t \left\|u'_m(s)\right\|^2 ds + 2\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,s), u_m(s)\rangle\, u'_m(s)ds_x ds \tag{3.9}$$
$$= \; 2\int\limits_0^t \left\langle |u_m(s)|^{p-2}\, u_m(s), u'_m(s)\right\rangle ds + 2\int\limits_0^t \langle f(s), u'_m(s)\rangle\, ds + \left\|u'_m(0)\right\|^2 + \left\|\nabla u_m(0)\right\|^2$$

En intégrant par partie le quatrième terme du membre gauche de (3.9), il vient :

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,s), u_m(s)\rangle\, u'_m(s)ds_x ds \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u_m(t)\rangle\, u_m(t)ds_x - \int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,0), u_0\rangle\, u_0(x)ds_x \\ &-\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} \left(\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\right) u_m(s)ds_x ds \end{aligned} \tag{3.10}$$

En substituant l'équation (3.10) dans (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|u'_m(t)\right\|^2 + \left\|\nabla u_m(t)\right\|^2 \;&= 2\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} \left(\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\right) u_m(s)ds_x ds \\ &-2\int\limits_0^t \left\|u'_m(s)\right\|^2 ds + 2\int\limits_0^t \langle f(s), u'_m(s)\rangle\, ds + \left\|\nabla u_m(0)\right\|^2 \\ &-2\int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u_m(t)\rangle\, u_m(t)ds_x + \left\|u'_m(0)\right\|^2 \\ &+2\int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,0), u_0\rangle\, u_0(x)ds_x + 2\int\limits_0^t \left\langle |u_m(s)|^{p-2}\, u_m(s), u'_m(s)\right\rangle ds \end{aligned}$$

Soit

$$S_m(t) = \|u'_m(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2 \tag{3.11}$$

Alors

$$\begin{aligned} S_m(t) &= S_m(0) + 2\int_{\partial\Omega} \langle h(x,0), u_0\rangle u_0 ds_x - 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + 2\int_0^t \langle f(s), u'_m(s)\rangle ds \\ &+2\int_0^t \left\langle |u_m|^{p-2} u_m(s), u'_m(s)\right\rangle ds - 2\int_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u_m(t)\rangle u_m(t) ds_x \\ &+2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \left(\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\right) u_m(s) ds_x ds \\ &\equiv S_m(0) + \sum_{j=1}^{6} I_j \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'après le lemme (1.5) et (1.6) et les inégalités suivantes

$$2ab \leq \beta a^2 + \frac{1}{\beta} b^2 \text{ pour } a, b \in \mathbb{R},\ \beta > 0. \tag{3.13}$$

$$(a+b+c)^q \leq 3^{q-1}(a^q + b^q + c^q) \text{ pour tout } q \geq 1,\ a, b, c \geq 0. \tag{3.14}$$

Et

$$\|v\| \leq \|v\|_{H^1}\ \forall v \in H^1,\ 1 \leq q \leq 2^* = \frac{2n}{n-2} \text{ et } n \geq 3\ \|v\|_{L^q} \leq C_q \|v\|_{H^1}$$

En estimant toutes les termes du coté droit de (3.12)

$$\begin{aligned} S_m(0) + I_1 &= S_m(0) + 2\int_{\partial\Omega} \langle h(x,0), u_0\rangle u_0 ds_x \\ &= \|u'_m(0)\|^2 + \|\nabla u_m(0)\|^2 + 2\int_{\partial\Omega} \langle h(x,0), u_0\rangle u_0 ds_x \\ &= \frac{1}{2}\bar{C}_0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Et

$$\begin{aligned} I_2 &= -2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leq 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 + \|\nabla u_m(s)\|^2 ds \\ &= 2\int_0^t S_m(s) ds \end{aligned} \tag{3.16}$$

En appliquant au terme I_3 l'inégalité de Cauchy-Schwartz et utilisant l'inégalité (3.13) avec $\beta = 1$,on obtient

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\int_0^t \langle f(s), u_m'(s)\rangle\, ds \leq 2\int_0^t \|f\|\, \|u_m'(s)\|\, ds \\ &\leq \int_0^t \|f\|^2\, ds + \int_0^t \|u_m'(s)\|^2\, ds \leq \int_0^t \|f\|^2\, ds + \int_0^t S_m(s) ds \\ &\leq C_T + \int_0^t S_m(s) ds \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalités de Cauchy-Schwartz et utilisant l'inégalité (3.13) avec $\beta = 1$,au terme I_4 on obtient :

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\int_0^t \left\langle |u_m(s)|^{p-2} u_m(s), u_m'(s)\right\rangle ds \leq 2\int_0^t \left\||u|^{p-1}\right\| \|u_m'(s)\|\, ds \\ &\leq \int_0^t \left\||u_m(s)|^{p-1}\right\|^2 ds + \int_0^t \|u_m'(s)\|^2\, ds \leq \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^{2p-2}}^{2p-2}\, ds + \int_0^t S_m(s) ds \\ &\leq \int_0^t \left(C_{2p-2}\, \|u_m(s)\|_{H^1}\right)^{2p-2} ds + \int_0^t S_m(s) ds \\ &= \int_0^t C_{2p-2}^{2p-2}\, \|u_m(s)\|_{H^1}^{2p-2}\, ds + \int_0^t S_m(s) ds \end{aligned} \tag{3.18}$$

Comme $1 \leq 2 \leq 2p-2 \leq 2^*$ et $H^1 \hookrightarrow L^{2p-2}(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} \|u_m(s)\|_{H^1}^2 &= \|u_m(s)\|^2 + \|\nabla u_m(s)\|^2 \\ &= \left[\|u_0\| + \int_0^t \|u_m'(s)\|\, ds\right]^2 + \|\nabla u_m(s)\|^2 \\ &\leq \left[\|u_0\| + \int_0^t \|u_m'(s)\|\, ds\right]^2 + S_m(s) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dans le dernier résultat on a

$$\left[\|u_0\| + \int_0^t \|u_m'(s)\|\, ds\right]^2 = \|u_0\|^2 + 2\,\|u_0\| \int_0^t \|u_m'(s)\|\, ds + \left(\int_0^t \|u_m'(s)\|\, ds\right)^2 \tag{3.20}$$

En utilisant l'inégalité (3.13) avec $\beta = 1$ et appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz au deuxième terme du membre droit de (3.20), on obtient

$$\begin{aligned} \left[\|u_0\| + \int_0^t \|u'_m(s)\|\, ds\right]^2 &\leq 2\|u_0\|^2 + 2\left(\int_0^t \|u'_m(s)\|\, ds\right)^2 \\ &\leq 2\|u_0\|^2 + 2\left[\left(\int_0^t 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &\leq 2\|u_0\|^2 + 2t\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \end{aligned} \tag{3.21}$$

Il résulte que

$$\|u_m(s)\|_{H^1}^{2p-2} \leq \left[2\|u_0\|^2 + S_m(t) + 2t\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds\right]^{p-1} \tag{3.22}$$

En utilisant l'inégalité (3.14) et appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left[2\|u_0\|^2 + S_m(t) + 2t\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds\right]^{p-1} &\leq 3^{p-2}2^{p-1}\|u_0\|^{2p-2} + 3^{p-2}(S_m(t))^{p-1} \\ &+3^{p-2}2^{p-1}t^{p-1}\left(\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds\right)^{p-1} \\ &\leq 3^{p-2}2^{p-1}\|u_0\|^{2p-2} + 3^{p-2}(S_m(t))^{p-1} \\ &+3^{p-2}2^{p-1}t^{2p-3}\int_0^t (S_m(s))^{p-1} ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\int_0^t \left\langle |u_m(s)|^{p-2} u_m(s), u'_m(s)\right\rangle ds \\ &\leq C_T + C_T\int_0^t (S_m(s))^{p-1} ds + \int_0^t S_m(s) ds \end{aligned} \tag{3.23}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et utilisant l'inégalité (3.13) au terme I_5, on obtient

$$\begin{aligned}
I_5 &= -2\int\limits_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u_m(t)\rangle\, u_m(x,t)ds_x \\
&\leq 2\gamma_\Omega \|h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \|u_m(t)\| \, \|u_m\|_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{\beta}\gamma_\Omega^2 \|h\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \|u_m(t)\|^2 + \beta \|u_m\|^2_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{\beta}\gamma_\Omega^2 \|h\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \left[2\|u_0\|^2 + 2t\int\limits_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds\right]^2 \\
&+\beta\left[2\|u_0\|^2 + S_m(t) + 2t\int\limits_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds\right] \\
&\leq \frac{1}{\beta}C_T + \beta S_m(t) + \frac{1}{\beta}C_T\int\limits_0^t S_m(s)ds
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pour tout $0 \leq \beta \leq 1$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on utilise le lemme $(1,10)$ au terme I_6, il vient

$$\begin{aligned}
I_6 &= +2\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} \left(\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u_m'(s)\rangle\right) u_m(s)ds_x ds \\
&\leq 2\gamma_\Omega \|h'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1} ds \\
&+2\gamma_\Omega \|h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \int\limits_0^t \|u_m'(s)\| \, \|u_m(s)\|_{H^1} ds
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant l'inégalité (3.13) sur la deuxième terme du membre droit de (3.25) on obtient

$$\begin{aligned}
I_6 &= +2\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega} \left(\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u_m'(s)\rangle\right) u_m(s)ds_x ds \\
&\leq 2\gamma_\Omega \|h'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1} ds \\
&+2\gamma_\Omega^2 \|h\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \int\limits_0^t \|u_m'(s)\|^2_{H^1} ds + \int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1} ds \\
&\leq C_T\left[1 + \int\limits_0^t S_m(s)ds\right]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

En substituant les six dernières identités dans (3.12), et on choisit $\beta = \dfrac{1}{4}$, on obtient

$$S_m(t) \leq C_T \left[1 + \int_0^t S_m(s)ds + \int_0^t (S_m(s))^{p-1} ds \right] \quad 0 \leq t \leq T_m$$

Avec C_T est une constante dépend de T.

Par la résolution de l'inégalité Intégrale non linéaire de Voltera, il existe une constante T_* dépendante de T (indépendante de m) telle que

$$S_m(t) \leq C_T \quad \forall m \in \mathbb{N}\, \forall\, t \in [0, T_*] \tag{3.28}$$

Avec C_T est une constante dépendante de T.

En peut prendre $T_m = T_*$ pour tout m.

Deuxiéme estimation

Tout d'abord, nous allons estimer $u''_m(0)$.

Quand $t \longrightarrow 0^+$. Multipliant (3.6) par $C''_{mj}(0)$ et sommant par rapport à j de 1 à m on trouve

$$\|u''_m(0)\|^2 = \langle \Delta u_0, u''_m(0)\rangle + \langle u_1, u''_m(0)\rangle + \left\langle |u_0|^{p-2} u_0, u''_m(0)\right\rangle + \langle f(0), u''_m(0)\rangle \tag{3.29}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\|u''_m(0)\| \leq \|\Delta u_0\| + \|u_1\| + \left\| |u_0|^{p-1} \right\| + \|f(0)\| \text{ pour tout } m.$$

On a $f \in L^1(0, T, L^2)$ et $f' \in L^1(0, T, L^2)$, donc d'après le lemme 1.2 , $f(0) \in L^2(\Omega)$

Alors

$$\|u''_m(0)\| \leq \bar{X}_0 \text{pour tout } m. \tag{3,30}$$

Avec $\bar{X}_0$ est une constante.

C'est à dire $u''_m(0)$ existe et est bien définit. Dérivant $(3, 6)$ en t, et Multipliant par $C''_{mj}(t)$ et sommant par rapport à j de 1 à m, il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2 + \|u''_m(s)\|^2 + \int_{\partial\Omega} \langle h'(x,s), u_m(s)\rangle\, u''_m(s)ds_x \\ &+ \int_{\partial\Omega} \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\, u''_m(s)ds_x = (p-1)\left\langle |u_m(t)|^{p-2} u'_m(t), u''_m(t)\right\rangle + \langle f'(t), u''_m(t)\rangle \end{aligned} \tag{3.31}$$

Par intégration de 0 à t, il résulte

$$\begin{aligned} &\|u''_m(t)\|^2 + \|\nabla u'_m(t)\|^2 + 2\int_0^t \|u''_m(s)\|^2 ds + 2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\right] u''_m(s)ds_x ds \\ &= 2(p-1)\int_0^t \left\langle |u_m|^{p-1} u'_m(s), u''_m(s)\right\rangle ds + 2\int_0^t \langle f'(s), u''_m(s)\rangle\, ds + \|u''_m(0)\|^2 + \|\nabla u'_m(0)\|^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

En intégrant le quatrième terme du membre gauche de l'équation (3.32) on obtient :

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\right] u''_m(s) ds_x ds \\ &= 2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u'_m(s)\rangle\right] u'_m(s) ds_x \Big|_0^t \\ &-2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \left[\langle h''(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h'(x,s), u'_m(s)\rangle\right] u'_m(s) ds_x ds \\ &-2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,s), u'_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u''_m(s)\rangle\right] u'_m(s) ds_x ds \end{aligned} \tag{3.33}$$

En substituant l'équation (3.33) dans (3.32), on obtient

$$\begin{aligned} &\|u''_m(t)\|^2 + \|\nabla u'_m(t)\|^2 + 2\int_0^t \|u''_m(s)\|^2 ds \\ &+2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,t), u_m(t)\rangle + \langle h(x,t), u'_m(t)\rangle\right] u'_m(t) ds_x \\ &-2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,0), u_m(0)\rangle + \langle h(x,0), u'_m(0)\rangle\right] u'_m(0) ds_x \\ &-2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \left[\langle h''(x,s), u_m(s)\rangle + 2\langle h'(x,s), u'_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u''_m(s)\rangle\right] u'_m(s) ds_x ds \\ &= 2(p-1)\int_0^t \left\langle |u_m(s)|^{p-1} u'_m(s), u''_m(s)\right\rangle ds + 2\int_0^t \langle f'(s), u''_m(s)\rangle ds \\ &+ \|u''_m(0)\|^2 + \|\nabla u'_m(0)\|^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

On pose $X_m(t) = \|u''_m(t)\|^2 + \|\nabla u'_m(t)\|^2$ alors l'équation (3.34) devient

$$\begin{aligned} X_m(t) &= X_m(0) - 2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,0), u_m(0)\rangle + \langle h(x,0), u'_m(0)\rangle\right] u'_m(0) ds_x \\ &-2\int_0^t \|u''_m(s)\|^2 ds + 2(p-1)\int_0^t \left\langle |u|^{p-1} u'_m(s), u''_m(s)\right\rangle ds \\ &-2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,t), u_m(t)\rangle + \langle h(x,t), u'_m(t)\rangle\right] u'_m(t) ds_x + 2\int_0^t \langle f'(s), u''_m(s)\rangle ds \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\left[\langle h''(x,s),u_m(s)\rangle+2\langle h'(x,s),u_m'(s)\rangle+\langle h(x,s),u_m''(s)\rangle\right]u_m''(s)ds_xds\\
&\equiv X_m(0)+\sum_{i=0}^{6}J_i
\end{aligned}
$$

En estimant toutes les termes du membre droit de l'équation (3.35) , on obtient

$$
\begin{aligned}
X_m(0)+J_1 &= X_m(0)+2\int_{\partial\Omega}\left[\langle h'(x,0),u_m(0)\rangle+\langle h(x,0),u_m'(0)\rangle\right]u_m'(0)ds_x\\
&=\|u_m''(0)\|^2+\|\nabla u_m'(0)\|^2+2\int_{\partial\Omega}\left[\langle h'(x,0),u_m(0)\rangle+\langle h(x,0),u_m'(0)\rangle\right]u_m'(0)ds_x\\
&\leq \bar{X}_0^2+\|\nabla u_m'(0)\|^2+2\int_{\partial\Omega}\left[\langle h'(x,0),u_m(0)\rangle+\langle h(x,0),u_m'(0)\rangle\right]u_m'(0)ds_x\\
&\equiv \frac{1}{2}X_0
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
J_2 &= -2\int_0^t\|u_m''(s)\|^2ds\\
&\leq 2\int_0^t\|u_m''(s)\|^2+\|\nabla u_m'(s)\|^2ds\\
&=2\int_0^tX_m(s)ds
\end{aligned}
\tag{3,37}
$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité (3.13) avec $\beta=\dfrac{1}{\|f'\|}$ au terme J_3, on obtient :

$$
\begin{aligned}
J_3 &= 2\int_0^t\langle f'(s),u_m''(s)\rangle ds\\
&\leq \int_0^t\|f'(s)\|ds+\int_0^t\|f'(s)\|\|u_m''(s)\|^2ds\\
&\leq C_T+\int_0^t\|f'(s)\|X_m(s)ds
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Pour estimer le terme J_4 on utilise l'inégalité suivante

$$
\begin{aligned}
\left\||u_m|^{p-2}u_m'\right\| &\leq D_p\left[1+\|u_m(s)\|_{H^1}^{\frac{1}{N}}+\|u_m(s)\|_{H^1}^{p-2}\right]\|u_m'(s)\|_{H^1}\\
&\leq D_pC_T\|u_m'(s)\|_{H^1}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
J_4 &= 2(p-1)\int_0^t \left(|u_m|^{p-2} u'_m, u''_m\right) \\
&\leq 2(p-1)\int_0^t \left\||u_m|^{p-2} u'_m(s)\right\| \|u''_m(s)\| \, ds \\
&\leq 2(p-1)D_p C_T \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1} \|u''_m(s)\| \, ds \\
&\leq (p-1)^2 D_p^2 C_T^2 \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 \, ds + \int_0^t \|u''_m(s)\|^2 \, ds \\
&\leq (p-1)^2 D_p^2 C_T^2 \left[\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 \, ds + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|^2 \, ds\right] + \int_0^t \|u''_m(s)\|^2 \, ds \\
&\leq C_T \left(1 + \int_0^t X_m(s) ds\right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et utilisant le lemme 1.10 et l'inégalité (3.13) au terme J_5 on obtient

$$\begin{aligned}
J_5 &= -2\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,t), u_m(t)\rangle + \langle h(x,t), u'_m(t)\rangle\right] u'_m(t) ds_x \\
&\leq 2\gamma_\Omega \left[\|u_m(t)\| \, \|h'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} + \|u'_m(t)\| \, \|h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))}\right] \|u'_m(t)\|_{H^1} \\
&\leq 2C_T \|u'_m(t)\|_{H^1} \leq \frac{1}{\beta} C_T + \beta \|u'_m(t)\|_{H^1}^2 \\
&\leq \frac{1}{\beta} C_T + \beta \left[2\|u_1\|^2 + X_m(t) + 2t\int_0^t X_m(s) ds\right] \\
&\leq \frac{1}{\beta} C_T + \beta X_m(t) + C_T \left(1 + \int_0^t X_m(s) ds\right) \quad \text{pour tout } \beta \in [0,1]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
J_6 &= 2\int_0^t ds \int_{\partial\Omega} \left[\langle h''(x,s), u_m(s)\rangle + \langle h'(x,s), u'_m(s)\rangle + \langle h(x,s), u''_m(s)\rangle\right] u'_m(s) ds_x \\
&\leq 2\gamma_\Omega C_T \int_0^t \|h''\|_{L^2(\partial\Omega\times\Omega)} \|u_m(s)\|_{H^1} ds + 4\gamma_\Omega C_T \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1} ds \\
&+2\gamma_\Omega C_T \int_0^t \|u''_m(s)\| \|u'_m(s)\|_{H^1} ds \\
&\leq \gamma_\Omega^2 C_T^2 \|h''\|_{L^1(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} + \int_0^t \|h''\|_{L^2(\partial\Omega\times\Omega)} \|u_m(s)\|_{H^1}^2 ds + 4\gamma_\Omega^2 C_T^2 T \\
&+ \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds + \gamma_\Omega^2 C_T^2 \int_0^t \|u''_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq C_T + C_T \int_0^t X_m(s) ds + \int_0^t \Phi(s) \|u'_m(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&\leq C_T + C_T \int_0^t X_m(s) ds + \int_0^t \Phi(s) \left[2\|u_1\|^2 + X_m(t) + 2s\int_0^s X_m(\tau)d\tau\right] ds \\
&\leq C_T + C_T \int_0^t X_m(s) ds + \int_0^t \Phi(s) X_m(s) ds
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Avec

$$\Phi(s) = 2 + \|h''\|_{L^2(\partial\Omega\times\Omega)} \qquad \Phi \in L^1(0,T)$$

En remplaçant toutes les termes dans (3.35) et on choisit $\beta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$X_m(t) \leq C_T + \int_0^t \Psi(s) X_m(s) ds \tag{3.43}$$

Avec C_T est une constante dépendante de T.et

$$\Psi(s) = C_T \left[1 + \|f'(s)\| + \|h''(s)\|_{L^2(\partial\Omega\times\Omega)}\right] \quad \Psi \in L^1(0,T)$$

D'après le lemme de Gronwall ; on déduit de (3.43) que

$$X_m(t) \leq C_T \exp\left[\int_0^t \Psi(s) ds\right] \leq C_T \quad \text{pour tout } t \in [0, T_*] \tag{3.44}$$

On en déduit que $T_m = T_*$ pour tout m, lorsque $m \longrightarrow \infty$ de (3.28) et (3.44) on constate que

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure un ensemble borné de } L^\infty(0,T_*,H^1(\Omega)) \\ u'_m \text{ demeure un ensemble borné de } L^\infty(0,T_*,H^1(\Omega)) \\ u''_m \text{ demeure un ensemble borné de } L^\infty(0,T_*,L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{3.45}$$

Etape 3 : passage à la limite

On déduit de (3.45) et le Théorème 1.9 qu'ont peut extraire des sous suites $(u_m), (u'_m)$ et (u''_m) telles que

$$\begin{cases} u_m \longrightarrow u \text{ dans } L^\infty(0,T_*,H^1(\Omega)) \text{ faible*} \\ u'_m \longrightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0,T_*,H^1(\Omega)) \text{ faible*} \\ u''_m \longrightarrow u'' \text{ dans } L^\infty(0,T_*,L^2(\Omega)) \text{ faible*} \end{cases} \tag{3.46}$$

De plus si $B_0 = H^1(\Omega),\ B = B_1 = L^2(\Omega)$ alors par le lemme de compacité 1.7, lemme 1.8 et (3.45) on peut déduire de (3.46) que

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2(Q_{T_*}) \text{ et presque partout dans } Q_{T_*} \\ u'_m &\longrightarrow u' \text{ fortement dans } L^2(Q_{T_*}) \text{ et presque partout dans } Q_{T_*} \\ u''_m &\longrightarrow u'' \text{fortement dans } L^2(Q_{T_*}) \text{ et presque partout dans } Q_{T_*} \end{aligned} \tag{3.47}$$

D'après la continuité de la fonction $t \longrightarrow |t|^{p-2}\, t$ et le lemme 1.9, on a

$$|u_m|^{p-2}\, u_m \longrightarrow |u|^{p-2}\, u \text{ et p.p dans } Q_{T_*} \tag{3.48}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \left\| |u_m|^{p-2}\, u_m \right\|^2_{L^2(Q_{T_*})} &= \int_0^{T_*}\int_\Omega |u_m(x,t)|^{2p-2}\, dxdt \\ &= \int_0^{T_*} \|u_m(t)\|^{2p-2}_{L^{2p-2}}\, dt \\ &\le \int_0^{T_*} \left(C_{2p-2}\, \|u_m(t)\|_{H^1}\right)^{2p-2} dt \\ &\le C^{2p-2}_{2p-2} T_*\, \|u_m\|^{2p-2}_{L^\infty(0,T,H^1)} \le C_T. \end{aligned} \tag{3.49}$$

En utilisant le lemme 1.3 avec (3.48) et (3.47)

$$|u_m|^{p-2}\, u_m \longrightarrow |u|^{p-2}\, u \text{ dans } L^2(Q_{T_*}) \text{ faiblement.} \tag{3.50}$$

Par passage à la limite dans (3.6) et l'utilisation de (3.46), (3.47) et (3.50), alors u vérifiée le problème

$$\begin{aligned} &\langle u''(t), v\rangle + \langle \nabla u(t), \nabla v\rangle + \langle u'(t), v\rangle + \int_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u(t)\rangle\, v(x) ds_x \\ &= \left\langle |u|^{p-2}\, u(t), v\right\rangle + \langle f(t), v\rangle \text{ . pour tout } v \in H^1 \\ &u(0) = u_0 \qquad\qquad\qquad u'(0) = u_1 \end{aligned} \tag{3.51}$$

D'autre part, de (3.46) et (3.51) on a

$$\Delta u = u_{tt} + u_t - |u|^{p-2}\, u - f(x,t) \in L^\infty(0,\ T_*,\ L^2) \tag{3.52}$$

Puisque $u \in L^\infty(0, T_*, H^1(\Omega))$ donc $|u|^{p-2}\, u \in L^\infty(0, T_*; L^2(\Omega))$
Donc on déduit $u \in L^\infty(0, T_*, H^2)$
La preuve de l'existence est complète. ■

Remarque 3.1 (la régularité) *La régularité obtenue en (3.4) donne l'existence d'une solution unique forte du problème (3.1)-(3.3)*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T_*, H^2) \cap C^0(0, T_*, H^1) \cap C^1(0, T_*, L^2) \\ u' \in L^\infty(0, T_*, H^1) \cap C^0(0, T_*, L^2) \\ u \in < L^\infty(0, T_*, L^2) \end{cases}$$

Avec moins de régularité sur les conditions unitiales $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$*, on obtient l'existence d'une solution faible*

$$u \in C([0, T_*]\,, H^1) \cap C^1([0, T_*]\,, L^2)$$

3.3 Unicité de la solution

Montrons que la solution généralisée du problème $(3.1) - (3.3)$ est unique.
Soit u_1, u_2 deux solutions faibles du problème $(3.1) - (3.3)$ tels que

$$u_i \in L^\infty(0, T_*, H^2), \qquad u_i' \in L^\infty(0, T_*, H^1), \qquad u_i'' \in L^\infty(0, T_*, L^2), \quad i = 1, 2. \tag{3.53}$$

Alors $u = u_1 + u_2$ satisfait le problème variationnel

$$\begin{aligned} &\langle u''(t), v\rangle + \langle \nabla u(t), \nabla v\rangle + \langle u'(t), v\rangle + \int_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u(t)\rangle\, v(x) ds_x \\ &= \left\langle |u_1|^{p-2}\, u_1 - |u_2|^{p-2}\, u_2, v\right\rangle \qquad \text{pour tout } v \in H^1. \\ &u(0) = u'(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

prenons $v = u' = u_1' + u_2'$ dans (3.54) et en intégrant par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= -2\int_0^t \langle u'(s), u'(s)\rangle\, ds - 2\int_{\partial\Omega} \langle h(x,t), u(t)\rangle\, u(x,t) ds_x \\ &+2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,s), u(s)\rangle + \langle h(x,s), u'(s)\rangle\right] u(x,s) ds_x \\ &+2\int_0^t \left\langle |u_1|^{p-2}\, u_1 - |u_2|^{p-2}\, u_2, u'(s)\right\rangle ds \\ &= \sum_{j=1}^{4} \sigma_j \end{aligned} \tag{3.55}$$

Où

$$\sigma(t) = \|u'(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \tag{3.56}$$

Par $(3, 56)$ et l'inégalité (3.13) et les inégalités suivantes

$$\|u(t)\|^2 = \left(\int_0^t \|u'(s)\|\, ds\right)^2 \leq t\int_0^t \|u'(s)\|^2\, ds \leq t\int_0^t \sigma(s)ds$$

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 = \|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 \leq \sigma(t) + t\int_0^t \sigma(s)ds$$

$$\int_0^t \|u(t)\|_{H^1}^2\, ds \leq \int_0^t \left[\sigma(s) + s\int_0^s \sigma(\tau)d\tau\right] ds \leq (1+t^2)\int_0^s \sigma(\tau)d\tau$$

On estimons les quatres termes du membre droit de l'équations $(3, 55)$ il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -2\int_0^t \langle u'(s), u'(s)\rangle\, ds \\ &= -2\int_0^t \|u'(s)\|^2\, ds \\ &\leq C_T\int_0^t \sigma(s)ds \end{aligned} \tag{3,57}$$

Et

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= -2\int_{\partial\Omega} \langle h(x,t),u(t)\rangle\, u(x,t)ds_x \\
&\leq 2\gamma_\Omega \|h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \|u(t)\| \, \|u(t)\|_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{\beta}\gamma_\Omega^2 \|h\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \|u(t)\|^2 + \beta \|u(t)\|^2_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{\beta}\gamma_\Omega^2 \|h\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))}\, t\int_0^t \sigma(s)ds + \beta\left[\sigma(t) + t\int_0^t \sigma(s)ds\right] \\
&\leq \beta\sigma(t) + \frac{1}{\beta}C_T\int_0^t \sigma(s)ds
\end{aligned} \tag{3,58}$$

$$\sigma_3 = 2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \left[\langle h'(x,s),u(s)\rangle + \langle h(x,s),u'(s)\rangle\right] u(x,s)ds_x \tag{3,59}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\gamma_\Omega \|h'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \int_0^t \|u(s)\|^2_{H^1} ds \\
&\quad +2\gamma_\Omega \|h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial\Omega\times\Omega))} \int_0^t \|u'(s)\|^2 \|u(s)\|_{H^1} ds
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_T\int_0^t \|u(s)\|^2_{H^1} ds + C_T\int_0^t \|u'(s)\|^2 ds \\
&\leq C_T\int_0^t \sigma(s)ds
\end{aligned}$$

Par application du lemme (1.6) on a

$$\begin{aligned}
&\left\| |u_1|^{p-2} u_1 - |u_1|^{p-2} u_1 \right\| \\
&\leq D_p\left[1 + (\|u_1\|_{H^1} + \|u_2\|_{H^1})^{\frac{1}{N}} + (\|u_1\|_{H^1} + \|u_2\|_{H^1})^{p-2}\right] \|u(s)\|_{H^1} \\
&\leq D_p\left[1 + M_1^{\frac{1}{n}} + M_1^{p-2}\right] \|u(s)\|_{H^1} \leq C_T \|u(s)\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Où

$$M_1 = \|u_1\|_{L^\infty(0,T_*,H^1)} + \|u_2\|_{L^\infty(0,T_*,H^1)}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= 2\int_0^t \left\langle |u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2, u'(s) \right\rangle ds \\
&\leq 2C_T \int_0^t \|u(s)\|_{H^1} \|u'(s)\| \, ds \\
&\leq C_T \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 \, ds + C_T \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \\
&\leq C_T \int_0^t \sigma(s) ds
\end{aligned} \tag{3.60}$$

En substituant $(3.57) - (3.60)$ dans (3.55) et en choisit $\beta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\sigma(t) \leq C_T \int_0^t \sigma(s) ds \tag{3.61}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, il résulte de (3.61) que $\sigma \equiv 0$, (i.e) $u_1 = u_2$.
La preuve de l'unicité est complète .

Conclusion

Le but de notre travail a été l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de deux problèmes d'équations hyperboliques aux limites avec Conditions intégrales. Le premier est linéaire et le deuxième est non linéaire. La méthode utilisée pour le traitement de ces problèmes est la méthode de Faedo-Galarkin qui est considérée comme une méthode efficace pour l'étude de l'existence de la solution.

Bibliographie

[1] S. A. Beilin, On a Mixed nonlocal problem for a wave equation, Electron. J. Differential Equations 103, (2006), 1-10.

[2] Y. Boukhatem, Benyattou Benabderrahmane, Faedo Galarkin's method for a non-linear boundary value problem, (2009).

[3] N. Boumaza Thèse de Doctorat, Problème aux limites avec condiions non-locales, université Badji Mokhtar Annaba, 2012.

[4] A. Bouziani, solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équation hyperbolique, Bulletin de la classe des sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 8, 53-70 (1997).

[5] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Dunod, Paris, 1999.

[6] J. Dabas, D. Bahuguna, An integro-diferential equation with an integral boundary condition, Mathematical and Computer Modelling 50 (2009), 123-131.

[7] R. Dautray, "Analyse mathématique et calcule numérique", Vol 8, 1985.

[8] A.A. Dezin, Théorème d'existence et d'unicité da la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels, Uspekh.Math. Naouk. 14. N°3. (37). 22-73. (1959)

[9] A.Guezane-Lakoud, N. Boumaza, Galerkin method applied for a non local problem, J. Appl. Math. stat, 19, (2010), 72-89.

[10] H. Hadda, Thése de magister, Quelques problèmes aux-limites gouvernés par l'opérateur perturbé des ondes et de la diffusion, Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur, université de Kasdi Merbah. ouargla, (2006).

[11] Lions, JL : Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod/Gauthier-Villars, Paris (1969).

[12] Lions-Magenes, Problèmes aux limites non homogène et applications, volume 1. Dunod paris, 1968.

[13] S. Mesloub, F. Mesloub, On the higher dimension Boussinesq equation with a nan classical condition, Mathematical Methode in the Applied Sciences, Volume 34, Issue 5, pages 578-586, 30 March 2011.

[14] Olivier Isely, Espace de Sobolev et problèmes variationnels, (été 2005), p 9-18.

[15] L.T.Phuong Ngoc. Existence and exponential Decay for a nonlinear wave equation with non-local boundary conditions.Vol 12. Number 5. September 2013.

[16] L.T.Phuong Ngoc, Nguyen Anh Triet and Nguyen Thanh Long, existence and exponential decay estimates for an N-dimensional nonlinear wave equation with a nonlocal boundary condition, boundary value problems, (2016).

[17] L.S. Pulkina, A non-local problem with integral conditions for an hyperbolic equation,Differ. Uravn, (2004), Vol 40, N 7, 887-892.

[18] L.S.Pulkina : A non local problem with an integral condition of the first kind for a multidimensional hyperbolic equation. Ross. Akad. Nauk 416 (5), 597-599 (2007).

[19] L. Schwartz, "Topologie générale et analyse fonctionnelle", édition Herman, 1980, 436p.

[20] Songmu.Zheng ,Nonlinear evolution equations.Chapman & Hall/CRC, 2004, 304p.