République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi -Tébessa-
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département des mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques appliquées

Thème :

Spectre d'un opérateur

Présenté par :
MAIFI Khedidja _SELLAT Ouafa

Devant le jury :

Hacene MECHERI	M.C.B	Université de TEBESSA	Encadreur
Elhadj ZERAOULIA	Prof	Université de TEBESSA	Président
Sounia ZEDIRI	M.A.A	Université de TEBESSA	Examinateur

Date de soutenance : **29/05/2016**

Note :………… Mention :....................

الملخص:

الهدف من هذا البحث هو تقديم اهم النظريات الطيفية للمؤثرات المحدودة وخصائصها في فضاء بناخ وفضاء هيلبرت وكذلك دراسة طيف مؤثر المشتقة والمشتقة المعممة ثم طيف المؤثر P-symétrique وخصائصه.

الكلمات المفتاحية:

مؤثر، طيف، قيمة ذاتية مؤثر المشتقة، مؤثر المشتقة المعممة، المؤثر-D symétrique , المؤثر P-symétrique .

Abstract :

The objective of his work is to get hold of the importance theory of the spectrum bounded operators in Banach space and Hilbert space, and we study the spectrum of derivations and generalized derivations and spectrum of P-symmetric operator.

Key words: operator, spectrum, value proper, derivations operator, generalized derivations operator, D-symmetric operator and P-symmetric operator.

Résumé :

L'objectif de ce travail de recherche est de mettre la main sur les théories les plus importants concernant le spectre des opérateurs bornés et ses propriétés dans l'espace de Banach et de Hilbert. Ainsi nous présentons le spectre de l'opérateur de dérivation et dérivation généralisée puis le spectre de l'opérateur P-symétrique et leur propriété.

Les mots clés : Opérateur, Spectre, Valeur propre, Dérivation, Dérivation généralisée, Opérateur D-symétrique, Opérateur P-symétrique.

Remerciement

Nos remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces longues années.

Notre gratitude au **Dr. MECHERI Hacene**, en tant Encadreur de mémoire, pour sa générosité, son enthousiasme, son partage de connaissance, et de la grande patience qu'il a su faire preuve malgré ses charges académique et professionnelle.

Nous remercions chaleureusement Dr. ZERAOULIA Elhadj et Dr. ZEDIRI Sounia pour l'honneur qu'ils nous ont fait en présidant notre jury.

Table des matières

Introduction

Le concept du spectre a été défini par **David Hilbert** qui basé sur le travail de **Wilhelm Wirtinger** sur l'équation différentielle de **Hillén** 1897, en 1990, **Diederich Hinrichsen** et **Tony Pritchard** apportent la notion de lot de valeurs spectrales (spectral value set). Ils étudiaient à l'origine cette notion dans le cadre du contrôle des théories.

La théorie spectrale a des applications importantes en physique mathématique (en particulier en mécanique quantique), la résolution d'équations différentielles, où d'équations aux dérivées partielles, en géométrie différentielle et complexe, théorie de représentations de groupes et analyse harmonique et en théorie des algèbres d'opérateurs.

Ce travail de recherche comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous passons en revue les différentes principaux définitions et propriétés concernant les espaces fonctionnelles et les opérateurs linéaires bornés, nous avons utilisés fréquemment dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous avons généralisé la notion de valeur propre en dimension infinie et on étudie ces propriétés dans le cadre des espaces de Banach et Hilbert, dans le même cadre on a parlé avec précision sur le spectre des opérateurs adjoints, le spectre des opérateurs auto-adjoints, le spectre des opérateurs compact, puis le spectre des opérateurs auto-adjoint compact et on finira par décomposition en spectre ponctuel, résiduel et continu.

Le chapitre trois donne un pref panorama des théories fondamentales des opérateurs D-symétrique et P-symétrique ont été étudié par **J. H. Anderson**, **J.W. Bunce**, **J.A.Deddens** et **J. P. Williams**, **Said. Bouali** et **J.Charles** [15] et **J.G. Stampfli**, puis on présente le spectre d'opérateur de dérivation généralisé présenté par **Salah Mecheri** [16] et le spectre d'opérateur P-symétrique par **Said. Bouali** et **J.Charles** [15].

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories de quelque espace fonctionnelle et les propriétés fondamentales des opérateurs linéaires bornés.

1.1 Les espaces fonctionnelles

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), l'application $p : E \to \mathbb{R}^+$ est appelée semi-norme si elle satisfait les proprietées suivantes :*

i) $\forall x, y \in E$, $p(x+y) = p(x) + p(y)$ (inégalité triangulaire).

ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \Bbbk$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (homogénéité).

Remarque 1.1 *ii) implique si $x = 0$ alors $p(x) = 0$, la réciproque n'est pas vrais en général.*

Définition 1.2 *Une semi-norme p est une norme si $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel et p est une norme sur E, le couple (E, p), est appelée espace **normé**, on note généralement p par $\|.\|$ ou $\|.\|_E$.*

Définition 1.4 *On dit que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une **distance** si elle vèrifiée les propriétées suivantes :*

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in E$.

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall x, y, z \in E$.

Définition 1.5 *Soit E un espace vectoriel et d est une distance sur E, le couple (E, d) est appelé un espace **métrique**.*

Définition 1.6 *On dit que E est un espace métrique **complet** si tout suite de Couchy convergente.*

Définition 1.7

i) Une partie U de E est un ouvert de E si pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.

ii) Une partie F de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire F^c dans E est ouvert.

Théorème 1.1 ***(Baire)***

Soit (E, d) un espace métrique complet, alors l'intersection de toutes familles dénombrable de sous ensemble ouverts dense dans E est dense dans E.

Corollaire 1.1 *Soit (E, d) un espace métrique complet, alors :*

i) Tout fermé de E est un espace de Baire.

ii) Tout ouvert de E est un espace de Baire.

Définition 1.8 *On appelle espace de **Banach** tout espace normé complet pour la norme associée à la distance.*

Définition 1.9 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un **produit scalaire** sur $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle ., . \rangle$, possédant les propriétées suivantes :*

i) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

iv) $\langle x, x \rangle = 0$ *implique* $x = 0$.

Définition 1.10 *Un espace vectoriel E muni du produit scalaire s'appelle un* ***espace préhilbertien.***

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'un produit scalaire, tel que $\forall x \in E, \|x\| = |\langle x, x\rangle|^{\frac{1}{2}}$, alors :*

i) $\|.\|$ *définit une norme sur E.*

ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2, \forall x, y \in E$.

iii) ***(Cauchy-Schwartz)***

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \forall x, y \in E$.

iv) ***(Identité du parallélogramme)***

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2, \forall x, y \in E$.

Définition 1.11 *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace vectoriel muni du produit scalaire et qui est complet pour la norme associé a ce produit scalaire.*

1.2 Les opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Les opérateurs linéaires

Définition 1.12 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur T définit sur E dans F est dite linéaire, s'il vèrifié les conditions suivantes :*

condition additive

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$, *on a :* $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$.

condition homogéne

$\forall \varphi \in E, \lambda \in \Bbbk = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *on a :* $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$.

1.2.2 Les opérateurs linéaires continus

Définition 1.13 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire T définit sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite* ***continu*** *au point x_0 de G, si on a la propriétée suivante :*

pour tout suite x_n de G converge vers x_0, la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$.

Remarque 1.2 *L'opérteur linéaire T est dit continu sur G s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.*

1.2.3 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.14 *Un opérateur linéaire T définit sur E dans F est dite **borné** s'il existe une constante strictement positive C, telle que*

$$\|T(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E \qquad ,\forall x \in E. \tag{1.1}$$

Notation 1.1 *On note l'espace des opérateurs linéaires bornés par $\mathcal{L}(E, F)$.*

Proposition 1.2 *La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.1) est appellé norme de T, notée*

$$\|T\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \|T(x)\|_F\,. \tag{1.2}$$

Proposition 1.3 *Toute norme définit dans (1.2) sur la boule unité est toujour finie pour tout opérateur linéaire continu.*

Théorème 1.2 *Soit E un espace de dimension fini, alors tout opérateur linéaire T est dit continu, si et seulement s'il est borné.*

Théorème 1.3 ***(Banach Steinhaus)***

Soit E un espace de Banach, F un espace normé et $(T_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathcal{L}(E,F)$, ($I$ non nécessairement denombrable). On suppose

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha(x)\| < \infty, \qquad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha\| < \infty.$$

C'est à dire : $\exists C > 0$ tel que

$$\|T_\alpha(x)\| \leq C\,\|x\|\,, \qquad \forall x \in E.$$

1.3 Les opérateurs inversibles

Pour un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit son image par l'ensemble

$$\mathrm{Im}(T) = \{y \in F : \exists x \in E, y = Tx\}$$

et son noyau par l'ensemble

$$\ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$$

On dit que T est **injectif** si $\ker(T) = \{0\}$ et qu'il est **surjectif** si $\mathrm{Im}(T) = F$.

L'opérateur T est **bijectif** s'il est à la fois injectif et surjectif.

Définition 1.15 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, s'il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $ST = TS = I$, alors on dit que T est* ***inversible*** *et S son inverse.*

Notation 1.2 *On désigne par $I(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et continue inversibles de E dans F.*

Corollaire 1.2 ***(Isomorphisme de Banach)***

Soient E et F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijectif, alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$.

Lemme 1.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\| < 1$, alors $(I-T) \in I(E)$ et on a*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n.$$

De plus $I(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, et l'application $J : I(E) \to \mathcal{L}(E)$ telle que $J(T) = T^{-1}$ est continue.

Preuve *Comme $\|T\| < 1$, la série $\sum_n T^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(E)$ qui est un espace de Banach donc elle converge dans $\mathcal{L}(E)$. De plus, on vérifie facilement que*

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} T^n\right)(I-T) = I - T^{N+1},$$

et comme

$$\left\|T^{N+1}\right\| \leq \|T\|^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on en déduit que

$$(I-T)\left(\sum_{n\geq 0} T^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} T^n\right)(I-T) = I,$$

d'où la résultat.

Montrons que $I(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$

Soit $T_0 \in I(E)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ on a

$$T = T_0 + T - T_0 = T_0\left(I - \left(I - T_0^{-1}T\right)\right).$$

De plus

$$\left\|I - T_0^{-1}T\right\| \leq \left\|T_0^{-1}(T_0 - T)\right\| \leq \left\|T_0^{-1}\right\| \|T_0 - T\|$$

Alors si $\|T_0 - T\| < \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}$, on obtient $\left\|I - T_0^{-1}T\right\| < 1$ et donc $I - \left(I - T_0^{-1}T\right)$ est inversible. Par suite T est inversible. Finalement on obtient $B(T_0, \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1}) \subset I(E)$ donc $I(E)$ est ouverte de $\mathcal{L}(E)$.

De plus si $T \in B(T_0, \left\|T_0^{-1}\right\|^{-1})$ son inverse est donné par

$$T^{-1} = \left(\sum_{n\geq 0}\left(I - T_0^{-1}T\right)^n\right)T_0^{-1} = \sum_{n\geq 0}\left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|T^{-1} - T_0^{-1}\right\| &= \left\|\sum_{n\geq 0}\left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1} - T_0^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n\geq 1}\left(I - T_0^{-1}T\right)^n T_0^{-1}\right\| \\
&\leq \sum_{N\geq 1}\left\|\left(I - T_0^{-1}T\right)^n\right\| \left\|T_0^{-1}\right\| \\
&= \frac{\left\|I - T_0^{-1}T\right\|}{1 - \left\|I - T_0^{-1}T\right\|}\left\|T_0^{-1}\right\| \\
&= \left\|T_0^{-1}\right\|^2 \frac{\|T - T_0\|}{1 - \left\|I - T_0^{-1}T\right\|},
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 *lorsque* T *tend vers* T_0. *Ce qui montre la continuité de l'application* $T \to T^{-1}$ *sur* $I(E)$. ■

Corollaire 1.3 *Soient* $(F, \|.\|_F)$ *un espace vectoriel normé sur un corps* $\Bbbk$ *et* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *bijectif, alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

i) $T^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$.

ii) Il existe $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *on a* $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$.

iii) $(F, \|.\|_F)$ *est un espace de Banach sur* $\Bbbk$.

Corollaire 1.4 *Soient* $(F, \|.\|_F)$ *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E,F)$, *alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *on a* $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E$.

ii) T *est injectif et* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé dans* F.

1.4 Les formes sesquilinéaire

Définition 1.16 *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$, *l'application* B *de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{C}$ *est une forme* ***sesquilinéaire*** *si :*

i) Pour tout $x \in H$, *l'application* $x \to B(x,y)$*(de* H *dans* $\mathbb{C}$*) est linéaire.*

ii) Pour tout $y \in H$, *l'application* $y \longrightarrow B(x,y)$*(de* H *dans* $\mathbb{C}$*) est anti-linéaire.*

$$\begin{aligned} (i.e)\ \forall x,y,z \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad & B(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} B(x,y) + B(x,z) \\ \text{et} \quad & B(x + \lambda y, z) = B(x,z) + \lambda B(y,z) \end{aligned}$$

Définition 1.17 *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$, *l'application* B *de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{C}$ *est une forme* ***hermitienne*** *si*

$$B(x,y) = \overline{B(y,x)}, \qquad \forall (x,y) \in H \times H.$$

Remarque 1.3 *[Si* B *est hermitienne]* $\Longrightarrow \left[B(x,x) \text{ est réel puisque } B(x,x) = \overline{B(x,x)} \right]$.

Le plus souvent un produit scalaire est noté au lieu de B.

Définition 1.18 *Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ et B une forme sesquilinéaire sur E, alors :*

$i)$ B est dite ***positive*** *si, pour tout $x \in E$, $B(x,x) \geq 0$.*

$ii)$ B est dite ***définie positive*** *si, pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, $B(x,x) > 0$.*

Proposition 1.4 *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ et B une forme sesquilinéaire sur E, alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

$i)$ B est continue.

$ii)$ B est continue en $(0,0)$.

$iii)$ Il existe $k \geq 0$ telle que $\forall x, y \in X \quad |B(x,y)| \leq k||x||||y||$.

Notation 1.3 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, on note $S_2(E)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ des formes sesquilinéaires continues sur E.*

Définition 1.19 *Soit $B \in S_2(E)$, on pose*

$$||B|| = \sup_{\forall x, y \in E} \{|B(x,y)|, ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\},$$

ce qui définit une norme sur $S_2(E)$. En particulier :

$$\forall x, y \in E \qquad |B(x,y)| \leq ||B||||x||||y||.$$

Proposition 1.5 *Soit $T \in \mathcal{L}(H), B_T \in S_2(H)$ l'application définie par :*

$$\forall x, y \in H, \quad B_T(x,y) = \langle Tx, y \rangle \tag{1.3}$$

Alors, l'application

$$\Phi : \mathcal{L}(H) \longrightarrow S_2(H)$$
$$T \mapsto B_T$$

est un isomorphisme isométrique, $(i.e)$ une application linéaire bijective telle que pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, $||\Phi(T)|| = ||T||$.

Définition 1.20 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est positif (resp défini positif) si l'application B_T définie par (1.3) est une forme sesquilinéaire positive (resp. définie positive).*

1.5 Les opérateurs adjoints

Définition 1.21 *Soient E et F deux espaces de Banach, E^* et F^* leurs dual respectivement et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'**adjoint** de T est $T^{'}$ de F^* dans E^{*} vérifiente :*

i) $T^{'}$ *est continu,* *ii)* $\left\|T^{'}\right\| \leq \|T\|$.

Proposition 1.6 *Soient E et F deux espaces de Banach, E^* et F^* les espaces duales alors l'application*

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$$
$$T \mapsto T^{'}$$

est une isométrie.

Soit H un espace de Hilbert, C une isométrie unitaire de H dans H (donné par le lemme de **Reiz**[13]) définit par : $x \mapsto \langle ., x\rangle$. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ on définit l'adjoint hilbertien T^* de T par la formule $T^* = C^{-1}T^{'}C$.

Définition 1.22 *Soient H un espace de Hilbert complexe, $T \in \mathcal{L}(H)$ et T^* l'adjoint de T définit par :*

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Proposition 1.7 *L'application qui transforme T a T^* est une isométrie bijictive anti-linéaire de $\mathcal{L}(H)$ dans lui-même. Elle vérifie de plus les propriétés suivantes :*

i) $(TS)^* = S^*T^*$. *iii)* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

ii) $(T^*)^* = T$. *iv)* $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

Proposition 1.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, T^* son adjoint, alors :*

i) $\ker(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}$.

ii) $\overline{\mathrm{Im}(T)} = (\ker(T^*))^{\perp}$.

Preuve *i)* On a

$\ker(T) = \{x \in H, Tx = 0\}$

$= \{x \in H, \forall y \in H, \langle Tx, y\rangle = 0\}$

$= \{x \in H, \forall y \in H, \langle x, T^*y\rangle = 0\}$

$= (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}$.

ii) D'aprés *i)* on a $(\ker(T^*))^{\perp} = (\mathrm{Im}(T)^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T)}$. ■

1.6 Les opérateurs coercifs

Définition 1.23 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est* ***coercif*** *s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in H \qquad |\langle Tx, x\rangle| \geq C||x||^2.$$

De même, si $B \in S_2(H)$ est dite coercive (ou elliptique) s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in H \qquad |B(x, x)| \geq C||x||^2.$$

Remarque 1.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors, d'après la proposition* (1.6) *il est clair que l'application $B_T \in S_2(H)$ définie par* (1.3) *est coercive si et seulement si $T \in \mathcal{L}(H)$ est coercif.*

Proposition 1.9 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est coercif, alors T est inversible dans $\mathcal{L}(H)$.*

Preuve D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\forall x \in H, \qquad ||Tx||||x|| \geq |\langle Tx, x\rangle| \geq C||x||^2,$$

d'où

$$\forall x \in H, \qquad ||Tx|| \geq C||x||.$$

D'après le Corollaire (1.4), il suffit de vérifier que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = H$. Or, pour tout $x \in H$, on a

$$|\langle T^* x, x\rangle| = |\langle x, Tx\rangle| \geq C||x||^2.$$

Donc T^* est aussi coercif, ce qui entraîne l'injectivité de T^*. Alors, d'après la Proposition (1.8), on obtient

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = (\ker(T^*))^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H,$$

ce qui donne le résultat. ■

1.7 Les opérateurs auto-adjoints

Définition 1.24 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est **auto-adjoint** si et seulement si $T = T^*$.*

Remarque 1.5 *T est auto-adjoint si et seulement si* :

$$\forall x, y \in H, \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Notation 1.4 *Notons par $A(H)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert H.*

Proposition 1.10 *Si T est auto-adjoint, alors*

$$\|T\| = \sup\left\{|\langle Th, h\rangle|, \|h\| = 1\right\}.$$

1.8 Les opérateurs linéaires compacts

Définition 1.25 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si et seulement si, de toute suite bornée (x_n) de E, on peut extraite une sous suite (x_{n_k}) telle que la suite (Tx_{n_k}) soit convergente.*

Proposition 1.11 *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$, si S ou T est compact alors ST est compact.*

Théorème 1.4 *Soit $T \in K(E)$, alors, $T - I$ est injectif si et seulement si $T - I$ est inversible.*

Définition 1.26 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est un opérateur de **rang finie** si $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie.*

Proposition 1.12 *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Théorème 1.5 ***(Schauder)***

Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, où F est complet, l'opérateur T est compact si et seulement si son adjoint T^* est compact.

Chapitre 2

Spectre des opérateurs

Nous introduisons les théories spectrales des opérateurs bornés et on généralise la notion de valeur propre en dimension infinie et on étudie ces propriétés dans le cadre des espaces de Banach et Hilbert.

Définition 2.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in \mathcal{L}(H)$.*

**L'ensemble :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$$

*est appelé le **spectre** de T.*

*Un élément de $\sigma(T)$ est appelé **valeur spectrale** de T.*

**L'ensemble*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ est inversible}\}$$

*est appelé **résolvante** de T.*

*Un élément de $\rho(T)$ est appelé **valeur résolvante** de T.*

Si $\lambda \in \rho(T)$, on définit **la résolvante $R_\lambda(T)$ de T au point λ par*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Remarque 2.1 $\sigma(T) = (\rho(T))^c$.

Théorème 2.1 *Le spectre de tout opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est une partie compact de $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Théorème 2.2 ***(Stone)*** *Si l'espace E est complexe, alors le spectre de T n'est jamais vide.*

Exemple 2.1 *Soit $I =]0,1[$, $X = L^2(I)$ et T l'opérateur de dérivation au sens des distributions :*

$$Tu = \frac{du}{dt},$$

de domaine

$$D(T) = \left\{ u \in L^2(I), \frac{du}{dt} \in L^2(I), u(0) = 0 \right\}.$$

Pour $f \in L^2(I)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on remarque que l'équation

$$\frac{du}{dt} - \lambda u = f$$

admet une solution unique de la forme

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds$$

dans l'espace $D(T)$. Donc $\rho(T) = \mathbb{C}$ et $\sigma(T) = \phi$.

Lemme 2.1 ***(Identité de la résolvante)*** *: Soit $\lambda, \lambda_0 \in \rho(T)$, alors*

$$R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T) = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T).$$

Preuve En utilisant le fait que $(T - \lambda I)$ et $(T - \lambda_0 I)$ commutent, on a

$$\begin{aligned} (R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T))(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) &= R_\lambda(T)(T - \lambda I)(T - \lambda_0 I) - R_{\lambda_0}(T)(T - \lambda_0 I)(T - \lambda I) \\ &= (T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I) \\ &= (\lambda - \lambda_0) I \end{aligned}$$

En composant a droite par $R_\lambda(T) R_{\lambda_0}(T)$, on obtient le résultat. ■

Définition 2.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$, On appelle* ***spectre ponctuel*** *de T, l'ensemble des valeurs propres de T définit par*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{k} : T - \lambda I \text{ n'est pas injectif } \}.$$

Remarque 2.2 *On a toujours $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.*

Proposition 2.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, alors :*

i) Si $|\lambda| > ||T||$ alors $\lambda \in \rho(T)$. En particulier, on a $\sigma(T) \subset \overline{D(0, ||T||)}$.

ii) $\rho(T)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{k}$.

iii) $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{k}$.

iv) $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma(T)$.

Preuve *i)* Si $|\lambda| > ||T||$ alors $\lambda \neq 0$ et $||\lambda^{-1}T|| < 1$ donc, d'après le lemme (1.2), $I - \lambda^{-1}T$ est inversible, i.e. $\lambda \in \rho(T)$.

ii) D'après le *i)* $\rho(T)$ est non vide. Soit l'application définie de $\mathbb{k}$ dans $\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{k}, \quad \varphi(\lambda) = \lambda I - T.$$

Alors $\rho(T) = \varphi^{-1}I(E)$. De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$, on a

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)\, I\| \leq |\lambda - \mu|\,,$$

donc φ est continue. Or d'aprés le lemme (1.2) $I(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Ainsi $\varphi^{-1}I(E)$ est un ouvert de $\mathbb{k}$.

iii) D'aprés le *ii)* $\sigma(T) = \mathbb{k} \backslash \rho(T)$ est fermé, or il est borné d'aprés le *i)* donc compact.

iv) D'aprés la remarque (2.2) $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. De plus $\sigma(T)$ est fermé donc $\overline{\sigma_p(T)} \subset \sigma(T)$. ■

2.1 Rayon spectral

Définition 2.3 *Le* ***rayon spectral*** *de T noté $r(T)$ et définit par*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Exemple 2.2 *Lorsque $E = C([0,1])$ et $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, on a $\sigma(T) = \{0\}$ et donc $r(T) = 0$.*

Remarque 2.3 *Si $\sigma(T) = \emptyset$ alors $r(T) = 0$.*

Théorème 2.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, alors :*

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et est égale à $r(T)$.

ii) Si $E = H$ est un espace de Hilbert complexe et si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = ||T||$.

Proposition 2.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe, le rayon spectrale de tout élément normal de $\mathcal{L}(H)$ est égale à sa norme.*

Preuve Soit d'abord T un élément auto-adjoint, on a $\|T^2\| = \|TT\| = \|T\|^2$ (proposition 1.7) ; on en déduit par récurrence que $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ pour tout $n \geq 0$, donc $r(T) = \|T\|$. Soit maintenant S un élément normal de $\mathcal{L}(H)$, par récurrence sur n, on a $(S^*S)^n = (S^*)^n S^n$ donc $\|(S^*S)^n\| = \|S^n\|^2$ et $r(S^*S) = r(S)^2$. Or $T = S^*S$ est auto-adjoint, donc $r(T)^2 = r(S^*S) = \|S\|^2$. ■

2.2 Spectre des opérateurs adjoints

2.2.1 Spectre des opérateurs adjoints dans un espace de Banach

Théorème 2.4 ***(Théorème de Phillips)***

Soit E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ et $T^{'} \in \mathcal{L}(E^{*})$ l'adjoint de T, alors

i) $\sigma(T) = \sigma(T^{'})$.

ii) $\forall \lambda \in \rho(T), R_\lambda(T^{'}) = R_\lambda(T)^{'}$.

Proposition 2.3 *Soit E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

i) Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $\mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I)$ n'est pas dense dans E^*.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans E, alors $\lambda \in \sigma_p(T^{'})$.

iii) Si E est réflexif, i.e. si $(E^{^*})^* = E$, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I)$ n'est pas dense dans $E^{^*}$.

Lemme 2.2 *Soit E un espace vectoriel complexe normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel complexe. Alors $\overline{F} \neq E$ si et seulement si il existe une forme linéaire $\Phi \in E^{^*}$ non nulle telle que $F \subset \ker \Phi$.*

Preuve de la proposition (2.3)

i) Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $\exists x_0 \in E$ non nul tel que $(T - \lambda I)(x_0) = 0$. Cela entraîne en particulier que :

$$\forall \alpha \in E^{^*}, [(T^{'} - \lambda I)(\alpha)](x_0) = \alpha((T - \lambda I)(x_0)) = \alpha(0) = 0,$$

i.e.

$$(T^{'} - \lambda I)(\alpha) \in \{x_0\}^{\perp} = \{\beta \in E^*, \quad \beta(x_0) = 0\}.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I) \subset \{x_0\}^{\perp}$. Cela implique bien évidemment que $\mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I)$ ne peut pas être dense dans $E^{^*}$, puisque$\{x_0\}^{\perp}$ est fermé et est différent de $E^{^*}$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans E. D'après le lemme (2.2), il existe $\alpha \in E^{^*}$ non nulle telle que $\mathrm{Im}(T - \lambda I) \subset \ker \alpha$. Donc

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \alpha[(T - \lambda I)(x)] = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E, [(T^{'} - \lambda I)(\alpha)](x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (T^{'} - \lambda I)(\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \in Ker(T^{'} - \lambda I). \end{aligned}$$

Donc $\lambda \in \sigma_p(T^{'})$.

iii) On a « $\lambda \in \sigma_p(T)$ implique $\mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I)$ n'est pas dense dans $E^{^*}$ » a été montré au *i)*, la réciproque s'obtient en appliquant le *ii)* à $T^{'}$ et en utilisant le fait que $T^{''} = T$. ■

2.2.2 Spectre des opérateurs adjoints dans un espace de Hilbert

Définition 2.4 *Une* ***involution*** *sur une algèbre U est une application $\varphi : U \to U$ telle que :*

i) $\varphi^2 = Id_U$.

ii) $\varphi(\lambda T) = \overline{\lambda}\varphi(T)$.

iii) $\varphi(TS) = \varphi(S)\varphi(T)$.

Définition 2.5 *Une algèbre de Banach U munie d'une involution $T \to T^*$ vérifiant*

$$\forall T \in U \qquad \|TT^*\| = \|T\|^2$$

*est appelée une C^***-algèbre.***

*$\mathcal{L}(H)$ munie de l'opération "adjoint" est une C^***-algèbre.***

Cet résultat est une conséquence du théorème (2.4), dans le cas particulier où $E = H$ (H est un espace de Hilbert complexe)

Proposition 2.4 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in \mathcal{L}(H)$ et $T^* \in \mathcal{L}(H')$ l'adjoint hilbertien de T. Alors*

i)$\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \left\{\overline{\lambda}\,|\lambda \in \sigma(T)\right\}$.

ii)$\forall \lambda \in \rho(T), R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

Preuve Si T est inversible, alors d'aprés la proposition (1.8) on a

$$\begin{cases} (T^{-1})^*T^* = (T(T^{-1}))^* = I^* = I \\ T^*(T^{-1})^* = ((T^{-1})T)^* = I^* = I \end{cases}$$

ce qui signifie que T^* est aussi inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Comme $T \mapsto T^*$ est une involution, la réciproque est immédiate, autrement dit : T est inversible si est seulement si T^* est inversible.

Donc $\forall \lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow (\lambda I - T)$ est inversible $\Leftrightarrow (\overline{\lambda} I - T^*)$ est inversible $\Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$

Et alors

$$((\lambda I - T)^{-1})^* = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1}.$$

■

2.3 Spectre des opérateurs auto-adjoint dans un espace de Hilbert

Théorème 2.5 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, on suppose $H \neq \{0\}$ avec*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \qquad et \qquad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Alors

i) $m, M \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$.

ii) $m, M \in \sigma(T)$.

iii) $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Corollaire 2.1

i) Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

ii) Un opérateur auto-adjoint T sur H est positif si et seulement si son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$.

Preuve du théorème (2.5) :

i) Soit $x \in H$ tel que $||x|| = 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|.$$

Or, T étant auto-adjoint, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ et donc

$$\langle Tx, x\rangle \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}.$$

On en déduit $m, M \in [-\|T\|, \|T\|] \subset \mathbb{R}$.

ii) On pose $S = T - mI$ et on note, pour touts $x, y \in H$, $B_S(x, y) = \langle Sx, y\rangle$. Alors $B_S \in S_2$.

De plus, m étant réel, on obtient pour tous $x, y \in H$

$$\begin{aligned} B_S(x,y) &= \langle Tx - mx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle mx, y\rangle \\ &= \langle x, Ty\rangle - \langle x, my\rangle = \langle x, Sy\rangle \\ &= \overline{B_S(y,x)} \end{aligned}$$

Donc B_S est hermitienne. Enfin, par définition de m, pour tout $x \in H\backslash\{0\}$, on a

$$m \leq \langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|}\rangle$$

d'où $m||x||^2 \leq \langle Tx, x\rangle$. Ainsi, on obtient

$$B_S(x,x) = \langle Tx - mx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - m||x||^2 \geq 0,$$

et donc B_S est une forme sesquilinéaire, hermitienne et positive sur H. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour touts $x, y \in H$, on a

$$|B_S(x,y)|^2 \leq B_S(x,x)B_S(y,y),$$

soit encore

$$|\langle Sx, y\rangle|^2 \leq \langle Sx, x\rangle\langle Sy, y\rangle. \tag{2.1}$$

D'une part, par définition de m, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de H avec $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\langle T(x_n), x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m,$$

autrement dit

$$\langle S(x_n), x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.2}$$

D'autre part, en appliquant (2.1) avec $x = x_n$ et $y = Sx_n$, où $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$|\langle S(x_n), S(x_n)\rangle|^2 \leq \langle S(x_n), x_n\rangle\langle S(S(x_n)), S(x_n)\rangle.$$

On en déduit

$$\|S(x_n)\|^4 \leq \langle S(x_n), x_n \rangle \|S\| \|S(x_n)\| \|S(x_n)\|,$$

et donc

$$\|S(x_n)\|^2 \leq \langle S(x_n), x_n \rangle \|S\|. \tag{2.3}$$

Alors, d'après (2.2) et (2.3), on obtient

$$S(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, supposons que $m \notin \sigma(T)$, alors $S = T - mI$ est inversible et on a

$$x_n = S^{-1}S(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui est absurde puisque $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $m \in \sigma(T)$. De plus, en considérant l'opérateur $-T$, on obtient

$$\inf_{\|x_n\|=1} \langle -Tx, x \rangle \in \sigma(-T),$$

d'où

$$M = \sup_{\|x_n\|=1} \langle Tx, x \rangle = \inf_{\|x_n\|=1} \langle -Tx, x \rangle \in \sigma(T).$$

iii) Si $\lambda \in \Bbbk \backslash [m, M]$, alors $d = dist(\lambda, [m, M]) > 0$. Or, pour tout $x \in H\backslash\{0\}$, on a

$$\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \left(\frac{x}{\|x\|}\right)\rangle \in [m, M],$$

donc

$$|\langle \lambda x - Tx, x \rangle| = \left|\lambda - \langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \left(\frac{x}{\|x\|}\right)\rangle\right| \|x\|^2 \geq d\,\|x\|^2.$$

On en déduit que $T - \lambda I$ est coercif donc inversible, $(i.e)$ $\lambda \in \rho(T)$. ■

Corollaire 2.2 *Soit T un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{L}(H)$ telle que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.*

Proposition 2.5 *Soit T un opérateur auto-adjoint positif alors $\|T\| = M$.*

2.4 Spectre des opérateurs linéaires compacts

2.4.1 Spectre des opérateurs linéaire compacts dans un espace de Banach

Lemme 2.3 *Si* $T \in K(E)$*, alors* $\ker(T - I)$ *est de dimension finie.*

Lemme 2.4 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in K(E)$*,* $\varepsilon > 0$*. Alors l'ensemble*

$$\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

est fini.

Proposition 2.6 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in K(E)$*, et* $\lambda \in \sigma_p(T)$*. Si* $\lambda \neq 0$*, alors l'espace propre* $\ker(T - \lambda I)$ *est de dimension finie.*

Preuve Supposons par l'absurde que $\ker(T - \lambda I)$ contienne une suite orthonormale infinie (e_n). Comme T est compact, on peut en extraire une sous-suite (e_{n_k}) telle que (Te_{n_k}) converge. Mais pour $n_k \neq n_j$, on a

$$\left\|Te_{n_k} - Te_{n_j}\right\| = |\lambda| \left\|e_{n_k} - e_{n_j}\right\| \leq \sqrt{2}\,|\lambda|$$

ce qui contredit le fait que (Te_{n_k}) est une suite de Cauchy. ∎

Proposition 2.7 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in K(E)$*,* $\lambda \neq 0$*, si* $\inf\{\|(T - \lambda I)h\| : \|h\| = 1\} = 0$*, alors* $\lambda \in \sigma_p(T)$*.*

Preuve Par hypothèse, il existe une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que

$$\|(T - \lambda Id)h_n\| \to 0.$$

Comme T est compact, il existe une sous-suite (h_{n_k}) telle que (Th_{n_k}) converge vers $f \in E$. En écrivant $h_{n_k} = \lambda^{-1}[Th_{n_k} - (T - \lambda Id)h_{n_k}]$, on voit que h_{n_k} converge vers $\lambda^{-1}f$. En particulier $\|f\| = |\lambda|$ donc $f \neq 0$.

De plus, (Th_{n_k}) converge vers $\lambda^{-1}Tf$, ce qui montre que $\lambda^{-1}Tf = f$, donc $Tf = \lambda f$. On a donc bien trouvé un vecteur propre, et $\lambda \in \sigma_p(T)$. ■

Proposition 2.8 *Si T est auto-adjoint, alors $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.*

Théorème 2.6 *Soit E un espace de Banach et $T \in K(E)$, alors*

i) Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$.

ii) $\sigma_p(T)\backslash\{0\} = \sigma(T)\backslash\{0\}$ et pour tout $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ le sous-espace propre associé $\ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

iii) Le spectre de T est dénombrable. De plus, s'il est infini, les éléments de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ forment une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{k}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0.$$

Preuve *i)* Si $0 \notin \sigma(T)$ alors T est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et $I = T^{-1}T \in K(E)$ d'après la Proposition (1.11), l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

ii) On a $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $T - \lambda I$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$, ce qui équivaut encore à $\lambda \neq 0$ et $\lambda^{-1}T - I$ est non inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Or, d'après le théorème (1.4) appliquée à $\lambda^{-1}T$, $\lambda^{-1}T - I$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $T - \lambda I$ n'est pas injectif. Donc $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(T)$. De plus, d'après le Lemme (2.3), $\ker(\lambda^{-1}T - I)$ est de dimension finie donc $\ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

iii) D'après le Lemme (2.4) et *ii)*, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T), \quad |\lambda| \geq \varepsilon\}$ est fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors l'ensemble $\{\lambda \in \sigma(T), \quad |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ est fini, soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n_0}$ ses éléments classés de la façon suivante :

$$|\lambda_0| \geq \cdots \geq \left|\lambda_{n_0}\right| \geq \frac{1}{n}.$$

De même, l'ensemble

$$\Lambda_n = \{\lambda \in \sigma(T), \quad \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n}\}.$$

est fini. On pose $\Lambda_n = \{\lambda_{n_0+1}, \ldots, \lambda_{n_1}\}$ où les λ_i sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq \cdots \leq |\lambda_{n_0+1}| \leq \frac{1}{n} \leq \left|\lambda_{n_0}\right| \leq \cdots \leq |\lambda_0|$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroît en module vers 0. ■

2.4.2 Spectre des opérateurs linéaires compacts dans un espace de Hilbert

Théorème 2.7 [21] *Soit H un espace de Hilbert et $T \in K(H)$. Si T est hermitien, il existe un ensemble $\Lambda \subset \Bbbk$ qui est fini ou dénombrable avec 0 comme unique valeur d'adhérence et des projections orthogonales p_λ sur des espaces vectoriels fermés N_λ deux à deux orthogonaux, de dimension finie sauf éventuellement pour $\lambda = 0$, tels que*

$$T = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda p_\lambda,$$

En fait, $\Lambda = \sigma(T)$, $N_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ et $H = \overline{\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} N_\lambda}$. En particulier, T a une valeur propre de module $\|T\|$. Ce résultat vaut encore si T est normal lorsque $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Théorème 2.8 [21] *Soit $T \in K(H)$. Il existe des systèmes orthonormés (x_j) et (y_j) et une suite réelle (z_j) qui décroît vers 0 tels que*

$$T(x) = \sum z_j \langle x, x_j\rangle y_j \quad \textit{pour tout } x \in H. \tag{2.4}$$

En fait, les z_j sont les valeurs propres de $|T|$ répétées selon leur multiplicité et associées avec les vecteurs propres x_j : ce sont les valeurs singulières de T.

2.5 Spectre des opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace de Hilbert

2.5.1 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints de rang fini

Théorème 2.9 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie, alors*

i) Les sous-espaces propres $\ker(T - \lambda I)$, *où* $\lambda \in \sigma_p(T)$, *sont deux à deux orthogonaux,*

ii) T est diagonalisable dans une base orthonormale et $H = \underset{\lambda \in \sigma_p(T)}{\oplus^{\perp}} \ker(T - \lambda I)$.

iii) T admet la décomposition spectrale suivante :

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)\backslash\{0\}} \lambda P_\lambda$$

où $P_\lambda$est la projection orthogonale de H sur $\ker(T - \lambda I)$.

Proposition 2.9 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini. Alors*

i) $H = \mathrm{Im}(T) \oplus^{\perp} \ker(T)$.

ii) $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

iii) Pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)\backslash\{0\}$, $\ker(T - \lambda I)$ *est de dimension finie.*

Théorème 2.10 ***Proposition 2.10*** ***Preuve*** *D'après la Proposition* (1.8), *on a*

$$\ker(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp} = (\mathrm{Im}(T))^{\perp}.$$

Or $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé, car de dimension finie, donc*

$H = \mathrm{Im}(T) \oplus (\mathrm{Im}(T))^{\perp} = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T)$,

ce qui donne le résultat.

Les propriétés ii) et iii) sont alors simplement des conséquences du théorème spectral des opérateurs compacts (Théorème (2.6)*).* ■

Lemme 2.5 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint de rang fini et T_1 sa restriction à $\mathrm{Im}(T)$, i.e. $T_1 = T_{|\,\mathrm{Im}(T)}$, alors*

i) $T_1 \in \mathcal{L}\left(\mathrm{Im}(T)\right)$ est auto-adjoint.

ii) T_1 est inversible et $0 \notin \sigma_p(T_1)$.

iii) $\sigma_p(T_1) = \sigma_p(T) \backslash \{0\}$.

iv) Pour tout $\lambda \in \sigma_p(T_1)$, $\ker(T_1 - \lambda I) = \ker(T - \lambda I)$.

Preuve *Si $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$, alors $H = \ker(T)$ donc $T = 0$ et le résultat est trivial.*

Dans la suite, on suppose $\mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$.

i) T_1 est un opérateur auto-adjoint continu car T l'est.

ii) Si $x \in \mathrm{Im}(T)$ vérifie $T_1 x = 0$, alors

$$x \in \mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\},$$

d'après la Proposition (2.9). Donc T_1est injectif et comme $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie, T_1 est inversible.

Puisque T_1 est injectif, on obtient aussi $0 \notin \sigma_p(T_1)$.

iii) Comme $T_1 = T_{|\,\mathrm{Im}(T)}$, il est clair que $\sigma_p(T_1) \subset \sigma_p(T) \backslash \{0\}$.

Réciproquement, si $Tx = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors

$$x = T\left(\lambda^{-1} x\right) \in \mathrm{Im}(T),$$

donc

$$\sigma_p(T) \backslash \{0\} \subset \sigma_p(T_1).$$

iv) Soit $\lambda \in \sigma_p(T_1)$. Si $x \in \ker(T_1 - \lambda I)$, alors

$$\lambda x = T_1 x = Tx$$

donc

$$x \in \ker(T - \lambda I).$$

Réciproquement, si $x \in \ker(T - \lambda I)$, *alors*

$$x = T(\lambda^{-1}x) \in \mathrm{Im}(T)$$

d'où

$$\lambda x = Tx = T_1 x \quad \textit{et} \quad x \in \ker(T_1 - \lambda I).$$

■

Théorème 2.11 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur auto-adjoint de rang fini, alors :*

i) $\sigma_p(T)$ *est fini.*

ii) $H = \underset{\lambda \in \sigma_p(T)}{\oplus^{\perp}} \ker(T - \lambda I)$.

iii) T *admet la décomposition spectrale suivante :*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ *est la projection orthogonale de* H *sur* $\ker(T - \lambda I)$.

Preuve On note $T_1 = T_{|\,\mathrm{Im}(T)}$.

i) Comme $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie, $\sigma_p(T_1)$ est fini. Or d'après le Lemme (2.5),

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T_1),$$

d'où le résultat.

ii) Puisque $T_1 \in \mathcal{L}\left(\mathrm{Im}(T)\right)$ est auto-adjoint et que $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie le Théorème (2.9) appliqué à T_1 entraîne

$$\mathrm{Im}(T) = \underset{\lambda \in \sigma_p(T_1)}{\oplus^{\perp}} \ker(T_1 - \lambda I) = \underset{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}}{\oplus^{\perp}} \ker(T - \lambda I),$$

Si $0 \notin \sigma_p(T)$, alors $\ker(T) = \{0\}$ donc

$$H = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T) = \mathrm{Im}(T) = \underset{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}}{\oplus^{\perp}} \ker(T - \lambda I) = \underset{\lambda \in \sigma_p(T)}{\oplus^{\perp}} \ker(T - \lambda I).$$

Si $0 \in \sigma_p(T)$ alors

$$H = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}}^{\perp} \ker(T - \lambda I) \oplus^{\perp} \ker(T) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)}^{\perp} \ker(T - \lambda I).$$

$iii)$ Pour $x \in H$, d'après le $ii)$, on a

$$x = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} x_\lambda \text{ où } x \in \ker(T - \lambda I).$$

On en déduit

$$Tx = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} Tx_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda x_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda x.$$

■

2.5.2 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compact

Lemme 2.6 *Soit T est un opérateur auto-adjoint compact, alors l'un des deux nombres $+\|T\|$, $-\|T\|$ sont des valeurs propres de T.*

Preuve Si $T = 0$, c'est évident. Sinon, la proposition (1.10) fournit une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $|\langle Th_n, h_n\rangle| \to \|T\|$. Quitte à remplacer (h_n) par une de ses sous-suites, on peut supposer que $|\langle Th_n, h_n\rangle| \to \lambda$, avec $\lambda = \pm\|T\|$. On a

$$0 \leq \|(T - \lambda I)h_n\|^2 = \|Th_n\|^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \to 0$$

et donc $\lim \|(T - Id)h_n\| = 0$. Par la proposition (2.7), cela implique que $\lambda \in \sigma_p(T)$. ■

Lemme 2.7 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors*

$$\|T\| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma_p(T)\}.$$

En particulier, si $\sigma_p(T)\setminus\{0\} = \phi$ alors $T = 0$.

Lemme 2.8 *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres non nulles, deux à deux distinctes, de T. Alors* *i)* $H = G \oplus^{\perp} F, \quad$ *où* $G = \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} \ker(T - \lambda_i I)$ *et* $F = G^{\perp}$.

ii) $T(G) \subset G$, $T(F) \subset F$ *et l'opérateur* T_F *induit par* T *sur* F *est un opérateur auto-adjoint compact.*

iii) $\sigma_p(T_F) = \sigma_p(T) \backslash \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

iv) Si $\sigma_p(T) \backslash \{0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ *alors* T *est de rang fini.*

Preuve *i)* Soit $j \in \{1, ..., k\}$. Comme $\lambda_j \neq 0$ et T est compact, $\ker(T - \lambda_j I)$ est de dimension finie. On en déduit que $G = \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} \ker(T - \lambda_j I)$ est un sous-espace de dimension finie de H, donc un fermé, d'où $H = G \oplus G^{\perp}$.

ii) Si $x \in G$ alors $x = \sum_{j=1}^{k} e_j$, où $e_j \in \ker(T - \lambda_j I)$, $j = 1, ..., k$, donc

$$Tx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j \in G.$$

Donc $T(G) \subset G$. Soit $x \in F$. Alors, pour tout $y \in G$, $Ty \in G$ donc $\langle x, Ty \rangle = 0$ car $F = G^{\perp}$. Puisque T est auto-adjoint, on obtien

$$\forall y \in G, \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0,$$

i.e.$Tx \in G^{\perp} = F$, d'où $T(F) \subset F$. De plus $T(B_F) = T(B_E \cap F) \subset T(B_E) \cap F$.

Comme T est compact et F fermé, on en déduit que T_F est compact.

iii) Il est clair que l'on a l'inclusion $\sigma_p(T_F) \subset \sigma_p(T)$. Supposons $\lambda_i \in \sigma_p(T_F)$, où $i \in \{1, ..., k\}$, alors il existe $e \in F \backslash \{0\}$ tel que $T_F e = \lambda_i e$, d'où

$$e \in \ker(T - \lambda_i I) \subset G = \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} \ker(T - \lambda_j I).$$

Donc $e \in F \backslash \{0\} \cap G = \phi$ d'où une contradiction. On en déduit

$$\sigma_p(T_F) \subset \sigma_p(T) \backslash \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$$

Réciproquement, si $\lambda \in \sigma_p(T)\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ alors il existe $e \in \ker(T - \lambda I)\backslash\{0\}$ tel que $Te = \lambda e$. comme $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, $\ker(T - \lambda I)$ est orthogonal à G. Donc

$$\ker(T - \lambda I) \subset G^{\perp} = F,$$

d'où $T_F e = \lambda e$ avec $e \in F\backslash\{0\}$, i.e $\lambda \in \sigma_p(T_F)$.

iv) Si $\sigma_p(T)\backslash\{0\} = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$, alors $\sigma_p(T_F) \backslash \{0\} = \phi$.

Donc, d'après le Lemme (2.7), $T_F = 0$. Or si $y \in \mathrm{Im}(T)$ alors il existe $x \in H$ tel que $Tx = y$. Ainsi, il existe $(x_G, x_F) \in G \times F$ tel que

$$y = T(x_G + x_F) = Tx_G + T_F x_F.$$

Or $T_F x_F = 0$, d'où $y \in T(G) \subset G$. On en déduit $\mathrm{Im}(T) \subset G$ et le résultat puisque G est de dimension finie. ■

2.6 Décomposition en spectre ponctuel, résiduel et continu

Définition 2.6 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace normé et* $T \in \mathcal{L}(E)$ *l'ensemble*

$$\begin{aligned} \sigma_r(T) &= \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) \text{ injectif et } \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)} \neq E\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) \text{ injectif et } {}^t(T - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\} \end{aligned}$$

est appelée ***le spectre residuel*** *de* T.

Définition 2.7 *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace normé et* $T \in \mathcal{L}(E)$ *l'ensemble*

$$\begin{aligned} \sigma_c(T) &= \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) \text{ injectif et } \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)} = E\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(T) : (T - \lambda I) \text{ injectif et } {}^t(T - \lambda I) \text{ injectif}\} \end{aligned}$$

est appelée ***le spectre continu*** *de* T.

Proposition 2.11 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E)$*, on a*

$$\sigma(T^t) = \sigma(T).$$

Proposition 2.12 *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$, alors*

i) $\sigma_r(T) = \sigma_p(T^t) \backslash \sigma_p(T)$.

ii) $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(T^t)$.

Preuve

i) Par définition de $\sigma_r(T)$, $\lambda \in \sigma_r(T)$ si et seulement si est valeur propre de T^t mais pas de T.

ii) Par la proposition (2.9) $\sigma(T^{^t}) = \sigma(T)$. ■

Théorème 2.12 *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\sigma(T)$ se décompose on l'union disjointe :*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

2.7 Exemple

Nous considérons l'opérateur de décalage $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ défini par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^1, T(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$$

et son adjoint $T' \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ satisfait :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in \ell^\infty, T'(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots).$$

On les résultats suivantes :

$$\begin{cases} * \ \sigma(T) = \overline{B(0.1)} & \text{et} \quad \sigma(T^{'}) = \overline{B(0.1)}. \\ * \ \sigma_p(T) = B(0.1) & \text{et} \quad \sigma_p(T^{'}) = \phi. \\ * \ \sigma_r(T) = \phi & \text{et} \quad \sigma_r(T^{'}) = \overline{B(0.1)}. \\ * \ \sigma_c(T) = B(0.1) & \text{et} \quad \sigma_c(T^{'}) = \phi. \end{cases}$$

Solution :

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{T}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{T}^{'}) = \overline{\mathbf{B}(\mathbf{0.1})}$:

Notons que $||T^n|| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème (2.3), on a :

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

alors $\sigma(T) = \overline{B(0.1)}$.

D'aprés le théorème de **Phillips** (2.4) on résulte que $\sigma(T^{'}) = \overline{B(0.1)}$.

$\boldsymbol{\sigma}_p(\mathbf{T}) = \mathbf{B}(\mathbf{0.1})$:

D'aprés la remarque (2.2) on a

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \Leftrightarrow \sigma_p(T) \subset \overline{B(0.1)}$$

il reste de montrer que $B(0,1) \subset \sigma_p(T)$.

Il suffit de montrer que $\forall \lambda \in B(0,1)$, $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Pour $\lambda = 0$ (évidente) puisqu'il est facile de remarquer que $(1, 0, 0, ...)$ est dans le noyau de T.

Pour $\lambda \neq 0$. Posons

$$x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...).$$

Alors $x_\lambda \in \ell^1$. De plus

$$T(x_\lambda) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ...) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, ...) = \lambda x_\lambda$$

donc $\lambda \in \sigma_p(T)$, d'où le résultat.

$\sigma_p(T) = B(0,1)$: d'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\partial B(0,1) \cap \sigma_p(T) = \emptyset$, c'est à dire que, pour tout λ tel que $|\lambda| = 1$, $T - \lambda I$ est injectif. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda \in \partial B(0,1)$ tel que $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \ker(T - \lambda I)$ non nul, alors $(T - \lambda I)(x) = 0$ équivaut au système infini d'équations

$$x_{n+1} = \lambda x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que :

$$x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \cdots)$$

Mais on remarque que, à cause du fait que $|\lambda| = 1$, x ne peut pas être dans ℓ^1 sauf si $x_1 = 1$ (une contradiction).

$\boldsymbol{\sigma}_p(\mathbf{T}') = \boldsymbol{\phi}$:

Supposons que $\exists \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\left(T' - \lambda I\right)\alpha = 0$ ce qui équivaut aux relations

$$\begin{gathered} \lambda\alpha_1 = 0 \\ \lambda\alpha_2 = \alpha_1 \\ \lambda\alpha_3 = \alpha_2 \\ \vdots \end{gathered}$$

alors on déduit que $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) = (0, 0, \cdots)$ ce qui donne le résultat.

$\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{T}') = \overline{\mathbf{B(0.1)}}$

$a)$ $B(0.1) \subset \sigma_r(T')$: Rappelons que

$$\sigma_r(T') = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{Im}(T' - \overline{\lambda}I)} \neq \ell^\infty\right\} \backslash \sigma_p(T').$$

Comme $\sigma_p(T') = \phi$, alors $\sigma_r(T') = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{Im}(T' - \overline{\lambda}I)} \neq \ell^\infty\right\}$ pour tout $\lambda \in B(0.1), x_\lambda \in \ell^1$, nous notons

$$\begin{aligned} f_\lambda : \ell^\infty &\to \ell^\infty \\ \alpha &\longmapsto f_\lambda(\alpha) = \alpha(x_\lambda). \end{aligned}$$

Alors

$$f_\lambda((T' - \overline{\lambda}I)\alpha) = \left[(T' - \overline{\lambda}I)\alpha\right](x_\lambda) = \alpha((T - \lambda I)(x_\lambda)) = \alpha(0) = 0$$

$(i.e)$

$$(T' - \overline{\lambda}I)\alpha \in \ker(f_\lambda) \Rightarrow \operatorname{Im}(T' - \overline{\lambda}I) \subset \ker(f_\lambda)$$

Ce qui entraine que la fermeture de $\operatorname{Im}(T' - \overline{\lambda}I)$ ne peut pas étre égale ℓ^∞, donc $\lambda \in \sigma_r(T')$.

$b)$ $\sigma_r(T') = \overline{B(0.1)}$: à cause de ce qui précède, il suffit de montrer que toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ est aussi dans $\sigma_r(T^{'})$. Soit λ une telle valeur. Commençons par calculer un inverse formel de $T^{'} - \lambda I$: si $a \in \ell^{\infty}$ et si b est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'équation $(T^{'} - \lambda I)(b) = a$ s'écrit

$$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 - b_1 \\ \vdots \\ a_n = \lambda b_n - b_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \overline{\lambda} a_1 \\ b_2 = \overline{\lambda}(a_2 + b_1) \\ \vdots \\ b_n = \overline{\lambda}(a_n + b_{n-1}) \end{cases}$$

Donc cette équation a pour solution $b_n = \overline{\lambda} a_n + \overline{\lambda}^2 a_{n-1} + \cdots + \overline{\lambda}^n a_1$. Nous voyons déjà que $\lambda I - T'$ n'est pas surjectif car, pour $a = a_{\overline{\lambda}} = (1, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}^2, \cdots) \in \ell^{\infty}$, la solution est $b_n = n\overline{\lambda}^n$ et cette suite n'est manifestement pas dans ℓ^{∞} : donc $a_{\overline{\lambda}} \notin \mathrm{Im}(\lambda I - T^{'})$.

Mais nous devons montrer un résultat plus fort, à savoir que $\mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I)$ n'est pas dense dans ℓ^{∞}. Pour cela, nous allons montrer que, dans ℓ^{∞}, $B(a_{\overline{\lambda}}, 1/2) \cap \mathrm{Im}(T^{'} - \lambda I) = \phi$. Soit $a \in B(a_{\overline{\lambda}}, 1/2)$, nous pouvons écrire $a = a_{\overline{\lambda}} + \beta$, où $||\beta||_{\ell^{\infty}} < 1/2$. La solution dans l'espace des séries à valeurs complexes de l'équation

$$\left(T^{'} - \lambda I\right) b = a = a_{\overline{\lambda}} + \beta$$

est $b = (b_1, b_2, b_3, \cdots)$, avec

$$b_n = n\overline{\lambda}^n + \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}^{n-j} \beta_j,$$

ce qui entraîne que :

$$\left|b_n - n\overline{\lambda}^n\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}^{n-j} \beta_j\right| < \frac{n}{2}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire $n = \left|n\overline{\lambda}^n\right| \leq \left|b_n - n\overline{\lambda}^n\right|$, on en déduit que

$$b_n \geq n - \left|b_n - n\overline{\lambda}^n\right| > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

Donc b n'est pas dans ℓ^{∞}.

$\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{T}) = \boldsymbol{\phi}$, pour cela il suffit d'établir que, si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Supposons le contraire, cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans ℓ^1. Alors, d'après le ii) de la proposition (2.3), $\lambda \in \sigma_p(T^{'})$. Or ce n'est pas possible car nous avons $\sigma_p(T) = \phi$.

$\boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{T}) = \partial\mathbf{B}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$: On a

$$\sigma_c(T) = \sigma(T) \backslash (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)),$$

alors

$$\sigma_c(T) = \overline{B(0.1)} \backslash (B(0.1) \cup \phi) = \partial B(0,1).$$

$\boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{T}^{'}) = \boldsymbol{\phi}$: On a

$$\sigma_c(T^{'}) = \sigma(T^{'}) \backslash (\sigma_p(T^{'}) \cup \sigma_r(T^{'})),$$

alors

$$\sigma_c(T^{'}) = \overline{B(0.1)} \backslash (\phi \cup \overline{B(0.1)}) = \phi.$$

Chapitre 3

Spectre des opérateurs D-symétriques et P-symétrique

Le chapitre trois s'intéresse à l'étude des opérateurs D-symétrique et P-symétrique puis a la représentions du spectre d'opérateur de dérivation généralisé et du spectre d'opérateur P-symétrique.

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *le commutant de* T, $\{T\}^{'}$*est défini par*

$$\{T\}^{'} = \{S \in \mathcal{L}(H) : TS = ST\}.$$

Définition 3.2 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *la bicommutant de* T, $\{T\}^{''}$ *est défini par*

$$\{T\}^{''} = \left\{Z \in \mathcal{L}(H) : ZS = SZ \text{ pour } S \in \{T\}^{'}\right\}.$$

Définition 3.3 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *l'opérateur de* ***dérivation interieur***

$$\delta_T : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$$

définit par

$$\delta_T(X) = TX - XT.$$

Définition 3.4 *Soit T et S deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$, l'opérateur de* ***dérivation généralisé***

$$\delta_{T,S} : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$$

définit par

$$\delta_{T,S}(X) = TX - XS.$$

Définition 3.5 *Soit T et S deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$,* ***l'opérateur élémentaire***

$$\Delta_{T,S} : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$$

définit par

$$\Delta_{T,S}(X) = TXS - X.$$

Si $T = S$ on écrivons $\Delta_T = \Delta_{T,T}$.

Définition 3.6 *Soit $K(H)$ un sous espace fermé de $\mathcal{L}(H)$, contient tout les opérateurs compacts de H. On définit l'****algébre de Calkin*** *par le quotion*

$$\mathcal{L}(H) \setminus K(H) = \{[T] : T \in \mathcal{L}(H)\},$$

telle que

$$[T] = \{T + S : S \in K(H)\},$$

est noté $C(H)$.

Définition 3.7 *Soit H un espace de Hilbert cmplexe separable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$, on dit que T_n converge en* ***norme*** *vers 0 (i.e $T_n \overset{n}{\to} 0$) si $\|T_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$ ou $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$.*

La fermeture en ***norme*** *d'un sous espace E de $\mathcal{L}(H)$ est notée $\overline{E}$.*

Définition 3.8 *Soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des opérateurs dans* $\mathcal{L}(H)$, *on dit que* T_n *converge* ***faiblement*** *vers* 0 (*i.e* $T_n \xrightarrow{W} 0$) *si* $\langle T_n x, y\rangle \to 0$ *quand* $n \to \infty$ *ou pour tout* $x, y \in H$.

La fermeture ***faible*** *d'un sous espace* E *de* $\mathcal{L}(H)$ *est notée* $\overline{E}^W$.

Définition 3.9 *Soit* H *un espace de Hilbert cmplexe separable et* H *un espace de Hilbert cmplexe separable et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des opérateurs dans* $\mathcal{L}(H)$, *on dit que* (T_n) *converge* ***ultra-faiblement*** *vers* 0 *si* $f(T_n) \to 0$ *quand* $n \to \infty$ *pour tout forme linéaire* f *dans* $\mathcal{L}(H)$.

Si E *est sous ensemble de* $\mathcal{L}(H)$, $\overline{E}^{W^*}$ *est la fermeture* ***ultra-faible*** *de* E.

Définition 3.10 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E)$, *l'ensemble*

$$\sigma_{ap}(T) = \{\inf\{\lambda \in \mathbb{C} : \|(T - \lambda I)x\|, \|x\| = 1\} = 0\},$$

est appelé le spectre de point approximatif.

Définition 3.11 *Soit* E *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E)$, *l'ensemble*

$$\sigma_\delta(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas surjective}\},$$

est appelé le spectre par défaut de T.

3.2 Spectre d'une dérivation et une dérivation généralisée

Définition 3.12 *Soit* E *un espace de Banach,* T *et* S *deux opérateurs dans* $\mathcal{L}(E)$, *l'ensemble*

$$\sigma(\delta_{T,S}) = \{\alpha - \beta : \alpha \in \sigma(T) \text{ et } \beta \in \sigma(S)\},$$

est le spectre de l'opérateur dérivation généralisé.

Remarque 3.1

i) $\sigma(\delta_{T,0}) = \{\alpha : \alpha \in \sigma(T)\}$.

ii) $\sigma(\delta_{0,S}) = \{-\beta : \beta \in \sigma(S)\}$.

Lemme 3.1 *Soit* $T \in \mathcal{L}(E)$, *où* E *est un espace de Banach complexe, alors, il existe un espace de Banach complexe* E^0 *et* $T^0 \in \mathcal{L}(E^0)$ *tel que*

i) $E \subset E^0, T^0(x) = T(x)$ *et l'application*

$$\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E^0)$$
$$T \longmapsto T^0$$

est isométrique respecte la structure d'une algèbre.

ii) $\sigma_p(T^0) = \sigma_{ap}(T^0) = \sigma_{ap}(T)$.

Lemme 3.2 *Soient* T, S *deux opérateurs de* $\mathcal{L}(E)$, *où* E *est un espace de Banach complexe alors*

i) $\sigma_{ap}(\delta_{T,0}) = \sigma_{ap}(T), \sigma_\delta(T) \subset \sigma_\delta(\delta_{T,0})$.

ii) $\sigma_{ap}(\delta_{0,S}) = \sigma_\delta(S), \sigma_{ap}(S) \subset \sigma_\delta(\delta_{0,S})$.

iii) Si E *est un espace de Hilbert alors*

$$\sigma_\delta(T) = \sigma_\delta(\delta_{T,0}), \sigma_{ap}(S) = \sigma_\delta(\delta_{0,S}).$$

Proposition 3.1 *Soit* E *un espace de Banach et* $T, S \in \mathcal{L}(E)$. *Alors*

$$\sigma_{ap}(\delta_{T,S}) = \sigma_{ap}(T) - \sigma_\delta(S).$$

$$\sigma_\delta(\delta_{T,S}) \supset \sigma_\delta(T) - \sigma_{ap}(S).$$

Si E *est un espace de Hilbert, alors*

$$\sigma_\delta(\delta_{T,S}) = \sigma_\delta(T) - \sigma_{ap}(S).$$

Preuve *Nous avons*

$$\lambda \in \sigma_{ap}(\delta_{T,S}) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_{ap}(\delta_{T-\lambda,S})$$

$$\lambda \in (\sigma_{ap}(T) - \sigma_\delta(S)) \Longleftrightarrow (\exists t \in \sigma_{ap}(T), s \in \sigma_\delta(S) : \lambda = t - s)$$

$$\Leftrightarrow (\exists t \in \sigma_{ap}(T - \lambda I) - \sigma_\delta(S)).$$

i) Soit $0 \in \sigma_{ap}(T) - \sigma_{\delta}(S)$ *, nous avons*

$$\lambda \in \sigma_{ap}(T) \Leftrightarrow \inf\left\{\left\|(T - \lambda I)x\right\|, \quad \|x\| = 1\right\} = 0,$$

$$\lambda \in \sigma_{\delta}(S) \Leftrightarrow \inf\left\{\left\|\left(S^{'} - \lambda I\right)x^{'}\right\|, \quad \left\|x^{'}\right\| = 1\right\} = 0.$$

Choisissez $X = x \otimes x^{'}$, $x \in E$, $\|x\| = 1$, $x^{'} \in E^{'}$ *et* $\left\|x^{'}\right\| = 1$. *Ainsi* $\|X\| = 1$ *et*

$$(T - \lambda I)X - X(S - \lambda I) = TX - XS = \left((T(x)) \otimes x^{'}\right) - \left(x \otimes \left(S^{'}\left(x^{'}\right)\right)\right).$$

Par conséquent

$$\inf\left\{\left\|\delta_{T,S}X\right\|, \|X\| = 1\right\} = 0,$$

autrement dit, $0 \in \sigma_{ap}(\delta_{T,S})$ *et nous avons montré que*

$$\sigma_{ap}(\delta_{T,S}) \supset \sigma_{ap}(T) - \sigma_{\delta}(S).$$

ii) Depuis $\delta_{T,0}$ *et* $\delta_{0,-S}$ *commutent, il résulte du Lemme* (3.1) *et Lemme* (3.2) *que*

$$\sigma_{ap}(\delta_{T,0} + \delta_{0,-S}) = \sigma_{ap}(\delta_{T,S}) \subset \sigma_{ap}(\delta_{T,0}) - \sigma_{ap}(\delta_{0,-S}) = \sigma_{ap}(T) - \sigma_{\delta}(S).$$

iii) Comme ci-dessus, pour établir l'inclusion $\sigma_{\delta}(\delta_{T,S}) \supset \sigma_{\delta}(T) - \sigma_{ap}(S)$, *nous avons de prouver que*

$$0 \in (\sigma_{\delta}(T) - \sigma_{ap}(S)) \Rightarrow 0 \in \sigma_{\delta}(\delta_{T,S}).$$

Ou

$$\delta_{T,S} \text{ surjective} \Rightarrow 0 \notin (\sigma_{\delta}(T) - \sigma_{ap}(S)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \delta_{T,S} \text{ surjective} \Leftrightarrow \delta_{T,S} : \mathcal{L}(E)/\ker\delta_{T,S} &\mapsto \mathcal{L}(E) \\ X &\mapsto TX - XS, \end{aligned}$$

est bijective, donc si $\delta_{T,S}$ est surjective, alors il existe $h > 0$ tel que

$$2h\,\|X\| \leq \|TX - XS\|\,.$$

Si nous prenons pour $X \neq 0$ un représentant de X avec une norme proche de $||X||$, alors nous obtenir $h(X) \leq ||TX - XS||$. Ainsi, pour tous les $Y \in \mathcal{L}(E)$, il existe $X \in \mathcal{L}(E)$ de telle que

$$TX - XS = Y \text{ et } h(X) \leq ||TX - XS||.$$

Supposons que $0 \in \sigma_\delta\,(T) - \sigma_{ap}\,(S)$, i.e., il existe $\lambda \in \sigma_\delta\,(T) \cap \sigma_{ap}\,(S)$. Ainsi

$$\inf\{(T^{'} - \lambda)x^{'}, ||x^{'}|| = 1\} = 0 \text{ et } \inf\{(S - \lambda)x, ||x|| = 1\} = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left|\langle x^{'}, (TX - XS)\,x\rangle\right| &= \left|\langle x^{'}, ((T - \lambda I)\,X - X\,(S - \lambda I))x\rangle\right| \\ &\leq \left\|\left(T^{'} - \lambda I\right)x^{'}\right\| + \|(S - \lambda I)\,x\|\,, \text{pour tout } X \in \mathcal{L}(E).\end{aligned}$$

Si $\delta_{T,S}$ est surjective, alors $Y \in \mathcal{L}(E)$, choisissez X telle que $h\,\|X\| \leq \|TX - XS\|$ et $TX - XS = Y$ nous avons

$$\left|\langle x^{'}, Yx\rangle\right| \leq \left(\left\|\left(T^{'} - \lambda I\right)x^{'}\right\| + \|(S - \lambda I)\,x\|\right)h^{-1}\,\|Y\|\,.$$

Choisissez $Y = y \otimes y^{'}$ est telle que l'élément gauche de la dernière inégalité soit bornée ci-dessous et

$$\|Y\| = 1, \langle x^{'}, Yx\rangle = \langle y^{'}, x\rangle\langle x^{'}, y\rangle.$$

En appliquant le théorème de Hahn Banach, il en résulte qu'il existe $y^{'}$tels que $\langle y^{'}, x\rangle = 1$ et $\left\|y^{'}\right\| = 1$.Il existe $y^{'}$ tel que $\left\|y^{'}\right\| = 1$ et $\langle x^{'}, y\rangle > \frac{1}{2}$, par la définition de $||x^{'}||$. Ainsi $||Y|| = 1$, en outre

$$\frac{1}{2} \leq h^{-1}(||\left(T^{'} - \lambda I\right)x^{'}|| + ||\,\|(S - \lambda I)\,x\|\,||).$$

Cela contredit le fait que l'inf du droit membre est 0.

iv)Nous devons montrer $\sigma_\delta\,(\delta_{T,S}) = \sigma_\delta\,(T) - \sigma_{ap}\,(S)$.

Soit H un espace de Hilbert, T et S deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ alors :

$$\delta_{T,S} = \delta_{T,0} + \delta_{0,-S}.$$

D'aprés le lemme (3.2), on resulte que

$$\sigma_\delta\left(\delta_{T,S}\right) \subset \sigma_\delta\left(\delta_{T,0}\right) + \sigma_\delta\left(\delta_{0,-S}\right) = \sigma_\delta\left(T\right) - \sigma_{ap}\left(S\right).$$

■

3.3 Les opérateurs D-symétriques

Définition 3.13 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur T est appelé $D-$**symétrique** si $\overline{\mathrm{Im}(\delta_T)} = \overline{\mathrm{Im}(\delta_{T^*})}$. On note l'ensemble des opérateurs $D-$symétrique par $D(H)$.*

Notation 3.1 *$C_1(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs de classe trace.*

Définition 3.14 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, T est dit de trace classe si $\|T\| = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T| \, e_n . e_n \rangle < \infty$, telle que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormal dans H.*

Théorème 3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) T est $D-$symétrique

ii) $[T]$, classe de T dans l'algébre de Calkin est $D-$symétrique.

iii) $TS = ST$ imlique $TS^* = S^*T$, $\forall S \in C_1(H)$.

Corollaire 3.1 *Tout opérateur normal est $D-$symétrique.*

Remarque 3.2 *Si T est normal alors $T^* \in \ker(\delta_T)$.*

Définition 3.15 *Soit $T \in \mathcal{L}\left(H\right)$, T est dit opérateur **isométrie** si*

$$T^*T = I.$$

Corollaire 3.2 *Tout opérateur isométrie est* $D-$*symétrique.*

Définition 3.16 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H), T$ *est dite* ***essentiellement normal*** *si* $TT^* - T^*T$ *est compact.*

Corollaire 3.3

i) Un opérateur essentiellement normal T *est* $D-$*symétrique si et seulement si* $TS = ST$ *pour un opérateur* S *dans la classe de trace implique* $TS^* = S^*T$.

ii) Un opérateur dans la classe de trace est $D-$*symétrique si et seulement s'il est normal.*

Définition 3.17 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, T *est dit opérateur* ***subnormal*** *si elle a une extension normal.*

Définition 3.18 *Nous disons qu'un vecteur* Ψ *est cyclique pour un opérateur* T, *si la combainisons linéaire fini des éléments* $\{T^n\Psi\}_{n=0}^{\infty}$ *est dense dans* H .

Théorème 3.2 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur subnormal avec un vecteur cyclique. Alors* T *est* $D-$*symétrique.*

Théorème 3.3 *Soit* $T, S \in \mathcal{L}(H)$, *si* T *et* S *sont des opérateurs* $D-$*symétriques avec des spectres disjoints, alors* $T \oplus S$ *est* $D-$*symétrique.*

3.4 Les opérateurs P-symétriques

Définition 3.19 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *on dit que* T *est* $P-$***symétrique*** *si* $TS = ST$ *implique* $TS^* = S^*T$, $\forall S \in C_1(H)$, *l'ensemble des opérateurs* $P-$*symétrique notée par* $P(H)$.

Théorème 3.4 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *alors*

i) T *est* $P-$*symétrique ssi* $\overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*}$ *est auto-adjoint.*

ii) $P(H)$ *est auto-adjoint.*

Théorème 3.5 *Soit* $T^2 = 0$ *et* $T \neq 0$ *alors* T *n'est pas* $P-$*symétrique.*

Preuve iI existe $f = Th$, vecteur non nul dans $\operatorname{Im}(T)$. $\langle T^*f, h\rangle = \|Th\|^2 \neq 0$, donc $Tf = 0$ et $T^*f \neq 0$. Comme $(T^*)^2 = 0$, on choisit de même g non nul tel que $T^*g = 0$. Notons $T^*f = \omega$,

$\langle \omega, f \rangle = \langle T^* f, f \rangle = \langle f, Tf \rangle = 0$ (i.e) ω et f sont orthogonaux. Si $X = \|\omega\|^{-2} (g \otimes \omega)$ et $Y \in \mathcal{L}(H)$, alors il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \langle (T^* X - XT^*) f, g \rangle &= \langle 0, g \rangle - \langle X\omega, g \rangle \\ &= -\langle g, g \rangle = - \|g\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\langle (TY - YT) f, g \rangle = \langle Yf, T^* g \rangle - \langle 0, g \rangle = 0.$$

Supposons que $T^* X - XT^* \in \overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*}$.Alors il existe une suite généralisée (Y_α) de $\mathcal{L}(H)$ telle que pour tout x, y de H, on a

$$\langle (TY_\alpha - Y_\alpha T) x, y \rangle \underset{\alpha}{\rightarrow} \langle (T^* X - XT^*) x, y \rangle.$$

On en déduit que

$$0 = \langle (TY_\alpha - Y_\alpha T) f, g \rangle \underset{\alpha}{\rightarrow} \langle (T^* X - XT^*) f, g \rangle = - \|g\|^2 .$$

Il s'ensuit que $g = 0$ et ceci montre que $T^* X - XT^* \notin \overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*}$

(i.e) $\overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*}$ n'est pas auto-adjoint, en conséquence on obtient d'après le théorème (3.4) que T n'est pas $P-$symétrique. ■

Puisque l'étude des opérateurs $P-$symétriques revient à étudier les opérateurs $T \in \mathcal{L}(H)$ est tels que $\overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*}$ auto-adjoint, alors il est naturel d'introduire les ensembles suivants :

$$C_0 = \left\{ C \in \mathcal{L}(H) : C\mathcal{L}(H) + \mathcal{L}(H) C \subset \overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*} \right\},$$

$$I_0 = \left\{ Z \in \mathcal{L}(H) : Z \operatorname{Im}(\delta_T) + \operatorname{Im}(\delta_T) Z \subset \overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*} \right\},$$

$$B_0 = \left\{ B \in \mathcal{L}(H) : \operatorname{Im}(\delta_B) \subset \overline{\operatorname{Im}(\delta_T)}^{W^*} \right\}.$$

Théorème 3.6 *Soit T est $P-$symétrique, alors* *i)* $C_0(T)$, $I_0(T)$ *et* $B_0(T)$ *sont des* C^*-*algèbres fermées pour la topologies ultra-faible dans* $\mathcal{L}(H)$ *(algèbres de Von Neumann).*

ii) $C_0(T)$ *est un idéal bilatère de* $I_0(T)$.

iii) $\mathrm{Im}(\delta_S) \subset \overline{\mathrm{Im}(\delta_T)}^{W^*}$ *pour tout* $S \in C^*(T)$, *la* C^*-*algèbre engendrée par* T.

Théorème 3.7 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

i) T *est* $P-$*symétrique.*

ii) $TT^* - T^*T \in C_0(H)$.

iii) $T^* \mathrm{Im}(\delta_T) + \mathrm{Im}(\delta_T)T^* \subset \overline{\mathrm{Im}(\delta_T)}^{W^*}$.

Lemme 3.3 *Soit* T *est un opérateur de* $\mathcal{L}(H)$ *alors*

$$I_0(T) = \{z \in \mathcal{L}(H), \delta_z(T) \in C_0(H)\}.$$

Corollaire 3.4 *Soit* T *un opérateur* $P-$*symétrique et* $X \in \mathcal{L}(H)$, *si* $TX - XT \in C_0(T)$, *alors* $TX^* - X^*T \in C_0(T)$.

3.5 Spectre des opérateurs P-symétriques

Lemme 3.4 *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a les propriétées suivantes :*

i) Il existe $x \in H$, $x \neq 0$ *avec* $Tx = \lambda x$ *et* $T^*x = \overline{\lambda}x$.

ii) Il existe $y \in H$, $y \neq 0$ *avec* $T^*y = \overline{\lambda}y$. *Alors* $\overline{\mathrm{Im}(\delta_T)}^{W^*}$ *est auto-adjoint.*

Remarque 3.3 *Si* $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$ *alors* T *est* $p-$*symétrique.*

Théorème 3.8 *Soit* T *et* S *dans* $\mathcal{L}(H)$ *sont deux opérateurs* $P-$*symétriques, si* $\sigma(T) \cap \sigma(S) = \{0\}$, *alors* $T \oplus S$ *est* $P-$*symétrique.*

Corollaire 3.5 *Soit* T *un opérateur* P*-symétrique à spectre dénombrable, alors les propriétées suivantes sont équivalentes :*

i) $C_0(T) = \{0\}$.

ii) T *est diagnalisable.*

iii) $I_0(T) = \{T\}^{'}$.

Preuve *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : *Supposons que* $C_0(T) = \{0\}$. *Compte tenu du théorème* (3.7), *on en déduit que* $T^*T - TT^* = 0$ *i.e.* T *est normal. Puisque le spectre de* T *est dénombrable, il s'ensuit que* T *est diagonalisable.*

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : *En vertu du théorème* (3.7) *et du lemme* (5.5) [15], *le résultat est immédiat.*

iii) $\Rightarrow$ *i)* : *Supposons que* $I_0(T) = \{T\}^{'}$. *Il suit du théorème* (3.6) *que* $I_0(T)$ *est une* C^*-*algèbre et du théorème* (3.7) *que* $T^* \in I_0(T)$ *i.e.* T *est normal. Comme* $\sigma(T)$ *est dénombrable, alors* T *est diagonalisable. Compte tenu du théorème* (4.2) [15] *et du lemme* (5.5) [15] *on obtient le résultat.*

■

Théorème 3.9 *Soit* T *un opérateur normal, si* $\sigma(T)$ *est finie, alors on a* $C_0(T) = \{0\}$, $I_0(T) = \{T\}^{'}$ *et* $B_0(T) = \{T\}^{''}$.

Preuve Puisque T est normal à spectre fini, il vient de corollaire (3.5) que $C_0(T) = \{0\}$ et $I_0(T) = \{T\}^{'}$. Montrons que $B_0(T) \subset \{T\}^{''}$. En effet, soient $B \in B_0(T)$, $A \in \{T\}^{'}$ et $X \in \mathcal{L}(H)$, comme $\delta_T(B)X = T\delta_B(X) - \delta_B(TX)$, alors $\delta_T(B)X \in \overline{\mathrm{Im}\,(\delta_T)}^{W^*}$ par conséquense en obtient $[\delta_T(B)]\,[\delta_T(B)]^* \in \overline{\mathrm{Im}\,(\delta_T)}^{W^*}$. Il vient du théorème (4.2) [15] que $[\delta_T(B)]\,[\delta_T(B)]^* = 0$ i.e $AB = BA$. Ainsi on a montré que $\{T\}^{'} \subset \{B\}^{'}$ i.e $B \in \{T\}^{''}$.

Réciproquement, supposons que $B \in \{T\}^{''}$.On sait que B est un polynôme en T. D'après le théorème (3.6), $B_0(T)$ est une algèbre contenant T, par conséquence on a $B \in B_0(T)$. ■

Bibliographie

[1] A.Bonanomi, Théorie spectrale des opérateurs linéaires, EPFL -Mathématiques - Projet de semestre, 28 juin 2007.

[2] BARRAT Alexandre, Parties spectrales d'un opérateur auto-adjoint, Université Claude Bernard Lyon 1, 2007-2008.

[3] Bernard Hellfer, Spectral theory and applications. An elementary introductory course. Bucarest Version 2010, Université Paris-Sud, Département de Mathematiques, UMR 8628 du CNRS, Bat. 425, F-91405 Orsay Cedex, FRANCE, March 26, 2010.

[4] BOUHAFSI YOUSSEF, Thése de doctorat : On the Range and the Kernel of Elementary FACULTÉ DES SCIENCES Rabat, 5 Juin 2009. Operators, université MOHAMMED V–AGDAL.

[5] Claude Portenier, Analyse Fonctionnelle, Fachbereich Mathematik and Informatik Philipps-Universitat Marburg, Version du 1 juillet 2005.

[6] Daniel Li, Analyse Fonctionnelle (Master 1 Mathématiques-Informatique), Université d'Artois Faculté des Sciences Jean Perrin.

[7] Frédéric Paulin, Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique, Cours de deuxième année de magistère, Année 2012-2013, Version préliminaire.

[8] Guillaume AUBRUN, Théorie des Opérateurs1 M1 Mathématiques, Université de la Réunion.

[9] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications. Masson, Paris (1983).

[10] Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY (JBHU), Topologie et Analyse hilbertienne : Une Introduction Pragmatique, Université Paul Sabatier de Toulouse.

[11] MOHAMED ECH-CHAD, Thése de doctorat : Image d'une Dérivation Généralisée et Opérateurs D-symétriques,université MOHAMMED V–AGDAL FACULTÉ DES SCIENCES Rabat, 22 Janvier 2010.

[12] MOSTAFA MBEKHTA, RÉSOLVANT GÉNÉRALISÉ ET THÉORIE SPECTRALE, J. OPERATOR THEORY 21(1989), 69-105, Copyright by INCERT, 1989.

[13] Pierre Lévy-Bruhl, INTRODUCTION À LA THÉORIE SPECTRALE cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2003.

[14] Ropert DAUTRAY-Jacques-Louis LIONS, Analyse Mathématique et Calcul numérique pour les sciences et techniques,Spéctre des opérateurs, MASSON Parie Milan Barcelone Mexico 1988.

[15] S. Bouali et J. Charles, Extension de la Notion D'Opérateur D-Symbtrique. II*, Université Montpellier Il Institut de Mathémutiques Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier, France. Submitted by Rajendra Bhatia

[16] S. Mecheri, Some recent results on operator commutators and related operators with applications, 1-51.

[17] S. Mecheri, On minimizing $\|S-(AX-XB)\|_P$, Serdica Math. J.26 (2000), no. 2, 119-126.

[18] S. Mecheri, No normal derivations and orthogonality, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 759-762.

[19] S. Mecheri and A. Bachir, Generalized derivation modulo the ideal of all compact operators, Int. J. Math. Science, 32 (2002), 504-506.

[20] S. Mecheri and H. Mecheri, The Gâteaux derivative and orthogonality in C_∞, An. St. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 20 (1), 2012, 275-284.

[21] Stefan Neuwirth, Théories spectrales

[22] Stéphane Maingot & David Manceau, Théorie spectrale.

[23] Virginie Ehrlacher et Gabriel Stoltz, Analyse spectrale, Cours ENPC - IMI - 2ème année, 20 juin 2015.

[24] Notes pour le cours de théorie spectrale, Université Paris 7, Master 1de Mathématiques, Année 2008/2009.

[25] ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE SPECTRALE ALLÉGÉES, MT404, Année 2000-2001.