



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique



MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées

Thème:

**Synchronisation des systèmes différentiels
d'ordre entier et d'ordre fractionnaire**

Présenté par:

Zaid Laadjal

Devant le jury:

Nouri Boumaza	M.C.B	Université de Tébessa	Président
Adel Ouannas	M.C.A	Université de Tébessa	Rapporteur
Ahlem Gasri	M.A.A	Université de Tébessa	Examineur

Date de soutenance:

25/05/2017

Note: 17.00. Mention: Très Bien

Dédicace

A la mémoire de mon père.

A ma mère

A mon frère, mes sœurs et ma famille

A mes professeurs et mes amis.

A tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Avant tout, mes remerciements à mon dieu **ALLAH** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur **Mr. Adel Ouannas**, qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Je tiens vivement à remercier **Mr. Nouri Boumaza**, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

De même je exprime mon reconnaissance au **Mm. Ahlem Gasri**, pour l'honneur qu'il j'ai fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury et d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement l'ensemble des mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Finalement, J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues et toutes les personnes qui m'apportent leur aide, leur soutien, et leurs encouragements.

Zaid Laadjal.

Résumé

ملخص

هذه المذكرة تتناول دراسة مزامنة الأنظمة التفاضلية ذات رتب طبيعية و أخرى ذات رتب كسرية. اعتمادا على نظرية ليابونوف في الحالة الطبيعية و نظرية ليابونوف الكسرية تم تحليل نمط جديد من المزامنة بين نظامين مختلفين في البعد و رتبة التفاضل. المحاكاة العددية استعملت لإظهار فعالية النتائج المتوصل إليها.

كلمات دلالية: مزامنة؛ الأنظمة التفاضلية ذات رتب طبيعية؛ الأنظمة التفاضلية ذات رتب كسرية؛ معايير جديدة؛ مسألة عكسية؛ ثبات ليابونوف.

Résumé

Ce mémoire a pour objet l'étude de synchronisation entre systèmes d'ordre fractionnaire et les systèmes d'ordre entier. Basé sur la méthode de Lyapunov classique et l'approche fractionnaire de Lyapunov, des nouveaux schémas de synchronisation entre des systèmes chaotiques continus avec des dimensions différentes, sont dérivés. Les simulations numériques sont utilisées pour valider les résultats proposés.

Mots clés : systèmes d'ordre entier, systèmes d'ordre fractionnaire synchronisation généralisée, problème inverse, stabilité de Lyapunov.

Abstract

This thesis, investigate the synchronization between fractional-order systems and integer-order systems. Based on classical Lyapunov theory and fractional version of Lyapunov method, new schemes of synchronization between two different dimensional fractional-order and integer-order systems are derived analyzed. Numerical simulations are used to validate the proposed results.

Key words : integer-order systems, fractional-order systems, generalized synchronization, inverse problem, Lyapunov stability.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciement	ii
Résumé	iii
Introduction générale	vi
1 Stabilité des systèmes différentiels d'ordre entier	1
1.1 Généralités	2
1.1.1 Systèmes différentiels	2
1.1.2 Espace de phase	2
1.1.3 Point d'équilibre	2
1.2 Types de stabilité	2
1.3 Méthodes de stabilité	3
1.3.1 Méthode directe de Lyapunov	3
1.3.2 Méthode indirecte de Lyapunov	6
2 Systèmes différentiels d'ordre fractionnaire et leur stabilité	10
2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	11
2.1.1 Définition	11
2.1.2 Propriétés	11
2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo	11
2.2.1 Définition	11
2.2.2 Propriétés	12
2.3 Stabilité des systèmes fractionnaires	12

2.3.1	Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires	13
2.3.2	Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires	14
2.3.3	Méthode de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires	15
3	Synchronisation	17
3.1	Systèmes maître et esclave	18
3.2	Types de synchronisation	18
3.2.1	Synchronisation complète	18
3.2.2	Anti-Synchronisation	18
3.2.3	Synchronisation projective	18
3.2.4	Synchronisation généralisée	19
3.2.5	Synchronisation inverse généralisée	19
3.2.6	Synchronisation Q-S	19
3.3	La méthode du contrôleur actif	20
4	Coexistence de la synchronisation généralisée et la synchronisation inverse généralisée	22
4.1	Synchronisation entre un système maître d'ordre fractionnaire et un système esclave d'ordre entier	23
4.2	Synchronisation entre un système maître d'ordre entier et un système esclave d'ordre fractionnaire	25
4.3	Exemples numériques	28
4.3.1	Exemple 1	28
4.3.2	Exemple 2	32
	Conclusion générale	36
	Bibliographie	37

Table des figures

1.1	Convergence ou divergence de la courbe à voisinage du point d'équilibre	3
1.2	Un pendule sans frottement	8
2.1	Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$	13
4.1	Portraits de phase en 3-D et 2-D du système (4.32).	29
4.2	Portraits de phase en 3-D du système (4.33) lorsque $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$	30
4.3	L'évolution des erreurs entre les systèmes (4.32) et (4.33).	31
4.4	Portraits de phase en 3-D et 2-D du système (4.41).	32
4.5	Portraits de phase en 3-D du système (4.42) lorsque $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$	33
4.6	L'évolution des erreurs e_1 et e_3 du système (4.45).	35
4.7	L'évolution de l'erreur e_2	35

Introduction générale

Le concept de synchronisation a été présenté pour la première fois par Pécora et Carroll en 1990 [1]. A partir de cette date, la synchronisation est devenu un domaine de recherche actif en raison de ses applications potentielles. Au cours des dernières décennies, une grande variété d'approches et de techniques ont été proposées pour la synchronisation des systèmes différentiels d'ordre entier [2, 3]. Récemment, de plus en plus d'attentions ont été accordées à la synchronisation des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire [4, 5], en raison de ses applications [6]. Le sujet de la synchronisation entre les systèmes d'ordre fractionnaire et les systèmes d'ordre entier est un nouveau domaine de recherche dans la théorie du contrôle et synchronisation.

Jusqu'à présent, des différentes techniques de contrôle ont été introduites pour synchroniser des systèmes d'ordre fractionnaire et des systèmes d'ordre entier, tels que la méthode de contrôle feedback [7], le contrôle non linéaire [8], méthode du contrôle actif [9], la technique de transformation de Laplace [10], la méthode flou [11], la méthode de sliding mode [12, 13], méthode basée sur la simulation d'un circuit [15] et la technique d'observateur robuste [16]. En outre, de nombreux types de synchronisation ont été proposés pour étudier le problème de la synchronisation entre les systèmes d'ordre fractionnaire et des systèmes d'ordre entier, tels que la synchronisation anticipé [17], la synchronisation fonctionnelle projective [18], la synchronisation complète [19], l'antisynchronisation [20], La synchronisation QS [21] et la synchronisation généralisée [22].

Récemment, l'étude de la coexistence de plusieurs types de synchronisation commence à attirer l'attention croissante. Il n'y a pas longtemps, de nombreuses approches pour le problème de la coexistence de différent types de synchronisation ont été proposées entre les systèmes discrets [23, 24], les systèmes d'ordre entier [25] et les systèmes d'ordre fractionnaire [26]. La coexistence de différent types de synchronisation peut être très utile dans la communication sécurisée et les systèmes de cryptage chaotique.

Ce mémoire présente de nouvelles approches pour étudier la coexistence de la synchronisa-

tion généralisée et la synchronisation inverse généralisée entre des systèmes d'ordre fractionnaire et des systèmes d'ordre entier avec des dimensions différentes. Ce travail est organisé comme suit. **Dans le premier chapitre** : nous faisons un panorama sur la stabilité des systèmes différentiels d'ordre entier. **Le deuxième chapitre**, est consacré aux notions de base sur les systèmes fractionnaires et leur stabilité. **Dans le troisième chapitre** : on trouve des différents types connus de synchronisation et les méthodes les plus usées. **Le quatrième**, expose le contenu de notre travail qui consiste en quelques nouveaux schémas de synchronisation entre des systèmes différentiels avec d'ordre entier et d'ordre fractionnaires.

Chapitre 1

Stabilité des systèmes différentiels d'ordre entier

Dans ce chapitre, les méthodes de stabilité pour des systèmes différentiels d'ordre entier sont présentés.

1.1 Généralités

1.1.1 Systèmes différentiels

Définition 1.1 Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (1.1)$$

Lorsque le champ de vecteurs f ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système différentiel est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système différentiel non autonome de dimension n en un système différentiel autonome équivalent de dimension $n + 1$.

1.1.2 Espace de phase

Définition 1.2 Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variable d'état, qui ont la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé **l'espace de phase** où chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire.

1.1.3 Point d'équilibre

Définition 1.3 [31] On dit que x_e est un point d'équilibre d'un système (1.1) si x_e vérifie l'équation :

$$f(x_e) = 0 \quad (1.2)$$

pour tout $t \geq t_0$.

1.2 Types de stabilité

Un système est dit stable autour d'un point d'équilibre si lorsque des faibles perturbations sont appliquées, il reste au voisinage de ce point.

Définition 1.4 [31] [32] Le point d'équilibre x_e du système (1.1) est stable au sens de Lyapunov si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.4)$$

Sinon le point d'équilibre est dit instable.

Définition 1.5 [31] [32] Le point d'équilibre x_e du système (1.1) est attractif si

$$\exists \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (1.5)$$

Définition 1.6 [31] [32] Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système (1.1) est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif c-à-d

$$\exists \delta > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

La stabilité asymptotique signifie que non seulement le point d'équilibre est stable, mais qu'on est aussi capable de déterminer un domaine proche du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un état initial x_0 appartenant à ce domaine, tend vers x_e quand t tend vers $+\infty$, la figure (1.1) représente la stabilité de la courbe à voisinage du point d'équilibre au-dessus

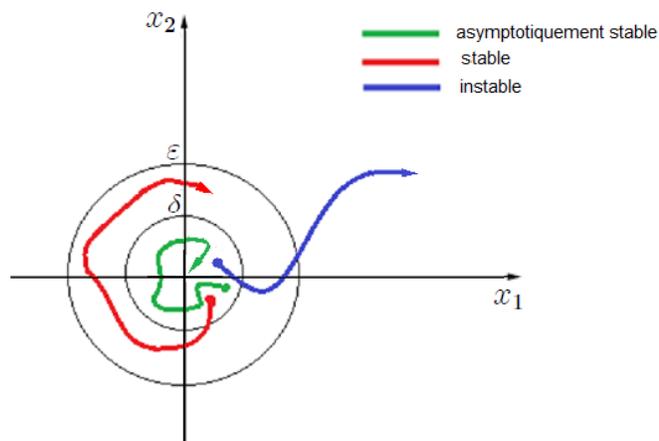


FIG. 1.1 – Convergence ou divergence de la courbe à voisinage du point d'équilibre

1.3 Méthodes de stabilité

1.3.1 Méthode directe de Lyapunov

Une approximation locale de la dynamique autour du point d'équilibre permet, dans certains cas, de déduire la stabilité locale du système contenu. Il s'agit de la méthode directe de Lyapunov.

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile ; en effet, en raison de leurs comportements assez compliqués, les méthodes

utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système (1.1) en ce point (point d'équilibre).

$$\dot{x}(t) = Df(0)x(t) + r(\|x\|^2),$$

puis, pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéaire associé à (1.1)

$$\dot{x}(t) \simeq Df(0)x(t). \quad (1.7)$$

Notons que $Df(0)$ est la matrice Jacobienne de f au point $x_e = 0$,

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|r(\|x\|^2)\| = 0$$

La détermination de la stabilité du point d'équilibre s'effectue donc en deux étapes. La première consiste à déterminer de la stabilité de $x_e = 0$; équilibre de (1.2), partant du fait que l'on sait déjà déterminer la stabilité linéaire à partir des valeurs propres de $Df(x_e)$. La deuxième étape, réside dans la manière de déterminer la stabilité de x_e à partir de celle de $x_e = 0$.

Théorème 1.1 - Si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(0)$ sont de parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

- Si la matrice $Df(0)$ admet au moins une valeur propre de partie réel strictement positive, alors le point d'équilibre est instable.

Preuve. [53] On commence par écrire un développement limité de f autour de $x_e = 0$:

$$\dot{x}(t) = Df(0)x(t) + r(\|x\|^2),$$

avec r une fonction définie sur un voisinage de 0 et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} r(\|x\|^2) = 0$, pour les matrices. On introduit le système linéarisé.

Dans la suite, on note

$$A = Df(0),$$

et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne pour les vecteurs, ou bien la norme triple associée pour les matrices.

On introduit le système linéarisé :

$$\dot{y}(t) = Ay(t).$$

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de A , de multiplicités algébriques m_1, m_2, \dots, m_p (la matrice A est de dimension $m_1 + m_2 + \dots + m_p$ et m_i est la puissance associée au monome $(x - \lambda_i)$ dans le polynome caractéristique $\det(A - \lambda Id)$ de A). Quitte à réordonner les valeurs propres, on peut supposer qu'il existe un entier q tel que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2q}$ ne sont pas réelles, et $\lambda_{2q+1}, \dots, \lambda_p$ sont réelles. De même, on peut supposer que $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_{2q-1} = \bar{\lambda}_q$ (où $\bar{\lambda}$ désigne le complexe conjugué de λ).

En utilisant la décomposition de Jordan, on montre que les coefficients de $\exp(tA)$ sont de combinaisons linéaire (à coefficient réels) de fonction de type

$t^k \exp(\operatorname{Re}(\lambda_j)t) \cos(\operatorname{Im}(\lambda_j)t)$, et $t^k \exp(\operatorname{Re}(\lambda_j)t) \sin(\operatorname{Im}(\lambda_j)t)$, $1 \leq j \leq 2q$,

et de fonction du type $t^k \exp(\lambda_j t)$ pour $2q + 1 \leq j \leq p$ avec $0 \leq k \leq m_j - 1$.

Le cas $k = 0$ correspond au cas où

$$\ker(A - \lambda_i Id) = \ker(A - \lambda_i Id)^{m_i}$$

le sous espace propre est égal au sous espace caractéristique. Ces résultats reposent sur le fait que :

$$\exp \left[t \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \right] = \exp(\lambda_j t) \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Exemple 1.1 Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1). \end{cases}$$

Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$.

La linéarisation du systèmes est

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \text{ où } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$.

Par conséquent, l'origine est asymptotiquement stable.

Remarque 1.1 Si certaines valeurs propres de la matrice $Df(0)$ sont nuls, on ne peut pas conclure quant à la stabilité locale du point d'équilibre.

1.3.2 Méthode indirecte de Lyapunov

Pour l'étude de la stabilité non linéaire, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé, Lyapunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques. Cette méthode, appelée méthode indirecte de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles.

Théorème 1.2 [28] Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre d'un système (1.1), et $D \in \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine.

S'il existe une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ tels que :

$$V \in C^1(D, \mathbb{R}^+),$$

$$V(0) = 0,$$

$$V(x) > 0, \forall x \in D \setminus \{0\},$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \forall x \in D \setminus \{0\},$$

alors le point d'équilibre est stable.

Si de plus $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in D \setminus \{0\}$, alors, $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

Preuve. [28] Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $r \in]0; \varepsilon]$ tel que

$$B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$$

Soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$, Alors $\alpha > 0$.

Choisissons $\beta \in]0; \alpha[$ et soit

$$\Omega(0, \beta) = \{x \in B(0, r), V(x) \leq \beta\}.$$

Alors $\Omega(0, \beta)$ est dans l'intérieur de $B(0, r)$, car dans le cas contraire, il existerait $p \in \Omega(0, \beta)$ qui soit au même temps sur la frontière de $B(0, r)$. En ce point p on aurait,

$$V(p) \geq \alpha > \beta$$

Et, pour tout $x \in \Omega(0, \beta)$, $V(x) \leq \beta$, ce qui constitue une contradiction.

L'ensemble $\Omega(0, \beta)$ a la propriété suivante : n'importe quelle trajectoire dans $\Omega(0, \beta)$, issue de $t = 0$ reste dans $\Omega(0, \beta)$ pour tout $t \geq 0$. En effet

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0$$

Par la compacité de l'ensemble $\Omega(0, \beta)$, on conclut que le système (1.1) a une unique solution pour tout $t \geq 0$ dès que $x(0) \in \Omega(0, \beta)$. Comme V est continue et vérifie $V(0) = 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x(t)) < \beta$$

Part suite

$$B(0, \delta) \subset \Omega(0, \beta) \subset B(0, r)$$

et implication suivantes sont vérifiées

$$x(0) \in B(0, \delta) \Rightarrow x(0) \in \Omega(0, \beta) \Rightarrow x(t) \in \Omega(0, \beta) \Rightarrow x(t) \in B(0, r)$$

Part conséquent

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \forall t > 0$$

Ce qui signifie que le point d'équilibre $x = 0$ est stable.

Reste donc à montrer la stabilité asymptotique. Pour se faire, supposons donc

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0, x \in D \tag{1,10}$$

et montrons que $x \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est à dire : pour tout $a > 0$, il existe $T = T(a) > 0$ tel que $\|x(t)\| \leq a$, pour tout $t \geq T$. Par les mêmes arguments que précédemment, on sait que pour tout $t \geq 0$, on peut choisir $b > 0$ tel que $\Omega(0, b) \subset B(0, a)$.

Il suffit alors montrer que

$$V(x(t)) \rightarrow c > 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Comme $V(x(t))$ est décroissante et minorée par zéro, il vient que

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Pour montrer que $c = 0$, on supposera le contraire ($c > 0$). Par la continuité de $V(x)$, il existe $d > 0$ tel que $B(0, d) \subset \Omega(0, c)$. La limite $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ implique que la trajectoire $x(t)$ reste à l'extérieur de la boule $B(0, d)$ pour tout $t \geq 0$. Posons

$$-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$$

γ existe car \dot{V} est continue sur le compact $\{d \leq \|x\| \leq r\}$. Par l'hypothèse (1,10), nous avons $-\gamma < 0$, Il vient donc

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq (V(x(0)) - \gamma t) \rightarrow -\infty, \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse $c > 0$. ■

Exemple 1.2 *Un pendule sans frottement, figure (1.3) est modélisé par*

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (1.11)$$

L : Longueur du pendule = distance entre l'axe et le centre de gravité du pendule.

M : Masse du pendule.

g : Pesanteur.

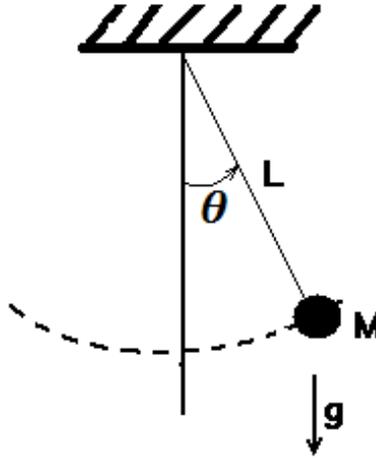


FIG. 1.2 – Un pendule sans frottement

Sa réécrit sous la forme d'un système d'ordre 1

En posant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$; l'équation (1.11) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre. La matrice Jacobienne s'écrit

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne au point $(0, 0)$:

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le point d'équilibre origine est donc non hyperbolique et le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Il est facile vérifier que l'énergie du système

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{L}(1 - \cos x_1)$$

est conservé le long de toute solution.

En effet on a :

$$\dot{E}(x_1, x_2) = x_2\dot{x}_2 + \frac{g}{L}\dot{x}_1 \sin x_1 = 0$$

D'après le théorème de Lyapunov on en déduit que 0 est stable.

Chapitre 2

Systemes différentiels d'ordre fractionnaire et leur stabilité

Dans ce chapitre, nous avançons un rappelle récapitulatif sur l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivé fractionnaire au sens de Caputo. Aussi, les théoremes de stabilité pour les systemes fractionnaires linéaires et non-linéaires sont présentés.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

2.1.1 Définition

L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de la fonction $f(t)$ est définie comme suit [62] :

$$(J^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

d'où Γ la fonction de Gamma, donnée par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, et $t \in [a, b]$. L'opérateur J^α , est défini sur $L^1[a, b]$, existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction $J^\alpha f$ elle même est un élément de $L^1[a, b]$ [63, 64].

2.1.2 Propriétés

1- Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a [65] :

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t), \quad (2.2)$$

2- La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire Riemann-Liouville est décrite comme suit :

$$\mathbf{L}\{J^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} \mathbf{F}(s), \quad (\alpha > 0), \quad (2.3)$$

d'où $\mathbf{L}\{f(t)\} = \mathbf{F}(s)$

Certaines propriétés de l'opérateur J^α peuvent être trouvés, par exemple, dans [66].

2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Il existe plusieurs définitions de dérivés fractionnaires. Dans les applications réelles, la dérivation au sens de Caputo est plus populaire puisque les conditions initiales non homogènes sont autorisées.

2.2.1 Définition

La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo [67] est définie par

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

i.e,

$${}^C D_t^p f(t) = J^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \quad (2.5)$$

2.2.2 Propriétés

1- L'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur

$${}^C D_t^\alpha [J_a^\alpha f(t)] = f(t), \quad (2.6)$$

mais il n'est pas un inverse droite

$$J_a^\alpha [{}^C D_t^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \quad (2.7)$$

3- La formule de transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par

$$\mathbf{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha \mathbf{F}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (\alpha > 0, \quad n-1 < \alpha \leq n), \quad (2.8)$$

d'où $\mathbf{L} \{ f(t) \} = \mathbf{F}(s)$.

en particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, nous avons

$$\mathbf{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha \mathbf{F}(s) - s^{\alpha-1} f(0). \quad (2.9)$$

Pour plus d'informations sur la dérivation fractionnaire au sens de Caputo voir [67].

2.3 Stabilité des systèmes fractionnaires

Soit donc le système différentiel fractionnaire :

$${}^C D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

d'où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $0 < \alpha_i < 1$ et $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.1 Le système (2.10) est dit commensurable si tous les ordres des dérivations sont égaux, i.e, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Sinon le système est dit non commensurable.

Définition 2.2 Les points d'équilibre du système (2.10) sont les solutions des équations $f_i(X(t)) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

2.3.1 Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

Soit le système fractionnaire linéaire suivant

$${}^C D_t^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

d'où $0 < \alpha_i < 1$. Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$ et M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Théorème 2.1 [68] Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, alors le système (2.11) est asymptotiquement stable ssi $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

La figure 2.1 montre les régions stable et instable selon les régions au-dessus.

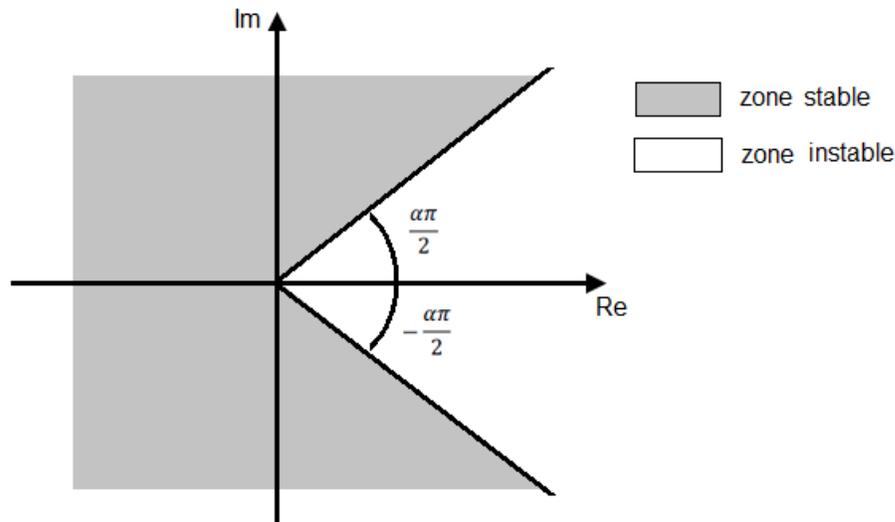


FIG. 2.1 – Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$

Exemple 2.1 Soit le système suivant

$$\begin{cases} {}^C D_t^{0.5}(x_1(t)) = -x_1(t), \\ {}^C D_t^{0.5}(x_2(t)) = \frac{1}{3}x_2(t). \end{cases} \quad (2.12)$$

la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi), \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}(\cos(\pi) + i \sin(\pi)),$$

Il est facile de voir que

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

D'après le théorème 2.1, le système (2.12) est asymptotiquement stable.

Théorème 2.2 [69] Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, alors le system (2.11) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0, \quad (2.13)$$

satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$.

Exemple 2.2 Soit le système suivant

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\frac{1}{3}} x_1(t) = -x_1(t), \\ {}^C D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = -x_2(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

Le multiple commun M de dénominateurs de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ est 6. L'équation caractéristique (2.13) est

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^{6 \times \frac{1}{3}} + 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{6 \times \frac{1}{2}} + 1 \end{pmatrix} = 0,$$

et ses racines sont données comme suit

$$\begin{cases} \lambda_1 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \lambda_2 = -i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \lambda_3 = -1 = \cos(\pi) + \mathbf{i} \sin(\pi), \\ \lambda_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \\ \lambda_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathbf{i} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$|\arg(\lambda_j)| > \frac{\pi}{2M} = \frac{\pi}{12}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

D'après le théorème 2.2, le système (2.14) est asymptotiquement stable.

2.3.2 Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires

Maintenant, considérons un système fractionnaire non linéaire donné par

$${}^C D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

d'où $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles secondes continues dans une boule centrée sur un point d'équilibre $x_e = 0$. Soit $Df(0)$ est la matrice jacobienne du système (2.15) à l'origine et M est le multiple commun des dénominateurs de α_i .

Théorème 2.3 [70] Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, alors le point d'équilibre x_e du système (2.15) est asymptotiquement stable ssi

$$|\arg(\operatorname{spec}(Df(0)))| > \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (2.16)$$

Théorème 2.4 [71] Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, alors le point d'équilibre x_e du système (2.16) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation

$$\det(\operatorname{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - Df(0)) = 0, \quad (2.17)$$

satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$.

Exemple 2.3 Soit le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\frac{1}{2}} x_1(t) = -x_2(t) + x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1), \\ {}^C D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = x_1(t) + x_2(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1), \end{cases} \quad (2.18)$$

Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$. La matrice jacobienne du système (2.18) à l'origine est donnée par

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$. Ce qui donne

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \frac{3}{4}\pi > \frac{1}{4}\pi$$

Par conséquent, l'origine est asymptotiquement stable.

2.3.3 Méthode de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires

Soit le système fractionnaire suivant

$${}^C D_t^\alpha X(t) = F(X(t)), \quad (2.19)$$

d'où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < p < 1$, et ${}^C D_t^p$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre p .

Théorème 2.5 [72] La solution triviale du système (2.19) est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction Lyapunov définie positive $V(X(t))$ telle que ${}^C D_t^\alpha (X(t)) < 0$ pour $t > 0$.

Lemme 2.1 [73] $\forall t > 0$:

$$\frac{1}{2} {}^C D_t^p (X^T(t) X(t)) \leq X^T(t) {}^C D_t^\alpha (X(t)). \quad (2.20)$$

Exemple 2.4 Soit le système non linéaire fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^p x_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t), \\ {}^C_0 D_t^p x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t), \end{cases} \quad (2.21)$$

avec $0 < p < 1$. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t), \quad (2.22)$$

La dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre p de (2.22) peut être décrit comme suit

$${}^C_0 D_t^p V(x_1(t), x_2(t)) = {}^C_0 D_t^p \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2} {}^C_0 D_t^p \frac{1}{2}x_2^4(t), \quad (2.23)$$

utilisant le Lemme 2.1 dans Eq. (2.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^p V(x_1(t), x_2(t)) &= \leq x_1(t) {}^C_0 D_t^p x_1(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t) {}^C_0 D_t^p \frac{1}{2}x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t) (-x_1(t) + x_2^2(t)) + x_2^3(t) {}^C_0 D_t^p x_2(t) = -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0. \end{aligned}$$

Selon le Théorème 2.5, l'origine du le système (2.21) est asymptotiquement stable.

Chapitre 3

Synchronisation

Le but de ce chapitre est de présenter, quelque types de synchronisation et la méthode du contrôleur actif.

3.1 Systèmes maître et esclave

On considère le système suivant

$$D^p X(t) = F(X(t)), \quad (3.1)$$

d'où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ est l'état du système (3.1), $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < p \leq 1$ et D_t^p est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre p . Le système (3.1) est appelé *un système maître*.

Et un autre système donné par

$$D^q Y(t) = G(Y(t)) + U, \quad (3.2)$$

d'où $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ est l'état du système (3.2), $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < q \leq 1$, D_t^q est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q et $U \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de contrôle à déterminer. Le système (3.2) est appelé *un système esclave*.

3.2 Types de synchronisation

3.2.1 Synchronisation complète

Définition 3.1 [74] *Le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0. \quad (3.3)$$

d'où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Remarque 3.1 Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Remarque 3.2 Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

3.2.2 Anti-Synchronisation

Définition 3.2 [75] *Le problème d'anti-synchronisation est de trouver U de sorte que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0. \quad (3.4)$$

3.2.3 Synchronisation projective

Définition 3.3 [76] *On dit qu'on a une **synchronisation projective** entre les systèmes (3.1) et (3.2), s'il existe une matrice diagonale $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$, tels que :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - H \times X(t)\| = 0. \quad (3.5)$$

Remarque 3.3 Le cas où tous les h_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.

Remarque 3.4 Le cas où tous les h_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation.

3.2.4 Synchronisation généralisée

Définition 3.4 [77] S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0, \quad (3.6)$$

alors, les systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ .

Remarque 3.5 La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective.

Remarque 3.6 Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(t)) = \Lambda X(t)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{n \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective** [78].

3.2.5 Synchronisation inverse généralisée

Définition 3.5 [79] S'il existe un contrôleur U et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \varphi(Y(t))\| = 0, \quad (3.7)$$

alors, les systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent au sens inverse généralisé par rapport à la fonction φ .

Remarque 3.7 Si la fonction φ est définie par $\varphi(Y(t)) = \theta Y(t)$ tel que $\theta = (\theta_{ij})_{n \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **inverse full-state hybrid projective** [80].

3.2.6 Synchronisation Q-S

Définition 3.6 [81] Nous disons que les systèmes (3.1) et (3.2) sont en synchronisation $Q - S$ dans la dimension d , s'il existe un contrôleur U et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q(X(t)) - S(Y(t))\| = 0. \quad (3.8)$$

Remarque 3.8 La synchronisation $Q-S$ est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

3.3 La méthode du contrôleur actif

La méthode du contrôleur actif est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques avec des dimensions différentes [82, 83]. Soit deux systèmes à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$D_t^p X(t) = F(X(t)), \quad (3.9)$$

et

$$D_t^p Y(t) = G(Y(t)) + U, \quad (3.10)$$

d'où $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < p \leq 1$, D_t^p est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordres p et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.11)$$

alors,

$$\begin{aligned} D_t^p e(t) &= D_t^p Y(t) - D_t^p X(t) \\ &= G(Y(t)) - F(X(t)) + U. \end{aligned}$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)), \quad (3.12)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$D_t^p e(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U, \quad (3.13)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = \mathbf{V} - N(X(t), Y(t)), \quad (3.14)$$

d'où \mathbf{V} est le **contrôleur actif**, défini par :

$$\mathbf{V} = -Le(t), \quad (3.15)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$D_t^p e(t) = (A - L)e(t). \quad (3.16)$$

Théorème 3.1 *Le système maître (3.9) et le système esclave (3.10) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôle (3.14) si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que :*

(i) *les valeurs propres de $A - L$ sont toutes à partie réelle strictement négative, si $p = 1$.*

(ii) *$|\arg(\text{spec}(A - L))| > p\frac{\pi}{2}$, si $0 < p < 1$.*

Chapitre 4

Coexistence de la synchronisation généralisée et la synchronisation inverse généralisée

Basé sur la méthode de Lyapunov classique et l'approche fractionnaire de Lyapunov, le présent chapitre expose quelques nouveaux schémas pour étudier la coexistence de la synchronisation généralisée (GS) et de synchronisation inverse généralisée (IGS) entre des systèmes d'ordre fractionnaire et des systèmes d'ordre entier avec des dimensions différentes.

4.1 Synchronisation entre un système maître d'ordre fractionnaire et un système esclave d'ordre entier

Dans ce cas, considérons le système maître sous la forme suivante

$$\begin{cases} D_t^{p_1} x_1(t) = f_1(X(t)), \\ D_t^{p_2} x_2(t) = f_2(X(t)), \\ D_t^{p_3} x_3(t) = f_3(X(t)), \end{cases} \quad (4.1)$$

d'où $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ est le vecteur d'état du système maître (4.1), $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < p_i < 1$, et $D_t^{p_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre p_i ($i = 1, 2, 3$).

Comme système esclave, nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \sum_{j=1}^4 b_{1j} y_j(t) + g_1(Y(t)) + u_1, \\ \dot{y}_2(t) = \sum_{j=1}^4 b_{2j} y_j(t) + g_2(Y(t)) + u_2, \\ \dot{y}_3(t) = \sum_{j=1}^4 b_{3j} y_j(t) + g_3(Y(t)) + u_3, \\ \dot{y}_4(t) = \sum_{j=1}^4 b_{4j} y_j(t) + g_4(Y(t)) + u_4, \end{cases} \quad (4.2)$$

d'où $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))^T$ est le vecteur d'état du système esclave (4.2), $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, 3, 4$), sont des fonctions non linéaires et u_i , $1 \leq i \leq 4$, sont des contrôleurs.

Définition 4.1 Nous disons que la synchronisation inverse généralisée (IGS) et la synchronisation généralisée (GS) co-existe entre les systèmes (4.1) et (4.2), s'il existe des contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq 4$, et des fonctions différentiables $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_1(t) = \varphi_1(Y(t)) - x_1(t), \\ e_2(t) = y_2(t) - \phi_1(X(t)), \\ e_3(t) = \varphi_2(Y(t)) - x_3(t), \\ e_4(t) = y_4(t) - \phi_2(X(t)), \end{cases} \quad (4.3)$$

vérifie que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$, $1 \leq i \leq 4$.

Le système d'erreur (4.3) peut être dérivé comme suit

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \dot{y}_j - \dot{x}_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = \dot{y}_2(t) - \frac{d}{dt} \phi_1(X(t)), \\ \dot{e}_3(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_j} \dot{y}_j - \dot{x}_3(t), \\ \dot{e}_4(t) = \dot{y}_4(t) - \frac{d}{dt} \phi_2(X(t)). \end{cases} \quad (4.4)$$

Le système d'erreur (4.4) peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} u_j + R_1, \\ \dot{e}_2(t) = u_2 + R_2, \\ \dot{e}_3(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_j} u_j + R_3, \\ \dot{e}_4(t) = u_4 + R_4, \end{cases} \quad (4.5)$$

d'où

$$\begin{cases} R_1 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} \left(\sum_{i=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_j(Y(t)) \right) - \dot{x}_1(t), \\ R_2 = \sum_{j=1}^4 b_{2j} y_j(t) + g_2(Y(t)) - \frac{d}{dt} \phi_1(X(t)), \\ R_3 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_j} \left(\sum_{i=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_j(Y(t)) \right) - \dot{x}_3(t), \\ R_4 = \sum_{j=1}^4 b_{4j} y_j(t) + g_4(Y(t)) - \frac{d}{dt} \phi_2(X(t)). \end{cases} \quad (4.6)$$

Le système d'erreur (4.6) peut être écrit sous la forme compacte comme suit

$$\dot{e}(t) = R - \mathbf{M} \times U, \quad (4.7)$$

d'où $\dot{e}(t) = [\dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \dot{e}_3(t), \dot{e}_4(t)]^T$, $R = (R_i)_{1 \leq i \leq 4}$, $U = (u_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Théorème 4.1 SIG et SG co-existe entre les systèmes (4.1) et (4.2) sous la loi de contrôle suivante

$$U = \mathbf{M}^{-1} ((B - C) e(t) - R), \quad (4.9)$$

d'où $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ est une matrice constante de contrôle et \mathbf{M}^{-1} est la matrice inverse de (4.8)

Preuve. En substituant Eq. (4.9) dans Eq. (4.7), le système d'erreur entre les systèmes (4.1) et (4.2) peut être donné sous la forme

$$\dot{e}(t) = (B - C) e(t). \quad (4.10)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e(t)) = e^T(t) e(t), \quad (4.11)$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t) e(t) + e^T(t) \dot{e}(t) \\ &= e^T(t) (B - C)^T e(t) + e^T(t) (B - C) e(t) \\ &= e^T(t) \left((B - C)^T + (B - C) \right) e(t), \end{aligned}$$

si nous sélectionnons la matrice de contrôle C telle que $(B - C)^T + (B - C)$ une matrice définie négative, on obtient $\dot{V}(e(t)) < 0$. Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$, ($1 \leq i \leq 4$). Par conséquent, les systèmes (4.1) et (4.2) sont globalement synchronisés. ■

En utilisant le Théorème 1.1, on peut conclure le résultat suivant.

Proposition 4.1 *Le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (4.9), si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $B - C$ sont des parties réelle négative.*

4.2 Synchronisation entre un système maître d'ordre entier et un système esclave d'ordre fractionnaire

Maintenant, le système maître et le système esclave sont donnés par

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j(t) + f_1(X(t)), \\ x_2(t) = \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j(t) + f_2(X(t)), \\ x_3(t) = \sum_{j=1}^3 a_{3j} x_j(t) + f_3(X(t)), \end{cases} \quad (4.12)$$

et

$$\begin{cases} D_t^q y_1(t) = g_1(Y(t)) + u_1, \\ D_t^q y_2(t) = g_2(Y(t)) + u_2, \\ D_t^q y_3(t) = g_3(Y(t)) + u_3, \\ D_t^q y_4(t) = g_4(Y(t)) + u_4, \end{cases} \quad (4.13)$$

d'où $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ et $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))^T$ sont les vecteur d'état du système maître (4.12) et du système esclave (4.13), respectivement, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, 3$), sont des fonctions non linéaires, $0 < q < 1$, D_t^q est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q , $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ et u_i , $1 \leq i \leq 4$, sont des contrôleurs.

Définition 4.2 Nous disons que la synchronisation généralisée (GS) et la synchronisation inverse généralisée (IGS) co-existe entre les systèmes (4.12) et (4.13), s'il existe des contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq 4$, et des fonctions différentiables $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1(t) - \psi_1(X(t)), \\ e_2(t) = \chi(Y(t)) - x_2(t), \\ e_3(t) = y_3(t) - \psi_2(X(t)), \end{cases} \quad (4.14)$$

vérifie que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$, $1 \leq i \leq 3$.

Le système d'erreur (4.14) peut être différencié comme suit :

$$\begin{cases} D_t^q e_1(t) = D_t^q y_1(t) - D_t^q \psi_1(X(t)), \\ \dot{e}_2(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi}{\partial y_j} \dot{y}_j - \dot{x}_2(t), \\ D_t^q e_3(t) = D_t^q y_3(t) - D_t^q \psi_2(X(t)), \end{cases} \quad (4.15)$$

Le système d'erreur (4.16) peut être décrit comme suit

$$D_t^q e_i(t) = T_i + u_i, \quad i = 1, 3, \quad (4.16)$$

et

$$\dot{e}_2(t) = \frac{\partial \chi}{\partial y_2} \dot{y}_2 + T_2, \quad (4.17)$$

d'où

$$\begin{cases} T_1 = g_1(Y(t)) - D_t^q \psi_1(X(t)), \\ T_2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \frac{\partial \chi}{\partial y_j} \dot{y}_j - \dot{x}_2(t), \\ T_3 = g_3(Y(t)) - D_t^q \psi_2(X(t)). \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour obtenir une synchronisation entre les systèmes (4.12) et (4.13), nous supposons que $\frac{\partial \chi}{\partial y_2} \neq 0$. Par conséquent, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.2 SG et SIG co-existe entre les systèmes (4.12) et (4.13) sous la loi de contrôle suivante

$$(u_1, u_3)^T = (T_1, T_3)^T + (A - L)(e_1(t), e_3(t))^T, \quad (4.19)$$

$$u_2 = -g_2(Y(t)) + J^{1-q} \left[\frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial y_2}} ((a_{22} - l) e_2(t) - T_2) \right], \quad (4.20)$$

et $u_4 = 0$, d'où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{13} \\ l_{31} & l_{33} \end{pmatrix}$ est une matrice de contrôle et l est une constante de contrôle.

Preuve. En substituant Eq. (4.19) dans Eq. (4.16), on obtien

$$D_t^q \hat{e}(t) = (A - L) e(t), \quad (4.21)$$

d'où $\hat{e}(t) = (e_1(t), e_3(t))^T$. Si la fonction de Lyapunov est choisie comme suivant :

$$V(\hat{e}(t)) = \frac{1}{2} \hat{e}^T(t) \hat{e}(t). \quad (4.22)$$

Alor, la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre q de (4.22) peut être décrit comme suit

$$D_t^q V(\hat{e}(t)) = D_t^q \left(\frac{1}{2} \hat{e}^T(t) \hat{e}(t) \right), \quad (4.23)$$

utilisant le Lemme 2.1 dans Eq. (4.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} D_t^q V(\hat{e}(t)) &\leq \hat{e}^T(t) D_t^q \hat{e}(t) \\ &= \hat{e}^T(t) (A - L) \hat{e}(t). \end{aligned}$$

Si nous sélectionnons la matrice de contrôle L telle que $A - L$ est une matrice définie négative, on obtient $D_t^q V(\hat{e}(t)) < 0$. Ensuite, selon le Théorème 2.6, le système d'erreur (4.21) est asymptotiquement stable i.e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0. \quad (4.24)$$

Maintenant, en utilisant Eq. (4.20), on peut réécrire l'état $y_2(t)$ du système esclave comme suit :

$$D_t^q y_2(t) = J^{1-q} \left[\frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial y_2}} ((a_{22} - l) e_2(t) - T_2) \right]. \quad (4.25)$$

L'application de la transformée de Laplace à Eq. (4.25), nous donne

$$s^q \mathbf{F}(s) - s^{q-1} y_2(0) = s^{q-1} \mathbf{L} \left(\frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial y_2}} ((a_{22} - l) e_2(t) - T_2) \right), \quad (4.26)$$

d'où $\mathbf{F}(s) = \mathbf{L}(y_2(t))$. Multipliant Eq. (4.26) par s^{1-q} et par l'application de la transformée de Laplace inverse au résultat, nous obtenons

$$\dot{y}_2(t) = \frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial y_2}} ((a_{22} - l) e_2(t) - T_2). \quad (4.27)$$

En substituant Eq. (4.27) dans Eq. (4.17), la dynamique de l'erreur $e_2(t)$ peut être écrite comme

$$\dot{e}_2(t) = (a_{22} - l) e_2(t). \quad (4.28)$$

Si la constante de contrôle l est choisie de telle sorte que $a_{22} - l < 0$, alors nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0. \quad (4.29)$$

Nous concluons que le système maître (4.12) et le système esclave (4.13) sont globalement synchronisés. ■

En utilisant le Théorème 1.2, on peut conclure le résultat suivant.

Proposition 4.2 *Si le système esclave est donné par*

$$D_t^{q_i} y_1(t) = g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.30)$$

d'où $0 < q_i < 1$, alors la matrice de contrôle L est choisie de telle sorte que l'équation

$$\det(\text{diag}(\lambda^{Mq_1}, \lambda^{Mq_3}) + L - A) = 0, \quad (4.31)$$

soit vérifiée, d'où M est le multiple commun des dénominateurs de q_1 et q_3 .

4.3 Exemples numériques

4.3.1 Exemple 1

Dans cet exemple, nous considérons le système fractionnaire de Lü [84] comme système maître et le système de Zhang-Shen [85] comme système esclave. Le système maître est décrit comme suit :

$$\begin{cases} D^{p_1} x_1 = \alpha(x_2 - x_1), \\ D^{p_2} x_2 = \gamma x_2 - x_1 x_3, \\ D^{p_3} x_3 = -\beta x_3 + x_1 x_2, \end{cases} \quad (4.32)$$

d'où $(\alpha, \beta, \gamma) = (36, 3, 20,)$ et $(p_1, p_2, p_3) = (0.985, 0.99, 0.98)$. Portraits de phase en 3-D et 2-D du système fractionnaire de Lü sont présentés dans la figure 4.1

Le système esclave est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 - y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 y_3^2 + u_2, \\ \dot{y}_3 = by_3 - y_2 - 6y_4 + u_3, \\ \dot{y}_4 = y_3 + cy_4 + u_4, \end{cases} \quad (4.33)$$

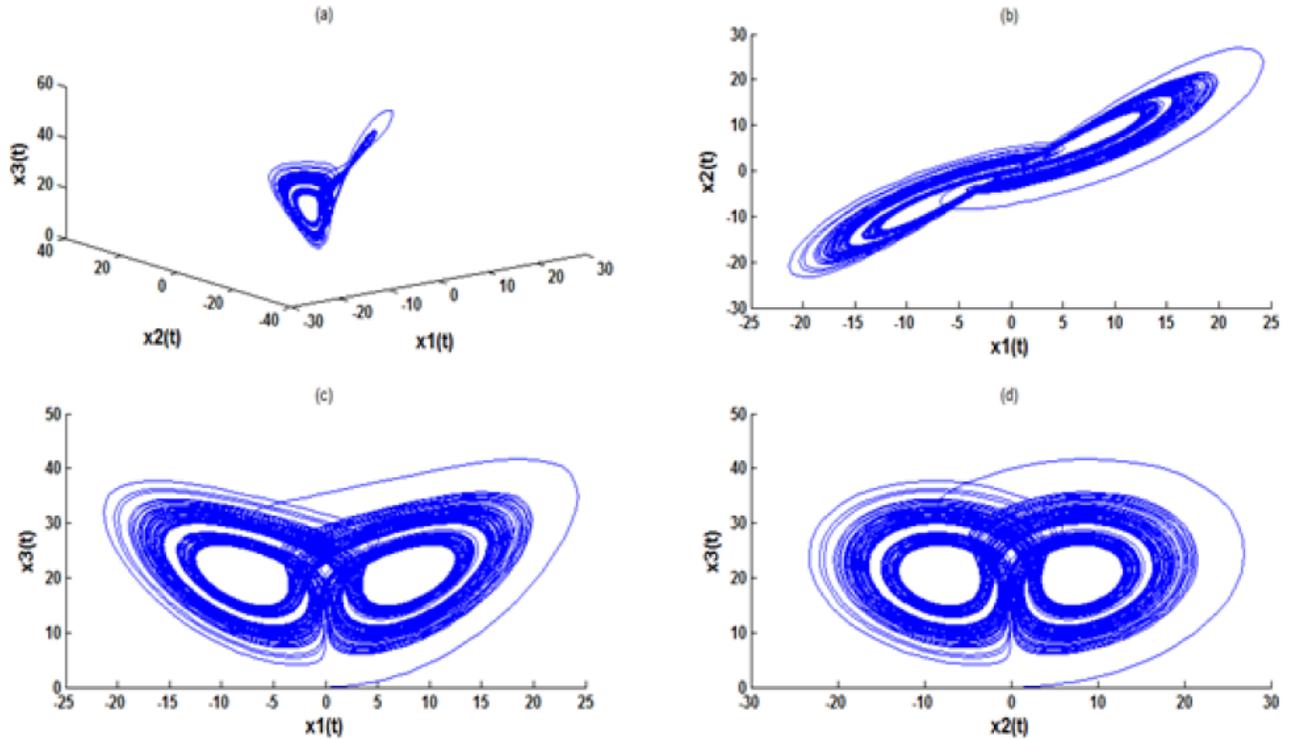


FIG. 4.1 – Portraits de phase en 3-D et 2-D du système (4.32).

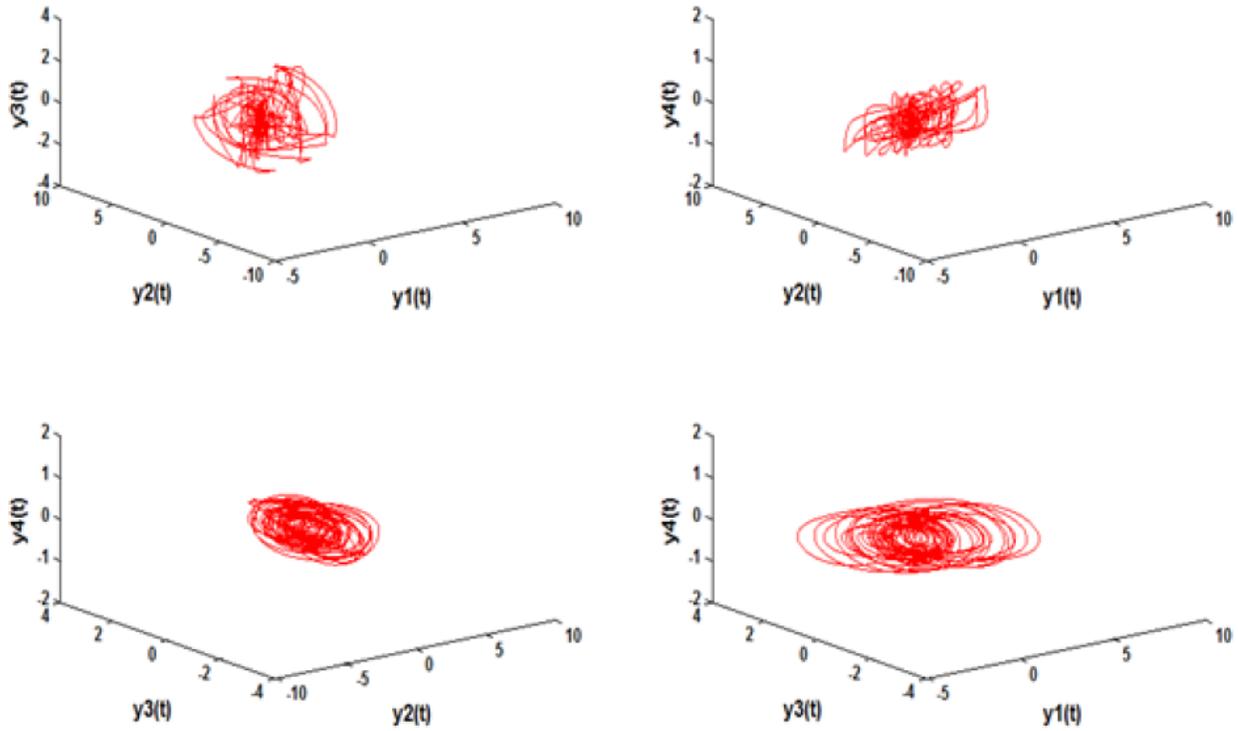
d'où u_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sont des contrôleurs et $(a, b, c) = (0.56, -1, 0.8)$. Portraits de phase en 3-D du système de Zhang-Shen sont présentés dans la figure 4.2

Comparez le système (4.33) avec le système (4.1), on peut avoir

$$B = (b_{ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0.56 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad (g_i)_{1 \leq i \leq 4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_2 y_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basé sur les notations présentées dans la section 4.1, les erreurs entre le système maître (4.32) et le système esclave (4.33) sont données comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = \varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) - x_1, \\ e_2 = y_2 - \phi_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_3 = \varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) - x_3, \\ e_4 = y_4 - \phi_2(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (4.34)$$


 FIG. 4.2 – Portraits de phase en 3-D du système (4.33) lorsque $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$

d'où

$$\begin{cases} \varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = 2y_1 + 4, \\ \phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3, \\ \varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = 3y_3, \\ \phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases} \quad (4.35)$$

Ainsi, la matrice M définie par (4.8) est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Dans ce cas, la matrice de contrôle C est sélectionné comme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Selon le Théorème 4.1, les contrôleurs $u_i, i = 1, 2, 3, 4$, peuvent être construits comme suit

$$\begin{cases} u_1 = -0.22e_1 - (ay_1 - y_2) + \frac{1}{2}\dot{x}_1, \\ u_2 = -e_2 - y_1 + y_2y_3^2 + \dot{x}_1x_2x_3 + x_1\dot{x}_2x_3 + x_1x_2\dot{x}_3, \\ u_3 = -\frac{1}{3}e_3 - (by_3 - y_2 - 6y_4) + \frac{1}{3}\dot{x}_3, \\ u_4 = -0.2e_4 - y_3 - cy_4 + \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3. \end{cases} \quad (4.39)$$

On peut voir que $(B - C)^T + (B - C)$ est une matrice définie négative. Par conséquent, le système maître (4.32) et le système esclave (4.33) sont globalement synchronisés en 4-D. Le système d'erreur peut être décrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -0.44e_1, \\ \dot{e}_2 = -e_2, \\ \dot{e}_3 = -e_3, \\ \dot{e}_4 = -0.2e_4. \end{cases} \quad (4.40)$$

La figure 4.3, montre l'évolution des erreurs de synchronisation e_1, e_2, e_3 et e_4 .

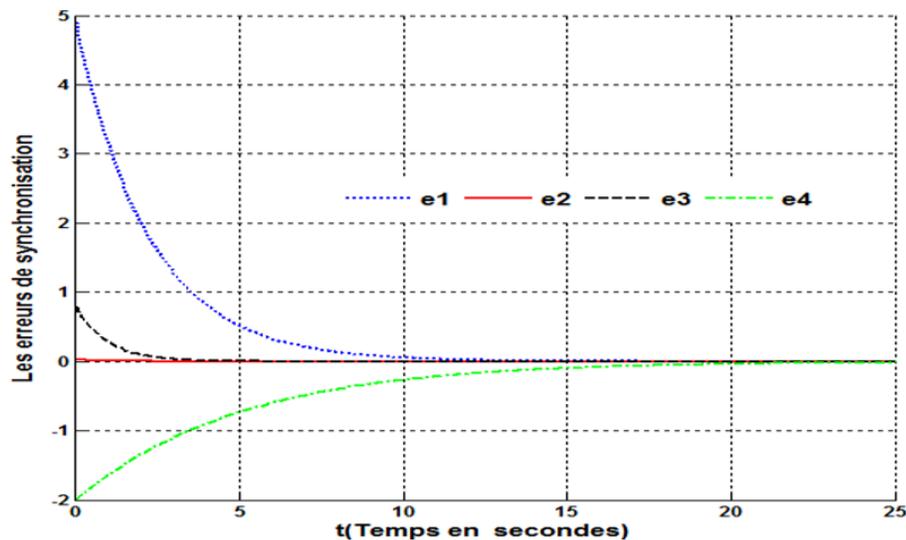


FIG. 4.3 – L'évolution des erreurs entre les systèmes (4.32) et (4.33).

4.3.2 Exemple 2

Maintenant, nous considérons que le système de Chen [86] comme système maître et le système fractionnaire de Liu [87] comme système esclave. Le système maître est défini comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (\gamma - \alpha)x_1 + \gamma x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = \beta x_3 + x_1 x_2. \end{cases} \quad (4.41)$$

d'où $\alpha = 35$, $\beta = -3$ et $\gamma = 28$. Portraits de phase en 3-D et 2-D du système de Chen sont présentés dans la figure 4.4.

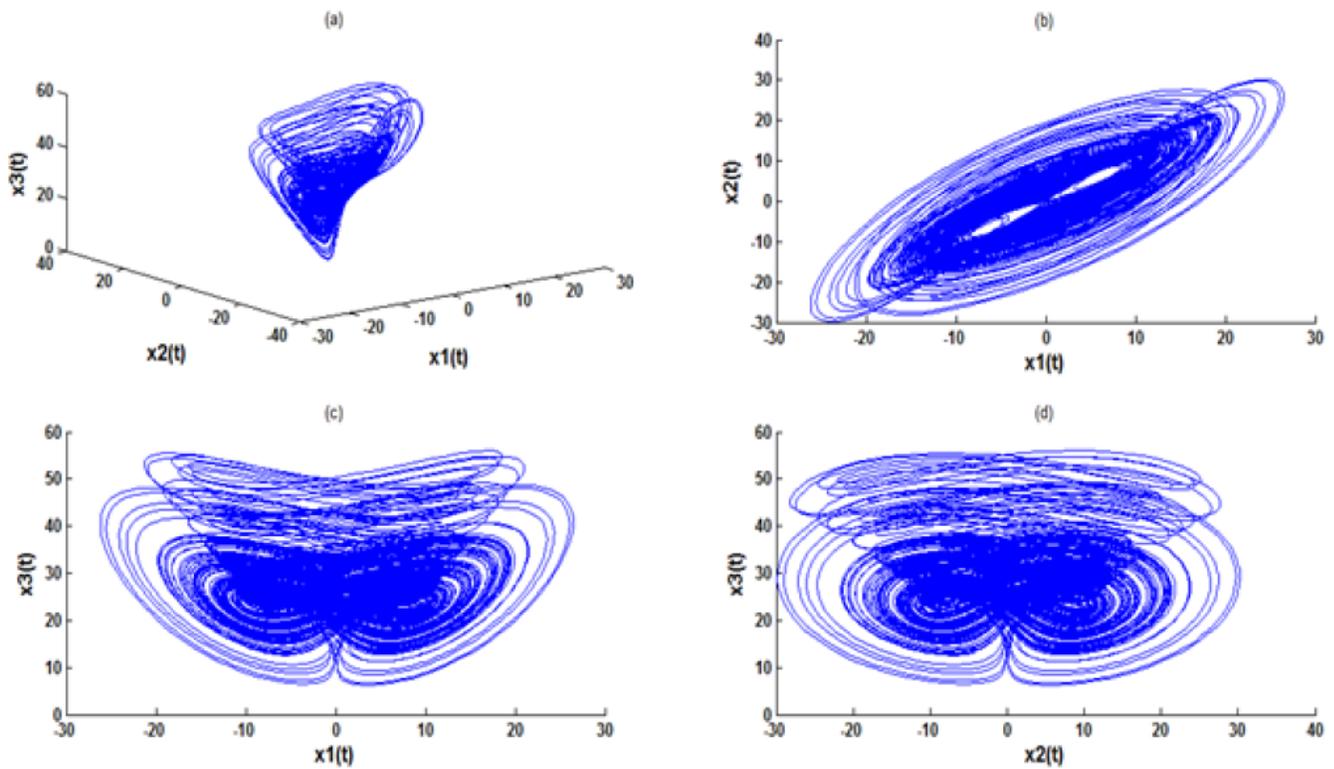


FIG. 4.4 – Portraits de phase en 3-D et 2-D du système (4.41).

Le système esclave est défini comme suit

$$\begin{cases} D^q y_1 = b_1(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ D^q y_2 = b_2 y_1 + 0.5 y_4 - y_1 y_3 + u_2, \\ D^q y_3 = -b_3 y_3 - y_4 + 4 y_1^2 + u_3, \\ D^q y_4 = -b_4 y_2 - y_4 + u_4, \end{cases} \quad (4.42)$$

d'où u_i , $1 \leq i \leq 4$, sont des contrôleurs, $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (10, 40, 2.5, \frac{10}{15})$ et $q = 0.9$. Portraits de phase en 3-D du système de Liu sont présentés dans la figure 4.5.

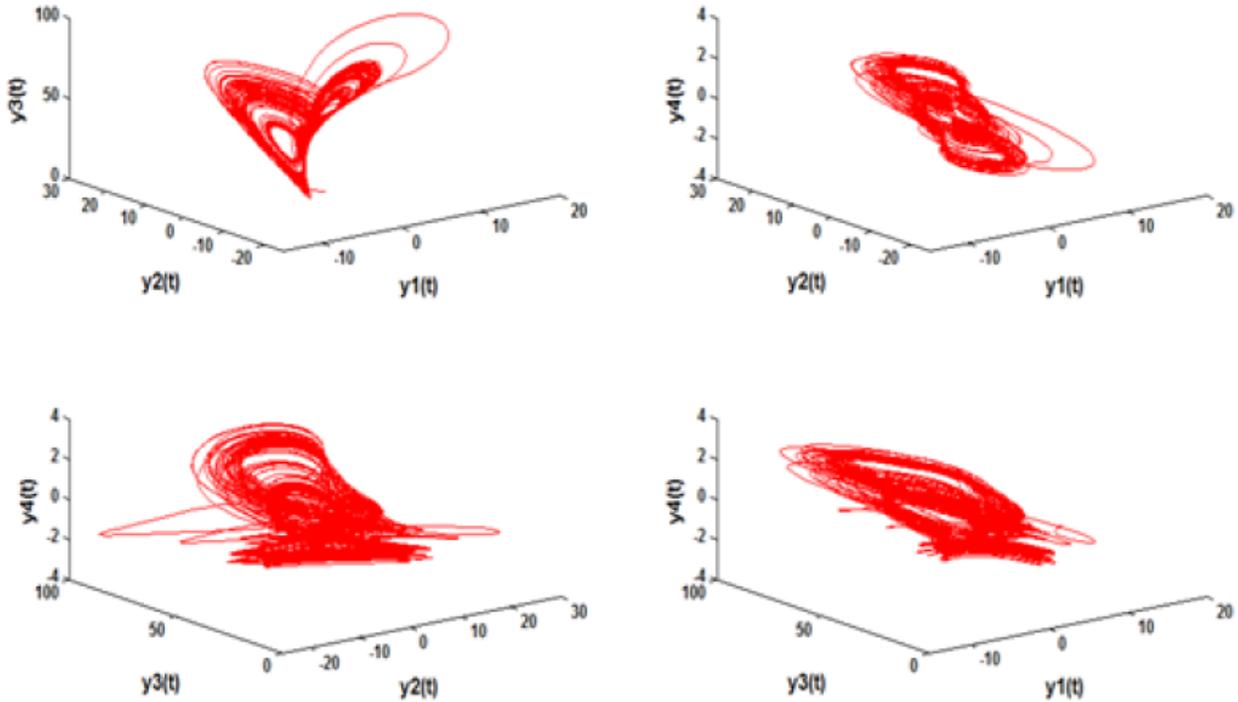


FIG. 4.5 – Portraits de phase en 3-D du système (4.42) lorsque $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$.

En utilisant les notations décrites dans la section 4.2, les erreurs entre le système maître (4.41) et le système esclave (4.42) sont définis comme

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_2 = \chi(y_1, y_2, y_3, y_4) - x_2, \\ e_3 = y_3 - \psi_2(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (4.43)$$

d'où

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3, \\ \chi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_2 + y_1 y_3 y_4, \\ \psi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3. \end{cases}$$

Ainsi, la matrice A et la constante a_{22} sont données par

$$A = \begin{pmatrix} -35 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad a_{22} = 28.$$

Selon le Théorème 4.2, il existe une matrice de contrôle L et une constante de contrôle l de telles sorte que les systèmes (4.41) et (4.42) sont synchronisés. Dans ce cas, la matrice de contrôle L et la constante de contrôle l sont choisies comme suit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 30.$$

Les contrôleurs u_1, u_2, u_3 et u_4 peuvent être construits comme suit

$$\begin{cases} u_1 = -36e_1 - b_1(y_2 - y_1) - y_4 - D_t^{0.1}(x_1 + x_2x_3), \\ u_2 = -b_2y_1 - 0.5y_4 + y_1y_3 + J^{0.1}(-36e_2(t) - y_3y_4\dot{y}_1 - y_1y_4\dot{y}_3 - y_1y_3\dot{y}_4), \\ u_3 = -4e_3 + b_3y_3 + y_4 - 4y_1^2 - D_t^{0.1}(x_1x_2 + x_3), \\ u_4 = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Il est facile de montrer que $A - L$ une matrice définie négative et $a_{22} - l < 0$. Par conséquent, le système maître (4.41) et le système esclave (4.42) sont globalement synchronisés en 3-D et le système d'erreur peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} D_t^{0.9}e_1 = -10e_1, \\ D_t^{0.9}e_3 = -2.5e_3, \end{cases} \quad (4.45)$$

et

$$\dot{e}_2 = -e_2. \quad (4.46)$$

Les résultats numériques sont présentés dans les figures 4.6 et 4.7.

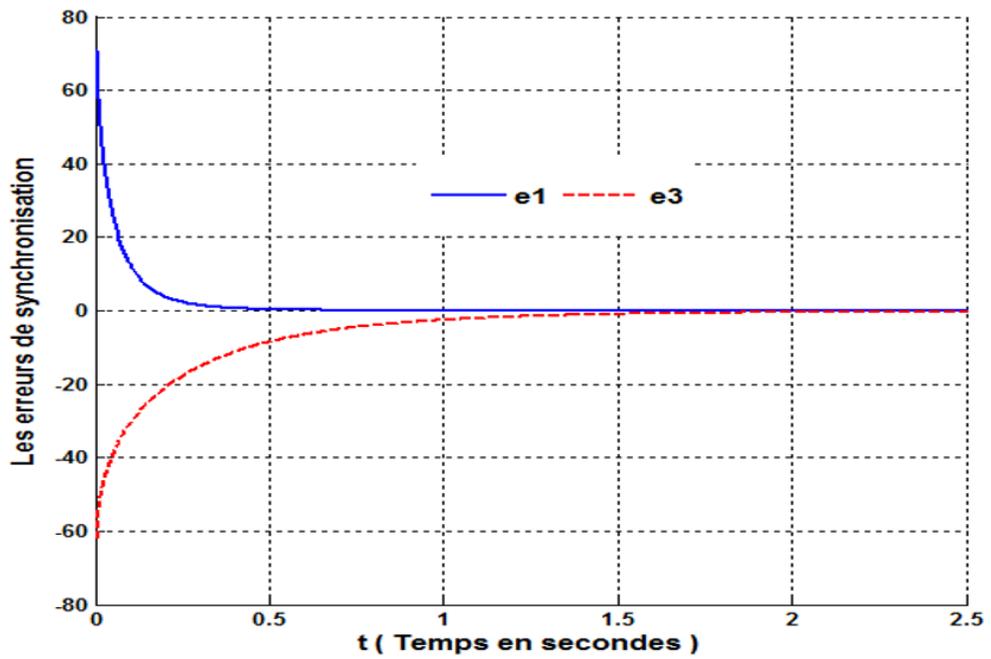


FIG. 4.6 – Évolution des erreurs e_1 et e_3 du système (4.45).

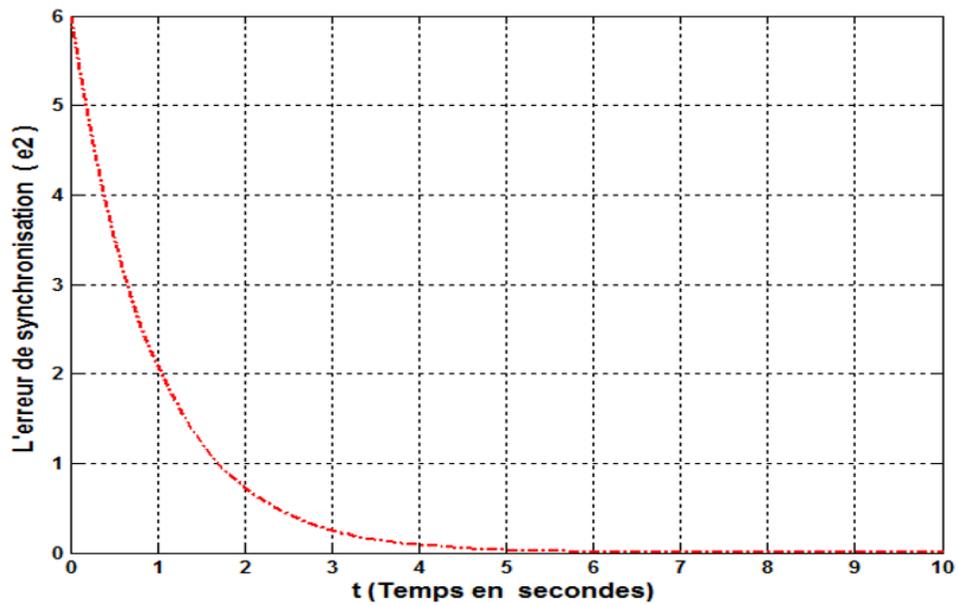


FIG. 4.7 – Évolution de l'erreur e_2 .

Conclusion générale

Pour arriver aux buts visés, nous avons commencé par présenter des chapitres préliminaires sur la stabilité des systèmes différentiels d'ordre entier et les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire, puis nous sommes passé à la théorie de synchronisation en évoquant les type de synchronisation et la méthode du contrôleur actif.

D'après la présentation de nos résultats, nous sommes parvenus à :

- 1- Nous pouvons trouver d'autres critères de synchronisation
- 2- Il est possible d'observer et de développer de nouveaux types de synchronisation généralisée.
- 3- Basé sur des théorèmes simples à vérifier, les approches proposées sont rigoureuse.
- 4- La complexité des schémas proposés dans ce mémoire, peut utilisés dans la sécurité des communications et la cryptographie.

Nos futurs travaux seront concentrés sur la recherche de nouveaux critères de synchronisation, qui sont moins coûteux et très compliqué.

Bibliographie

- [1] L.M. Pecora and T.L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 8, pp. 821–827, 1990.
- [2] M. A. Aziz-Alaoui, “Synchronization of chaos,” *Encyclopedia of Mathematical Physics*, vol. 5, pp. 213-226, 2006.
- [3] A. Luo, “A theory for synchronization of dynamical systems,” *Communication in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 14, pp. 1901–1951, 2009.
- [4] A. Ouannas, M. M. Al-sawalha and T. Ziar, “Fractional chaos synchronization schemes for different dimensional systems with non-Identical fractional-orders via two scaling matrices,” *Optik*, vol. 127, pp. 8410–8418, 2016.
- [5] A. Ouannas, G. Grassi, T. Ziar, and Z. Odibat, “On a function projective synchronization scheme between non-identical fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems with different dimensions and orders,” *Optik*, vol. 136, pp. 513–523, 2017.
- [6] P. Muthukumar, P. Balasubramaniam, and K. Ratnavelu, “Sliding mode control design for synchronization of fractional order chaotic systems and its application to a new cryptosystem,” *International Journal of Dynamics and Control* (2015). doi :10.1007/s40435-015-0169-y, 2015.
- [7] L. X. Jia, D. Hao, and H. Meng, “Nonlinear feedback synchronisation control between fractional-order and integer-order chaotic systems,” *Chinese Physics B*, vol. 19, no. 11, pp. 110509, 2010.
- [8] P. Zhou, Y. M. Cheng, and F. Kuang, “Synchronization between fractional-order chaotic systems and integer orders chaotic systems (fractional-order chaotic systems),” *Chinese Physics B*, vol. 19, no. 9, pp. 090503, 2010.

- [9] L. X. Yang, W. S. He, and X. J. Liu, "Synchronization between a fractional-order system and an integer order system," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 12, pp. 4708–4716, 2011.
- [10] G. Q. Si, Z. Y. Sun, and Y. B. Zhang, "A general method for synchronizing an integer-order chaotic system and a fractional-order chaotic system," *Chinese Physics B*, vol. 20, no. 8, pp. 080505, 2011.
- [11] D. Y. Chen, R. F. Zhang, J. C. Sprott, and X. Y. Ma, "Synchronization between integer-order chaotic systems and a class of fractional-order chaotic system based on fuzzy sliding mode control," *Nonlinear Dynamics*, vol. 70, no. 2, pp. 1549–1561, 2012.
- [12] D. Y. Chen, R. F. Zhang, X. Y. Ma, and J. Wang, "Synchronization between a novel class of fractional-order and integer-order chaotic systems via a sliding mode controller," *Chinese Physics B*, vol. 21, no. 12, pp. 120507, 2012.
- [13] Y. P. Wu and G. D. Wang, "Synchronization between fractional-order and integer-order hyperchaotic systems via sliding mode controller," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013 (2013) Article ID 151025.
- [14] Y. P. Wu and G. D. Wang, "Synchronization of a class of fractional-order and integer order hyperchaotic systems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 20, no. 10, pp. 1584–1588, 2013.
- [15] D. Y. Chen, C. Wu, H. H. C. Iu, and X. Y. Ma, "Circuit simulation for synchronization of a fractional-order and integer-order chaotic system," *Nonlinear Dynamics*, vol. 73, no. 3, pp. 1671–1686, 2013.
- [16] I. El Gammoudi and M. Feki, "Synchronization of integer order and fractional order chua's systems using robust observer," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 3, pp. 625–638, 2013.
- [17] P. Z. Dong, G. Shang, and J. Liu, "Anticipating synchronization of integer order and fractional order hyperchaotic chen system," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 26, no. 32, pp. 1250211-8, 2012.
- [18] P. Zhou, Y. X. Cao, "Function projective synchronization between fractional-order chaotic systems and integer-order chaotic systems," *Chinese Physics B*, vol. 19, no.10, pp. 100507-6, 2010.
- [19] A. Khan, P. Tripathi, "Synchronization between a fractional order chaotic system and an integer order chaotic system," *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 13, no. 4, pp. 425–436, 2013.

- [20] Y. P. Wu and G. D. Wang, "Synchronization and anti-synchronization between a class of fractional-order and integer-order chaotic systems with only one controller term," *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, vol. 48, no. 1, pp. 145–151, 2013.
- [21] A. Ouannas and R. Abu-Saris, "A robust control method for Q-S synchronization between different dimensional integer-order and fractional-order chaotic systems," *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2015 (2015) ID 703753.
- [22] A. Ouannas and A. Karouma, "Different generalized synchronization schemes between integer-order and fractional-order chaotic systems with different dimensions," *International Journal of Differential Equations and Dynamical Systems*, pp. 13, 2016.
- [23] A. Ouannas, A.T. Azar, R. Abu-Saris, "A new type of hybrid synchronization between arbitrary hyperchaotic maps," *International journal of Learning Machin and Cybernetic*, pp. 1-8, Doi : 10.1007/s13042-016-0566-3.
- [24] A. Ouannas and G. Grassi, "A new approach to study co-existence of some synchronization types between chaotic maps with different dimensions," *Nonlinear Dynamics*, vol 1-8, 2016
- [25] A. Ouannas , A.T. Azar , S. Vaidyanathan, "New hybrid synchronization schemes based on co-existence of various types of synchronization between master-slave hyperchaotic systems," *International Journal of Computer Applications in Technology*, vol. 55, no. 2, pp. 112–120, 2017.
- [26] A. Ouannas, A.T. Azar, S. Vaidyanathan, A robust method for New fractional hybrid chaos synchronization, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pp.1-9, Doi : 10.1002/wwa.4009.
- [27] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).
- [28] C. Bennani stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non lineaires et applicatios memoire de magister Tizi-ouazou 2011
- [29] A. IKHLEF Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications thèse doctorat 2011
- [30] I Podlubny (1999) *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York.
- [31] S. Sastry. *Nonlinear Systems : Analysis, Stability and, Control*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [32] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.

- [33] M. Wellbeer, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their Analytical Background, D. Univ Braunschweig, (2010).
- [34] KB Oldham, J Spanier (1974) The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [35] R Hilfer (2000) Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey
- [36] D. Matignon. Recent results in fractional differential systems theory. Technical Report 96C004, école Nationale Supérieure des Télécommunications, France, 1996.
- [37] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In Proc. IEEE-IMACS Syst. Man Cyber. Conf., Lille, France, 1996.
- [38] W Deng, Li C, Lü J (2007) Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, Nonlinear Dynam. 48 :409–416.
- [39] E Ahmed, El-Sayed AM, El-Saka H (2007) Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models. J. Math. Anal. Appl. 325(1) :542–553.
- [40] Tavazoei MS, Haeri M (2009) A note on the stability of fractional order systems. Math. Comput. Simulation 79 (5) :1566–1576.
- [41] J. H. Park, “On synchronization of unified chaotic systems via non linear control,” Chaos. Solitons and Fractals, Vol. 25, pp. 699-704, 2005.
- [42] J. Wang, H. Xiang, and Z. Liu, Position solution to nonzero boundary values problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, Volume 2010, 1-12.
- [43] Q. Zhang and J. Lu, “Chaos synchronization of new chaotic system via nonlinear control,” Chaos. Solitons and fractals, Vol. 37, Issue 1, pp. 175-179, 2008.
- [44] H. Salarieh and A. Alasty, “Adaptive chaos synchronization in Chua’s systems with noisy parameters,” Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 79, Issue 3, pp. 233-241, 2008.
- [45] U. E. Vincent and R. Guo, “A simple adaptive control for full and reduced-order synchronization of uncertain time-varying chaotic systems,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14, Issue 11, pp. 3925-3932, 2009.
- [46] M. Heydari, H. Salarieh and M. Behzad, “Stochastic chaos synchronization using Unscented Kalman–Bucy Filter and sliding mode control,” Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 81, Issue 9, pp. 1770-1784, 2011.
- [47] C. Kuo, “Design of a fuzzy sliding-mode synchronization controller for two different chaos systems,” Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61, Issue 8, pp. 2090- 2095, 2011.

-
- [48] A.N. Njah and U.E. Vincent, "Synchronization and anti-synchronization of chaos in an extended Bonhffer–van der Pol oscillator using active control," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, Issues 1-2, pp. 41-49, 2009.
- [49] A. Ikhlef and N. Mansouri, "Synchronization of chaotic and hyperchaotic systems using an active control based algorithm," *Proc. Intrnational Conference on Electrical Engineering design and Technologies (ICEEDT)*, Sousse, Tunisia, 2009.
- [50] G. Cai and W. Tu, "Adaptive Backstepping of the uncertain unified chaotic system", *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 4, pp. 17-24., 2007.
- [51] C. M. Liu, Y. F. Peng and M. H. Lin, "CMAC- based adaptive backstepping synchronization of uncertain chaotic systems," *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 21, pp. 981-988., 2009.
- [52] C. Wu, T. Fang and H. Rong, "Chaos synchronization of two stochastic Duffing oscillators by feedback control," *Chaos Solitons and Fractals*, Vol. 32, Issue 3, pp. 1201-1207, 2007.
- [53] Tony. Lilèver, *Equations différentielles ordinaires*, 2009-2010.
- [54] F Bouchelaghem *Etude de la stabilité pour certains équations différentielles fractionnaires* memoire magister, 2013.
- [55] Bai, E., Lonngren, K.E. (2008), "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 11, pp. 1041-1044.
- [56] Yassen, M.T. (2005), "Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 23 (1), pp. 131–140.
- [57] Khan, M.A. (2012), "Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control," *J. Infor. Comp. Sci.*, Vol. 7 (4), pp. 272-283.
- [58] Manfeng Hu., Xu, Z.A. (2008), "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems," *Nonlinear Analysis*, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099.
- [59] X. H. Zhang and K. Shen, "Control action of the periodic perturbation on a hyperchaotic system," *Acta Physica*, vol. 8, no. 9, pp. 651–6, 1999.
- [60] G. Chen, T. Ueta, "Yet another chaotic attractor," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 9, pp. 1465–1466, 1999.
- [61] Q. Han, C. X. Liu, L. Sun and D.R. Zhu, "A fractional order hyperchaotic system derived from a Liu system and its circuit realization", *Chinese Physics B*, vol. 22, pp. 020502-6, 2013.
- [62] **Podlubny I** (1999) *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York.
- [63] **Oldham KB, J Spanier** (1974) *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York.

- [64] **Hilfer R** (2000) Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey.
- [65] **Samko SG, Klibas AA, Marichev OI** (1993) Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam.
- [66] **Gorenflo R, Mainardi F** (1997) Fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order. In the book Fractals and fractional calculus , (eds. : Carpinteri and Mainardi), New York.
- [67] **Caputo M** (1967) Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II, Geophys. J. R. Astron. Soc. 13 :529–539.
- [68] **Matignon D** (1996) Stability results of fractional differential equations with applications to control processing, In : IMACS, IEEE-SMC, Lille, France.
- [69] **Deng W, Li C, Lü J** (2007) Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, Nonlinear Dynam. 48 :409–416.
- [70] **Ahmed E, El-Sayed AM, El-Saka H** (2007) Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models. J. Math. Anal. Appl. 325(1) :542–553.
- [71] **Tavazoei MS, Haeri M** (2009) A note on the stability of fractional order systems. Math. Comput. Simulation 79 (5) :1566–1576.
- [72] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma, “Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks,” *Communication in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 19, pp. 4105–4121, 2014.
- [73] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, and J. A. Gallegos, “Lyapunov functions for fractional order systems,” *Communication in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 19, pp. 2951–2957, 2014.
- [74] **Razminia A, Baleanu D** (2013) Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control. Mechatronics 23(7) :873–879.
- [75] **Al-sawalha MM, Alomari AK, Goh SM, Nooran MSM** (2011) Active Anti–Synchronization of two Identical and Different Fractional–Order Chaotic Systems. International Journal of Nonlinear Science 11(3) : 267-274.
- [76] **Cafagna D, Grassi G** (2012) Observer-based projective synchronization of fractional systems via a scalar signal : application to hyperchaotic Rössler systems. Nonlinear Dynamics 68 (1-2) :117-128.
- [77] **Jun WM, Yuan WX** (2011) Generalized synchronization of fractional order chaotic systems, International Journal of Modern Physics B 25 :1283–1292.

- [78] **Razminia A** (2013) Full state hybrid projective synchronization of a novel incommensurate fractional order hyperchaotic system using adaptive mechanism. *Indian Journal of Physics* 87(2) :161-167.
- [79] Ouannas A, Odibat Z. On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems. *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2016 ; **2**(1) :1-11.
- [80] Ouannas, A. and Grassi, G. Inverse full state hybrid projective synchronization for chaotic maps with different dimensions. *Chinese Physics B* **25** (9) (2016) 090503-6.
- [81] **Chai Y, Chen L, Wu R, Dai J** (2013) Q-S synchronization of the fractional-order unified system, *Pramana*. 80 (3) :449–461.
- [82] **Hadi T, Erjaee GH** (2011) Phase and anti-phase synchronization of fractional order chaotic systems via active control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 16(10) :4079-4088
- [83] **Sachin B, Varsha DG** (2010) Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 15 :3536-3546
- [84] W.H. Deng and C.P. Li, “Chaos synchronization of the fractional Lü system,” *Physica A*, vol. 353,61–72, 2005.
- [85] X. H. Zhang and K. Shen, “Control action of the periodic perturbation on a hyperchaotic system,” *Acta Physica*, vol. 8, no. 9, pp. 651–6, 1999.
- [86] G. Chen, T. Ueta, “Yet another chaotic attractor,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 9, pp. 1465–1466, 1999.
- [87] Q. Han, C. X. Liu, L. Sun and D.R. Zhu, “A fractional order hyperchaotic system derived from a Liu system and its circuit realization,” *Chinese Physics B*, vol. 22, pp. 020502-6, 2013.