Table des matières

Résumé

L'objectif de ce mémoire de fin d'étude est basé sur la problématique générale qui porte sur la synchronisation dans les systèmes dynamiques non linéaires chaotiques. Plus précisément, nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets, et continus non linéaires, dont leurs formulations sont données par des fonctions récurrentes avec la présence d'un paramètre de bifurcation, ou par un système d'équations différentielles avec la présence d'un paramètre de bifurcation (ultérieurement, sera plusieurs paramètres dans le cas multidimensionnel), ou une petite perturbation aux conditions initiales résulte un grand écart entre les observations à long terme, c'est d'ici la notion de l'imprévisibilité a lieu. En appliquant les outils de quantification du chaos, plusieurs exemples de systèmes dynamiques sont détectés chaotiques, pour un tel ensemble de paramètres. Mais aussi la synchronisation du chaos fait partie de ce type de recherches, dont l'arrivé de deux systèmes chaotiques en même temps a importance, dans le sens, de mêmes observations à partir d'un certain rang (temps).

Abstract

The aim of this thesis is based on a general problem that deals with synchronization in chaotic nonlinear dynamic systems. More precisely, we are interested in nonlinear discrete and continuous dynamic systems whose formulations are given by recursive functions with the presence of a bifurcation parameter or by a system of differential equations with the presence of a bifurcatin parameter (Later will be several parameters in the multidimensional case) or a small perturbation to the initial coditions results in a large gap between the long-term observations, here the notation of unpredictability takes place. By applying the quantification tools of chaos, several examples of dynamic systems are detected as chaotic, for such a set of parameters. But also the synchronization of chaos is part of this type of research, of which the arrival of two chaotic systems at the same time has importance in the sense, and the same observations from a certain time.

Introduction

La caractéristique principale du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, si le système est chaotique, alors il n'est pas possible de calculer avec précision l'évolution d'un cas particulier, car une erreur négligeable est survenue aux observations de départ résulte des fluctuations énormes. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions
initiales. Ce comportement est connu sous le nom du chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.

De nombreux modèles mathématiques de processus biologiques, de processus physiques, d'optique non linéaire, de dynamique des fluides, de réseau de communication et de processus chimiques ont été définis à l'aide de systèmes dynamiques. La méthode de la synchronisation du chaos dans des systèmes dynamiques à temps discrets, tels que le contrôle actif, a été mise au point pour la synchronisation du chaos dans des systèmes dynamiques à temps discret [22]. La conception du backstepping et le contrôle du mode glissant, etc.[22] , [12].

Unifications des observations de deux phénomènes, équivalent à la synchronisations de leurs systèmes dynamiques. Ce sujet était un axe de recherche active depuis les jours les plut tôt de la physique[22] , [12] , [1]. Souvent nous nous trouvons obligés d'assurer l'arrivée de deux phénomènes qui sont décrits par deux systèmes chaotiques différents en même temps, et le mot «temps» ici peut signifie le rang ou l'itération. partir d'un certain rang (temps), nous avons besoin de coupler (synchroniser) les deux systèmes, et cela a existence.

Notre mémoire est réparti sur quatre chapitres, dont le premier est consacré à l'étude des systèmes dynamiques en général. la détection du chaos dans un tel système fait l'objet du deuxième chapitre nous faisons un panorama sur la théorie du chaos déterministe tels que : la définition du chaos, les caractéristiques du chaos et les outils de transition vers le chaos .

Nous abordons au troixième chapitre ou nous fait des exemples de systémes chaotiques continues et discrets,dans le plan et l'espace.

Finalement, nous effectuons la synchronisation de deux systèmes chaotiques en se basant sur tout ce qui précède, et aussi on trouve les déffirents types de synchronisation et la méthode la plus utilisée ,puis en fait un exemple qui synchronise de deux systèmes chaotique tel que le système maître 3D et le système esclave 2D.

Chapitre 1

Représentations mathématiques des systèmes dynamiques

1.1 système dynamique

Définition 1.1 *Un système dynamique est une application continue* $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *vérifiant :*

$$\varphi(.,x) \quad : \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue.} \tag{(1,1)}$$

$$\varphi(t,.) \quad : \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue.} \tag{1.1}$$

$$\varphi(0,x_0) = x_0. \tag{1.2}$$

$$\varphi(t+s,x_0) = \varphi(t,\varphi(s,x_0)).$$

Où $(t;x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2 *Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :*

-Systèmes dynamiques discrets,

-Systèmes dynamiques continus.

Systèmes dynamiques discrets

Définition 1.3 *soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue et dérivable. On appelle système dynamique discret la récurrente suivante :*

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 = x_0 \in \mathbb{R}^m, && ((1,2)) \\ x(k+1) &= f(x(k)), k \geq 0. && (1.3) \end{aligned}$$

Systèmes dynamiques continus

Définition 1.4 *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction non-linéaire. Un système non-linéaire a temps continu est présenté par un système différentiel :*

$$\dot{x} = f(x(k)). \qquad ((1,3))$$

1.2 Points fixes

a/cas discret

On appelle "point fixe" d'un système dynamique discret tout point x^*telle que

$$f(x^*) = x^*. \qquad ((1,4))$$

Ces points sont appellés aussi "points stationaires" ou "points d'équilibres".

Exemple 1.1 *soit la fonction*

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

On voit facilement que les points fixes de ce système sont $\{x = 1, x = 0\}$. Alors pour trouves les points fixes en résolvant l'équation

$$f(x) = x. \qquad ((1,4))$$

b/cas continu

On appelle point fixe d'un système dynamique continu ou bien "point d'équilibre" tout point vérifier

$$f(x^*) = 0. \tag{(1,5)}$$

1.3 Orbite

a/cas discret

Soit un système dynamique discret défini par l'itération (1,2). On appelle orbite du système (1,2) la suite

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(k+1) = f(x(k)), ...\}. \tag{(1,6)}$$

1.4 Orbites périodiques

a/cas discret

Une orbite $O(x_0)$ s'appelle périodique s'il existe un $p > 0$ tq

$$x(k+p) = x(k), k = 0, ..., p-1. \tag{(1,7)}$$

Une orbite périodique $O(x_0)$ est une suite des points périodique, tous ces points s'appellent points périodiques de l'orbite de période"p".

On peut trouver les points périodiques par résolution du système

$$f^{(p)}(x) = x. \tag{(1,8)}$$

1.5 points périodiques

b/cas continu

On appelle "point périodique" du (1,3) tout point T telles que :

$$\forall k \in \mathbb{R}, x\left(k+T\right) = x(k). \tag{(1,9)}$$

1.6 Stabilité

a/cas discret

Stabilité des points fixes

Théorème 1.1 *supposons que* x^**est un point fixe de* $(1,2)$*. Alors* x^* *est :*

1/ Attractif *si* $\left|\frac{d}{dx}f\left(x^*\right)\right| < 1$

2/ Répulsif *si* $\left|\frac{d}{dx}f\left(x^*\right)\right| > 1,$

3/ Indifférent *si* $\left|\frac{d}{dx}f\left(x^*\right)\right| = 1,$

4/ Supper stable *si* $\frac{d}{dx}f\left(x^*\right) = 0.$

Preuve Nous utilisons la formule de Taylor au voisinage de x^* :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + m(x-x^*) + O((x-x^*)^2) \\ &= x^* + m(x-x^*) + O((x-x^*)^2). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = f(f(x^*)) = m(m(x-x^*)) + O(2) \\ &= x^* + m(x-x^*) + O(2). \\ &\quad ... \\ f^p(x) &= x^* + m^p(x-x^*) + O(2). \end{aligned}$$

Ainsi l'éloignement par rapport à x est multiplié par m à chaque itération. Après p itérations le point x voisin de x^* se trouve à la distance $m^p(x - x^*)$.

1. Par hypothèse, nous avons :

$$|m| = \lim_{x_0 \to x^*} \left| \frac{f(x^*) - f(x_0)}{x^* - x_0} \right| < 1$$

Pour x_0 suffisamment proche de x^* , on a :

$$|f(x^*) - f(x_0)| < |x^* - x_0|$$

Comme x^* est fixe nous obtenons :

$$|x^* - f(x_0)| < |x^* - x_0|$$

Pour un x_0 proche de x^*, $f(x_0)$ est encore plus proche de x^*., En répétant cet argument, $f^2(x_0)$ sera encore plus proche de x^* , etc.

Ainsi, la suite$(x_n)_{\mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers p, le point p est donc attractif.

2. Au contraire, le point fixe x^* peut être répulsif, la preuve de cette assertion est une adaptation évidente de l'assertion précédente.

3. si $|m| = 1$, la nature dex^* dépend des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor et nous ne pouvons pas conclure quant à la nature du point fixe.

4. Si $m = 0$, le terme du premier ordre disparaît complétement donc l'attraction est plus forte d'où le nom "super attractif" .

tel que $m = \frac{d}{dx} f\left(x^*\right)$. ■

Stabilité des orbites périodiques

Théorème 1.2 *On dit qu'une orbite $O\left(x_0\right)$ est :*

1/ Attractif *si* $\left|\frac{d}{dx} f^{(p)}\left(x_0\right)\right| = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f'\left(x\left(j\right)\right)\right| < 1.$

2/ Répulsif $\quad$ *si* $\left|\frac{d}{dx}f^{(p)}(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j))\right| > 1.$

3/ Indifférent $\quad$ *si* $\left|\frac{d}{dx}f^{(p)}(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j))\right| = 1.$

4/ Supper stable $\quad$ *si* $\frac{d}{dx}f^{(p)}(x_0) = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j))\right| = 0.$

Preuve Soit $O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(p+1) = f(x(p)), ...\}$ une orbite périodique de période p. En suivant la définition donnée ci-dessus, nous devons vérifier pour chaque point $x(i)$, $i = 0, 1, ..., p-1$ s'il est un point fixe attractif (ou répulsif) de l'application $f^{(p)}$. Supposons que la fonction $f(x)$ admet une dérivée. La fonction $f^{(p)}$ est donc dérivable, elle aussi. Alors, d'après la théorème 1.1 il nous faut calculer la dérivée $\frac{df^{(p)}}{dx}(x(i))$. En appliquant la règle de chaîne on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f^{(p)}(x(i)) &= \frac{d}{dx}f^{(p-1)}(f(x(i))) \cdot f'(x(i)) \\
&= \frac{d}{dx}f^{(p-1)}(f(x(i+1))) \cdot f'(x(i)) \\
&= ... \\
&= f'(x(i)) \cdot f'(x(i+1)) \cdot ... \cdot f'(x(p+i-1)).
\end{aligned}$$

Puisque l'orbite est périodique on a :

$$\frac{d}{dx}f^{(p)}(x(i)) = f'(x(0)) \cdot f'(x(1)) \cdot ... \cdot f'(x(p-1)) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j))$$

Ainsi dans tous les points d'une orbite périodique $O(x_0)$ la dérivée de l'application $f^{(p)(x)}$ est la même. Il suffit donc que les conditions d'un de théorème $(1, 1)$ soient vérifiées pour un seul point de l'orbite. D'où le théorème précedente. ■

b/cas continu

Stabilité des points fixes Supposons que (1,3) admet un point fixe en $x = x^*$. Pour linéarises le système (1,3) au voisinage de point fixe, posant $y = x - x^*$. Alors (1,3) devient :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x^*) = A(x^*)y \qquad ((1,10))$$

ou $A(x^*)$ la matrice Jacobienne de f , au point $x = x^*$.La forme de solution de système (1,9) présenté par (e^{st}) .La résolution de ce problème est alors équivalente à la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$A(x^*)y = sy.$$

Théorème 1.3 *Considérons $\frac{\partial y}{\partial t} = A(x^*)\,y$ le système linéarisé autour du point d'équilibre x^* du (1,3). Soient $\lambda_i, i = 1...n$, les valeurs propres de l'opérateur linéaire $A(x^*)$, alors*

- *si pour tout λ_i, $i = 1, 2, ..., n$, $Re(\lambda_i) \leq 0$ le point fixe x^* est stable.*
- *si il existe $i, i = 1...n$ tel que $Re(\lambda_i) > 0$, le point fixe x^* est instable.*

Stabilité des points périodiques

Les trajectoires solutions du système (1,3) muni de la condition initiale x_0, sont noter par $\varphi(t, x_0)$ telles que $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Pour étudier la stabilité des points périodiques du (1,3), parmi les méthode d'étude il existe la méthode de :

-La matrice de monodromie

Le concept de l'approche par la matrice de Monodromie est d'étudier l'influence d'une perturbation des conditions initiales sur l'évolution temporelle des solutions du systéme(1.3). Pour cela, on considère $x^*(t)$ un solution périodique particulière du systéme(1.3) : la stabilité de $x^*(t)$ est évaluée par la détermination, après une période, de l'écart entre la trajectoire de la solution périodique $x^*(t)$ et de la trajectoire issue d'une légère perturbation de la condition initiale. Cette approche est détaillée dans Seydel (1988).

Soient $\varphi(t, x_0^*)$ la trajectoire de la solution périodique $x^*(t)$ correspondant à la condition initiale $x^*(0)$=x_0^* et $\varphi(t, x_0^* + \delta x_0)$ la trajectoire de la solution ayant pour condition initiale

$x_0^* + \delta x_0$, l'évolution temporelle de l'écart des trajectoires est donnée par :

$$\delta x\left(t\right) = \varphi\left(t, x_0^* + \delta x_0\right) - \varphi\left(t, x_0^*\right).$$

En particulier, après une période on a :

$$\delta x\left(T\right) = \varphi\left(T, x_0^* + \delta x_0\right) - \varphi\left(T, x_0^*\right).$$

En effectuant un développement en série de Taylor autour de x_0^*, on aboutit au premier ordre à :

$$\delta x\left(T\right) = \frac{\partial \varphi\left(T, x_0^*\right)}{\partial x_0} \delta x_0.$$

On constate que l'écart entre les deux trajectoires à $t = T$ est lié à l'écart initial δx_0 par la matrice

$$\frac{\partial \varphi\left(T, x_0^*\right)}{\partial x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^n} \\ & \\ & \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^1} & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^n} \end{pmatrix} \tag*{((B.1))}$$

où φ^i et $x_0^i (i = 1,\cdots, n)$ représentent respectivement la $i^{ème}$ composante de φ et de x_0.

Il est facile d'imaginer que les propriétés de la matrice (B.1), appelée Matrice de Monodromie, décideront de la stabilité du système (1.3) par l'intermédiaire de la croissance ou de l'amortissement de la perturbation initiale.

Puisque $\varphi(t, x_0)$ représente la trajectoire de la solution de (1.3) ayant x_0 pour condition initiale, $\varphi(t, x_0)$ vérifie également ce système, soit :

$$\frac{\partial \varphi\left(t, x_0\right)}{\partial x_0} = F\left(\varphi(t, x_0), \alpha\right).$$

Différencier cette équation par rapport à la condition initiale x_0 donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi\left(t, x_0\right)}{\partial x_0} = \frac{\partial F \varphi(t, \alpha)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0}.$$

En remarquant ensuite que la condition $\varphi(0, x_0) = x_0$ conduit à

$$\frac{\partial \varphi(0, x_0)}{\partial x_0} = 1$$

on met en évidence que la matrice de monodromie est identique à $\Phi(T)$, où $\Phi(t)$ vérifie :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial F\,(x^*, \alpha)}{\partial x}\Phi, \qquad \Phi\,(0) = 1.$$

La matrice de monodromie $M \in R^n \times R^n$ associée à la solution T périodique x^* de valeurs initiales x_0^* est définie par :

$$M = \Phi\,(t) = \frac{\partial \varphi(T, x_0)}{\partial x_0}.$$

Enfin, on montre (Seydel, 1988) que la matrice de monodromie possède deux propriétés remarquables :

– $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $(kT) = M^k$

– la matrice de monodromie M possède toujours $\lambda = 1$ comme valeur propre.[20]

Théorème 1.4 *Soit x^* une solution T périodique du flot $\frac{\partial x}{\partial t} = F(x, \alpha)$ correspondant à une valeur de α fixée, la matrice de monodromie $M(\alpha)$ est encore définie par $\Phi(T)$ où $\Phi(t)$ est solution du problème matriciel aux valeurs initiales suivant :*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial F(x^*, \alpha)}{\partial x}\Phi, \quad \Phi(0) = 1$$

Soit λ_i, $i = 1, \cdots, n$ le spectre de valeurs propres de la matrice de monodromie, on convient, quitte à les renuméroter, que λ_n correspond à la valeur propre égale à 1 de la matrice de monodromie. La stabilité locale de la solution est alors déterminée par les $n-1$ autres valeurs propres en appliquant la règle suivante :

– la solution périodique est linéairement stable si pour tout $i = 1, \cdots, n-1$ on a $|\lambda_i| < 1$,

– la solution périodique est linéairement instable si il existe i, $1 \leq i \leq n-1$ tel que $|\lambda_i| > 1$.

1.7 Linéarisation

a/cas discret

Il s'agit d'étudier la nature des points fixes d'un système non-linéaire défini en dimension m par l'application f suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \\ x_{k+1} = f(x_k) \end{cases} \tag{(1,11)}$$

Soit $p \in \mathbb{R}^m$ est un point fixe de f, i.e. $f(p) = p$. Au voisinage du point p, le système peut être linéarisé en négligeant les termes du second ordre du développement de Taylor au voisinage d'un point q tel que $q = p + \xi$, pour ξ assez petit. On peut alors écrire :

$$f(q) = p + A\xi + o(\xi), \tag{(1,12)}$$

où:

$$A = Df(p), \tag{(1,13)}$$

est la matrice jacobienne de f au point p.

Donc par itération, on obtient :

$$f^m(q) = p + A^m\xi + o(\xi), \tag{(1,14)}$$

L'application $\xi \to A\xi$ s'appelle l'application linéarisée de f au voisinage du point fixe p. On dit que le système (1,11) est approximé au voisinage du point d'équilibre p par le système linéaire (1,14). Il va nous falloir donc d'étudier les valeurs propres propres de la matrice définie en (1,13).[9]

b/cas continu

Il s'agait d'étudier la nature des points fixes d'un système non-lin continu defini par $\dot{x} = f(x(t))$ admet, un développement limité au voisinage de x^* de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax\left(t\right) + r\left(\left\|x\right\|\right) \tag{(1,15)}$$

dans lequel la matrice A est constante

$$DF\left(x^*\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_e)}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_1(x_e)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_e)}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_2(x_e)}{\partial x_m} \\ & & & \\ & & & \\ \frac{\partial F_n(x_e)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(x_e)}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_n(x_e)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left\|r\left(\left\|x\right\|\right)\right\|}{\left\|x\right\|} = 0$$

Tel que le système linéaire continu décrir par :

$$\dot{x}\left(t\right) = Ax\left(t\right)$$

peut être considéré comme la linéarisation de (1,3) autour x^* il permet de statuer, localement, sur la stabilité du système non linéaire au point x^*.

1.8 Fonction de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov permet l'analyse de la stabilité directement à partir des équations qui décrivent le système et ne nécessitent pas la détermination explicite de leurs solutions.

Nous introduisons une fonction continue $V(x) : R^n \to R^+$, dite de Lyapunov, vérifiant :$V(x(t))$ défine positive, c'est-à-dire $V(x^*) = 0$ et $v(x) > 0$, $\forall x \neq x^*$.

Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de x vers $x_f = 0$ par celle de $V(x(t)) = V(x(k, k_0, x(k_0)))$. En effet, si $V(x(t))$ est définie négative pout tout t et pour $x(t)$ au voisinage de x^* tels que :$V(x(t)) < 0$, (V décroît le long de toutes les trajectoires) nous pouvons alors conclure à la stabilité du point fixe x^*.

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

1.9 Bifurcation

Définition 1.5 *la théorie de la "bifurcation" est un ensemble de concept utile à l'analyse des systèmes dynamiques ,qui renvoi à l'étude de changements de comportement d'un système lorsque les paramétre de système changent.*

Définition 1.6 *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution du système* $x_{t+1}= \mathbf{f}\,(x_t, \alpha)$ *lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle* α *c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité, et l'apparition de nouvelles solutions.*

Définition 1.7 *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

1.9.1 Déffèrents types de bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions $g(x(t), \alpha)$. Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation. Parmi les différents types de bifurcation :

a/cas discret

1- Bifurcation transcritique :

Soit une famille de fonctions $f\,(x_t, c)$ .Supposons qui'il existe un couple (x^*, c^*) tel que le système

$$x\,(t+1) = f\,(x_t, c) = x_t g\,(x_t, c)$$

a un point fixe en x^* :

$$g(x^*, c^*) = 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, c^*) = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, c^*) = 1$$

Supposons aussi que

$$\frac{\partial g}{\partial c}(x^*, c^*) \neq 0 \ ,$$

On dit alors que le sustème subit au point c^* une bifurcation **transcritique.**

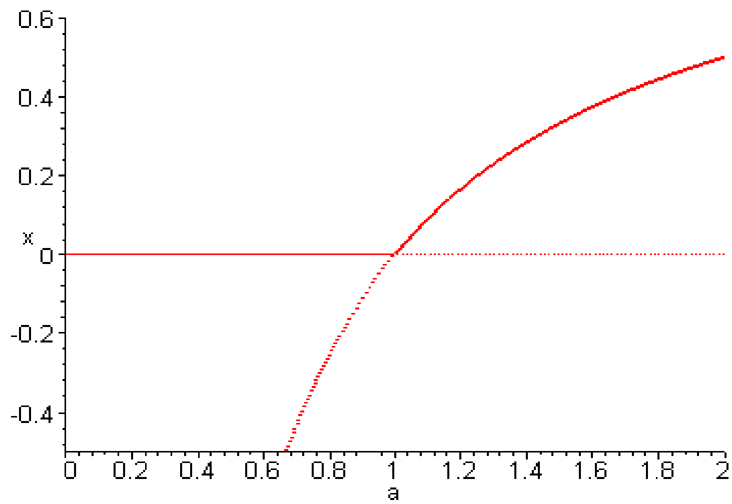

Fig 1-1.diagramme d'une bifurcation transcritique.

Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de (x^*, c^*). Il existe deux branches de points fixes $\gamma_1(c^*)$ et $\gamma_2(c^*)$ qui se croisent dans le point c^* :$\gamma_1(c^*) = \gamma_2(c^*)$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ la branche supérieure est attractive et la branche inférieure est répulsive.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ les propriétés de stabilité sont inversées.

2- Bifurcation de doublement de période (ou flip) :

Soit une famille de fonctions $f(x_t, c)$ .Supposons qui'il existe un couple (x^*, c^*) tel que le système

$$x(t+1) = f(x_t, c)$$

a un point fixe en x^* :

$$f(x^*, c^*) = x^* \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, c^*) = -1$$

Supposons aussi que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(x^*, c^*) \neq 0 \text{ et } d = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \neq 0,$$

On dit alors que le sustème subit au point c^* une bifurcation **de doubleument de période.**

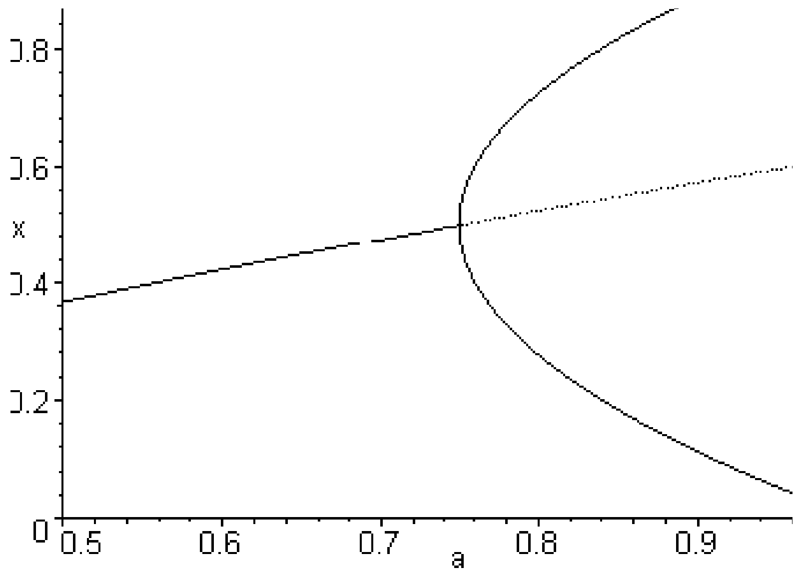

Fig 1-2. diagramme de bifurcation par doublement de période.

Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de (x^*, c^*). Il existe un voisinage du couple (x^*, c^*)

$$V = \{(x, c)\, / c \in J \ni c^*, x \in I \ni x_0\}$$

tel que trois branches différentes de points fixes sont définie dans ce voisinage et se croisent dans le point (x^*, c^*) .

Il existe une branche de points fixes $\gamma_1(x^*)$ qui passe par le point (x^*, c^*) de telle façon qu'elle est attractive, pour les valeurs $c < c^*$ et répulsive pour $c > c^*$.

b/cas continu

1- Bifurcation de type noeud-col (ou pli) :

Soit une famille de fonctions $f(x_t, c)$. Supposons qui'il existe un couple (x^*, c^*) tel que le système

$$x(t+1) = f(x_t, c)$$

a un point fixe en x_0 :

$$f(x^*, c^*) = x^* \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, c^*) = 1$$

Supposons aussi que

$$\frac{\partial f}{\partial c}(x^*, c^*) \neq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, c^*) \neq 0,$$

On dit alors que le sustème subit au point c^* une bifurcation de type **noeud-col.**

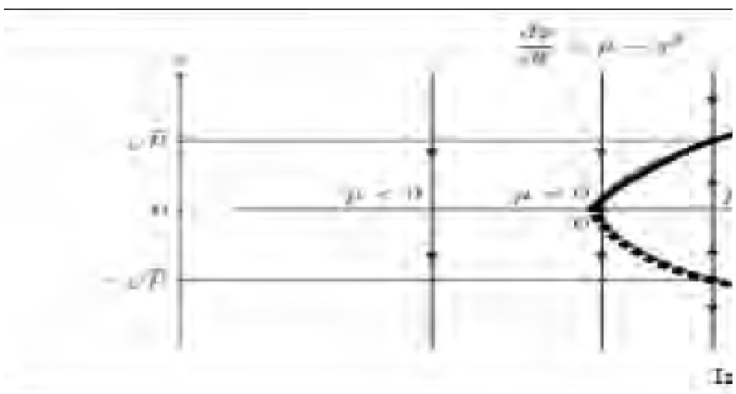

Fig 1-3.Diagramme de Bifurcation noeud-col.

Soit V un voisinage du couple (x^*, c^*) tel que

$$V = \{(x, c) / c \in c^* \in J, x \in x_0 \in I\}$$

tel que :

1. Si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x^*, c^*), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, c^*) < 0$, alors

   1.1. Il n'existe aucun point fixe dans le voisinage V quand $c < c^*$.

   1.2. Pour $c > c^*$ il existe deux branches de points fixes $\gamma_1(c) > \gamma_2(c)$.

   1.3. $\gamma_1(c^*) = \gamma_2(c^*) = x_0$.

   1.4. La branche supérieure γ_1 est attractive et la branche inférieure γ_2 est répulsive .

2.Si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x^*, c^*), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, c^*) > 0$,alors

2.1. Il n'existe aucun point fixe dans le voisinage V quand $c > c^*$.

2.2. Pour $c < c^*$ il existe deux branches de points fixes $\gamma_1(c) > \gamma_2(c)$.

2.3. $\gamma_1(c^*) = \gamma_2(c^*) = x_0$.

2.4. La branche supérieure γ_1 est répulsive et la branche inférieure γ_2 est attractive .

2-Bifurcation fourche :

Soit une famille de fonctions $f(x_t, c)$. Supposons qui'il existe un couple (x^*, c^*) tel que le système

$$x(t+1) = f(x_t, c)$$

a un point fixe en x_0 :

$$f(x^*, c^*) = x^* \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, c^*) = 1$$

Supposons que

$$f(-x_t, c) = -f(x_t, c)$$

Suppusons aussi que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(x^*, c^*) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, c^*) \neq 0,$$

On dit alors que le sustème subit au point c^* une bifurcation de type **Fourche.**

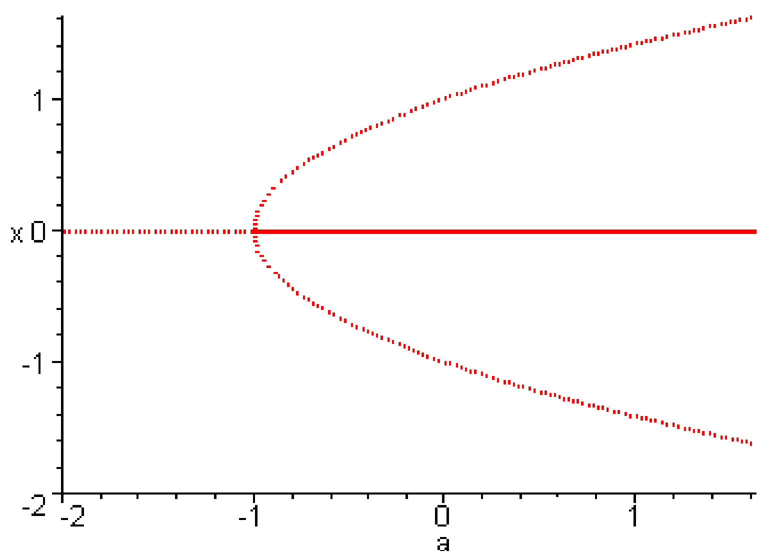

Fig 1-4. diagramme de bifurcation fourche.

Cela se traduit par les propriétés suivantes des branches de points fixes autour de (x^*, c^*). Il existe un voisinage du couple (x^*, c^*)

$$V = \{(x,c)\,/c \in c^* \in J, x \in x_0 \in I\}$$

tel que trois branches différentes de points fixes sont définies dans ce voisinage et se croisent dans le point (x^*, c^*) . Plus précisément il existe une branche de points fixes $\gamma_1(c)$ qui passe par le point (x^*, c^*) de telle façon qu'elle est attractive pour les valeurs $c < c^*$ et répulsive pour $c > c^*$, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} > 0$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} < 0$ ces propriétés de stabilité sont renversées par rapport au point c^*.

Il existe deux autres branches $\gamma_2(c)$ et $\gamma_3(c)$ qui prennent origine au point (x^*, c^*) et sont tangentes de la ligne verticale $c = c^*$. Elles sont définies pour $c < c^*$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} > 0$ et pour $c > c^*$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0$. (Ainsi dans le voisinage V il y a exactement trois point fixes pour chaque valeur de $c > c^*$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0$).

Les deux branches $\gamma_2(c)$ et $\gamma_3(c)$ sont attractives si$c < c^*$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} < 0$ ou si$c > c^*$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c} > 0$. Sinon elles sont répulsives.

3-Bifurcation de Horf :

Soit une famille de fonctions $f(x_t, c)$. Supposons qui'il existe un couple (x^*, c^*) tel que le système

$$x(t+1) = f(x_t, c)$$

a un point fixe en x_0 :

$$f(x^*, c^*) = x^* \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, c^*) = 1$$

Supposons aussi que

$$\frac{\partial f}{\partial c}(x^*, c^*) \neq 0 \;\text{ et }\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, c^*) \neq 0,$$

On dit alors que le sustème subit au point c^* une bifurcation de type **noeud-col,** est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe perd sa stabilité tandis q'une paire de valeurs propres conjugées de la linéarisation autour du point fixe franchissent l'axe imaginaire du plan complexe.

Le cycle oscillant est stable si le premier exposant de Lyaponov est négative, dans ce cas la bifurcation du **Horf** appelé super-critique, danws le cas contraire s'appele sous-critique.

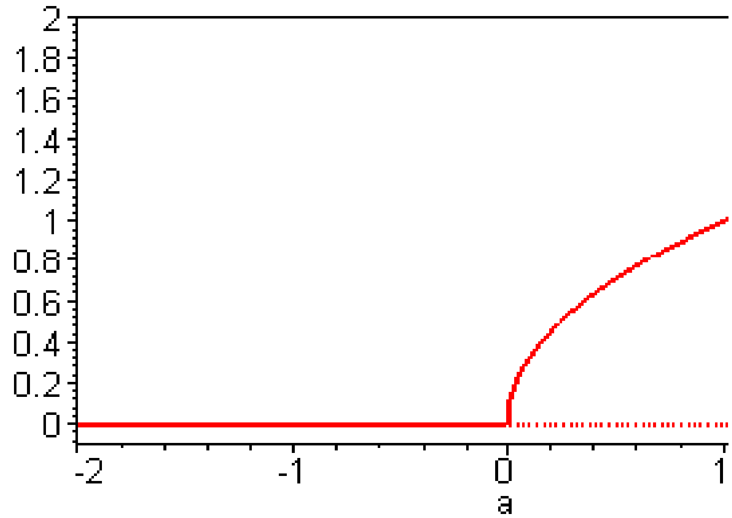

Fig 1-5. diagramme de bifurcation de Hopf.

Chapitre 2

Initiation au chaos dans les systémes dynamiques

2.1 Historique

Cependant, les travaux de certains scientifiques menés bien avant cette découverte vont être trés utiles à la compréhension de la dynamique chaotique. En effet, vers la fin du XIX^e siécle le mathématicien, physicien et philosophe français "Henri Poincaré" avait déja mis en évidence le phénoméne de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du probléme des trois corps. On trouve dans le calcul des probabilités de Henri Poincaré l'affirmation suivante :

«Une cause trés petit, qui nous échappe, détermine une effet considérable que nous pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cette effet est du au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous ne poirrions connaitre la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénoméne a été prévu, qu'il est règi par des lois, mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de trés grandes dans les phénomaines finaux, une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons phénomène fortuit».

Cette citation définit parfaitement le chaos en tant que sensibilité aux conditions initiales mais aussi le déterminisme qui réside dans le fait que si une condition initiale est parfaitement déterminée alors l'evolution du systéme l'est aussi.

Le diterminisme traduit l'unicité de la solution pour l'équation différentielle d'un systéme donné, c'est le théorème de Cauchy. Toujours au XIX^{e} siécle, le mathématicien russe Alexandre Lyaponove effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, l'orsque cet écrant évolué exponentillement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

Les travaux de Lyaponov, d'abord tonbés dans l'arbli, seront plus tard trés précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

Les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour le compréhension du chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accure des systémes chaotiques c'est l'ordinateur. En effet, les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et sans ordinateur, leur résolution est en général impossible .

2.1.1 Définition du chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos.

Définition 2.1 *Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X : Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x, c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $Y = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence de points fyng $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .*

Définition 2.2 *f est dite avoir la proprité de sensiblité aux conditions initials s'il existe $\delta > 0$ telque pour $x(0) \in I$ et tout $\epsilon > 0$ il exist un point $y(0) \in I$ point et un entier $j \geqslant 0$ satisfaisant :*

$l(x(0), y(0)) > \epsilon \Rightarrow d\left(f^{(j)}(x(0)), f^{(j)}(y(0))\right) > \delta$, *ou* l *reprsente la distance et* $f^{(j)}$ *la* j *iemeitération de* f.

Définition 2.3 *Une fonction* $f : I \rightarrow I$ *est dite constituée d' une dynamique chaotique si :*

i) f *possède une sensibilité aux conditions initiales,*

(ii) f *est topologiquement transitive,*

(iii) L'esemble des points périodiques de f *est denses dans* I.

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables.

2.2 Outils de quantification et de mesure du chaos

2.2.1 Doublements de période

Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc.,. Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.[12] .

2.2.2 Par intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulance. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.[12] .

2.2.3 Via la quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de [1] . Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.[12] .

2.3 Caractéristiques du chaos

2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systémes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales tel que, une trés petite erreure sur la connaissance de l'état initiales "x_0"dans l'espace des phases va se trouver rapidement amplifiée .

Pour les systémes fortement chaotiques, les erreures croissent localement, selon une loi du type $e^{\frac{t}{\tau}}$ où τ est un temps caractéristique du système chaotique. Ainsi que pour les systémes trés fortement chaotiques, cette amplification des erreure rend rapidement totalement inopérent le pouvoir prédicatif qui découle de l'unicité de la solution.

Le caractére prédictible de l'évolution du systéme ne subsiste que pour les instants $t \ll \tau$ pour lesquelles l'exponentielle vant approximativement

1.

2.3.2 Exposants de Lyaponov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile a appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, c'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence. Cette vitesse s'appelle l'exposant de Lyaponov.

les exposonts de Lyaponov sont des observables dynamiques qui caractérisent la divergence exponontielle de trajectoires initialement proches et donnent donc une information quantitive sur la sensibilité aux conditions initiales d'un système.

Notons que si cette derniére ne suppose pas que la séparation entre deux trajectoires augmente exponontiellement au cours du temps, c'est cependant génériquement le cas dans les systèmes chaotiques.

L'exposant de Lyaponove sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantitifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.

Le nombre d'exposant de Lyaponov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés de plus grand au plus petit, l'application du chaos exige que les exposants de Lyaponov doivent remplir trois conditions :

* Au moins l'un d'eux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.

* Au moins l'un d'eux est négatif pour justifier le rempliement des trajectoires.

* La somme de tous les exposants est négative pour expliquer q'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dir qu'il pend de l'énergie.

Dimension de Lyapunov

La dimension de Lyapunov est plus ou moins grande : pour des systèmes non retardés (dimension finie) tels que les systèmes de Lorenz ou R■ssler, la dimension de Lyapunov est au maximum égale au nombre de variables du système (dimension faible), alors que pour les systèmes à retard (dimension infinie) la dimension de Lyapunov tend vers de grandes valeurs. Plus la dimension sera grande, plus la complexité du chaos sera élevée.

Classant les exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ..... \geq \lambda_N$.

La dimension de Lyapunov D_L est définiepar :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{\lambda_{j+1}} \qquad ((2,1))$$

Où j est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_j \geq 0.$$

Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Théorème 2.1 *Soit une application discrète f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui applique x_{n+1} sur x_n, l'exposant de Lyapunov λ qu'il indique le taux moyen de divergence est défini par :*

$$\lambda_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| f'(x_i) \right|. \qquad ((2,2))$$

Preuve Choisissons deux conditions initiales trés proches, soient x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra trouver un réel λ tel que aprés n itérations on a :

$$\left| f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \right| \simeq \varepsilon e^{n\lambda}. \qquad ((2,3))$$

D'où

$$n\lambda = \frac{\ln \left| f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \right|}{\varepsilon}. \qquad ((2,4))$$

Et pour $\varepsilon \to 0$ on a :

$$\begin{aligned} n\lambda &\simeq \frac{\ln \left| f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \right|}{\varepsilon} \\ &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\simeq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

Pour $n \to +\infty$

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| f'(x_i) \right|. \qquad ((2,5))$$

■

Théorème 2.2 *Soit un exposant de Lyapunov d'une application discrète.*

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

- *Si* $\lambda \leq 0$ *les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.*

Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Définition 2.4 *Soit* f *une application discrète de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *:*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{(2,6)}$$

Un système m-dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 *évolue selon une loi de type :*

$$V = V_0 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m)n} \tag{(2,7)}$$

Pour avoir du chaos, il est nécéssaire qu'au moins un λ_i *soit positif. Tout d'abord nous devons calculer les* λ_i*. Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace m-dimensionnel de rayon* ε *(assez petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme déjà évoqué, nous nous intéressons à :*

$$f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_n) \tag{(2,8)}$$

Posons $x_0' = x_0 + \varepsilon$ *, on a le développement limité d'ordre 1 de* $f^n(x_0)$ *au voisinage de* x_0' *suivant :*

$$\begin{aligned} x_n - x_n' &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x_0') \\ &\approx Df(x_0)\,Df(x_1)\ldots Df(x_n)(x_0 - x_0') \\ &\approx \prod_{i=1}^{n} Df(x_i)(x_0 - x_0') \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=1}^{n} Df(x_i)$ *par* $Df^n(x_0)$ *,ainsi*

$$x_n - x_n' \approx Df^n(x_0)(x_0 - x_0')$$

$Df^n(x_0)$ *dénote la matrice jacobienne de* f^n *au point* x_0*, Il s'agit d'une matrice carrée* $m \times m$*,* *si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible* P_n *telle que* $D_m^t = P_n{}^{-1} Df^n P_n$, D_m^t *est une matrice diagonale des valeurs propres* $\sigma_i(f^n(x_0)); i = 1, ..., m$ *de* Df^n*. On défnit alors les* m *exposants de Lyapunov de la manière suivante :*

$$\lambda_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |\sigma_i (f^n (x_0))| \qquad i = 1, ..., m \tag{(2,9)}$$

Pour le point d'équilibre x^* *la formule (2,9) devient :*

$$\lambda_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |\sigma_i (x^*)| \qquad i = 1, ..., m \tag{(2,10)}$$

Système de Hénon

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon [32], on remarque que les valeurs propres sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres a et b . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b.

On fixe $b = 0.3$, et on laisse a varie entre 0 et 1.4.

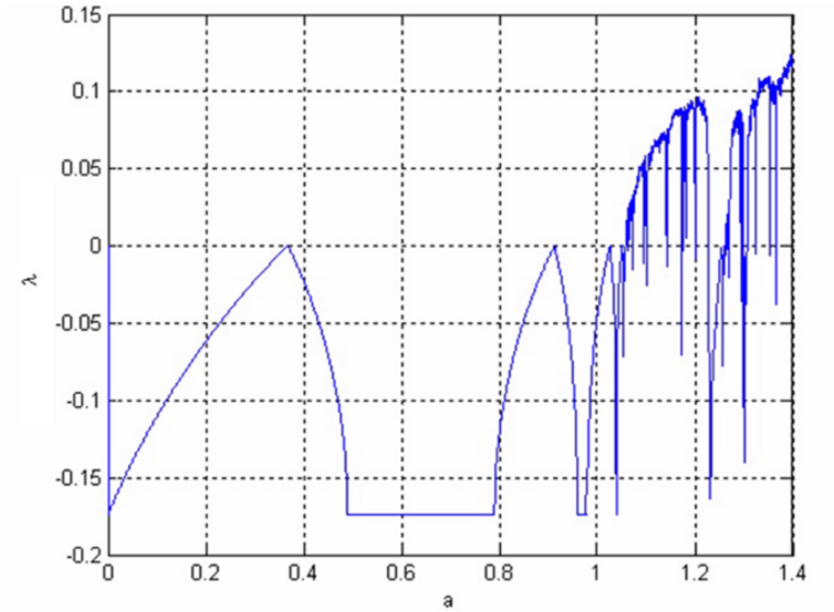

Fig 2-1. L'volution de l'exposant le Lyapunov de systme de Henon en fonction de a.

A partir de la Figure précédente on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque a varie dans l'intervalle [0, 1. 052].

- une zone chaotique lorsque a varie dans l'intervalle]1. 052, 1. 4].

Système de Lozi

De même on peut calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b pour le système de Lozi.

On fixe $b = 0.5$, et on laisse a varie entre 0 et 1.8.

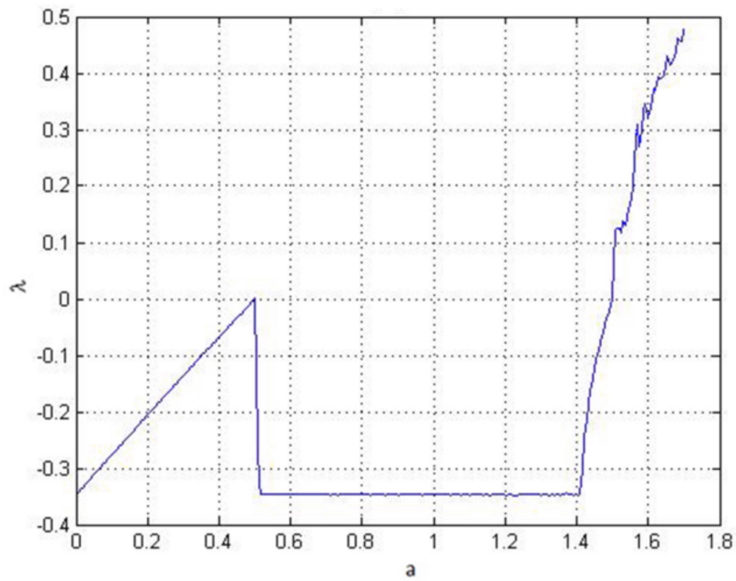

Fig 2-2. L'volution de l'exposant le Lyapunov de systme de Lozi en fonction de a.

A partir de la Figure précédent on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque a varie dans l'intervalle [0 ; 1.5].

- une zone chaotique lorsque a varie dans l'intervalle]1. 5 ; 1. 8].[33]

2.3.3 Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une caractérstique géometrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qui on trouve dans la littérature sont restrictives .

Définition 2.5 *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.*

Définition 2.6 *Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov* $\lambda_k > 0$.

Définition 2.7 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour* *une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A, c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1) U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U est entièrement contenue dans U. De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

2) Les orbites dont le point initial est dans R sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

3) A est un objet fractal.

4) Pour tout point de A, il existe des orbites démarrées dans R qui passent aussi prés que l'on veut de ce point.

Chapitre 3

Exemples de systèmes dynamiques chaotiques

3.1 Systèmes chaotiques continues dans le plan

3.1.1 Brusselator

Le Brusselator est un modèle théorique pour un type de réaction autocatalytique. La dynamique de la réaction de Brusselator peut être décrite par un système de deux ODE. En sans dimension

forme, ils sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y \\ \dot{y} = bx - ax^2y \end{cases}$$

Où $x, y \in \mathbb{R}$, et $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes ,avec $a, b > 0$. x et y représentent l'adimension concentrations de deux des réactifs. l'attracteur chaotique de Brusselator est obtenu dans le cas où $a = 1, b = 2$.

3.2 Systèmes chaotiques continues dans l'espace

3.2.1 Système de Lorenz

Le physicien Edward Lorenz travaillait sur un modèle mathématique simplifié de convection. Il utilisa un modèle à trois variables dynamiques x, y et z. Le système de Lorenz est un exemple célèbre de systèmes différentiels au comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Le modèle implique trois équations différentielles [Cuomo et al., 1993]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

σ désigne le nombre de Prandtl(égal à 10 dans les simulations), $b = \frac{8}{3}$ et r est le nombre de Rayleigh réduit.

Nous allons étudier le comportement et les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs du paramètres de contrôle.

Points fixes du système de Lorenz

Un premier point fixe trivial est $P_0 = x = y = z = 0, \forall r \geqslant 0$.

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = y & (1) \\ rx - y - xz = 0 & (2) \\ -bz + xy = 0 \Leftrightarrow z = \frac{b}{xy} & (3) \end{cases}$$

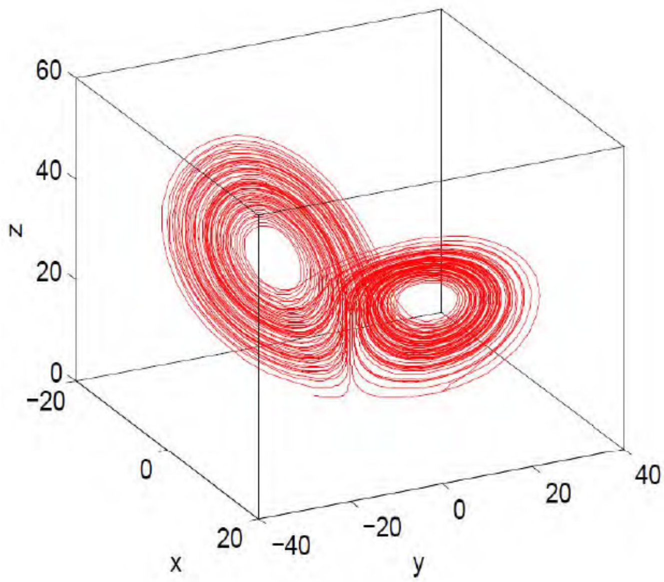

Fig 3-1. Attracteur de Lorenz $\sigma = 10$, b = 8/3 , r = 28.

(1) dans (3) donne $x^2 = bz \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{z}$

(1) dans (2) donne $-xz + rz - z = 0 \Leftrightarrow z = r - 1$

Alors le système de Lorenz possède trois points fixes hyperboliques définis par :

$$
\begin{aligned}
P_0 &= (0,0,0) \\
P_1 &= \left(\sqrt{b\,(r-1)}, \sqrt{b\,(r-1)}, r-1\right) \\
P_3 &= \left(-\sqrt{b\,(r-1)}, -\sqrt{b\,(r-1)}, r-1\right)
\end{aligned}
$$

$P_1 = P_2 = P_0$ pour $r \in [0,1]$. Alors pour $r \in [0,1]$ il existe un seul point fixe,pour $r > 1$,il ya 3 point fixes P_1, P_2, P_0.

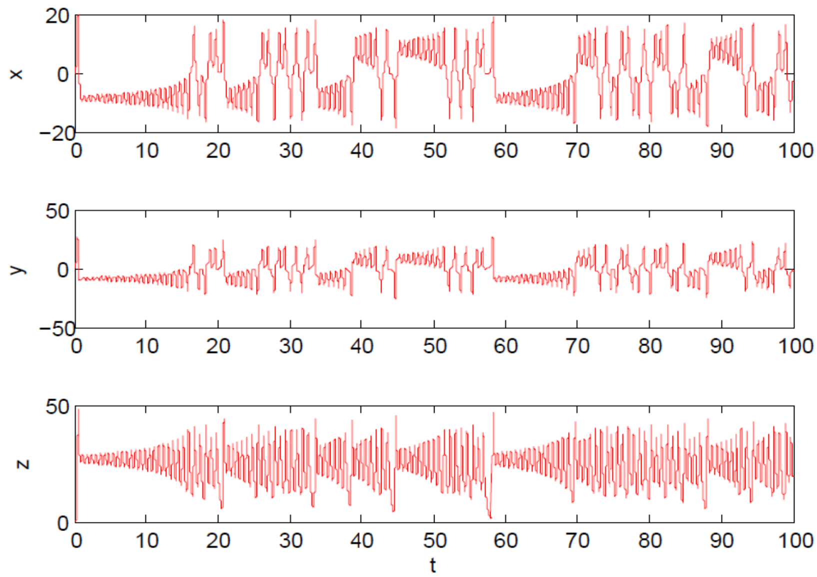

Fig 3-2. Séries temporelles x(t), y(t), z(t) du système de lorenz $\sigma = 10$, b = 8/3 ,r = 28.

Stabilité des points fixes

Pour $|r-1| \lll 1$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$DJ = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

-Pour P_0

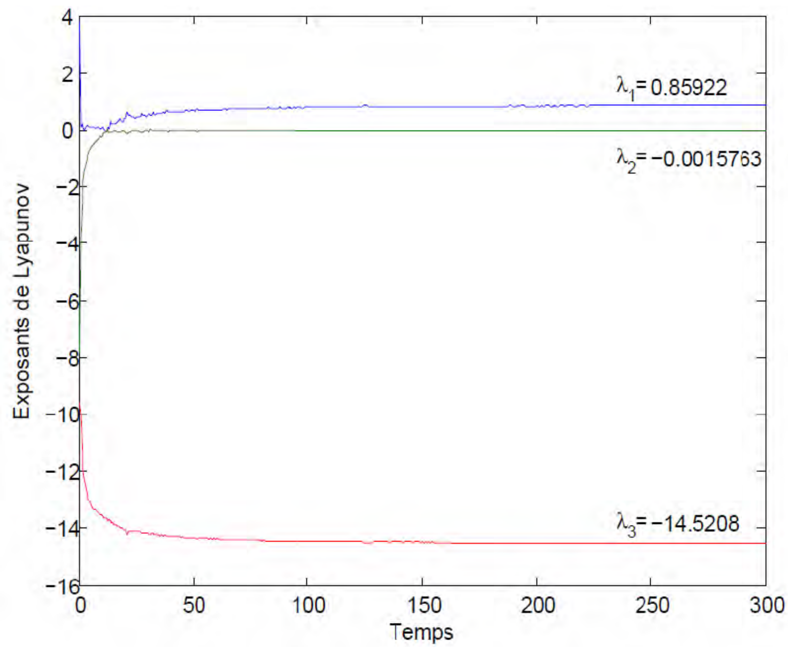

Fig 3-3. Les Exposants de Lyapunov du système de lorenz $\sigma = 10$, b = 8/3 , r = 28.

La matrice Jacobienne corespondant à l'origine est :

$$DJ = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$\det(DJ - \lambda I) = 0$. Alors l'équation caractéristique defini par :$(\lambda + b)\,\lambda^2 + (\sigma + 1)\,\lambda + \sigma 1 - r$

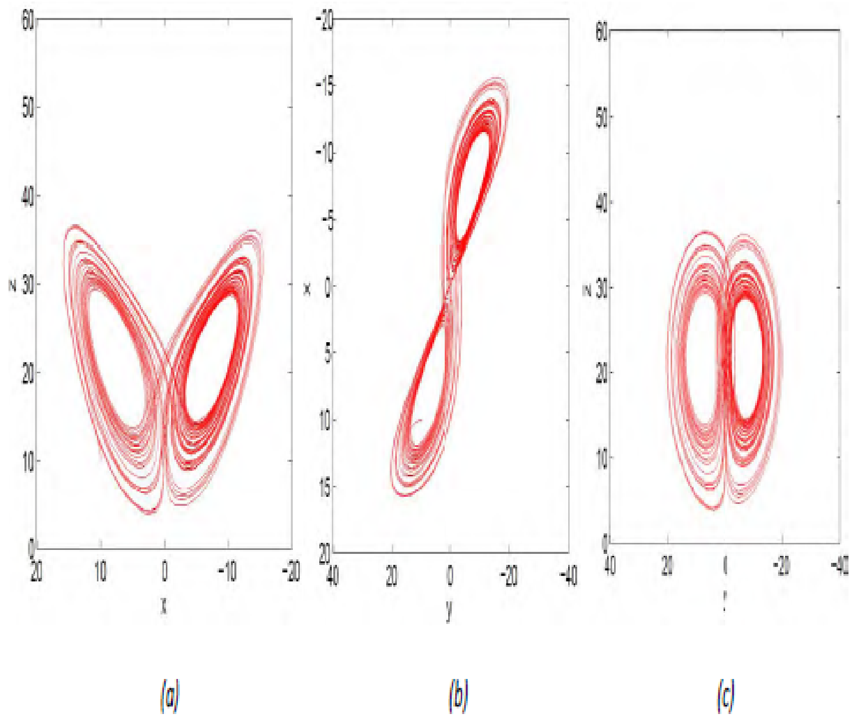

Fig 3-4. Attracteur de Lorenz (a) l'espace $(x-z)$, (b) l'espace $(y-x)$,(c) l'espace $(y-z)$.

a pour racines :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{-\sigma-1+\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}{2} \\
\lambda_2 &= \frac{-\sigma-1-\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}{2} \\
\lambda_3 &= -b
\end{aligned}$$

-Pour P_1 et P_2

La matrice Jacobienne corespondant a ces points :

$$DJ = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\det(DJ - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{(\sigma + 1 + b) - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0 \\
\lambda_2 &= \frac{-(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 + 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0
\end{aligned}$$

On fait de même avec P_2 et on trouve le même résultat $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (noeud stable). Donc pour les points P_1, P_2 sont stable pour $|r - 1| << 1$.

3.2.2 Système de Chua :

le système Chua (également appelé Chua Circuit), est un système dynamique discret de dimension 3 dont la représentation d'état est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases}$$

h la fonction linéaire par déffini :

$$h(x) = \begin{cases} m_1(x+1) - m_0, x < -1 \\ m_0 x, -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ m_1(x-1) + m_0, x > 1 \end{cases}$$

Et α et β sont des paramètres de bifurcation. Les paramètres habituels pour le flux chaotique dans le système est $\alpha = 8.8$, $\beta = 15$, $m_0 = -\frac{1}{7}$, $m_1 = \frac{2}{7}$

3.3 Systèmes chaotiques discrets dans le plan

3.3.1 système d'Hénon

Système d'Hénon, est un système dynamique discret de dimension 2, à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment. Il est défini par la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut réculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Hénon :

$$H^{-1}(x, y) = \left(b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2\right)$$

Où a et b sont des paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation.

En effet, la matrice Jacobienne $DH_{a,b}$ est :

$$DH_{a,b} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

tel que $\det DH_{a,b} = -b$

pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Nous avons fait un programme sur Matlab avec une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ à

travers lequel on peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, on obtient la fig suivante

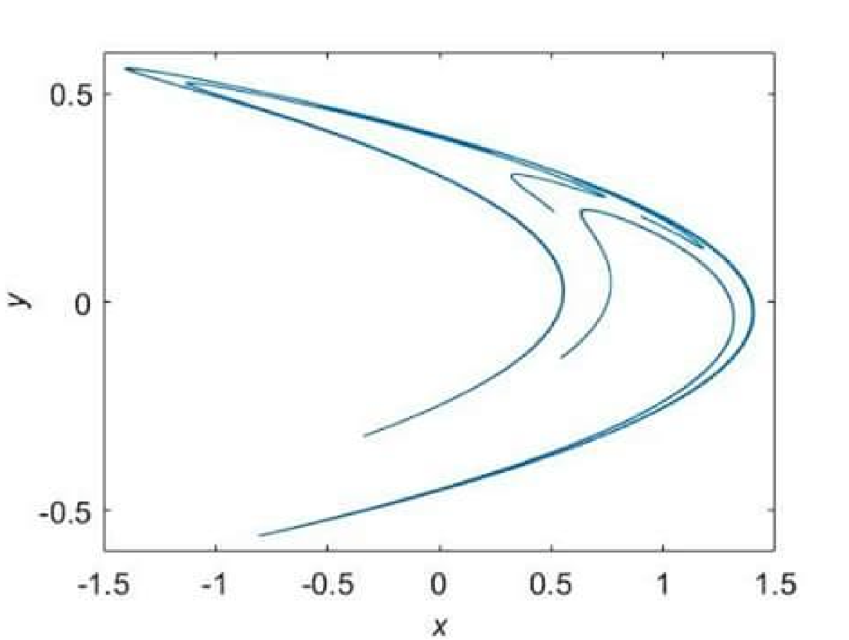

Fig 3-5. Attracteur de Hénon pour $H_{a,b}$ pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

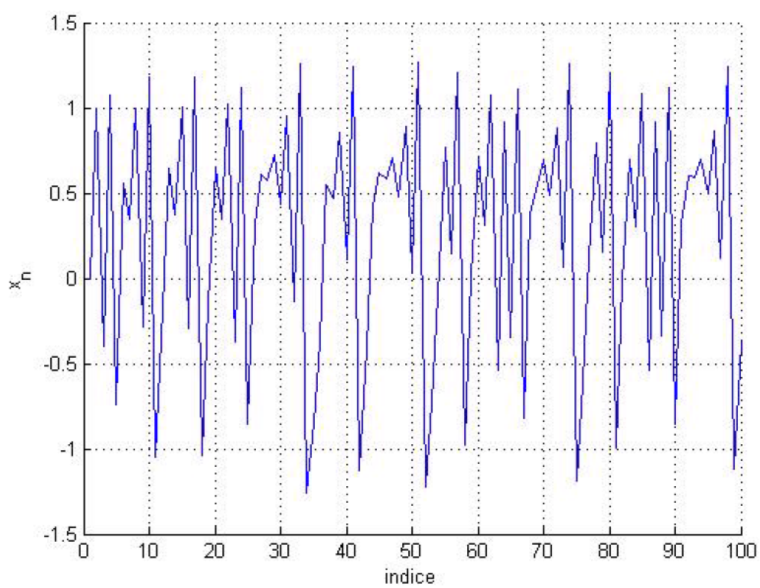

Fig 3-6. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0; y_0) = (0.0)$.

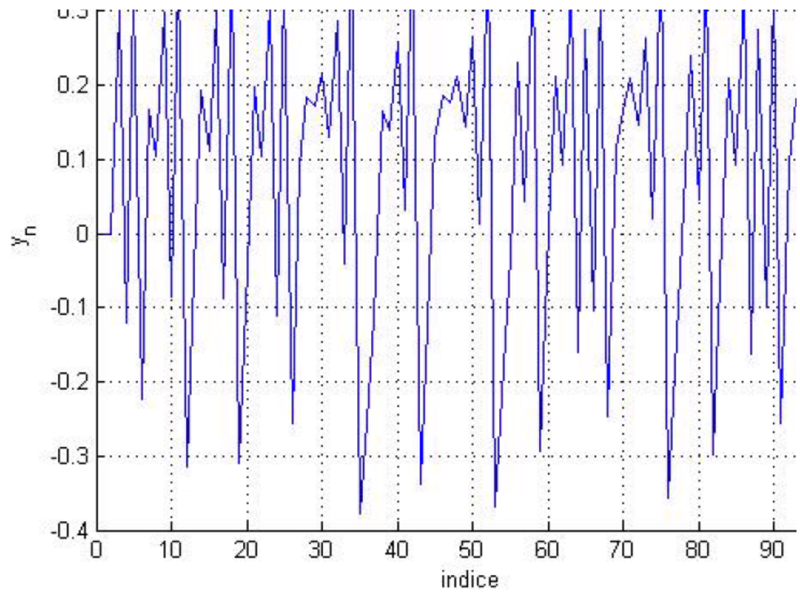

Fig 3-7. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ avec $(x_0, y_0) = (0.0)$.

Les deux figures précedents (Fig3.6),(Fig3.7) présenté comment évoluent les variables x et y pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0.0)$.

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables.

Sensibilité aux conditions initiales

Prenons par exemple les conditions initiales suivantes $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

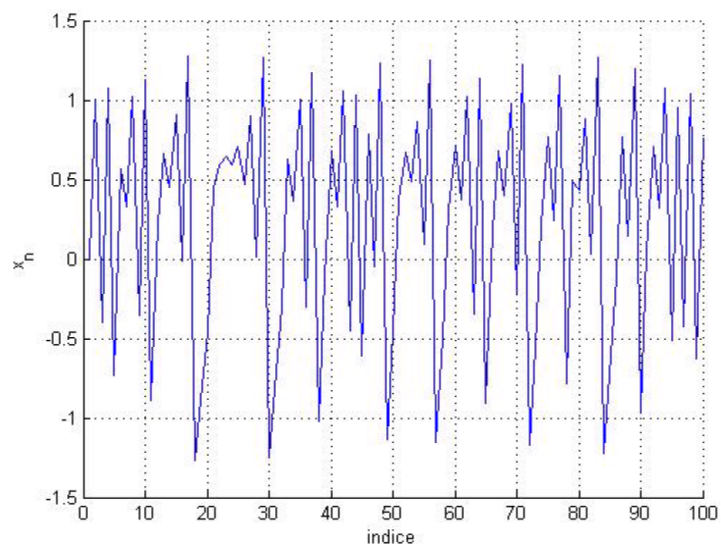

Fig 3-8. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ et $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$.

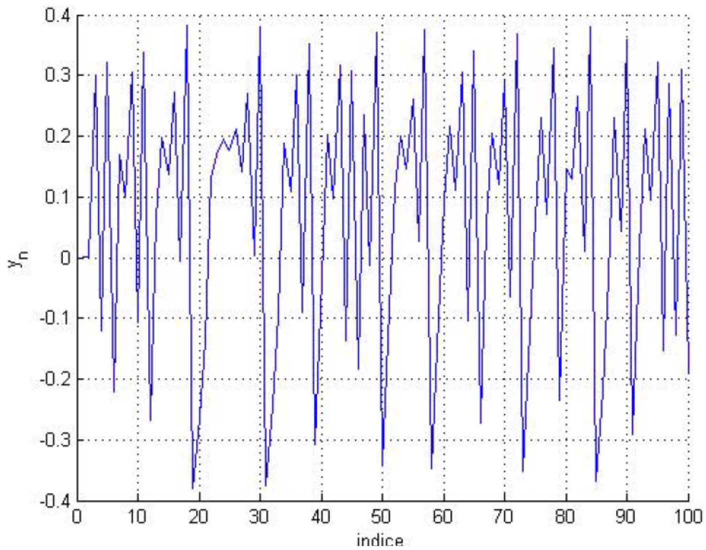

Fig 3-9. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ et $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$

On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quant à $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Points fxes et stabilité des premières et deuxième itérations

1-Première itération

La première itération du système de Hénon introduit déjà dans la section précédente est considéré comme le système original de Hénon donné par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Pour trouver les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$.

$$H_{a,b}(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow -ax^2 + (b-1)x + 1 = 0$$

Théorème 3.1 *Pour* $|b| < 1$, *et* $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ *on a :*

1. *Si* $a < a_0(b)$, $H_{a,b}$ *n'a aucun point fixe.*
2. *Si* $a = a_0(b)$,$H_{a,b}$ *a un seul point fixe.*
3. *Si* $a > a_0(b)$, $H_{a,b}$ *a deux points fixes.*

les points fixes sont :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= \left(\frac{b-1-\beta}{2a}, b\left(\frac{b-1-\beta}{2a}\right)\right)\\(x_2, y_2) &= \left(\frac{b-1+\beta}{2a}, b\left(\frac{b-1+\beta}{2a}\right)\right)\end{aligned}$$

Deuxième itération

La deuxième itération du système original de Hénon est d'intêret depuis qu'une bifurcation par doublement de la période est un mécanisme éminent comme révélé dans le diagramme de bifurcation.

Selon la variation de Jacobi la deuxième itération du système de Hénon est donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a^3x_n^4 + 2a^2x_n^2y_n + 2a^2x_n^2 - ay_n^2 - 2ay_n - a + bx_n + 1 \\ y_{n+1} = b\left(-ax_n^2 + y_n + 1\right) \end{cases}$$

Ce système dispose de quatre points d'équilibres deux sont hérités du système original de Hénon et les deux autre sont :

$$\begin{aligned}(x_3, y_3) &= \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}, -b(\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2})\right)\\(x_4, y_4) &= \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}, -b(\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2})\right)\end{aligned}$$

Analyse de bifurcation

Proposition 3.1 *pour* $a = -0.1225$ *et* $b = 0.3$ *on a une bifurcation selle-noeud*

Preuve *Pour* $a = -0.1225$ *et* $b = 0.3$ *le point d'équilibre du système est* $(2.8571, 0.8571)$ *indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la figure suivante.La région de* a *de la branche stable est comprise entre* $-0.1225 \leq a \leq 0.3675$. ■

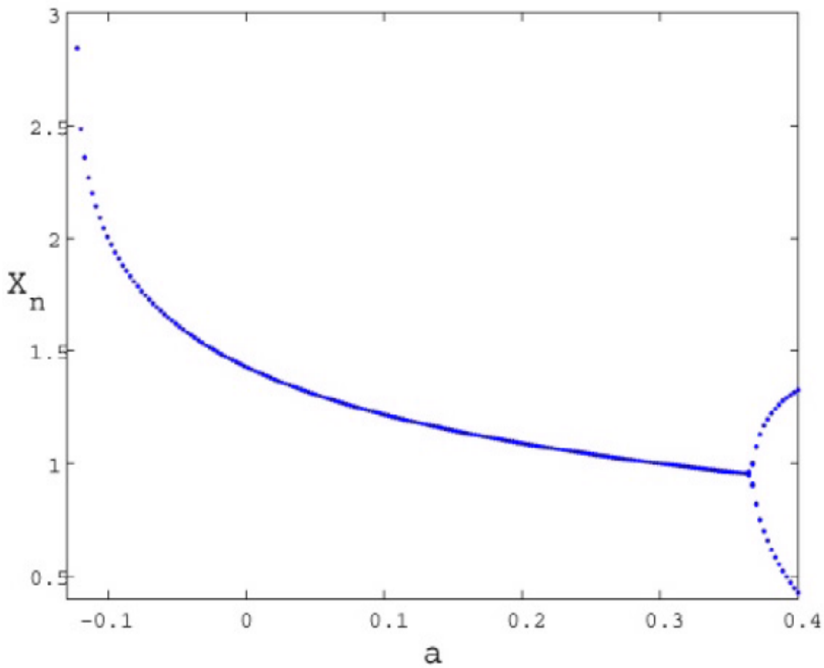

Fig 3-10. Diagramme de Bifurcation pour le système original de Hénon pour $-0,15 \leq a \leq 0,4$ $et\ b = 0,3$.

Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 1.4 avec un pas de 0. 001 ; b est égale à 0. 3.

On obtient le diagramme suivant :

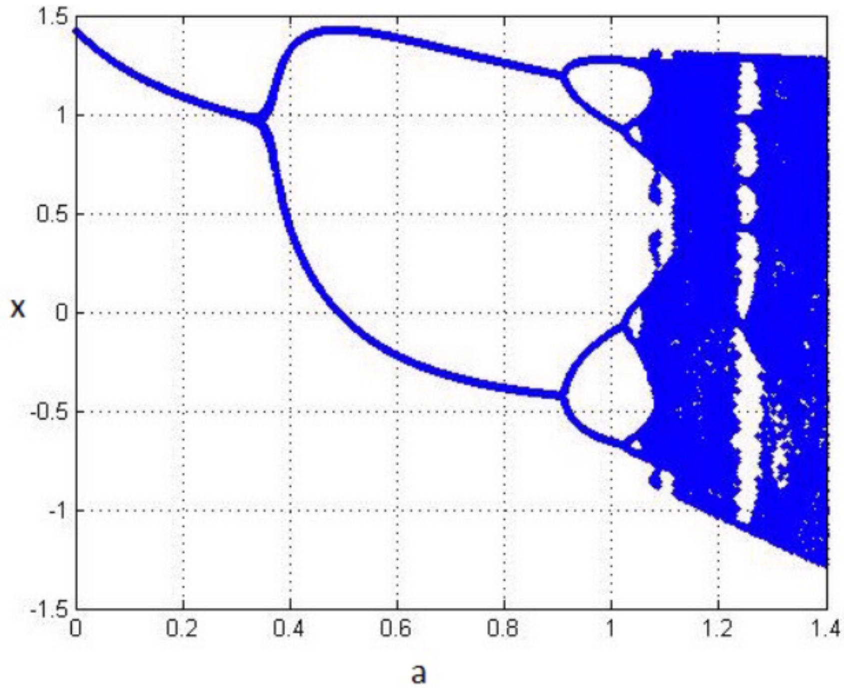

Fig 3-11. Diagramme de bifurcation de Hénon.

- Si $-0.1225 < a < 0.3675$, les itérations convergent vers un point du plan,

- Si $0.3675 < a < 0.9$, les itérations tendent à constituer un suite (x_n, y_n) telle que (x_{2n}, y_{2n}) converge vers un point et (x_{2n+1}, y_{2n+1}) converge vers un autre point. On a donc deux points limites, on observe un doublement de période.

- Si $0.9 < a < 1.02$, on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a \geqslant 1.02$, on ne distingue plus les cycles : le système est chaotique.

3.3.2 Système de Lozi

René Lozi, propose l'application suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a \mid x_n \mid +y_n + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$.

La seule différence entre le système de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire x^2 du système de Hénon est remplacé par $|x|$ dans le système de Lozi qui fait de ce système une application non-différentiable.

Points fixes du système de Lozi

Le système de Lozi possède deux points fixes hyperboliques définis par :

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b}\right) & \text{si} b < a+1 \\ P_2 &= \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b}\right) & \text{si} b < -a+1 \end{aligned}$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces deux points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne en ces points.

Stabilité des points fixes

Pour des considérations de stabilité on a besoin de la matrice jacobienne de $L(x; y)$ qui s'écrit :

$$DJ = \begin{pmatrix} -asign\,(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne $\det(DJ_{a,b}) = b$.

Remarquons que $J(x; y)$ dépend au point de l'orbite seulement avec $sign(x)$. Accordialement, on note ses valeurs par $J = J\,(x > 0, y)\, etJ_- = (x < 0, y)$. De plus, comme $\det J_\pm = -b$ on va considérer le système de Lozi seulement pour $|b| \leq 1$: De plus $J\,(P_1) = J_+ etJ\,(P_2) = J_-$.

Le polynôme cararactéristique de J aux points fixes s'écrit :

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + a\lambda - b & \text{Pour } P_1 \\ &\lambda^2 - a\lambda - b & \text{Pour } P_2 \end{aligned}$$

Stabilité de P_1

Proposition 3.2 *Le point fixe P_1 peut être stable quand (b, a) se trouve dans le triangle de sommets $(1, 0), (-1, 2), (-1, -2)$ sur l'espace des paramètres et instable si : $b < -1, b < a+1, b < 1-a$*

Preuve Le discriminant du polynôme cractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$.

Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles. Elles sont de module inférieur à 1 si : $b - 1 < a < 1 - b$.

Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes. Elles sont de module inférieur à 1 si :$b > -1$.

D'où la stabilité de P_1.

Pour $b < -1, b < a + 1$, $b < 1 - a$ les valeurs propres sont de module supérieur à 1 (i.e. le point P_1est instable). ■

Proposition 3.3 *Le point P_1 est un point selle pour $b > a + 1, b > 1 - a$.*

Preuve La preuve est immédiate en calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 on obtient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si : $b > a + 1, b > 1 - a$.

Et le point P_1 est un point selle. ■

Stabilité de P_2

Proposition 3.4 *Le point fixe P_2est instable si : b > -a + 1, b > a + 1.*

Preuve Le discriminant du polynôme cractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$.

P_2 existe si $b > -a + 1$; alors$\Delta > 0$, et les valeurs propres sont toujours des réelles. Elles sont de module supérieur à 1 si $b > -a + 1$, $b > a + 1$. ■

Proposition 3.5 *Le point P_2 est un point selle si $b > -a + 1, b > a + 1$.*

Preuve La preuve est immédiate aussi en calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 on obtient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si : $b > a + 1$, $b > 1 - a$. Et le point P_2 est un point selle. ■

Attracteur de Lozi

Nous avons fait un programme sur Matlab similaire au code source de Hénon avec une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ à travers lequel on peut voir la forme d'attracteur dans la figure suivante

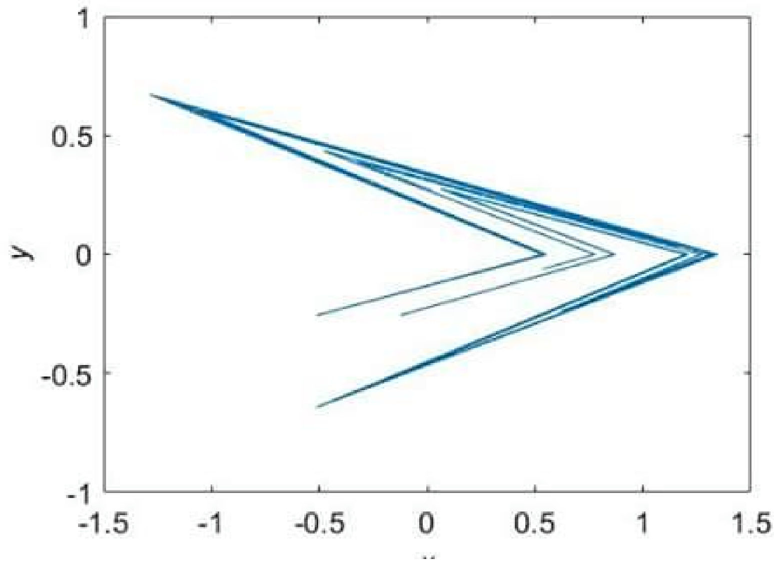

Fig 3-12. Attracteur de lozi pour a = 1.7 et b = 0.5.

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan ; elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables x et y pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$, voir Figure (3,13) et Figure (3,14) respectivement.

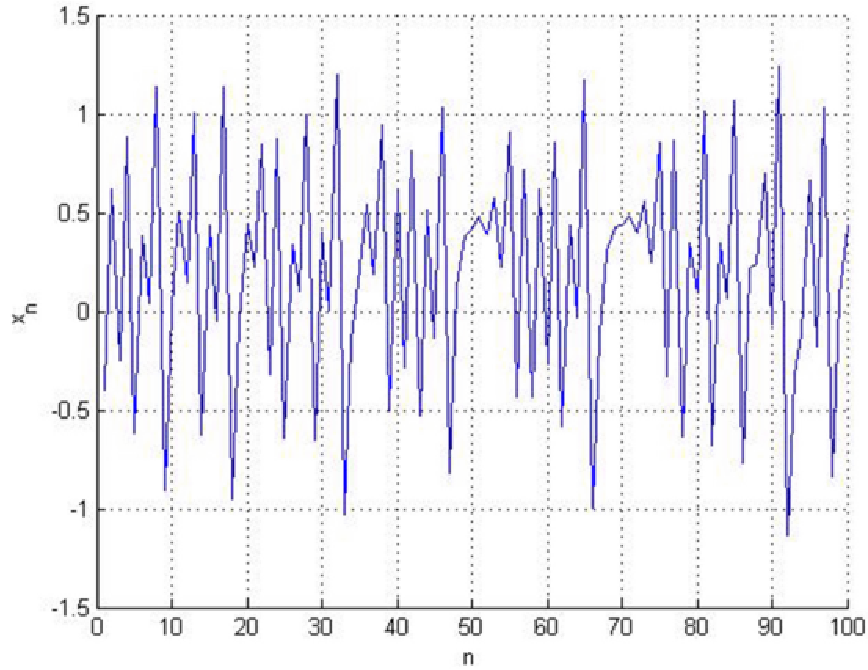

Fig 3-13. Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

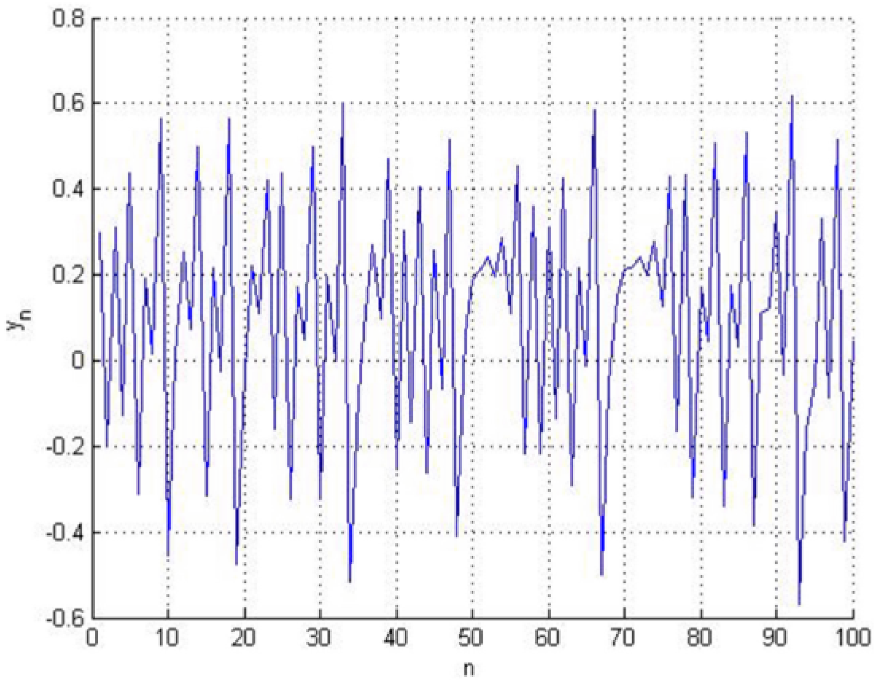

Fig 3-14. Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables (voir Fig (3.13) et Fig (3.14)), qui se justifie par le diagramme de bifurcation sur la figure (3.15).

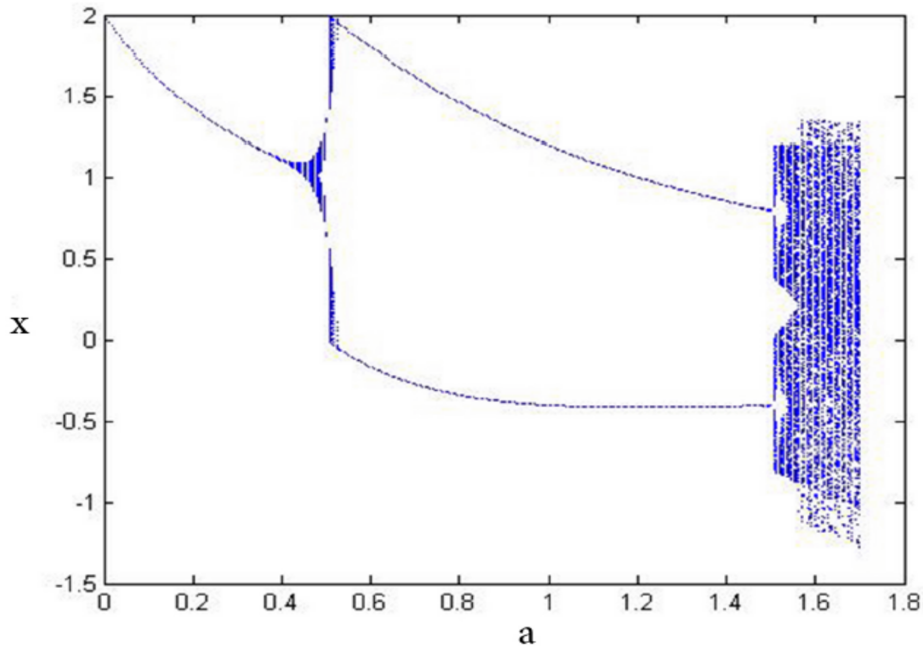

Fig 3-15. Diagramme de bifurcation de Lozi.

3.3.3 Système de Lorenz discret

Le système de Lorenz discret, est donné par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1+\alpha\beta)x_1(k) - \beta x_2(k)x_1(k) \\ x_2(k+1) = (1-\beta)x_2(k) + \beta x_1^2(k) \end{cases}$$

est un système a attracteur chaotique, voir la figure suivant, lorsque $\alpha = 1.25, \beta = 0.75$.

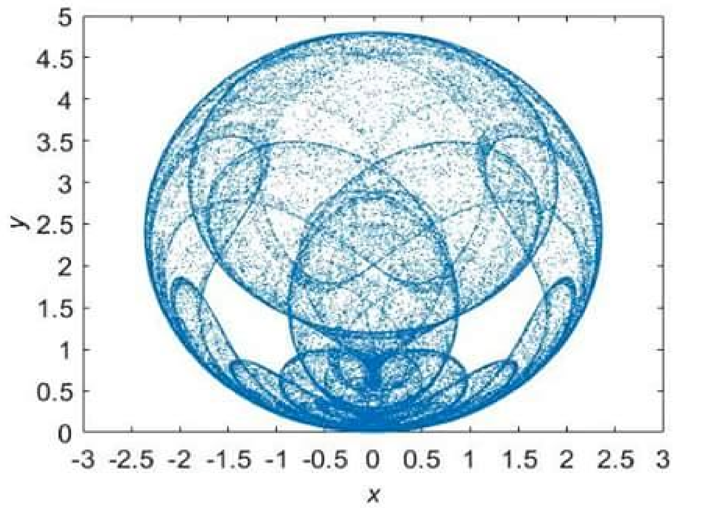

Fig 3-16. Attracteur chaotique de Lorenz discret pour $\alpha = 1.25, \beta = 0.75$.

3.3.4 Modèle de Flow

Le modèle de Flow est un système chaotique discret de dimension 2, présenté par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + ax_1(k) \\ x_2(k+1) = b + x_1^2(k) \end{cases} \quad ((4.5))$$

d'où $\alpha = -0.1, \beta = -1.7$. L'attracteur chaotique de Flow est représenté dans la figure

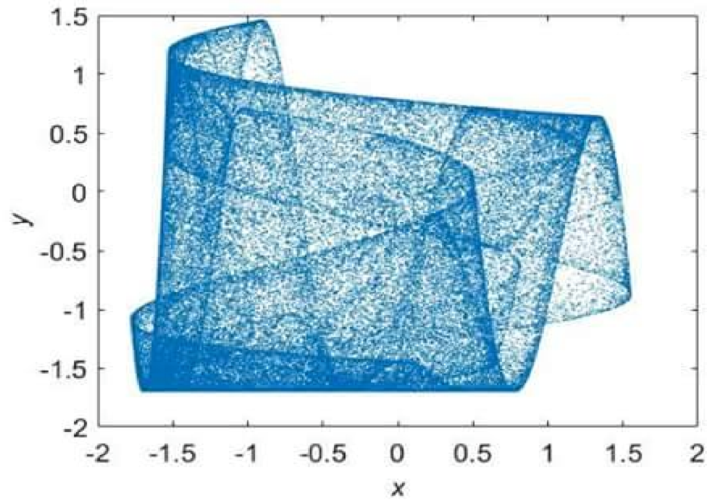

Fig 3-17. Attracteur de Flow pour $\alpha = -0.1, \beta = -1.7$.

3.4 Systèmes chaotiques discrets dans l'espace

3.4.1 Système de Rössler discret

Le système discret de Rössler, est représenté par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k)(1 - x_1(k)) - \beta(x_3(k) + \gamma)(1 - 2x_2(k)) \\ x_2(k+1) = \delta x_2(k)(1 - x_2(k)) + \varsigma x_3(k) \\ x_3(K+1) = \eta(1 - \theta x_1(k))[(x_3(k) + \gamma)(1 - 2x_2(k)) - 1] \end{cases}$$

tels que $\alpha = 3.8, \beta = 0.05, \gamma = 0.35, \delta = 3.78, \varsigma = 0.2, \eta = 0.1$,et $\theta = 1.9$. L'attracteur hyperchaotique du système est représenté dans la

Figure .

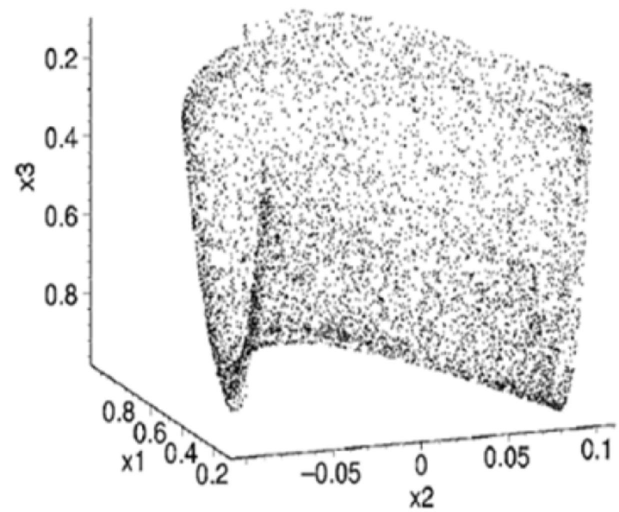

Fig 3-18. L'attracteur hyperchaotique du système discret de Rossler .

Chapitre 4

Synchronisation des systémes dynamiques chaotiques

4.0.2 Introduction

Le phénoméne de synchronisation a été étudié depuis long temps. Au $17^{éme}$ siécle, Huygens (1629-1695) remarqua ce phénoméne en étudiant deux horloges de fréquences lé-gérement différentes. Il constata qu'en les reliant l'une à l'autre avec un morceau de bois, elles affichaient toutes les deux la méme heure : elles se synchronisation. Des exemples de synchronisation existente dans la nature, dans le domaine de la science de la vie et de la terre, ainsi que dans les domaines techniques. En neurobiologie, la notion de synchronisa-tion apparait pour expliques le fonctionnement du cerveau : chaque activité est produite par un ensemble de neurones dont les signaux éléctriques osciellent de maniere synchrone.

Dans le domaine des communications, les procedés utilisés pour transmettre l'infor-mation sous forme numérique exigent, en général, un synchronisme précis entre certaines fonctions du récepteur et les fonctions correspondantes de l'émetteure. Par "synchronisme", on entend que les générateurs rythmant les deux fonctions associées doivent avoir la méme fréquence nominale et présenter un déphasage constant et bien déterminé.

Si, par exemple,on utilise une transmission synchrone en bande de base , le ré-cepteur identifiera chacune des données binaires en échantillonnant le signal transmis, à un instant bien déterminé de l'intervalle de temps attribué à cette donnée. Le générateur commandant l'échantillonnage doit etre synchrone de l'horloge "bit" qui, dans l'émetteur, commande la sortie des données .

Dans le cas ou l'information est organisée en mots, dont le rythme d'émission est fixé par une horloge particuliére, il faudra disposer également, dans le récepteur, d'un générateur synchrone de cette horloge "mot".

Lorsque la transmission fait appel à une modulation , un autre type de synchronisme peut étre nécessaire. Il existe en effet des procédés de démodulation, dits "syn-chrones", exigeant un signal de référence synchrone de la porteuse utilisée pour la trans-mission.

Depuis quelques années, la théorie des systémes chaotiques a été appliquée le domaine des communications. La synchronisation des systémes chaotiques semble impos-sible dans un premier temps, notamment à cause de la sensibilitité de ces systémes aux conditions initiales. De plus, un systéme chaotique n'est pas asymptotiquement stable, c'est-à-dire que les trajectoires issues des conditions initiales voisines (légérement diffé-rentes) divergent exponentiellement avec le temps. En effet, on peut dire que pour les systémes réels, il n'est pas facile de produire et de reproduire les mémes conditions de démarrage. D'aprés ce point de vue, tout changement de paramétre dans un systéme chao-tique pourrait conduire à une divergence entre ces trajectoires.

Pourtant ce raisonnement n'est pas correct. Il peut exister des conditions sous les quelles les trajectoires de deux sys-téme chaotiques différents peuvent converger l'une vers l'autre, si certaines informations (énergie) pertinentes sont échangées.

4.1 Types de synchronisation

4.1.1 Synchronisation complète

Soit le système chaotique maitre suivant :

$$X(t+1) = F(X(t)) \qquad ((4,1))$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^m$ et $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, et soit le système chaotique esclave présenter par la formule suivante :

$$Y(t+1) = G(Y(t)) + U \qquad ((4,2))$$

tells que $Y(t) \in \mathbb{R}^m et\ G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, et $U = (u_i)_1^n$ à déterminer le vecteur de controle.

L'erreure de la synchronisation compléte est définit par :

$$e\,(t) = Y(t) - X(t), \text{tells que } \lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0 \qquad ((4,3))$$

alors on conclus que :

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation compléte identique.

Si $F \neq G$, c'est une synchronisationcompléte non identique.

La synchronisation compléte est donc une coincidence compléte entre les variables d'état des deux systémes synchronisés

4.1.2 Anti-Synchronisation

On dit que deux système sont anti-synchronisés si le système maitre et le système esclave ont des vecteurs en valeur absolue d'étatiqentiquents mais avec des signes opposés, et la somme de ces vecteurs tend vers 0 quand $t \to \infty$.

Alors l'erreur d'anti-synchronisation présenter par :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \qquad ((4,4))$$

4.1.3 Synchronisation décalée

On dit que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques présenté une synchronisation décalée si et seullement si la temps décalée (décalage de temps).

Si les variables d'état $Y(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(t)$ du système chaotique maitre en temps décalé on peut dire q'il existe une synchronisation retardée,et on écrir

$$\lim_{t\to\infty} \|Y(t) - X(t-\varepsilon)\| = 0, \forall x\,(0) \qquad ((4,5))$$

tells que ε trés petit.

4.1.4 Synchronisation projective

Si les variables d'état $Y(t) = (y_i(t))_1^n$ du systéme chaotique esclave se synchronisent avec une constente multiple de l'état $X(t) = (x_i(t))_1^n$ du systéme chaotique maitre, tel que :

$$\ni \alpha_i \neq 0, \lim_{k\longrightarrow\infty} \mid y_i(t) - \alpha_i x_i(t) = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, ..., n \qquad ((4.6))$$

alors on dit qu'il existe une synchronisation projective.

Si les α_i sont égaux à 1 répresente un cas de synchronisation compléte.

Si les α_i sont égaux à -1 répresente un cas d'anti-synchronisation compléte.

4.1.5 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systémes chaotiques couplés. On considére un couple de systémes maitre esclave représenté par :

$$\begin{cases} X(t+1) = F(X(t)) \\ Y(t+1) = F(Y(t)) + U \end{cases} \qquad ((4.7))$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les état des systémes maitre et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ et $U \in \mathbb{R}^m$, est un controleur à déterminer

S'il existe un controleur $U \in \mathbb{R}^m$ et une fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systémes maitre et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t\to\infty} \|Y(t) - \Phi(X(t))\| = 0 \;\forall x(0), \forall y(0) \qquad ((4.8))$$

alors, les systémes maitre-esclave (4.7) se synchronisent aus sens généralisé par rapport à la fonction Φ.

La synchronisation généralisée est une généralisation de la synchronisation compléte, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective pour synchroniser des systémes chaotiques.

4.1.6 Synchronisation Q-S

Nous disons qu'un systéme maitre, $X(t)$,n-dimensionelle, et $Y(t)$ un systéme esclave, m-dimensionelle sont en synchronisation Q-S dans la dimension d, s'il existe un controleur $U \in \mathbb{R}^n$ et deux fonctions $\mathbb{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(t) = \mathbb{Q}(X(t)) - S(Y(t)), \text{tells que } \lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0 \tag{(4.9)}$$

La synchronisation Q-S est une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes

4.2 Méthode de synchronisation

4.2.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par Bai et Lonngren, c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{(4.10)}$$

et

$$y(k+1) = g(y(k)) + U \tag{(4.11)}$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement , $f : \mathbb{R}^n \to \ \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et $U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= g(y(k)) - f(x(k)) + U \end{aligned} \tag{(4.12)}$$

Si on peut écrire la quantitie $g(y(k)) - f(x(k))$ de la façon suivante :

$$g(y(k)) - f(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) \tag{(4.13)}$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) \tag{(4.14)}$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(k), y(k)) \tag{(4.15)}$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(k) \tag{(4.16)}$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L)e(k) \tag{(4.17)}$$

Donc le probléme de la synchronisation entre le système maître (10.7) et le système esclave (10.8) est transformé en probléme de zero-stabiltée du système (10.14). Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires discrets.

Théorème 4.1 *Le système maître (4.10) et le système esclave (4.11) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (4.13), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de $A - L$ se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité .*

4.3 Quasi-contrôle des systèmes dynamiques discrets chaotiques

Résumé

L'objectif de cette étude est de synchroniser deux phénomènes décrits par deux systèmes chaotiques discrets, bien que les dimensions soient différentes dans le sens que le premier écoulement dans l'espace et l'autre dans le plan et vice versa. Parce que la synchronisation est incomplète, nous allons lancer un quasi-controllig.

La légitimité de notre choix de vecteurs de contrôleur est démontrée par la tendance à zéro des erreurs en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov.

Introduction :

Souvent, nous nous trouvons obligés d'assurer l'arrivée de deux phénomènes décrits par deux systèmes discrets discrets en même temps, et le mot «temps» signifie ici le rang ou l'itération, car les systèmes sont discrets. En outre, les deux systèmes dynamiques discrets représentatifs sont de dimensions différentes, ce qui nous permet de contrôler une partie des phénomènes, et cela se déroule dans plusieurs domaines de recherche et de la vie.

À partir d'un certain rang (temps), nous avons besoin de coupler (synchroniser) les deux systèmes qui ne contiennent pas le même nombre de composants, par exemple un avec deux composants et l'autre avec trois composants, et cela existe, tel qu'un Communication représentée par un système de trois dimensions, et un signal représenté par un système de deux dimensions apparues en même temps, signal d'information.

Beaucoup de modèles mathématiques de processus biologiques, de procédés physiques, d'optique non linéaire, de dynamique des fluides, de réseau de communication et de processus chimique ont été définis à l'aide de systèmes dynamiques à temps discret.[26] , [28] , [30] . Cependant, on a accordé plus d'attention aux Synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets.[23 − 25] , [27] , [29] , [31] . De nombreuses méthodes ont été développées pour la synchronisation du chaos dans des systèmes dynamiques à temps discret tels que le contrôle actif , La conception de l'arrière-plan et le contrôle du mode coulissant, etc... .[23 − 25] , [27] , [29] , [31] .

La majorité des travaux de synchronisation entre deux systèmes de différentes dimensions basés sur une fonction f qui augmente ou réduit la taille du système synchronisé, selon ce cas, cependant, cette méthode nécessite des conditions analytiques sur f, ce qui a été un inconvénient majeur pour l'utilisation.

Pour éviter toute difficulté, nous choisissons le vecteur contrôleur, et sur la base de la théorie de la stabilité de Lyapunov, nous proposons une nouvelle conception de contrôle pour garantir la synchronisation, d'une part, entre le système en 3D de Hénon généralisée et le systèmeen 2D de Hénon. Deuxièmement, entre le système en 2D de Lozi et le système en 3D de type Hénon généralisée.

4.3.1 Quasi-synchronisation entre le système maître 3D et le système esclave 2D

Tout d'abord, nous essayons de synchroniser le système maître de la carte générique Hénon 3D, décrite dans R^3 par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 1.76 \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \end{cases} \tag{(4.18)}$$

Avec le système esclave qui est la carte Hénon, décrite dans R^2 par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 1 + u_1, \\ y_2(k+1) = by_1(k) + u_2, \end{cases} \tag{(4.19)}$$

Ou $(a, b) = (1.4, 0.3)$ et $(u_{1,}u_2)$ est le vecteur controlleur.

Comme nous le remarquons, le premier système joue dans l'espace avec trois composants et la deuxième lecture dans l'avion. Nous définissons les erreurs de quasi-synchronisation par

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \end{cases} \tag{(4.20)}$$

Les erreurs de synchronisation entre le système maître (4.18) et le système esclave (4.19) peuvent être dérivées comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 0.1x_3(k) + x_2^2(k) - 0.76 + u_1 \\ e_2(k+1) = by_1(k) - x_1(k) + u_2 \end{cases} \tag{(4.21)}$$

Pour obtenir une synchronisation entre les systèmes (4.18) et (4.19), on peut choisir le contrôleur vectoriel U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_2(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + ay_1^2(k) - 0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 0.76 \\ u_2 = (1-b)\,x_1(k) \end{cases} \tag{(4.22)}$$

Ensuite, les erreurs de synchronisation entre les systèmes (4.18) et (4.19), simplifiées comme suit : Nous considérons le candidat Lyapunov fonction pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_2(k) \\ e_2(k+1) = be_1(k) \end{cases} \tag{(4.23)}$$

$$V\left(e(k)\right) = \sum_{i=1}^{3} e_i^2(k), \tag{(4.24)}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V\left(e(k)\right) &= \sum_{i=1}^{3} e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^{3} e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_2^2(k) + b^2 e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) \\ &= \left(b^2-1\right) e_1^2(k) - \frac{1}{4}e_2^2(k) < 0. \end{aligned}$$

Alors, par la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que

$$\lim_{k\to\infty} e_i\left(k\right) = 0, \quad \left(i = 1,\ 2\right). \tag{(4.25)}$$

Nous concluons que les systèmes (4.18) et (4.19) sont quasi synchronisés.

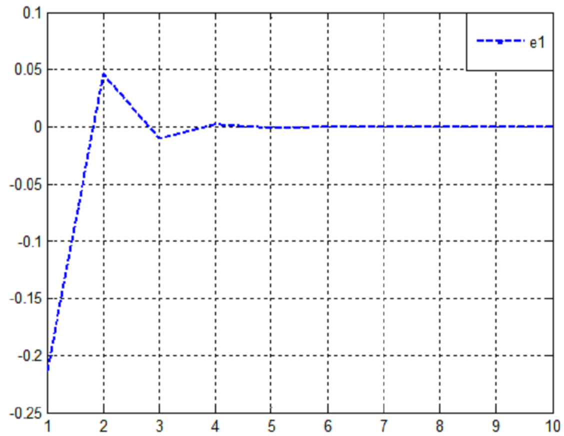

Fig 4-1. Synchronisation de l'erreur $e1$.

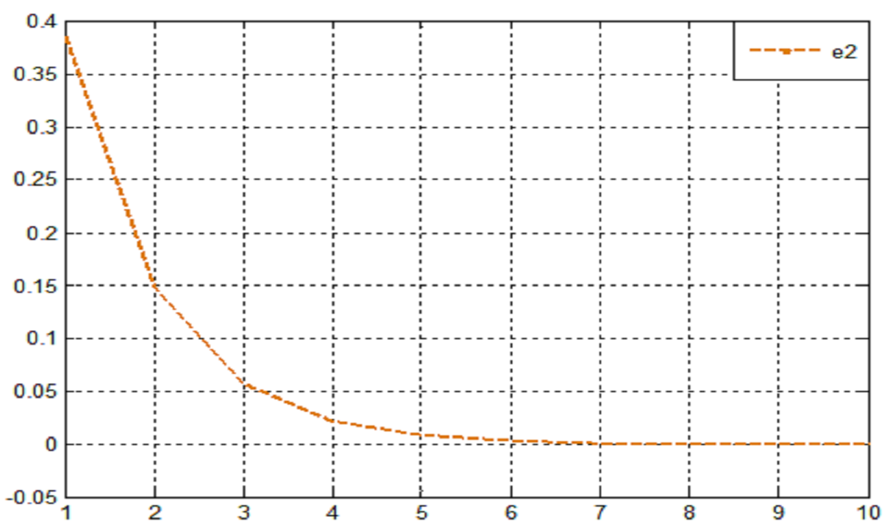

Fig 4-2. Synchronisation de l'erreur $e2$.

4.3.2 Quasi-synchronisation entre le système maître 2D et le système esclave 3D

Deuxièmement, nous considérons le système maître qui est l'application de Lozi , décrit dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = 1 + x_1(k) - a\,|x_2(k)| \end{cases} \tag{(4.26)}$$

Et le système esclave qui est celui en forme de Hénon généralisée en 3D [2] , [5], décrit dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) + u \\ y_2(k+1) = 1 + \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) + u_2 \\ y_3(k+1) = \beta y_1(k) + u_3 \end{cases} \tag{(4.27)}$$

Ou $(\alpha, \beta) = (1.4, 0.2)$ et $(u_{1,} u_2)$ est le vecteur controlleur.

Les erreurs de synchronisation sont définies par

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \\ e_3(k) = y_3(k) - x_1(k) \end{cases} \tag{(4.28)}$$

Comme nous le remarquons, la troisième erreur est arbitraire, puis les erreurs de synchronisation entre le système maître (4.26) et le système esclave (4.27) peuvent être dérivées comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) - x_2(k) + u_1 \\ e_2(k+1) = \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) - x_1(k) + a\,|x_2(k)| + u_2 \\ e_3(k+1) = \beta y_1(k) - x_2(k) + u_3 \end{cases} \tag{(4.29)}$$

Pour assurer la synchronisation entre les systèmes (4.26) et (4.27), on peut choisir le contrôleur vectoriel U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_3(k) + x_2(k) - \frac{1}{2}x_3(k) + \alpha y_2^2(k) - 1 \\ u_2 = -\beta x_2(k) + \alpha y_1^2(k) + x_1(k) - a\,|x_2(k)| \\ u_3 = -\beta x_1(k) + x_2(k) \end{cases} \tag{(4.30)}$$

Les erreurs de synchronisation entre les systèmes (4.26) et (4.27) peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_3(k) \\ e_2(k+1) = \beta e_2(k) \\ e_3(k+1) = \beta e_1(k) \end{cases} \tag{(4.31)}$$

Pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation, on considère la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^{3} e_i^2(k), \tag{(4.32)}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^{3} e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^{3} e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_3^2(k) + \beta^2 e_2^2(k) + \beta^2 e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\ &= \left(\beta^2 - 1\right) e_1^2(k) + \left(\beta^2 - 1\right) e_1^2(k) - \frac{3}{4}e_3^2(k) < 0 \end{aligned} \tag{(4.33)}$$

Ainsi, par la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que les erreurs aient tendance à zéro à l'infini

$$\lim_{k\to\infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1,\ 2, 3)\,. \tag{(4.34)}$$

Nous concluons que les systèmes (4.26) et (4.27) sont quasi-synchronisés.

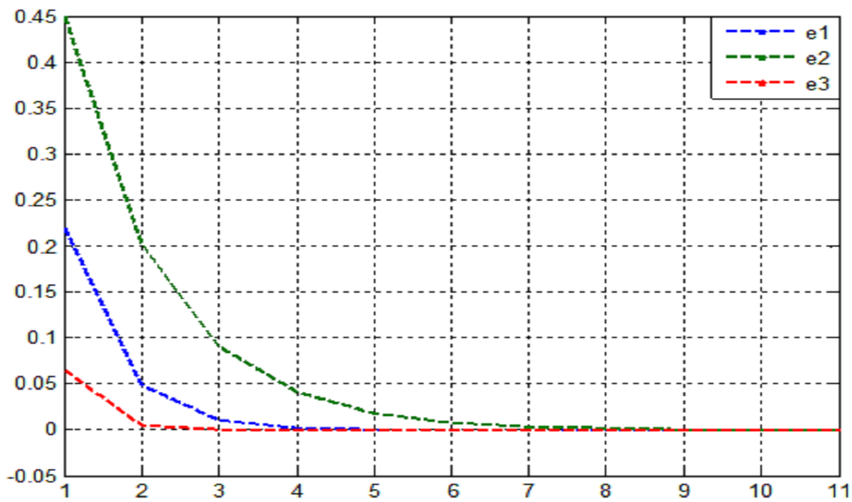

Fig 4-3. Synchronisation des erreurs e1.e2.e3.

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire était de présenter de façon approfondie les systèmes dynamiques non linéaires, on donnant une synthèse sur les notions de base pour l'étude d'un tel système, comme les points fixes, leurs stabilités, puis les différents types de bifurcation, qui nous amène à la détection du comportement chaotique via plusieurs caractéristiques dont la sensibilités aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, et attracteurs étranges.

Ensuite, nous nous attachons au comportement chaotique dans les systèmes les plus célèbres dans la littérature qui comportent des perturbations imprévisibles pour un ensemble de paramètres, et qui ont une grande utilité et citation dans plusieurs disciplines, comme l'application logistique, le model de Hénon, l'application de lozi, et autres. Les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes ont lieu dans ce manuscrit, et nous avons analysé le problème de la synchronisation pour des systèmes dynamiques chaotiques en temps discret avec des dimensions différentes. Une nouvelle méthode de contrôle a été proposée et des simulations numériques ont été faites pour montrer l'efficacité du schéma proposé. Nous couplons deux phénomènes, qui sont représentés par deux systèmes dynamiques ayant des dimensions différentes, et de plus avec des propriétés topologiques différentes, et une structure de bifurcation différente. Nous montrons que les erreurs tendent vers zéro.

Actuellement, et dans plusieurs disciplines, la synchronisation fait l'outil le plus moderne pour sécurisé la transmission de l'information, pour chiffré, ou déchiffré un tel message ou un tel code, et malleureusement, aussi pour attaquer les réseaux et les systémes.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce mémoire était de présenter de façon approfondie les systèmes dynamiques non linéaires, on donnant une synthèse sur les notions de base pour l'étude d'un tel système, comme les points fixes, leurs stabilités, puis les différents types de bifurcation, qui nous amène à la détection du comportement chaotique via plusieurs caractéristiques dont la sensibilités aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, et attracteurs étranges.

Ensuite, nous nous attachons au comportement chaotique dans les systèmes les plus célèbres dans la littérature qui comportent des perturbations imprévisibles pour un ensemble de paramètres, et qui ont une grande utilité et citation dans plusieurs disciplines, comme l'application logistique, le model de Hénon, l'application de lozi, et autres. Les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes ont lieu dans ce manuscrit, et nous avons analysé le problème de la synchronisation pour des systèmes dynamiques chaotiques en temps discret avec des dimensions différentes. Une nouvelle méthode de contrôle a été proposée et des simulations numériques ont été faites pour montrer l'efficacité du schéma proposé. Nous couplons deux phénomènes, qui sont représentés par deux systèmes dynamiques ayant des dimensions différentes, et de plus avec des propriétés topologiques différentes, et une structure de bifurcation différente. Nous montrons que les erreurs tendent vers zéro.

Actuellement, et dans plusieurs disciplines, la synchronisation fait l'outil le plus moderne pour sécurisé la transmission de l'information, pour chiffré, ou déchiffré un tel message ou an tel code, et malheuresement, aussi pour attaquer les réseaux et les systèmes.

Bibliographie

[1] Ruelle, D., Takens, F. (1971), "On the nature of turbulence," Commun. Math. Phys., Vol. 20, pp. 167-192.

[2] Cours de Mr. E. Zeraoulia.

[3] Guckenheimer, J. Holmes, P. Nonlinear Osciators, Dynamical Systèmes, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition, 1983.

[4] Dang-Vu, H., Delcarte, C. Bifurcations et Chaos. Paris, Ellipses, 2000.

[5] Devaney, R.L. An introduction to chaotic dynamical systems. In Adission-wisley, Redwood City, CA 37.

[6] Mira, C., Gardini, L., Bugola, A., Cathala, J-C. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scieniific, 1996.

[7] Guckenheimer, J., Holmes, P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1986.

[8] MIRA,C. GARDINI,L. BUGOLA, A. et J.-C. CATHALA. « Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps.» WoTld Scieniific, 1996.

[9] Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.24 septembre 2003.

[10] Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets.Adel Ouannas.

[11] M´ethodes d'analyses des syst'emes dynamiques continus et Application 'a l'analyse de Continuous-Time Recurrent Neural Network.

[12] Chaos Detection and Predictability.

[13] Le chaos en math´ematiques.Conférence prononcée ‘a Chauvigny, 21 avril 2008

[14] Systemes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique". 25/04/2013Tayeb Hamaizia.

[15] Le chaos dans les systèmes dynamiques.ODEN Jérémy.5 juillet 2007.

[16] ETUDE DE QUELQUES TYPES DE SYSTEMES CHAOTIQUES GENERALISATION D'UN MODELE ISSU DU MODELE DE CHEN.ZERAOULIA ELHADJ.

[17] Annexe B.Stabilité des systèmes dynamiques.

[18] Aziz Alaoui, Carl Robert, Celso Grebogi, Dynamics of a Henon-Lozi type map, unversity of California, 2000.

[19] Hamaizia Tayeb, Systemes Dynamiques et Chaos, Thèse de 3eme cycle, l'Université de Constantine 1, 2013.

[20] Quasi-controlling of chaotic discrete dynamical systems. Boukhalfa el-hafsi, Laskri Yamina.

[21] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Synchroniasation in chaotic systems, Phys. Rev. lett. 64 (1990), 821–824.

[22] Boccaletti, S., Kurths, J., Valladares, D.L., Osipov, G., Zhou, C., The synchronization of chaotic systems. Physics Reports 366, 1–101 (2002).

[23] H. Nijmeijer, I.M.Y, Mareels, An observer looks at synchronization, IEEE Trans- actions on Circuits and Systems I, 44(10), 874–890, (1997).

[24] Ernesto A. Leandro D. S. Coelho. Particle swarm approaches using Lozi map chaotic sequences to fuzzy modelling of an experimental thermal-vacuum system, Applied Soft Computing 8 (2008) 1354–1364.

[25] Alligood K T, Sauer T D andYorke J A Chaos : an introduction to dynamical systems 1996 (Springer, NY).

[26] Baptista D and Severino R 2009 The Basin of attarction of Lozi mappings Int. J. Bifurcation Chaos 19, 1043–1049. P. Ashwin. “Synchronization from Chaos”, Nature 422, 2003, pp. 384–385. S. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos : with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Addison Wesley Publ. 1994.

[27] Q. Pham and J.J.E. Slotine, "Stable Concurrent Synchronization in Dynamics Sys- tem Networks," MIT-NSL Report, 2005.

[28] E.M. Izhikevich. Dynamical Systems in Neuroscience : The Geometry of Excitability and Bursting. The MIT Press. Cambridge. 2007.

[29] JH Park, OM. Kwon Chaos, novel criterion for delayed feedback control of time-delay chaotic systems, Solitons & Fractals 23(2), 495–501A, 2005.

[30] Lkhlef Ameur, Contrôle, chaoti. . . cation et hyperchaoti. . . cation des système dynamiques, Thèse de Magistère, Université Mentouri de Constantine, 2007.

[31] Aziz Alaoui, Carl Robert, Celso Grebogi, Dynamics of a Henon-Lozi type map, unversity of California, 2000.

[32] 1. Pecora, L., Carrol, T. : Synchronization in chaotic systems. Phys. Rev. Lett. 64, 821–824 (1990).

[33] Blasius, B., Stone, L. : Chaos and phase synchronization in ecological systems. Int. J. Bifur. Chaos 10, 2361–2380 (2000).

[34] Lakshmanan, M., Murali, K. : Chaos in Nonlinear Oscillators : Controlling and Synchronization. World Scientific, Singapore (1996).

[35] Han, S.K., Kerrer, C., Kuramoto, Y. : Dephasing and bursting in coupled neural oscillators. Phys. Rev. Lett. 75, 3190–3193 (1995).

[36] Mengue, A., Essimbi, B. : Secure communication using chaotic synchronization in mutually coupled semiconductor lasers. Nonlin. Dyn. 70, 1241–1253 (2012).

[37] Chen, G., Yu, X. : Chaos Control : Theory and Applications. Springer, Berlin (2003).

[38] Yamada, T., Fujisaka, H. : Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. Progr. Theoret. Phys. 70, 1240–1248 (1983).

[39] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. : Controling chaos. Phys. Rev. Lett. 64, 1196–1199 (1990).

[40] Aziz-Alaoui, M.A. : Synchronization of chaos. In : Encyclopedia of Mathematical Physics, pp. 213–226 (2006).

[41] Lu, J., Wu, X., Han, X., Lü, J. : Adaptive feedback synchronization of a unified chaotic system. Phys. Lett. A 329(4), 327–333 (2004).

[42] Wu, X., Lu, J. : Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system. Chaos Solitons Fractals 18(4), 721–729 (2003).

[43] Yang, C., Lin, C. : Robust adaptive sliding mode control for synchronization of space-clamped Fitz–Hugh– Nagumo neurons. Nonlin. Dyn. 69, 2089–2096 (2012).

[44] Zhang, X., Zhu, H. : Anti-synchronization of two different hyperchaotic systems via active and adaptive control. Int. J. Nonlin. Sci. 6(3), 216–223 (2008).

[45] Park, J.H. : Adaptive synchronization of hyperchaotic Chen system with uncertain parameters. Chaos Solitons Fract. 26(3), 959–964 (2005).

[46] Xin, L., Yong, C. : Generalized projective synchronization between R ■ssler system and new unified chaotic system. Commun. Theor. Phys. 48, 132–136 (2007).

[47] Li, X., Leung, A., Han, X., Liu, X., Chu, Y. : Complete (anti-)synchronization of chaotic systems with fully uncertain parameters by adaptive control. Nonlin. Dyn. 63, 263–275 (2011).

[48] Yao, C., Zhao, Q., Yu, J. : Complete synchronization induced by disorder in coupled chaotic lattices. Phys. Lett. A 377(5), 370–377 (2013).

[49] Zhang, G., Liu, Z., Ma, Z. : Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems. Chaos Solitons Fract. 32(2), 773–779 (2007).

[50] He, X., Li, C., Huang, J., Xiao, L. : Generalized synchronization of arbitrary-dimensional chaotic systems. Opti-Int. J. Light Electron Optics. 126(4), 454–459 (2015).

[51] Qiang, J. : Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system. Phys. Lett. A 370(1), 40–45 (2007) .

[52] Han, M., Zhang, M., Zhang, Y. : Projective synchronization between two delayed networks of different sizes with nonidentical nodes and unknown parameters. Neurocomputing 171(1), 605–614 (2016).

[53] Li, X. : Generalized projective synchronization using nonlinear control method. Int. J. Nonlin. Sci. 8, 79–85 (2009).

[54] Cai, G., Hu, P., Li, Y. : Modified function lag projective synchronization of a financial hyperchaotic system. Nonlin. Dyn. 69(3), 1457–1464 (2012).

[55] Du, H. : Function projective synchronization in complex dynamical networks with or without external disturbances via error feedback control. Neurocomputing 173(3), 1443–1449 (2016).

[56] Yan, Z. : Chaos Q–S synchronization between R■ssler system and the new unified chaotic system. Phys. Lett. A 334(5), 406–412 (2005).

[57] Manfeng, H., Zhenyuan, X. : Nonlin. Anal. Theor. Meth. Appl. A general scheme for Q–S synchronization of chaotic systems. 69(4), 1091–1099 (2008).

[58] Wang, Q., Chen, Y. : Generalized Q–S (lag, anticipated and complete) synchronization in modified Chua's circuit and Hindmarsh–Rose systems. Appl. Math. Comput. 181(1), 48–56 (2006).

[59] Wang, Z.L., Shi, X.R. : Adaptive Q–S synchronization of nonidentical chaotic systems with unknowns parameters. Nonlin. Dyn. 59, 559–567 (2010).

[60] Yan, Z. : Q–S (lag or anticipated) synchronization backstepping scheme in a class of continuous-time hyperchaotic system-A symbolic-numeric computation approach. Chaos 15(2), 023902 (2005).

[61] Yang, Y., Chen, Y. : The generalized Q–S synchronization between the generalized Lorenz canonical form and the R■ssler system. Chaos Solitons Fract. 39, 2378–2385 (2009) 123Differ Equ Dyn Syst.

[62] Zhao, J., Ren, T. : Q–S synchronization between chaotic systems with double scaling functions. Nonlin. Dyn. 62(3), 665–672 (2010).

[63] Zhao, J., Zhang, K. : A general scheme for Q–S synchronization of chaotic systems with unknown parameters and scaling functions. Appl. Math. Comput. 216(7), 2050–2057 (2010).

[64] An, H.L., Chen, Y. : The function cascade synchronization scheme for discrete-time hyperchaotic systems. Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 14, 1494–1501 (2009).

[65] Yan, Z. : Q–S synchronization in 3D Hénon-like map and generalized Hénon map via a scalar controller. Phys. Lett. A 342, 309–317 (2005).

[66] Yan, Z. : Q–S (complete or anticipated) synchronization backstepping scheme in a class of discrete-time chaotic (hyperchaotic) systems : A. symbolic-numeric computation approach. Chaos 16(1), 013119 (2006).

[67] Strogatz, S.H. : Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder (2001).