Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques appliquées

Thème:

Quelques méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Présenté par:

TEBBA Zakia
BELHOUCHET Amna

Devant le jury:

Fatiha Mesloub	M.C.B	Université de Tébessa	Président
Abderrahmane Zaraï	M.C.A	Université de Tébessa	Rapporteur
Mourad Benzahi	M.A.A	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance:
25/05/2017

Note: .... **Mention:** ....


بسم الله الرحمن الرحیم

عن أبي الدرداء رضي الله عنه قال
سمعت رسول الله صلى الله عليه يقول

«من سلك طريقا يبتغي فيه علما سهل الله له طريقا إلى الجنة وان الملائكة لتضع أجنحتها لطالب العلم رضي بما يصنع وان العالم ليستغفر له من في السماوات ومن في الأرض حتى الحيتان في الماء وفضل العالم على العابد كفضل القمر على سائر الكواكب وان العلماء ورثة الأنبياء وان الأنبياء لم يورثوا دينارا ولا درهما وإنما ورثوا العلم فمن أخذه اخذ بحظ وافر»

أخرجه مسلم

Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah, qui nous a donné le courage, la patience, et la volonté pour finir ce travail.

Nous remercions également notre enseignant encadreur, maître de conférences à l'Université de Tébessa Mr. Zaraï Abderrahmane qui nous a proposé le sujet de ce mémoire, c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et encouragement que nous avons pu mener à bien ce travail.

Nos remerciements vont également aux membres de jury pour avoir accepté d'évalué notre travail :

- Maître de conférences à l'Université de Tébessa Mdm. Mesloub Fatiha.
- Maître d'assistant à l'Université de Tébessa Mr. Benzahi Mourad.

Nos plus vifs remerciements à nos enseignants pendant ces cinq années. Et toutes les personnes ayant participé à la réussite de notre travail.

Sans oublier tous ceux et tous celle de loin ou de près qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Et tous les responsables et personnels que les connaissent dans le département de mathématiques et informatique de l'Université de Larbi Tébessi-Tébessa.

RÉSUMÉ

Ce travail décrit quelques outils et méthodes pour l'étude des équations aux dérivées partielles de types elliptiques. Ces outils sont utilisés pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

Dans ce mémoire, différentes techniques ont été adoptées, comme par exemple, la méthode des inégalités de l'énergie, cette méthode appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle qui est basée sur les idées de J. Leray et L. Garding [8] et présentée sous forme d'une méthode par A. A. Dezin [4] pour l'étude des problèmes aux limites liés aux équations elliptiques, aussi bien par la méthode de formulation variationnelle des problèmes aux limites développée par Lax-Milgram et Stampacchia (voir Brezis [2] et [6]).

Par contre la méthode de degré topologique de Leray-Schauder permet également de résoudre les problèmes aux limites qui n'ont pas de formulation variationnelle (voir Otared Kavian [9]).

Mots clés: Equation elliptique, opérateur différentielle, solution généralisée, inégalité de l'énergie, forme bilinéaire, forme linéaire, condition de Dirichlet, condition de Neumann, degré topologique, une homotopie, fonction de Carathéodory.

ABSTRACTS

This work describes some tools and methods for the study of elliptic partial differential equations. These tools are used to obtain results of existence and uniqueness.

In this memory, different techniques have been adapted, such as for exemple the method of energy inequalities, this method called functional analysis method which is based on the ideas of J. Leray and L. Garding [8], and presented in the form of a method by A.A. Desin [4] for the study of boundary problems related to elliptic equations, both by the variational formulation of the boundary problems developed by Lax-Milgram and Stampacchia (see Brezis [2] and [6]).

By contrast the method of topological degree of Leray-Schauder also makes it possible to solve the boundary problems which do not have variational formulation (see Otared Kavian [9]).

Key words: Elliptic equation, differential operator, generalized solution, energy inequality, bilinear form, linear form, Dirichlet condition, Neumann condition, topological degree, homotopy, Caratheodory function.

Table des matières

Notations

E	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	La norme.
$(.,.)$	Le produit scalaire.
$\rho(.,.)$	La distance.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$.
$\overline{\Omega}$	L'ensemble fermé de Ω.
$\lim$	La limite.
$\rightarrow$	La convergence forte.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables u sur Ω vérifiant $\int_\Omega \|u\|^p \, dx < \infty$.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables.
$C_0^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(\Omega)$ à support compact.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$\mathbb{L}^2(\Omega)$	L'espace des fonctions u où $u = (u_1, \ldots, u_n)$ tel que $u_i \in L^2(\Omega)$, $\forall i = \overline{1,n}$.
H	L' espace de Hilbert.
H'	L'espace dual de H.
l	Une fonctionnelle linéaire.
A	Un opérateur linéaire.
$\mathcal{D}(A)$	Le domaine de définition de A.
$\overline{\mathcal{D}(A)}$	L'adhérence de $\mathcal{D}(A)$.
A^*	L'adjoint de A.
$\mathcal{D}(A^*)$	Le domaine de définition de A^*.
$\overline{A}$	La fermeture de A.
$R(A)$	L'ensemble des valeurs Au pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$.
$\mathcal{L}$	Opérateur différentiel.
$\mathcal{L}^*$	L'opérateur dual de $\mathcal{L}$.
$\dfrac{d}{dx}$	La dérivée ordinaire par-rapport à x.
$D^k u$	La dérivée généralisée.
$W_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$, où $\|k\| \leq l$.
$\mathring{W}_m^l(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in W_m^l(\Omega)$ à support compact dans Ω.

$\|.\|_{m,\Omega}^{(l)}$	La norme dans l'espace $W_m^l(\Omega)$.
$(.,.)_{2,\Omega}^{(1)}$	Le produit scalaire dans l'espace $W_2^1(\Omega)$.
c_Ω	La constante de Poincaré.
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	La dérivée partielle.
$S = \partial\Omega$	La frontière.
$\overrightarrow{\eta}$	Le vecteur unitaire de l'extérieur à $\partial\Omega$.
$\partial\sigma$	L'élément de surface de $\partial\Omega$.
$a(.,.)$	Une forme bilinéaire.
$l(.)$	Une forme linéaire.
$\deg$	Le degré topologique.
$sgn(a)$	Le signe de l'élément a.
$h(x,t)$	Une fonction de Carathéodory.
$H(x,.)$	Une homotopie.
X	Un espace de Banach.
X^*	L'espace dual de X.
T	Un opérateur de X dans X^*.
$\mathcal{D}$	Un ouvert borné dans X.
$\overline{B}$	La boule unité fermée.
$C(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions continues.
$\hookrightarrow$	L'injection canonique.
Δu	L'opérateur Laplacien.
∇u	Le gradient de u.
$\langle .,. \rangle$	Le crochet de dualité.
$B(0;R)$	La boule ouvert de centre 0 et rayon R.
λ	Une valeur propre.
λ_1	La valeur propre principale.
φ_1	Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.

Introduction Générale

Les équations aux dérivées partielles de types elliptiques ont été soigneusement étudiées durant le vingtième siècle. Ces études ont été surtout menées par Courant et Hilbert [3] et ses co-auteur et d'autre chercheurs et savants comme Dirichlet, Neumann et J.L. Lions [12]. Un grand nombre d'articles ont été publiés dans ce domaine et plusieurs livres ont vu le jour, nous citons entre autres les ouvrages suivants.

Ce travail décrit quelques outils et méthodes pour l'étude des équations aux dérivées partielles de types elliptiques. Ces outils sont utilisés pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

Dans ce mémoire, différentes techniques ont été adoptées, comme par exemple, la méthode des inégalités de l'énergie, cette méthode appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle qui est basée sur les idées de J. Leray et L. Garding [8] et présentée sous forme d'une méthode par A. A. Dezin [4] pour l'étude des problèmes aux limites liés aux équations elliptiques, aussi bien par la méthode de formulation variationnelle des problèmes aux limites développée par Lax-Milgram et Stampacchia (voir Brezis [2] et [6]).

Par contre la méthode de degré topologique de Leray-Schauder permet également de résoudre les problèmes aux limites qui n'ont pas de formulation variationnelle (voir Otared Kavian [9]).

Ce travail comporte quatre chapitres.

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions d'analyses fonctionnelles qui concernent les espaces de Sobolev, puis nous présentons quelques inégalités importantes, après ça nous donnons un petit rappel sur le degré topologique.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution généralisée par la méthode des inégalités de l'énergie. L'idée principale est celle utilisée dans les travaux de Petrovski et Garding [7]. Elle consiste à écrire le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle du type

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F},\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}),$$

où l'opérateur $\mathcal{L}$ engendré par l'équation et les conditions aux limites et considéré d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F convenablement choisi. On établit une estimation à priori

$$\|u\|_E \leq c\|\mathcal{L}u\|_F, \tag{*}$$

qui est obtenue en multipliant l'équation considérée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées. A partir de l'inégalité $(*)$, on déduit l'unicité de la solution si elle existe.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous s'intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux limites par la méthode variationelle.

Pour cela nous présentons le lemme de Lax-Milgram qui est la base de cette méthode. Ensuit, nous étudions quelques problèmes linéaires elliptiques sous forme des applications pour compléter cette méthode.

Chapitre 4 : Le but de ce chapitre est d'établir l'existence d'une solution faible pour le problème quasi-linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) + h(x, u(x)) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases},$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné non vide de frontière lipchitzienne $(\Omega \in C_0^1)$, λ est un paramètre positive et $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory bornée.

L'étude est basée sur la méthode de degré topologique.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces normés et espaces de Banach

Un espace vectoriel linéaire E est dit espace normé si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|_E$ (norme de u) vérifiant les axiomes

a) $\|u\|_E \geq 0$, $\|u\|_E = 0$ si et seulement si $u = 0$.

b) $\|\lambda u\|_E = |\lambda| \|u\|_E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

c) $\|u + v\|_E \leq \|u\|_E + \|v\|_E$ (inégalité triangulaire) .

Dans cet espace, on introduit la métrique $\rho(u, v) = \|u - v\|_E$ (distance entre u et v).

La convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vers u dans la norme de E (convergence forte[1]) est définie par

$$\|u_n - u\|_E \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ u_n \to u.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy si

$$\|u_p - u_q\|_E \to 0 \text{ quand } p, q \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall p > N_\varepsilon,\ \forall q > N_\varepsilon \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Si pour toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un élément u dans E, on dit que E est complet.

Si $\| u_n - u \|_E \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on dit que E est un espace de Banach.

[1] On dit aussi convergence au sens de la norme.

1.1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

Dans un Hilbert, on définit un produit scalaire $(u,v)_H$ où $u,v \in H$, c'est un nombre réel qui vérifier les axiomes

a) $(u,v)_H = (v,u)_H$.

b) $(\lambda u,v)_H = \lambda (u,v)_H$.

c) $(u+v,w)_H = (u,w)_H + (v,w)_H$.

d) $(u,u)_H \geq 0$, $(u,u)_H = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Dans un Hilbert complexe, le produit scalaire est un nombre complexe vérifiant les axiomes (b), (c) et (d) mais (a) est sous la forme

$$(u,v)_H = \overline{(v,u)}_H.$$

Dans H on prend comme norme

$$\|u\|_H = \sqrt{(u,u)}_H \text{ (i.e.) } \|u\|_H^2 = (u,u)_H .$$

Pour chaque u et $v \in H$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u,v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H .$$

En plus de la convergence forte dans H, on considère aussi la convergence faible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de H, on dit qu'elle converge faiblement[2] vers u si

$$(u_n - u, v)_H \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

pour tout $v \in H$ $(u_n \rightharpoonup u)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u, alors elle converge faiblement vers u. L'inverse n'est pas vrai en général.

Cependant, si $u_n \rightharpoonup u$ et $\|u_n\| \to \|u\|$, alors dans ce cas $u_n \to u$.

Exemple 1.1 *On peut définir l'espace de Hilbert $L^p(\Omega)$ comme suite*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{ mesurable } / \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

[2]On dit aussi converge au sens de produit scalaire.

La norme de $L^p(\Omega)$ *est*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ avec } p \geq 1, \tag{1.1}$$

si $p = 2$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx.$$

On peut considérer comme sous espaces dans $L^p(\Omega)$ *les espaces*

a) $C^\infty(\Omega)$.

b) L'ensemble de tous les polynômes.

c) $C_0^\infty(\Omega)$.

Fonctionnelles linéaires

Une fonctionnelle linéaire l sur un Hilbert H est une fonction linéaire numérique et continue

$$\begin{aligned} l : H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto l(u) \end{aligned}.$$

♣ l **est linéaire c'est-à-dire**

$$l(\lambda u_1 + \beta u_2) = \lambda l(u_1) + \beta l(u_2),\ \forall u_1, u_2 \in H,\ \lambda, \beta \text{ sont des constants réels.} \tag{1.2}$$

♣ l **est continue c'est-à-dire**

$$u_n \to u \Rightarrow l(u_n) \to l(u). \tag{1.3}$$

♣ l **est bornée c'est-à-dire**

$$|l(u)| \leq c \|u\|_H,\ \forall u \in H. \tag{1.4}$$

Le théorème de Reisz affirme qu'on peut toujours représenter une fonctionnelle linéaire par un produit scalaire

$$l(u) = (u,v)_H,\ \forall v \in H.$$

D'après l'inégalité de Cauchy la norme $\|l\|_H = \|v\|_H$.

Il est claire que $\|l\|_H = \sup\limits_{u \in H \setminus \{0\}} \dfrac{|l(u)|}{\|u\|_H}$ est la plus petite des constantes c pour lesquelles (1.4) est satisfaite.

Quelques propriétés d'opérateurs linéaires

I)-**Opérateurs linéaires bornés**

Un opérateur A défini sur un ensemble $\mathcal{D}(A) \subset H$ fait aussi à chaque $u \in \mathcal{D}(A)$ un certain élément $v \in H$ (i.e.)

$$Au = v.$$

♣ A **est linéaire si**

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A(u_1) + \lambda_2 A(u_2),\ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A). \tag{1.5}$$

♣ A **est borné si**

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \|Au\|_H \leq c \|u\|_H,\ \forall u \in \mathcal{D}(A). \tag{1.6}$$

A peut être prolongé d'une manière continue sur la fermeture de $\mathcal{D}(A)$ (i.e.)

* Si $\overline{\mathcal{D}(A)} \subset H$, (1.6) reste toujours vraie pour tout $u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.
* Si $\overline{\mathcal{D}(A)} \neq H$, on peut prolonger A en différentes manières à tout H et (1.6) reste toujours valable.

Remarque 1.1 *La norme de A est donner par*

$$\|A\|_H = \sup_{u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|_H}{\|u\|_H}.$$

Il y a plusieurs opérateurs bornés dans H qu'ils sont importants, on s'intéresse maintenant d'une classe de cet opérateurs

La classe d'opérateurs auto-adjoints

Un opérateur A est dit auto-adjoint si

$$\forall u, v \in H, \text{ on a } (Au, v)_H = (u, Av)_H, \tag{1.7}$$

le spectre de cet opérateur est réel et contenu dans $[-\|A\|_H, \|A\|_H]$.

II)-Opérateurs linéaires non-bornés

Soit A un opérateur non-borné sur un Hilbert H $(A : H \to H)$, ce type des opérateurs ne sont pas bornés (définis) sur tout H, (i.e.) dans (1.6) la constante c peut ne pas exister.

Soit $\mathcal{D}(A) \subset H$ le domaine de définition de A (i.e.)

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \to R(A) \subset H\ ^3,$$

[3] $R(A) = \{Au,\ u \in \mathcal{D}(A)\}$.

ces opérateurs sont linéaires, ils vérifiant

$$A(\lambda u+\beta v)=\lambda A(u)+\beta A(v),\ \forall u,v\in H \text{ et } \lambda,\beta\in\mathbb{R},$$

nous allons en générales considérer les opérateurs ayant $\overline{\mathcal{D}(A)}=H$.

Remarque 1.2 *On s'intéresse aux opérateurs différentiels pour chaque expression différentielle correspond plusieurs opérateurs définis en indiquent leurs domaines de définition.*

Par exemple : Soit l'expression différentielle $\mathcal{L}u=\dfrac{d^2u}{dx^2}$, $x\in[0,1]$, prenons $H=L^2([0,1])$.

On peut associer à $\mathcal{L}u$ l'opérateur non-borné A définie sur $\mathcal{D}(A)=C_0^\infty([0,1])\subset H$.

$$\begin{aligned} A:\mathcal{D}(A)&\to H\\ u&\mapsto Au=\frac{d^2u}{dx^2}, \end{aligned}$$

à support compact dans l'intervalle $[0,1]$.

On peut encore associer à $\mathcal{L}u$ un autre opérateur non borné $\tilde{A}$ défini sur $\mathcal{D}(\tilde{A})=C^\infty([0,1])\subset H$.

$$\begin{aligned} \tilde{A}:\mathcal{D}(\tilde{A})&\to H\\ u&\mapsto \tilde{A}u=\frac{d^2u}{dx^2}, \end{aligned}$$

on a $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(\tilde{A})$ et $Au=\tilde{A}u,\ \forall u\in\mathcal{D}(A)$, dans ce cas on dit que $\tilde{A}$ est une extension de A[4].

Il est claire que le domaine de définition de l'opérateur A (opérateur associer à l'expression différentielle $\mathcal{L}u$) peut être choisi d'une infinité de manière et chaque fois on obtient un opérateur ayant de différant propriétés.

Les deux opérateurs A et $\tilde{A}$ ont des propriétés différentes, par exemple A vérifie

$$(Au,v)_{L^2([0,1])}=(u,Av)_{L^2([0,1])},\ \forall u,v\in\mathcal{D}(A). \tag{1.8}$$

En effet

$$(Au,v)_{L^2([0,1])}=\int_0^1\frac{d^2u}{dx^2}v\,dx=\int_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2}dx=(u,Av)_{L^2([0,1])}.$$

Pour l'opérateur $\tilde{A}$, on a

$$\left(\tilde{A}u,v\right)_{L^2([0,1])}=\left(u,\tilde{A}v\right)_{L^2([0,1])}+\frac{du}{dx}v\Big|_0^1-u\frac{dv}{dx}\Big|_0^1,\ \forall u,v\in\mathcal{D}(\tilde{A}). \tag{1.9}$$

On remarque que A a la propriété de symétrie, par contre $\tilde{A}$ ne l'a pas.

[4] L'opérateur $\tilde{A}$ est dit extension de A si $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(\tilde{A})$ et $Au=\tilde{A}u,\ \forall u\in\mathcal{D}(A)$.

Remarque 1.3 *Les opérateurs symétriques possèdent un grand nombre des propriétés, et la théorie des opérateurs symétriques a été extensivement développer et utiliser pour des classes spécifiques d'opérateurs différentiels. L'une des plus importantes conceptions est celle d'opérateurs auto-adjoints.*

Un opérateur non-borné A est dit auto-adjoint s'il est symétrique (i.e.)

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H \,, \; \forall u, v \in \mathcal{D}(A) \,, \tag{1.10}$$

et si l'identité

$$(Au, v)_H = (u, w)_H \,, \tag{1.11}$$

où v, w sont fixées et $u \in \mathcal{D}(A)$ arbitraire implique que $v \in \mathcal{D}(A)$ et $w = Av$.

En d'autre terme, A est auto-adjoint si son adjoint A^* a le même domaine de définition que A et $A^* = A$ sur $\mathcal{D}(A)$.

L'identité (1.11) *définit le domaine de définition de A^* ainsi que ces valeurs sur le domaine, notamment les éléments v pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$ constituant $\mathcal{D}(A^*)$, avec $A^*v = w$.*

Remarque 1.4 *Dans la plus part des cas des opérateurs différentiels, il est facile de vérifier la validité ou non validité de* (1.10) *(à l'aide des intégrations par parties).*

Remarque 1.5 *La relation* (1.10) *est satisfaite pour A non seulement pour u et $v \in \mathcal{D}(A)$ mais aussi pour $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v \in \mathcal{D}(A^*)$, cela montre que $\mathcal{D}(A^*)$ est plus large que $\mathcal{D}(A)$. La question que se pose est que A peut être prolongé pour qu'il soit auto-adjoint ?*

Il est possible de faire ça, et en une infinité de manières, la théorie des opérateurs donne le premier pas pour une telle extension (c'est le principe de fermeture). On procède de la manière suivante :

Soit A un opérateur définit sur $\mathcal{D}(A) \subset H$, on ajoute à $\mathcal{D}(A)$ les éléments u qui sont limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(A)$ pour lequel Au_n converge vers un élément v, on définit $v = \overline{A}u$ où $\overline{A}$ est la fermeture de A[5], l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ avec tous les éléments u constituant $\mathcal{D}(\overline{A})$.

Remarque 1.6 *Il existe des opérateurs non-bornés que ne sont pas fermable[6] (par exemple les opérateurs non-linéaires).*

Il n'est pas difficile de montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que un opérateur non borné admet une fermeture est que $\mathcal{D}(A^*)$ soit dense dans H.

Remarque 1.7 *En générale la procédure de la fermeture des opérateurs différentiels n'est pas simple (cas de E.D.P[7]).*

[5]Un opérateur A est dit fermé si pour tout suite $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $u_n \to u$ et $Au_n \to f$, alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $f = Au$.
[6]Un opérateur A est dit fermable si pour tout suite $u_n \in \mathcal{D}(A)$, $u_n \to 0$ et $Au_n \to f$, alors $f = 0$.
[7]Désigne les équations aux dérivées partielles.

En particulier, A défini par $\mathcal{L}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ admet une fermeture, la fermeture $\overline{A}$ admet comme domaine de définition $\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathring{W}_2^2([0,1])$. Cette fermeture peut être achevée, si on ajoute à $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des fonctions continues différentiables $u(x)$ s'annulant en $x = 0$ et $x = 1$ pour lesquelles $\dfrac{du}{dx}$ sont absolument continues et s'annulant en $x = 0$ et $x = 1$ $\left(\dfrac{du}{dx} \in L^2([0,1])\right)$, donc

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \left\{u \ \in W_2^2(\Omega),\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \text{ et } \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 0\right\} = \mathring{W}_2^2([0,1]) .$$

L'opérateur $\overline{A}$ défini sur $\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathring{W}_2^2([0,1])$ étant l'opérateur qui calcule les dérivées secondes généralisées[8].

On va citer deux extensions de $\overline{A}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ à $\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathring{W}_2^2([0,1])$, la première extension est de la forme $\hat{A}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, où

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \left\{u \ /u \in W_2^2(0,1) \ , u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0\right\},$$

une telle extension est connectée à ce qu'on appelle premier problème aux limite[9] pour $\mathcal{L}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, c'est le problème de déterminer la solution $u(x)$ de l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \tag{1.12}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0, \tag{1.13}$$

le problème (1.12)-(1.13) admet une solution unique $u \in \mathcal{D}(\hat{A})$ pour tout $f \in L^2([0,1])$ arbitraire.

Remarque 1.8 *L'extension $\hat{A}$ de l'opérateur original A, correspond au problème (1.12)-(1.13). Si on n'a pas prolongé A, on n'aura pas un bon théorème d'existence et d'unicité, et dans ce cas l'équation $Au = f$ peut ne pas avoir une solution dans $\mathcal{D}(A)$ pour $f \in L^2([0,1])$ arbitraire.*

Remarque 1.9 *D'autres problèmes aux limites de l'équation (1.12) nécessitent d'autres extensions, par exemple à l'équation (1.12) on associée les conditions aux limites*

$$u|_{x=0} = 0,\ \ \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 0. \tag{1.14}$$

Alors on doit prolonger l'opérateur A comme étant l'opérateur agissant sur $W_2^2([0,1])$[10] vérifier les conditions (1.14), cette extension $\mathring{A}$ est un opérateur auto-adjoint.

[8] On dit aussi dérivées aux sens faibles ou aux sens des distributions.

[9] En englais : first boundary value problem.

[10] $W_2^2([0,1]) = \left\{u \ /u \in L^2(0,1), \dfrac{du}{dx} \in L^2([0,1])\right\}$.

L'équation $\mathring{A}u = f$ *est résoluble dans* $\mathcal{D}(\mathring{A})$ *pour* $f \in L^2([0,1])$ *où*

$$\mathcal{D}(\mathring{A}) = \left\{ u \,/ u \in W_2^2(0,1)\,, \;\; u|_{x=0} = 0, \;\; \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 0 \right\}.$$

Forme bilinéaire, continue et coercive

Définition 1.2 *On dit que* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *est une forme bilinéaire si* $\forall u, v, w \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

♣ $a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u,w) + \mu a(v,w)$.

♣ $a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w,u) + \mu a(w,v)$.

Définition 1.3 a *est dite continue s'il existe* $M > 0$ *telle que*

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H\,, \; \forall u, v \in H. \tag{1.15}$$

Définition 1.4 a *est dite coercive (ou* H*-elliptique), s'il existe* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall u \in H, \; a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2\,. \tag{1.16}$$

Remarque 1.10 *Lorsque la forme bilinéaire* a *est* H*-elliptique et symétrique (i.e.)*

$$\forall u, v \in H, \; a(u,v) = a(v,u), \tag{1.17}$$

alors elle est un produit scalaire sur H *et sa norme associée est*

$$u \mapsto (a(u,u))^{1/2}. \tag{1.18}$$

Théorème 1.1 ***(Représentation de Riesz)*** *Soit* H *un espace de Hilbert de produit scalaire noté* $(.,.)_H$ *et* H' *son espace dual*[11]*, alors pour tout* $f \in H'$ *il existe un élément unique* $u \in H$ *tel que*

$$\begin{cases} f(v) = (u,v)_H\,, \; \forall v \in H \\ \|f\|_{H'} = \|u\|_H \end{cases}. \tag{1.19}$$

(1.19) *montre qu'il existe un isomorphisme*[12] *de* H *sur* H'*, c'est-à-dire* $A \in \mathcal{L}(H, H')$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(H', H)$ *tel que*

$$\begin{cases} Au = f \\ \|Au\|_{H'} = \|u\|_H \end{cases}. \tag{1.20}$$

[11] L'espace dual d'un espace vectoriel E est l'espace des formes linéaires sur E.

[12] Un isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui préserve la structure et dont la réciproque préserve aussi la structure.

1.1.3 Les espaces de Sobolev $W_m^l(\Omega)$ et $\mathring{W}_m^l(\Omega)$, $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$

Définition 1.5 ***(Dérivées généralisées)*** *On appelle dérivée généralisée* $\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$ *d'une fonction* $u(x)$ *intégrable dans tout* $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ *la fonction* $D^k u$ *si pour tout* $v \in C_0^\infty(\Omega)$, *on a l'égalité*

$$\int_\Omega \left(u \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} + (-1)^{|k|} v D^k u \right) dx = 0, \tag{1.21}$$

où $k = (k_1, \ldots, k_n)$ avec $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$.

La fonction $D^k u$ sera notée par

$$D^k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}. \tag{1.22}$$

Cette notion de dérivée généralisée est une extension de la dérivée classique, les D.G.[13] conservent beaucoup (mais pas toutes) de propriétés des D.C.[14] (somme, produit, ordre,...) par exemple l'existence des dérivées d'ordre inférieurs à $|k|$.

Définition 1.6 $W_m^l(\Omega)$ *est l'ensemble de toutes les fonctions* $u \in L^m(\Omega)$ *ayant des dérivées généralisées jusqu'à l'ordre* l *inclus dans* $L^m(\Omega)$. *On munit* W_m^l[15] *de la norme suivante*

$$\|u\|_{m,\Omega}^{(l)} = \|u\|_{W_m^l(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{0 \le |k| \le l} \left| D^k u \right|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}, \tag{1.23}$$

on obtient un espace de Banach.

$\mathring{W}_m^l(\Omega)$ *est le sous espace de* $W_m^l(\Omega)$ *constitués de toutes les fonctions* $u \in W_m^l(\Omega)$ *et en support compact dans* Ω.

L'espace $\mathring{W}_m^l(\Omega)$ *joue un rôle très important pour la résolution des problèmes aux limites des E.D.P de seconde ordre de tous types.*

Le produit scalaire dans $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ *et* $W_2^1(\Omega)$ *est défini par*

$$(u,v)_{2,\Omega}^{(1)} = (u,v)_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega (uv + u_x v_x)\, dx = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u_x, v_x)_{L^2(\Omega)},$$

où

$$u_x v_x = \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i},\ v_x^2 = \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2,\ u_x^2 = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2.$$

[13]Désigne la dérivées généralisées.
[14]Désigne la dérivées classiques.
[15]Quand il n'y aura pas de confusion on écrira W_m^l au lieu de $W_m^l(\Omega)$.

L'inégalité de Poincaré

Supposons que $\Omega \underset{borné}{\subset} \mathbb{R}^n$, on remarque que $\forall u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, on a l'inégalité suivant

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2 dx &\leq c_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx, \\ \|u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c_\Omega^2 \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Formule d'intégration par partie

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, de frontière régulière $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv \cos(\overrightarrow{\eta}, x_i)\, d\sigma,\ \forall u, v \in W_2^1(\Omega), \tag{1.25}$$

où $\overrightarrow{\eta}$ est le vecteur unitaire de l'extérieur à $\partial\Omega$, $d\sigma$ est l'élément de surface de $\partial\Omega$.

Remarque 1.11 *$\forall u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ et $v \in W_2^1(\Omega)$, on a alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,\ i = \overline{1, n}. \tag{1.26}$$

Formule de Green

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma,\ \forall u, v \in H^2(\Omega). \tag{1.27}$$

Théorème de Trace

$$\int_{\partial\Omega} |u|\, d\sigma \leq c \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + |u| \right) dx, \tag{1.28}$$

elle est vraie $\forall u \in W_1^1(\Omega)$ et $\partial\Omega$ (régulière).

Si on pose $u = v^2$ où $v \in W_2^1(\Omega)$, alors $u \in W_1^1(\Omega)$ et on obtient

$$\int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \leq c_1 \int_\Omega \left\{ |v| \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| + v^2 \right\} dx \leq \int_\Omega \left(c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + c_\varepsilon v^2 \right) dx, \tag{1.29}$$

pour un ε positif arbitraire.

Théorème 1.2 *Si Ω est un ouvert à bord $\partial\Omega$, alors l'application*

$$\begin{aligned} u : W_2^1(\Omega) &\to L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

est une application linéaire continue appelée opérateur de Trace.

Le théorème signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\,,\ \forall u \in W_2^1(\Omega)\,. \tag{1.30}$$

1.2 Quelques inégalités importantes

1.2.1 Inégalité de Cauchy

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.31}$$

vraie pour toute forme quadratique non négative $a_{ij}\xi_i\xi_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}$, et pour $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ sont des réels arbitraires, a_{ij} sont en général des fonctions.

1.2.2 Inégalité de Cauchy avec ε

$$|a.b| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2\,, \tag{1.32}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, a, b arbitraires (réels).

1.2.3 Des inégalités fonctionnelles

*** Inégalité triangulaire**

$$\left(\int_\Omega (u+v)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega u^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ où } u, v \in L^2(\Omega). \tag{1.33}$$

*** Inégalité de Cauchy-Schwartz**

$$\left|\int_\Omega uv\,dx\right| \leq \left(\int_\Omega u^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.34}$$

Pour l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ où $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)\,,\ u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ avec $u_i \in L^2(\Omega)\,,\ i = \overline{1,n}$, l'inégalité de Cauchy prend la forme

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_iv_i\,dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_i^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_i^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.35}$$

1.3 Le degré topologique

Soit $N \geq 1$ un entier, $\mathcal{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $b \in \mathbb{R}^N$ un point fixé. L'idée de degré topologique est d'associer à la fonction f, à l'ouvert $\mathcal{D}$ et au point $b \in \mathbb{R}^N$ un entier dépendant continûment de f et dans une certaine mesure de b tel que si cet entier est non nul, alors l'équation

$$x \in \mathcal{D}, \ f(x) = b \tag{1.36}$$

admet une solution.

Par exemple, si $N = 1$, $\mathcal{D} =]-1, +1[$ et $f \in C([-1, +1], \mathbb{R})$, pour tout point $b \neq f(\pm 1)$ on peut considérer le nombre

$$\deg(f, \mathcal{D}, b) = \frac{1}{2} \left[sgn\left(f\left(1\right) - b\right) - sgn\left(f\left(-1\right) - b\right) \right] \tag{1.37}$$

qui est évidemment un entier.

On voit que si $\deg(f, \mathcal{D}, b) \neq 0$, on a

$$\left(f\left(1\right) - b\right)\left(f\left(-1\right) - b\right) < 0, \tag{1.38}$$

et par conséquent, il existe $x \in]-1, +1[$ tel que $f(x) = b$. On imagine aussi que la situation pour $N \geq 2$ est plus complexe.

1.3.1 Quelques définitions importantes

Soit X un espace de Banach réel et réflexive et X^* son espace dual.

Définition 1.7 ***(Fonction de Carathéodory)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory si elle vérifier :*

1. *L'application*
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$
est continue presque par tout pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. *L'application*
$$\begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$
est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.8 ***(Homotopie)*** *Soient X et Y deux espaces topologiques, et soient $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues. f et g sont dites homotopes d'homotopie H, si H est une fonction continue de $X \times [0,1]$ dans Y telle que*

* $\forall x \in X,\ H(x, 0) = f(x)$.
* $\forall x \in X,\ H(x, 1) = g(x)$.

Définition 1.9 *On dit que L'opérateur $T : X \to X^*$ est satisfait la condition (S_+) si*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ dans } X,\ \limsup_{n\to\infty} \langle T(u_n), u_n - u_0\rangle \leq 0 \Rightarrow u_n \to u_0 \text{ dans } X. \tag{1.39}$$

Remarque 1.12 *Il est claire que si $T : X \to X^*$ satisfait la condition (S_+) et si $K : X \to X^*$ est un opérateur compact, alors la somme $T + K : X \to X^*$ satisfait la condition (S_+) .*

Définition 1.10 ***(Opérateur semi-continu)*** *On dit que $T : X \to X^*$ est semi-continu, si pour tout suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, on a*

$$u_n \to u \text{ dans } X \Rightarrow Tu_n \rightharpoonup Tu \text{ dans } X^*. \tag{1.40}$$

1.3.2 Degré topologique de Brouwer

Nous donnons ici une formulation précise du degré topologique de Brouwer et ses propriétés principales.

Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité du degré topologique via ses propriétés clefs.

Théorème 1.3 *Soit $N > 1$ et*

$$\mathcal{A} = \left\{(f, \Omega, b)/\ \Omega \text{ un ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ b \in \mathbb{R}^N \text{ et } f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N \text{ une fonction continue}\right\}, \tag{1.41}$$

tel que $b \neq f(\partial\Omega)$. Il existe une et une seule application $\deg : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

* ***(Normalisation)*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \Omega$ alors*

$$\deg(Id, \Omega, b) = 1. \tag{1.42}$$

* ***(Additivité)*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $b \notin f\left(\overline{\Omega}\backslash\left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)\right)$ alors*

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b)\,. \tag{1.43}$$

* ***(Invariance par homotopie)*** *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et*

$y : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ *sont continues et pour tout* $t \in [0,1]\,,\, y(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ *alors*

$$\deg\left(H(0,.), \Omega, y(0)\right) = \deg\left(H(1,.), \Omega, y(1)\right). \tag{1.44}$$

$\deg$ *est appelé le degré topologique de Brouwer.*

Proposition 1.1 *Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si* $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$ *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $f(x) = b$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{R}^N$, $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f - z, \Omega, b - z)$.
3. *Soit* $(f, \Omega, b) \in \mathcal{A}$ *et* $r = dist\left(b, f(\partial\Omega)\right) > 0$, *si* $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *continue et* $z \in \mathbb{R}^N$ *tel que*
$$\sup_{\partial\Omega}\left(|g - f|\right) + |b - z| < r,$$
alors
$$\deg\left(f, \Omega, b\right) = \deg\left(g, \Omega, b\right).$$
4. $\deg(f, \Omega, b)$ *est constante sur les composantes connexes de* $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$.
5. *Pour tout* $z \in \mathbb{R}^N$, $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f(. - z), z + \Omega, b)$.

Théorème 1.4 ***(Point fixe de Brouwer)*** *Soit* $\overline{B}$ *la boule unité fermée d'un espace de Banach* X *et* $f : \overline{B} \to \overline{B}$ *continue telle que* $f(\overline{B})$ *est relativement compacte dans* X[16]. *Alors* f *a un point fixe (i.e.)*

$$\exists x \in \overline{B} \text{ tel que } f(x) = x. \tag{1.45}$$

Remarque 1.13 *Le degré topologique en dimension infinie ne pourra donc pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach* X *dans lui-même, c'est pour ça nous utilisons un autre degré appelé le degré de Leray- Schauder qui construit sur les applications qui différent de l'identité par une application compacte.*

[16]Une partie relativement compacte d'un espace topologique X est un sous-ensemble Y de X inclus dans une partie compacte de X.

Chapitre 2

Méthode d'analyse fonctionnelle

2.1 Plan de l'étude de l'équation opérationnelle

Soient E et F deux espaces euclidien de dimensions finies[1]

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E \text{ et } v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in F,$$

muni du produit scalaire

$$(u, w)_E = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i, \;\; \|u\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(u,u)}_E,$$

ainsi que pour l'espace F.

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire de $E \to F$, il est défini par la matrice $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\mathcal{L}u = v$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} u_i = v_k, \;\; k = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ddots & & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

[1] Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Notre but est d'étudier l'équation

$$\mathcal{L}u = f. \tag{2.1}$$

On doit trouver les conditions pour lesquelles l'équation (2.1) admet une solution (existence) $\forall f \in F$ et une seule (unicité).

Nous utilisons le schéma suivant :

Lemme 2.1 *Pour que l'équation* (2.1) *admet une seule solution si et seulement si l'équation homogène*

$$\mathcal{L}u = 0 \tag{2.2}$$

ait la solution triviale[2].

Lemme 2.2 *La solution de l'équation* (2.1) *est unique si on a*

$$\|u\|_E \leq c\,\|\mathcal{L}u\|_F\,, \tag{2.3}$$

pour tout $u \in E$ *et* c *une constante positive indépendant de* u.

Preuve. *Si on suppose que* u_1 *et* u_2 *deux solution (i.e.)*

$$\mathcal{L}u_1 = f,\ \mathcal{L}u_2 = f,\ \forall f \in F$$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_E \leq c\,\|\mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2\|_F = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2.$$

Réciproquement, supposons que la solution est unique (i.e.) l'équation homogène admet seulement la solution trivial.

On remarque que

$$\|\mathcal{L}u\|_F \leq c\,\|u\|_E\,,$$

qu'on obtenir de

$$\|\mathcal{L}u\|_F = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}u_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On peut avoir $\min\|\mathcal{L}u\|_F = \delta \neq 0 \Rightarrow \|\mathcal{L}u\|_F \geq \delta\,\|u\|_E$ *pour* $\|u\| = 1$[3].

En vertu de la linéarité de $\mathcal{L}$ *et on utilise* $\left\|\dfrac{u}{\|u\|}\right\| = 1$, *on obtient*

$$\left\|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\|_F \geq \delta\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\|_E$$

$$\Rightarrow \left\|\mathcal{L}\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\|_F \geq \delta$$

[2] C'est-à-dire $u = 0$.

[3] Car l'ensemble $S = \{u\ /\ \|u\| = 1\}$ est fermé.

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\frac{u}{\|u\|_E}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|u\|_E}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}u\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \geq \delta,$$

donc

$$\frac{1}{\|u\|_E}\|\mathcal{L}u\|_F \geq \delta$$
$$\Rightarrow \|\mathcal{L}u\|_F \geq \delta\|u\|_E\,, \ \forall u \in E.$$

■

Passons à l'existence de la solution de (2.1), on a besoin de l'équation dual et l'opérateur dual, on peut définir l'opérateur dual à partir de l'identité

$$(\mathcal{L}u, v)_F = (u, \mathcal{L}^* v)_E\,,$$

d'où l'équation dual est de la forme

$$\mathcal{L}^* v = g. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1 *L'ensemble des éléments $\mathcal{L}u$ est un sous espace de F.*

Remarque 2.2 *L'ensemble des éléments $\mathcal{L}^*v$ est un sous espace de E.*

Lemme 2.3 *La solution de l'équation (2.1) existe pour tout $f \in F$ si et seulement si l'équation*

$$\mathcal{L}^* v = 0 \tag{2.5}$$

admet la solution triviale uniquement $(v = 0)$.

Preuve. $(\Rightarrow)$ Supposons que la solution (2.1) existe pour tout $f \in F$ et que (2.5) admet une solution non nulle v.

Pour tout $u \in E$, on a

$$(\mathcal{L}^* v, u)_E = (v, \mathcal{L}u)_F = 0 \text{ (car } \mathcal{L}^* v = 0),$$

si on pose $v = \mathcal{L}u$, on obtient

$$\|v\|_F^2 = 0$$

$$\Rightarrow v = 0,$$

(i.e.) l'équation $\mathcal{L}^* v = 0$ admet seulement la solution triviale.

($\Leftarrow$)Supposons que (2.5) admet seulement la solution triviale.

Admettons maintenant que la solution de (2.1) existe mais pas pour tout $f \in F$, alors les éléments $\mathcal{L}u$ forme sous espace différent de F[4].

Donc on aura un orthogonal (complément de $\mathcal{L}u$) non réduit à zéro

$$R^{\perp}(\mathcal{L}) \neq \{0\}.$$

En effet

$$\begin{aligned} & R(\mathcal{L}) \neq F \\ \Rightarrow\ & R^{\perp}(\mathcal{L}) \neq F^{\perp} \\ \Rightarrow\ & R^{\perp}(\mathcal{L}) \neq \{0\}^{5}, \end{aligned}$$

d'où

$$\exists v \in R^{\perp}(\mathcal{L}) /\ (\mathcal{L}u, v)_F = 0,\ \forall u \in E$$

$$\Rightarrow \exists v \neq 0/\ (\mathcal{L}u, v)_F = 0,\ \forall u \in E$$

$$\Rightarrow (u, \mathcal{L}^* v)_E = 0,\ \forall u \in E$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^* v = 0,\ v \neq 0,$$

d'où la contradiction. ■

Théorème 2.1 *Les équations (2.1) et (2.4) admettent une et une seule solution quelque soit le membre de droit, si et seulement si pour les opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ on a les inégalités*

$$\begin{aligned} \|u\|_E &\leq c\,\|\mathcal{L}u\|_F, \\ \|v\|_F &\leq c^*\,\|\mathcal{L}^* v\|_E, \end{aligned}$$

où c et c^* sont deux constantes positives indépendantes de u et v (respectivement).

2.2 Espaces de Banach, espaces de Hilbert

Théorème 2.2 *L'espace $L^2(\Omega)$ est complet.*

Théorème 2.3 *L'espace $\overline{C(\Omega)} = L^2(\Omega)$.*

Remarque 2.3 *En vertu du théorème (2,2) et (2,3), l'espace $L^2(\Omega)$ peut être obtenu de la manière suivant*

[4] C'est-à-dire $R(\mathcal{L}) \neq F$.

[5] Comme F est un espace euclidien alors $F^{\perp} = \{0\}$.

On considère l'ensemble de toutes les fonctions continues sur Ω et on définit dans cet ensemble un produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx, \tag{2.6}$$

en le complétant (en leur ajoutant) par les éléments idéaux (limites des suites fondamentales[6]) on obtient $L^2(\Omega)$.

Remarque 2.4 *Tout élément idéal[7] peut être identifié à une fonction de carré intégrable (i.e.) $u \in L^2(\Omega)$.*

Définition 2.1 *Toute fonction de carré intégrable peut être obtenue comme limite d'une suite des fonctions continues (dans la norme de $L^2(\Omega)$).*

Exemple : Dans $[0,1] \subset \mathbb{R}$, on considère l'espace $C_0^1([0,1])$ vérifiant

$$u(0) = 0, \tag{2.7}$$

on munit cet espace du produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} dx, \tag{2.8}$$

on complète $C_0^1([0,1])$ selon la norme induite par (2.8). L'espace obtenue est l'espace de Hilbert $W_0^{1,2}([0,1])$[8].

Une fonction de $C_0^1([0,1])$ peut être considérée comme élément de $L^2([0,1])$.

Pour une telle fonction, on a l'inégalité

$$u \in C_0^1([0,1]) \Rightarrow \|u\|_{L^2([0,1])} \leq \|u\|_{W_0^{1,2}([0,1])}. \tag{2.9}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2([0,1])} &= \int_0^1 u^2 dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{du}{d\xi} d\xi\right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left[\left(\int_0^x d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx \text{ (d'après Cauchy Schwartz)} \\
&\leq \int_0^1 \left(x \int_0^x \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi\right) dx \text{ comme } x \in [0,1] \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi\right) dx = \int_0^1 \|u\|^2_{W_0^{1,2}([0,1])} dx = \|u\|^2_{W_0^{1,2}([0,1])},
\end{aligned}$$

[6]On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite fondamentale si $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

[7]Si u est une limite d'une suite fondamentale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors u est appelé élément idéal.

[8]On note $W_0^{1,2}([0,1]) = H_0^1([0,1])$.

d'où

$$\|u\|_{L^2([0,1])} \leq \|u\|_{W_0^{1,2}([0,1])} .$$

Soit maintenant u un élément quelconque de $W_0^{1,2}([0,1])$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C_0^1([0,1])$ qui converge fortement vers u $\left(\|u_n - u\|_{W_0^{1,2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0\right)$ (i.e.)

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } L^2([0,1]),$$

d'après (2.9) la limite $u \in L^2([0,1])$ sera identifiée à un élément $v \in W_0^{1,2}([0,1])$ et de cette façon on définit l'injection canonique[9]

$$W_0^{1,2}([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1]).$$

Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,2}([0,1])$, alors $\left(\frac{du_n}{dx}\right)$ converge vers une fonction limite dans $L^2([0,1])$ qu'on la note par $\frac{du}{dx}$[10].

Remarque 2.5 *Pour tout $u \in W_0^{1,2}([0,1])$, on a l'égalité*

$$u(x) = \int_0^x \frac{du}{d\xi} d\xi.$$

Remarque 2.6 *Si on définit $C_1^1([0,1])$ avec la condition $u(1) = 0$, on construit la fermeture de $C_1^1([0,1])$ selon (2.8), on obtient $W_1^1([0,1])$.*

Remarque 2.7 *On peut fermer (compléter) $C^1([0,1])$ dans la norme induite par le produit scalaire*

$$(u,v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \int_0^1 uvdx = (u,v)_{L^2([0,1])} + \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)_{L^2([0,1])}, \tag{2.10}$$

pour obtenir $W^{1,2}([0,1])$.

Exemple 2.1 *Considérons $\mathring{C}^1(\Omega)$ où $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ avec*

$$(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{du}{dx_1}\frac{dv}{dx_1} + \frac{du}{dx_2}\frac{dv}{dx_2}\right) dx_1dx_2 + \int_\Omega uvdx_1dx_2, \tag{2.11}$$

où

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.12}$$

[9] Soit X une partie de E, l'application $X \to E$ qui à tout élément x de X, fait correspondre le même élément x considéré comme élément de E est injective. On l'appelle l'injection canonique de X dans E.

[10] Appelée dérivée généralisée de la fonction $u \in W_0^{1,2}([0,1])$ ou dérivée au sens de distribution.

Si on complète $\overset{\circ}{C}^1(\Omega)$ dans la norme induite par (2.11), on obtient $\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$.

Si on considère une fonction $u \in \overset{\circ}{C}^1(\Omega)$ qu'on peut l'identifier un élément de $L^2(\Omega)$ et on utilise la représentation

$$u\left(x_1, x_2\right) = \int_0^{x_1} \frac{du}{d\xi}\left(\xi, x_2\right) d\xi, \tag{2.13}$$

et répétons le raisonnement utilisé par la démonstration de (2.9), on obtient

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)}, \tag{2.14}$$

l'inégalité (2.14) permet de définir l'injection canonique

$$\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

2.3 Méthode énergétique

2.3.1 Notions générales, position du problème

Considérons l'équation

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{2.15}$$

où

$$a_{ij} = a_{ji},\ i,j = \overline{1,n},$$

vérifient

$$\nu\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2, \tag{2.16}$$

où μ, ν sont des constantes positives et

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \xi^2 = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

L'inégalité gauche de (2.16) signifie que (2.15) est elliptique.

L'inégalité droite de (2.16) signifie que les coefficients a_{ij} sont bornés.

Remarque 2.8 *Dans certains paragraphes qui suivent les fonctions a_{ij}, a_i et f_i n'admettent pas obligatoirement des dérivées (mêmes généralisées), dans ce cas on donne le sens de* (2.15) .

Lorsque les fonctions $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$ et $f_i(x)$ admettant des dérivées, l'équation (2.15) peut être mise sous la forme usuelle

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = \mathcal{F}(x). \tag{2.17}$$

Pour l'équation (2.15) ou (2.17) , on considère les trois problèmes suivants :

I)-Problème de Dirichlet : Il consiste à trouver une solution u qui vérifiée (2.15) ou (2.17) dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et la condition

$$u|_S = \varphi(S), \tag{2.18}$$

où $S = \partial\Omega$[11].

II)-Problème de Newmann : Il consiste à chercher $u(x)$ vérifiant (2.15) ou (2.17) dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et la condition aux limite

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_S = \varphi(S), \tag{2.19}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\overrightarrow{\eta}, x_j)$[12].

III)-Problème mixte ou de robin : Où la condition aux bords s'écrit sous la forme

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \theta(\delta)u\right)\right|_S = \varphi(S). \tag{2.20}$$

Les trois problèmes ci-dessus peuvent êtres ramenés à des problèmes avec des conditions aux limites homogènes $(\varphi = 0)$, cela peut être fait à l'aide de changement de variable (inconnue) $v(x) = u(x) - \Phi(x)$, où $\Phi(x)$ est une fonction arbitraire vérifiant seulement les conditions aux limites (2.18) , (2.19) et (2.20) , alors on obtient le problème

$$\mathcal{L}v = \mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i}, \tag{2.21}$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{F} = f - a\Phi - a_i\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ \mathcal{F}_i = f_i - a_{ij}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} \end{cases}. \tag{2.22}$$

En effet, d'après (2.15) et le changement de variable $u(x) = v(x) + \Phi(x)$ on obtient

$$\mathcal{L}u = f + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

[11] $\partial\Omega$ est la frontière.

[12] $\overrightarrow{\eta}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieur à $S = \partial\Omega$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(v+\Phi\right) = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(v\right) + \mathcal{L}\left(\Phi\right) = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \text{(d'après la linéarité de } \mathcal{L}\text{)}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(v\right) &= f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \mathcal{L}\left(\Phi\right) \\
&= f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + a(x)\Phi\right] \\
&= \left(f - a(x)\Phi - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{L}v = \mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i},$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{F} = f - a\Phi - a_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ \mathcal{F}_i = f_i - a_{ij}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} \end{cases}.$$

Nous supposons que cette transformation est déjà effectuée et nous considérons des problèmes homogènes.

Dans les paragraphes 2 et 3 la solution est cherchée dans l'espace $W_2^1(\Omega)$.

2.3.2 Solutions généralisées dans $W_2^1(\Omega)$. Première inégalité de l'énergie

Considérons le problème de Dirichlet dans $W_2^1(\Omega)$

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x)u\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{2.23}$$

$$u\mid_S = 0. \tag{2.24}$$

On suppose que

$$\nu\xi^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2, \text{ où } \nu, \mu > 0 \text{ des constantes et } a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_1, \ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_1 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_2, \ \mu_3 \leq a(x) \leq \mu_4 \end{cases}. \tag{2.26}$$

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty, \ \ \|F\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)} < \infty. \tag{2.27}$$

Définition 2.2 *On appelle solution généralisée dans $W_2^1(\Omega)$ de l'équation (2.23) toute fonction $u \in W_2^1(\Omega)$ vérifiant l'égalité intégrale*

$$\mathcal{L}(u,v) = (\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} - b_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} - auv)dx = \int_\Omega (-fv + f_i \frac{\partial v}{\partial x_i})dx, \tag{2.28}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Cette définition a un sens car les intégrales dans (2.28) sont finies $(u \in W_2^1(\Omega), \ v \in C_0^\infty(\Omega))$.

Définition 2.3 *On appelle encore solution généralisée du problème (2.23), (2.24) toute fonctions $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ vérifiant (2.28) pour tout $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.*

Remarque 2.9 *L'identité (2.28) peut être obtenue formellement de l'identité*

$$-\left(\mathcal{L}u - f - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, v\right) = -\int_\Omega \left(\mathcal{L}u - f - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) v dx = 0, \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.29}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \mathcal{L}uvdx &= -\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u)\right) vdx - \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} vdx - \int_\Omega auvdx \\ &= -\int_S (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u) v \cos(\overrightarrow{\eta}, x_i) ds + \int_\Omega (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u)\frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &\quad -\int_\Omega b_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_\Omega auvdx, \end{aligned}$$

où

$$\int_S (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i u) v \cos(\overrightarrow{\eta}, x_i) ds = 0 \text{ (car } v \in C_0^\infty(\Omega)\text{)}.$$

Pour les solutions généralisées définis précédemment on va établir la première inégalité de l'ènergie pour cela considérons la forme quadratique $\mathcal{L}(u,u) = (\mathcal{L}u, u)_{L^2(\Omega)}$

$$\mathcal{L}(u,u) = \int_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + (a_i - b_i)\frac{\partial u}{\partial x_i} u - au^2\right) dx,$$

en vertu de (2.25), (2.26) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u,u) &= \int_\Omega \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + (a_i - b_i)\frac{\partial u}{\partial x_i} u - au^2\right) dx \\ &\geq \int_\Omega \nu \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx - \mu_4 \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega (a_i - b_i)\frac{\partial u}{\partial x_i} udx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,u) &\geq \int_\Omega \left(\nu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2-\mu_4u^2\right)dx-\left(\int_\Omega\left((a_i-b_i)(u)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\geq \int_\Omega \left(\nu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2-\mu_4u^2\right)dx-\mu_2\left(\int_\Omega u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\geq \int_\Omega \left(\nu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2-\mu_4u^2\right)dx-\mu_2\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy avec ε on a

$$\mathcal{L}(u,u)\geq \int_\Omega \left(\nu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2-\mu_4u^2\right)dx-\frac{\varepsilon}{2}\mu_2^2\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

posons $\frac{1}{2\varepsilon}=\varepsilon_1$ (i.e.) $\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{4\varepsilon_1}$ tel que $\varepsilon_1>0$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,u) &\geq \nu\left\|u_x\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\mu_4\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{4\varepsilon_1}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\varepsilon_1\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\geq (\nu-\varepsilon_1)\left\|u_x\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\ \text{pour tout } \varepsilon_1>0,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}(u,u)\geq (\nu-\varepsilon_1)\left\|u_x\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\ \text{pour tout } \varepsilon_1>0, \tag{2.30}$$

si on pose $\varepsilon_1=\frac{\nu}{2}$ dans (2.30), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,u) &\geq \left(\nu-\frac{\nu}{2}\right)\left\|u_x\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\left(\mu_4+\left(\frac{\mu_2^2}{4}\right)\left(\frac{2}{\nu}\right)\right)\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{\nu}{2}\left\|u_x\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right)\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\ \text{pour tout } \varepsilon_1>0,\end{aligned} \tag{2.31}$$

nous utilisons l'inégalité de Poincaré dans (2.30), donc

$$\mathcal{L}(u,u)\geq (\nu-\varepsilon_1)\frac{1}{c_\Omega^2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

(i.e.)

$$\mathcal{L}(u,u)\geq \left\{(\nu-\varepsilon_1)\frac{1}{c_\Omega^2}-\mu_4-\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right\}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\ \text{pour tout } \varepsilon_1\in]0,\nu],$$

$$\mathcal{L}(u,u)\geq \delta_1\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.32}$$

où

$$\delta_1=\max_{0<\varepsilon_1\leq\nu}\left\{(\nu-\varepsilon_1)\frac{1}{c_\Omega^2}-\mu_4-\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right\}, \tag{2.33}$$

si $\delta_1 > 0$, alors nous utilisons (2.31) et (2.32), on peut estimé $\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}$ comme suite

$$\frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{L}(u,u)\left[1+\frac{1}{\delta_1}\max\left\{0,\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right\}\right].$$

En effet

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

(i.e.)

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \mathcal{L}(u,u)+\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \mathcal{L}(u,u)+\frac{1}{\delta_1}\max\left\{0,\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right\}\mathcal{L}(u,u) \\
&\leq \mathcal{L}(u,u)\left[1+\frac{1}{\delta_1}\max\left\{0,\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right\}\right],
\end{aligned}$$

d'où

$$\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\delta_2}\mathcal{L}(u,u), \tag{2.34}$$

avec

$$\delta_2 = \frac{\nu}{2}\left[1+\frac{1}{\delta_1}\max\left\{0,\mu_4+\frac{\mu_2^2}{2\nu}\right\}\right]^{-1}. \tag{2.35}$$

Soit u une solution généralisée dans $W_2^1(\Omega)$ du problème (2.23), (2.24) , alors (2.28) découle l'inégalité

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u,u) &= -(f,u)_{L^2(\Omega)}+\left(f_i,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|F\|_{L^2(\Omega)}\|u_x\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|u\|_{L^2(\Omega)}+\frac{\varepsilon}{2}\|F\|_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|u_x\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

posons $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\dfrac{1}{2\varepsilon}$ tel que $\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$, on obtient

$$\mathcal{L}(u,u) \leq \varepsilon_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon_3\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall\varepsilon_2,\varepsilon_3>0. \tag{2.36}$$

En utilisant (2.36) et (2.30), on obtient la première inégalité de l'énergie

$$(\nu-\varepsilon_1-\varepsilon_3)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}+\varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.37}$$

$\forall\varepsilon_i>0,\ i=\overline{1,3}$.

En effet, on a

$$(\nu-\varepsilon_1)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}-\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{L}(u,u)\leq \varepsilon_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon_3\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\Rightarrow (\nu-\varepsilon_1-\varepsilon_3)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{4\varepsilon_1}+\varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $\varepsilon_1+\varepsilon_3<\nu$, on a l'estimation de $\|u_x\|_{L^2(\Omega)}$ en fonction de $\|f\|_{L^2(\Omega)}$, $\|F\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, si on pose $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\frac{\nu}{4}$, on obtient

$$\left(\nu-\frac{\nu}{4}-\frac{\nu}{4}\right)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{\nu}\right)\|F\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\mu_4+\left(\frac{4}{\nu}\right)\left(\frac{\mu_2^2}{4}\right)+\varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

(i.e.)

$$\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{1}{2\nu\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2}{\nu^2}\|F\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2}{\nu}\left(\mu_4+\frac{\mu_2^2}{\nu}+\varepsilon_2\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.38}$$

L'intérêt de (2.38) est qu'elle permet de majorer $\|u_x\|_{L^2(\Omega)}$ par $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ et les fonctions f et F.

On s'intéresse à l'inégalité (2.37) dans laquelle on peut supprimer le terme $\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$, cela est possible si $\delta_1>0$.

En effet, de (2.34) et en vertu de (2.36) et de l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\delta_2\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\mathcal{L}(u,u)\leq\varepsilon_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon_3\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow\delta_2\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\mathcal{L}(u,u)\leq\left(\varepsilon_2c_\Omega^2+\varepsilon_3\right)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$\left(\delta_2-\varepsilon_2c_\Omega^2-\varepsilon_3\right)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\varepsilon_3}\|F\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.39}$$

posons $\varepsilon_3=\varepsilon_2c_\Omega^2=\frac{\delta_2}{4}$, alors on obtient

$$\left(\delta_2-\frac{\delta_2}{4}-\frac{\delta_2}{4}\right)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{4c_\Omega^2}{\delta_2}\right)\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{\delta_2}\right)\|F\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\Rightarrow\frac{\delta_2}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{c_\Omega^2}{\delta_2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\delta_2}\|F\|^2_{L^2(\Omega)},$$

donc

$$\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{2}{\delta_2^2}\left[c_\Omega^2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\|F\|^2_{L^2(\Omega)}\right], \tag{2.40}$$

de (2.40) il s'ensuit que si $f = F = 0$ la solution est nulle et par conséquente le problème (2.23) et (2.24) ne peut avoir plus d'une solution généralisée dans $W_2^1(\Omega)$ (pour $\delta_1 > 0$). Donc on a démontré le théorème suivant

Théorème 2.4 *Si les conditions* (2.25) , (2.26) *et* (2.27) *sont satisfaites et si* $\delta_1 > 0$, *alors le problème* (2.23) *et* (2.24) *admet au plus une solution généralisée.*

2.3.3 Deuxième inégalité de l'énergie

Dans ce paragraphe, on démontre que toutes les solutions généralisées $u \in W_2^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet sont des éléments de $W_2^1(\Omega)$ si les coefficients et les fonctions de l'équation (2.23) ainsi que la frontière $S = \partial\Omega$ ont certaines propriétés de régularités.

On suppose que les coefficients de $\mathcal{L}$, en plus des conditions (2.25) et (2.26) qu'ils admettent des dérivées $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ et $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$ dans Ω et que les fonctions f et $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.

En vertu de ça, il suffit de considérer au lieu de (2.23) l'équation de la forme

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f, \tag{2.41}$$

on a remplacé $f + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ par f et $\dfrac{\partial (a_i u)}{\partial x_i} + b_i u_{x_i} + au$ par $a_i u_{x_i} + au.$

On suppose que $\mathcal{L}$ de type (2.41) et que (2.25) et (2.26) sont vérifier et que

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right| \leq \mu_5, \tag{2.42}$$

et

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty, \tag{2.43}$$

on suppose aussi que $S \in C^2$.

Montrons que si les conditions données sont satisfaites pour (2.41) et aussi S, alors pour toute fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que $u|_S = 0$, on a l'inégalité

$$\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\nu^2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + c\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2, \tag{2.44}$$

avec c dépandante de u_i et S.

Il est évident de (2.38) que

$$\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\nu\varepsilon_2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{\varepsilon_2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.45}$$

qui est vraie pour tout $u \in W_2^1(\Omega)$, où $c_{\varepsilon_2} = \dfrac{2}{\nu}\left(\mu_4 + \dfrac{\mu_2^2}{\nu} + \varepsilon_2\right)$, $\varepsilon_2 > 0$ et u est solution généralisée dans $W_2^1(\Omega)$ du problème $\mathcal{L}u = f,\ u|_S = 0,\ f \in L^2(\Omega).$

Ajoutons la somme $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}$ aux deux membres de (2.44), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\nu^2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + c\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2 \\
&\leq \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\nu^2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + c\left(\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \frac{2}{\nu^2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+c)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+c)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{2}{\nu^2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+c)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (1+c)\left\{\frac{1}{2\nu\varepsilon_2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{\varepsilon_2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \\
&\leq \left(\frac{2}{\nu^2} + \frac{1+c}{2\nu\varepsilon_2}\right)\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+c)(1+c_{\varepsilon_2})\|u\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} = \|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq \left[\left(\frac{2}{\nu^2} + \frac{1+c}{2\nu\varepsilon_2}\right)\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+c)(1+c_{\varepsilon_2})\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

on applique l'inégalité $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, on obtient

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \sqrt{\left(\frac{2}{\nu^2} + \frac{1+c}{2\nu\varepsilon_2}\right)}\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{(1+c)(1+c_{\varepsilon_2})}\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

si on pose $\varepsilon_2 = \dfrac{\nu(c+1)}{4}$, on obtient la seconde inégalité de l'énergie pour les opérateurs elliptiques

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \frac{2}{\nu}\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.46}$$

En effet

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \sqrt{\left(\frac{2}{\nu^2} + \frac{1+c}{2\nu\varepsilon_2}\right)}\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{(1+c)(1+c_{\varepsilon_2})}\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

(i.e.)

$$\begin{aligned}
\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} &\leq \sqrt{\left(\frac{2}{\nu^2} + \left(\frac{1+c}{2\nu}\right)\left(\frac{4}{\nu(c+1)}\right)\right)}\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{2}{\nu^2} + \frac{2}{\nu^2}\right)}\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{\frac{4}{\nu^2}}\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|u\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \frac{2}{\nu}\|f\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

où $c_2 = \sqrt{(1+c)(1+c_1)}$ et $c_1 = c_{\varepsilon_2}$ pour $\varepsilon_2 = \dfrac{\nu(c+1)}{4}$.
(2.46) est vraie pour tout $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$.

Dans le cas où $\mathcal{L}(u,u) \geq \delta_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ (voir (2.32)), $\delta_1 > 0$ constant, le dernier terme de (2.46) peut être estimé en terme de $\|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)}$ et au lieu de (2.46) on aura l'inégalité

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq c_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.47}$$

où

$$c_3 = \frac{2}{\nu} + \frac{c_2}{\delta_1}.$$

En effet

$$|\mathcal{L}(u,u)| = \left|(\mathcal{L}u, u)_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\delta_1} \|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \frac{2}{\nu} \|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \left(\frac{1}{\delta_1} \|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

(i.e.)

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \left(\frac{2}{\nu} + \frac{c_2}{\delta_1}\right) \|\mathcal{L}u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Conclusion : Dans (2.46), on peut estimer $\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}$ à l'aide du terme libre f et la norme de la solution. Par contre dans (2.47), on peut estimer $\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}$ seulement à l'aide du terme libre f.

Démonstration (2.44)

Considérons l'intégrale $\int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx$ et essayons de le minore

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx &= \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_{x_j}\right) + a_i u_{x_i} + au\right]^2 dx \\ &= \int_\Omega \left[a_{ij}u_{x_ix_j} + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)\right]^2 dx \\ &= \int_\Omega \left[\left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 + 2a_{ij}u_{x_ix_j}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)^2\right] dx \\ &\geq \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)^2 dx - \varepsilon \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_i u_{x_i} + au\right)^2 dx \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy avec } \varepsilon) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx &\geq \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_iu_{x_i} + au\right)^2 dx - \varepsilon \int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 dx \\
&\geq (1-\varepsilon)\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 dx + \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_iu_{x_i} + au\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

donc

$$
\int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx \geq (1-\varepsilon)\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_ix_j}\right)^2 dx - c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega \left(u_x^2+u^2\right)dx \;\text{ pour } 0<\varepsilon<1, \tag{2.48}
$$

où

$$
c_1 = \max\left\{\left(3\mu_1^2+3\mu_5^2\right), 3\mu_4\right\}.
$$

Remarque

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_iu_{x_i} + au\right)^2 dx &= \int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j}\right)^2 dx + \int_\Omega \left(a_iu_{x_i}+au\right)^2 dx \\
&\quad +2\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j}\right)\left(a_iu_{x_i}+au\right)dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_j}^2 dx + \int_\Omega a_i^2u_{x_i}^2 dx + \int_\Omega a^2u^2 dx \\
&\quad +2\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j}\right)\left(a_iu_{x_i}\right)dx + 2\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j}\right)(au)\,dx \\
&\quad +2\int_\Omega \left(a_iu_{x_i}\right)(au)\,dx,
\end{aligned}
$$

alors, d'après l'inégalité de Cauchy avec ε on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_iu_{x_i} + au\right)^2 dx &\leq \int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_j}^2 dx + \int_\Omega a_i^2u_{x_i}^2 dx + \int_\Omega a^2u^2 dx \\
&\quad +\varepsilon\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_j}^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega a_i^2u_{x_i}^2 dx + \varepsilon\int_\Omega a^2u^2 dx \\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_j}^2 dx + \varepsilon\int_\Omega a_i^2u_{x_i}^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega a^2u^2 dx,
\end{aligned}
$$

posons $\varepsilon = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u_{x_j} + a_iu_{x_i} + au\right)^2 dx &\leq 3\int_\Omega \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_j}^2 dx + 3\int_\Omega a_i^2u_{x_i}^2 dx + 3\int_\Omega a^2u^2 dx \\
&\leq 3\mu_5^2\left\|u_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\mu_1^2\left\|u_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\mu_4^2\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \left(3\mu_5^2+3\mu_1^2\right)\left\|u_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\mu_4^2\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad |a|\leq\varepsilon \\
&\leq \max\left\{3\mu_1^2+3\mu_5^2, 3\mu_4\right\}\left[\left\|u_x\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right], \quad -\varepsilon\leq a\leq\varepsilon.
\end{aligned}
$$

A l'aide d'une intégration par parties double, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_{ij}u_{x_ix_j}a_{kl}u_{x_kx_l}dx &= \int_\Omega a_{ij}u_{x_ix_k}a_{kl}u_{x_jx_l} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}a_{kl}\right)u_{x_i}u_{x_kx_l} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ij}a_{kl}\right)u_{x_i}u_{x_jx_l}dx + \int_S I(s)ds \\
&\geq \int_\Omega I_1(x)dx + \int_S I(s)ds - c_2\int_\Omega\left(\varepsilon_1 u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}u_x^2\right)dx \text{ pour } \varepsilon \in [0,1]\,,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

ici

$$I_1(x) = a_{ij}a_{kl}u_{x_ix_k}u_{x_jx_l}$$

et

$$I(s) = a_{ij}a_{kl}u_{x_i}\left[u_{x_kx_l}\cos(\overrightarrow{\eta},x_j) - u_{x_jx_l}\cos(\overrightarrow{\eta},x_k)\right],\ (x \in S).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_{ij}u_{x_ix_j}a_{kl}u_{x_kx_l}dx &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}a_{kl}u_{x_kx_l}\right)u_{x_i}dx + \int_{\partial\Omega} a_{ij}u_{x_i}a_{kl}u_{x_kx_l}\cos(\overrightarrow{\eta},x_j)ds \\
&= \underbrace{\int_{\partial\Omega} a_{ij}u_{x_i}a_{kl}u_{x_kx_l}\cos(\overrightarrow{\eta},x_j)ds}_{A} \underbrace{- \int_\Omega u_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}a_{kl}\right)u_{x_kx_l}dx}_{B} \\
&\quad - \int_\Omega u_{x_i}a_{ij}a_{kl}u_{x_kx_lx_j}dx \\
&= A + B - \int_{\partial\Omega} u_{x_i}a_{ij}a_{kl}u_{x_lx_j}\cos(\overrightarrow{\eta},x_k)ds + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ij}a_{kl}u_{x_i}\right)u_{x_lx_j}dx \\
&= A + B - \int_{\partial\Omega} u_{x_i}a_{ij}a_{kl}u_{x_lx_j}\cos(\overrightarrow{\eta},x_k)ds + \int_\Omega u_{x_lx_j}u_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ij}a_{kl}\right)dx \\
&\quad + \int_\Omega a_{ij}a_{kl}u_{x_ix_k}u_{x_lx_j}dx \\
&= \int_S \underbrace{a_{ij}a_{kl}u_{x_i}\left[u_{x_kx_l}\cos(\overrightarrow{\eta},x_j) - u_{x_lx_j}\cos(\overrightarrow{\eta},x_k)\right]}_{I(S)}ds + \int_\Omega \underbrace{a_{ij}a_{kl}u_{x_ix_k}u_{x_lx_j}}_{I_1(x)}dx \\
&\quad + \int_\Omega \underbrace{u_{x_i}\left[-u_{x_kx_l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}a_{kl}\right) + u_{x_lx_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ij}a_{kl}\right)\right]}_{(D)}dx.
\end{aligned}$$

En utilisons les conditions sur les coefficients et l'inégalité de Cauchy et on suit on utilise l'inégalité de Cauchy avec ε on obtient (2.49).

D'après la condition d'ellipticité (2.16), on a

$$I_1(x) = a_{ij}a_{kl}u_{x_ix_k}u_{x_jx_l} \geq \nu^2 u_{xx}^2. \tag{2.50}$$

D'après les inégalités (2.48) , (2.49) et (2.50) on déduire l'inégalité suivante

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\left(\nu^2-\varepsilon_1 c_2\right)\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq & \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-(1-\varepsilon)\int_S I(s)ds \\
& +\left[c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\right]\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

En effet

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx \geq\ & (1-\varepsilon)\int_\Omega \left(a_{ij}u_{x_i x_j}\right)^2 dx - c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega \left(u_x^2+u^2\right)dx \\
\geq\ & (1-\varepsilon)\left[\int_\Omega I_1(x)dx+\int_S I(s)ds - c_2\int_\Omega\left(\varepsilon_1 u_{xx}^2+\frac{1}{\varepsilon_1}u_x^2\right)dx\right] \\
& -c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega\left(u_x^2+u^2\right)dx \\
\geq\ & \nu^2(1-\varepsilon)\int_\Omega u_{xx}^2 dx+(1-\varepsilon)\int_S I(s)ds - c_2\varepsilon_1(1-\varepsilon)\int_\Omega u_{xx}^2 dx \\
& -\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\int_\Omega u_x^2 dx - c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega u_x^2 dx - c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega u^2 dx \\
\geq\ & (1-\varepsilon)\left(\nu^2-\varepsilon_1 c_2\right)\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)}+(1-\varepsilon)\int_S I(s)ds - c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& -\left[c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\right]\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\left(\nu^2-\varepsilon_1 c_2\right)\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq\ & \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-(1-\varepsilon)\int_S I(s)ds + c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left[c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\right]\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-(1-\varepsilon)\int_S I(s)ds + c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\left[c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\right]\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-(1-\varepsilon)\int_S I(s)ds + \left[c_1\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{c_2}{\varepsilon_1}(1-\varepsilon)\right] \\
& \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}
$$

on remarque qu'on a ajouté le terme $\frac{c_2}{\varepsilon}(1-\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$, si on pose $\varepsilon=\frac{1}{7}$ et $\varepsilon_1=\frac{\nu^2}{8c_2}$, alors (2.51) va prendre la forme suivant

$$
\frac{3\nu^2}{4}\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-\frac{6}{7}\int_S I(s)ds + c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2 . \tag{2.52}
$$

En effet

$$\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(\nu^2-c_2\frac{\nu^2}{8c_2}\right)\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-\left(1-\frac{1}{7}\right)\int_S I(s)ds+c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2,$$

(i.e.)

$$\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\nu^2\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-\frac{6}{7}\int_S I(s)ds+c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\frac{3\nu^2}{4}\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx-\frac{6}{7}\int_S I(s)ds+c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2,$$

comme

$$-\int_S I(s)ds \le \lambda\int_S u_x^2 ds,\ \lambda>0, \text{ (voir Ladyzhenskaya [10])} \tag{2.53}$$

pour tout Ω, alors on déduit de (2.52) et (2.53) que

$$\frac{3\nu^2}{4}\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx+\frac{6\lambda}{7}\int_S u_x^2 ds+c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2. \tag{2.54}$$

Pour estimer le $2^{ème}$ terme de membre droit de (2.54), on utilise l'inégalité (1.28), (i.e.)

$$\int_S v^2 ds \le c\int_\Omega \left(v^2+v_x^2\right)dx \text{ où } v\in W_2^1(\Omega),$$

et comme $\nabla u_x^2 = 2u_x u_{xx}$, alors on a

$$\begin{aligned}\int_S u_x^2 ds &\le c_4\int_\Omega \left(u_x^2+\nabla u_x^2\right)dx\\ &\le c_4\int_\Omega \left(u_x^2+2|u_x||u_{xx}|\right)dx\\ &\le c_4\int_\Omega \left(u_x^2+\varepsilon u_{xx}^2+\frac{1}{\varepsilon}u_x^2\right)dx,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_S u_x^2 ds \le c_4\int_\Omega \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)u_x^2+\varepsilon u_{xx}^2 dx, \tag{2.55}$$

si on pose $\varepsilon = \frac{\nu^2}{4}\left(\frac{6}{7}\lambda c_4\right)^{-1}$, on peut déduire de (2.54) et (2.55) que

$$\frac{\nu^2}{2}\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx+c_5\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2. \tag{2.56}$$

En effet

$$\begin{aligned}\frac{3\nu^2}{4}\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx+\frac{6\lambda}{7}\int_S u_x^2 ds+c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2\\ &\le \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2\,dx+\frac{6\lambda}{7}\left[c_4\int_\Omega\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)u_x^2+\varepsilon u_{xx}^2 dx\right]\\ &\quad +c_3\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3\nu^2}{4} - \varepsilon\lambda c_4 \frac{6}{7}\right) \|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2 \, dx + \frac{6}{7}\lambda c_4 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_3 \left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3\nu^2}{4} - \frac{\nu^2}{4}\left(\frac{6}{7}\lambda c_4\right)^{-1}\left(\frac{6}{7}\lambda c_4\right)\right) \|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2 \, dx + c_5 \left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\nu^2}{2} \|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega (\mathcal{L}u)^2 \, dx + c_5 \left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right)^2,$$

qui est exactement (2.44) .

Chapitre 3

Formulation variationnelle des problèmes aux limites

3.1 Lemme de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et $l \in H'$ une forme linéaire continue, on considère le problème suivant

$$\text{«Trouver } u \in H \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in H\text{»,} \tag{3.1}$$

appelé problème variationnelle abstrait.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) suite le lemme de Lax-Milgram.

Lemme 3.1 ***(Lax-Milgram)*** *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur l'espace de Hilbert H, soit $l(v)$ une forme linéaire continue sur H. Alors le problème (3.1) admet une solution unique dans H.*

De plus, si a est symétrique, ce problème est équivalent au problème de minimisation

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } u \text{ qui réalise le minimum dans } H \text{ de} \\ J(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) - l(v) \end{array}\right. . \tag{3.2}$$

Preuve. L'application $u \mapsto a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur H, donc en appliquant le théorème de Riesz, il existe un élément $Au \in H$ tel que

$$a(u,v) = (Au,v)_H,\ \forall v \in H.$$

De même $l(v)$ est une forme linéaire continue sur H, donc toujours d'après le théorème de Riesz, il existe un élément $f \in H$ tel que

$$l(v) = (f,v)_H,\ \forall v \in H.$$

Soit $\rho > 0$, désignons

$$\begin{aligned} T_\rho : H &\rightarrow H \\ u &\mapsto T_\rho(u) = u - \rho(Au - f). \end{aligned}$$

Le problème (3.1) est finalement équivalent à

«Trouver $u \in H$ tel que $T_\rho(u) = u$»,

on ce qui revient au même montrer que T_ρ admet un point fixe, T_ρ contraction stricte[1].

En effet

$$\begin{aligned} \|T_\rho(u) - T_\rho(v)\|_H^2 &= (T_\rho(u) - T_\rho(v), T_\rho(u) - T_\rho(v))_H \\ &= ((u - \rho(Au - f)) - (v - \rho(Av - f)), (u - \rho(Au - f)) - (v - \rho(Av - f)))_H \\ &= (u - \rho Au - \rho f - v + \rho Av + \rho f, u - \rho Au - \rho f - v + \rho Av + \rho f)_H \\ &= (u - v - \rho(A(u - v)), u - v - \rho(A(u - v)))_H \\ &= \|u - v\|_H^2 - 2(u - v, \rho(A(u - v))) + \rho^2 \|A(u - v)\|_H^2, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} (u - v, \rho(A(u - v))) &\geq \rho \|A(u - v)\|_H \|u - v\|_H \\ &\geq \rho\alpha \|u - v\|_H^2 \text{ (par la coercivité de } A). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A(u - v)\|_H^2 &= (A(u - v), A(u - v)) \\ &\leq M^2 \|u - v\|_H^2 \text{ (par la continuité de } A), \end{aligned}$$

finalement, on trouve que

$$\|T_\rho(u) - T_\rho(v)\|_H^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|u - v\|_H^2.$$

Posons

$$f(\rho) = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2,$$

où $M > 0$ et $\alpha \leq M$, on a

$$f'(\rho) = -2\alpha + 2M^2\rho,$$

$$f'(\overline{\rho}) = 0$$

[1]On dit que l'application $T : H \rightarrow H$ est une contraction stricte si existe $0 \leq k < 1$ tel que $\|Ty - Tx\|^2 \leq k\|y - x\|^2, \forall x, y \in H$, donc elle admet un point fixe.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -2\alpha + 2M^2\overline{\rho} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{\rho} = \frac{\alpha}{M^2}, \end{aligned}$$

donc

$$f(\overline{\rho}) = 1 - 2\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{\alpha^2}{M^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{M^2} < 1,$$

d'autre part $1 - \dfrac{\alpha^2}{M^2} \geq 0$.

Avec le choix de $\overline{\rho} = \dfrac{\alpha}{M^2}$, T_ρ est une contraction stricte elle admet un point fixe[2] (i.e.)

$$\begin{aligned} & T_\rho(u) = u \\ \Leftrightarrow \quad & Au = f \\ \Leftrightarrow \quad & (Au, v)_H = (f, v)_H \\ \Leftrightarrow \quad & a(u, v) = l(v), \end{aligned}$$

qui admet une solution unique.

On considère le problème de minimisation

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que } J(u) = \min_{v \in H} J(v),$$

comme $u \in H$ la solution du problème (3.1) et w un élément quelconque de H ; alors, en vertu de la symétrie de la forme bilinéaire $a(.,.)$ on a

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - l(u+w) \\ &= \frac{1}{2}\{a(u,u) + 2a(u,w) + a(w,w)\} - \{l(u) - l(w)\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}a(u,u) - l(u)\right\} + \{a(u,w) - l(w)\} + \frac{1}{2}a(w,w), \end{aligned}$$

puisque u est la solution du problème (3.1), alors

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w,w),$$

et d'après la propriété de H-ellipticité, on obtient

$$J(u+w) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2,$$

donc

$$\forall v \in H, \; v \neq u \Rightarrow J(v) > J(u),$$

d'où

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v).$$

■

[2]Soit X un espace métrique complet et $f : X \to Y$ une contraction stricte, alors f admet un unique point fixe, (i.e) il existe un unique point a de X tel que $f(a) = a$.

3.2 Applications

Nous allons maintenant aborder la résolution de quelques équations aux dérivées partielles elliptiques de second ordre.

3.2.1 Problèmes aux limites elliptiques avec les conditions de Dirichlet

Le cas homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné avec frontière supposons régulière $\partial\Omega$.

♣ Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.3}$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ le Laplacien de } u$$

et $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

Multiplions l'équation du problème (3.3) par $v \in H_0^1(\Omega)$[3] et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx,$$

d'après la formule de Green, on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_\Omega f v dx,$$

puisque $v \in H_0^1(\Omega)$, donc

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = 0,$$

alors

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

La résolution du problème (3.3) est équivalente à la résolution du problème variationnelle suivant

«Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) = l(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$»,

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \text{ est une forme bilinéaire}$$

[3] Fonction test.

et

$$l(v) = \int_{\Omega} fvdx, \text{ est une forme linéaire.}$$

En vérifiant les hypothèses de lemme de Lax-Milgram.

♣ a est continue ?

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| \, |\nabla v| \, dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

alors a est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

♣ a est coercive ?

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_{\Omega} (\nabla u)^2 \, dx \\ &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \text{ (d'après Poincaré),} \end{aligned}$$

alors a est coercive.

♣ $l(v)$ est continue ?

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} fvdx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |fv| \, dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq c \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $c = \|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty$, alors $l(v)$ est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

Donc les hypothèses du lemme de Lax-Milgram sont vérifiées alors le problème (**3.3**) admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

Le cas non-homogène

Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.4}$$

où $f, g \in L^2(\Omega)$ sont données.

Posons $u = w + h$, où $h \in H^2(\Omega)$ et $h|_{\partial\Omega} = g$, donc le problème $(\mathbf{3.4})$ se ramène à un problème de Dirichlet homogène pour la nouvelle variable w.

En effet

$$\begin{aligned} & u = w + h \\ \Rightarrow \quad & u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} + h|_{\partial\Omega} \\ \Rightarrow \quad & g = w|_{\partial\Omega} + g \\ \Rightarrow \quad & w|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

donc, on résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta w = f + \Delta h \text{ dans } \Omega \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.5}$$

avec $f + \Delta h \in L^2(\Omega)$.

Multiplions l'équation du problème (3.5) par $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta w v dx = \int_\Omega (f + \Delta h) v dx,$$

d'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{dw}{d\eta} v d\sigma = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{dh}{d\eta} v d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla w \nabla v dx = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v dx.$$

La résolution du problème $(\mathbf{3.5})$ est équivalente à la résolution du problème variationnelle

«Trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(w, v) = l(v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$»,

où

$$a(w, v) = \int_\Omega \nabla w \nabla v dx,\ l(v) = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega \nabla h \nabla v dx.$$

En vérifiant les hypothèses du lemme de Lax-Milgram.

♣ a est continue ?

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= \left| \int_\Omega \nabla w \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla w| \, |\nabla v| \, dx \\ &\leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \ \text{(d'après Cauchy Schwartz)} \\ &\leq \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc a est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

♣ a est coercive ?

$$a(w,w) = \int_{\Omega} (\nabla w)^2 \, dx \geq \alpha \left\| w \right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \text{ (d'après Poincaré),}$$

alors a est coercive dans $H_0^1(\Omega)$.

♣ $l(v)$ est continue ?

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} fv dx - \int_{\Omega} \nabla h \nabla v dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \max(\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|h\|_{H^1(\Omega)}) \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq c \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $c = \max(\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|h\|_{H^1(\Omega)})$, donc $l(v)$ est continue dans $H_0^1(\Omega)$.

Alors les hypothèses du lemme de Lax-Milgram sont vérifiées donc le problème $(\mathbf{3}.\mathbf{5})$ admet une solution unique $w \in H_0^1(\Omega)$, d'où le problème $(\mathbf{3}.\mathbf{4})$ admet une solution unique $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

3.2.2 Problèmes aux limites elliptiques avec les conditions de Neumann

Le cas homogène

♣ Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.6}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée.

Multiplions l'équation du problème (3.6) par $v \in H^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

d'après la formule de Green on a

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

le problème (**3.6**) équivalent à

$$\text{«Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in H^1(\Omega)\text{»},$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

et

$$l(v) = \int_\Omega f v dx.$$

En vérifiant les hypothèses de lemme de Lax-Milgram, on obtient
$a(u,v)$ est continue et coercive dans $H^1(\Omega)$.
$l(v)$ est continue dans $H^1(\Omega)$.

Alors le problème (**3.6**) admet une solution faible unique $u \in H^1(\Omega)$.

Le cas non-homogène

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.7}$$

tel que $f, g \in L^2(\Omega)$ sont des fonctions données.

Multiplions l'équation du problème (3.7) par $v \in H^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx,$$

d'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_\Omega f v dx$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} g v d\sigma = \int_\Omega f v dx$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma,$$

le problème (**3.7**) équivalent à

$$\text{«Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in H^1(\Omega)\text{»},$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

et

$$l(v) = \int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} gvd\sigma.$$

En vérifiant les hypothèses du lemme de Lax-Milgram

♣ a est continue ?

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u| \, |\nabla v| \, dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)} \\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} ,
\end{aligned}$$

donc a est continue.

♣ a est coercive ?

$$a(u,u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \text{ (d'après Poincaré),}$$

donc a est coercive.

♣ $l(v)$ est continue ?

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left|\int_\Omega fvdx + \int_\Omega gvd\sigma\right| \\
&\leq \int_\Omega |f| \, |v| \, dx + \int_{\partial\Omega} |g| \, |v| \, d\sigma \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \text{ (d'après Cauchy Schwartz)}
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Trace

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} , \text{ tel que } c > 0.$$

$$\Rightarrow |l\,(v)| \leq \max\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} , c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq k \|v\|_{H^1(\Omega)} ,$$

où $k = \max(\|f\|_{L^2(\Omega)} , c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)})$,

alors

$$|l(v)| \leq k \|v\|_{H^1(\Omega)} ,$$

donc $l(v)$ est continue.

D'après le lemme de Lax-Milgram le problème (3.7) admet une solution faible unique $u \in H^1(\Omega)$.

Chapitre 4

Méthode de degré topologique

Dans ce chapitre on va établir l'existence d'une solution faible pour le problème quasi-linéaire suivante

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) + h(x, u(x)) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{4.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné non vide de frontière lipchitzienne ($\Omega \in C_0^1$), λ est un paramètre positive et $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory bornée.

Dans l'espace de Sobolev $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, on considère la norme

$$\|u\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par une solution faible du problème (4.1), on signifier tout $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \lambda \int_\Omega u(x) v(x) dx - \int_\Omega h(x, u(x)) v(x) dx = 0,$$

pour tout $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Il est clair que le problème des valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{4.2}$$

a une valeur propre principale ((i.e.) la plus petit) $\lambda_1 > 0,$ qui est simple et caractérisée variationnellement par

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx}.$$

Soit X un espace de Banach réel et réflexive[1] et soit X^* son dual. Ici et dans la suite nous désignons par

$$\langle f, u \rangle = f(u)$$

[1]Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E", on dit que E est réflexif si $J(E) = E$".

la valeur de la forme linéaire $f \in X^*$ pour tout élément $u \in X$.

Si X est un espace de Hilbert, alors d'après le théorème de Représentation de Riesz

$$\langle f, u \rangle = (u, f) \,.$$

Le but principal est de prouver l'existence d'une solution faible de (4.1) par la méthode de degré topologique.

Plusieurs applications de cette méthode pour résoudre des problèmes aux limites non linéaires sont déjà disponibles.

4.1 Résultat principale

Il y a plusieurs outils pour obtenir les résultats d'existence des solutions des problèmes aux limites quasi-linéaires, le théorème suivant est notre outil principal pour prouver ces résultats.

Théorème 4.1 *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur borné, semi-continu et satisfait la condition (S_+) et soit $\mathcal{D} \subset X$ un ouvert borné non vide avec une frontière $\partial\mathcal{D}$ tel que $T(u) \neq 0$ pour $u \in \partial\mathcal{D}$, alors il existe un entier*

$$\deg(T, \mathcal{D}, 0)$$

appelé le degré de l'application T telle que

1. $\deg(T, \mathcal{D}, 0) \neq 0$ *implique qu'il existe un élément $u_0 \in \mathcal{D}$ tel que*

$$T(u_0) = 0.$$

2. *Si $\mathcal{D}$ est symétrique par-rapport à l'origine et T satisfait $T(u) = -T(-u)$ pour tout $u \in \partial\mathcal{D}$, alors $\deg(T, \mathcal{D}, 0)$ est un nombre impaire (et donc différent de zéro).*

3. ***(Les propriétés invariances d'homotopie)*** *Soit T_λ une famille des applications bornées et semi-continues satisfait la condition (S_+) qui dépend continument d'un paramètre réel $\lambda \in [0,1]$, et soit $T_\lambda(u) \neq 0$ pout tout $u \in \partial\mathcal{D}$ et $\lambda \in [0,1]$ alors $\deg(T_\lambda, \mathcal{D}, 0)$ est constant par-rapport à $\lambda \in [0,1]$.*

   En particulier, on a

$$\deg(T_0, \mathcal{D}, 0) = \deg(T_1, \mathcal{D}, 0).$$

Nous introduisons les opérateurs $J, G, S : \mathring{W}_2^1(\Omega) \to \left(\mathring{W}_2^1(\Omega)\right)^*$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\langle J(u), v\rangle &= \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx, \\
\langle G(u), v\rangle &= \int_\Omega u(x)v(x)dx, \\
\langle S(u), v\rangle &= \int_\Omega h(x,u(x))v(x)dx,
\end{aligned}$$

pour tout $u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

D'abord, nous donnons les propriétés des opérateurs J, G et S.

Lemme 4.1 *Les opérateurs J, G et S sont bien définis, nous avons aussi les propriétés suivantes :*

a) *J, G et S sont des opérateurs bornés et continus*[2] *(et aussi semi-continus).*

b) *G et S sont des opérateurs compacts.*

c) *J satisfait la condition (S_+).*

d) *J est inversible et son inverse est continu.*

Preuve. Le fait que J, G et S sont bien définis suit le procédure standard, a) et b) découlent de l'inégalité de Cauchy Schwartz, la limite de h et l'injection compacte $\mathring{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$[3].

Pour prouver c), on a

Soit $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup \langle J(u_n), u_n - u_0\rangle \leq 0,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle J(u_n), u_n - u_0\rangle = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
& 0 \geq \limsup_{n\to\infty} \langle J(u_n) - J(u_0), u_n - u_0\rangle \\
= & \lim_{n\to\infty} \sup \{\langle J(u_n), u_n - u_0\rangle - \langle J(u_0), u_n - u_0\rangle\} \\
= & \lim_{n\to\infty} \sup \left\{\int_\Omega \nabla u_n(x)\left(\nabla u_n(x) - \nabla u_0(x)\right)dx - \int_\Omega \nabla u_0(x)\left(\nabla u_n(x) - \nabla u_0(x)\right)dx\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty} \sup \left\{\int_\Omega \left(\nabla u_n(x) - \nabla u_0(x)\right)^2 dx\right\} \\
= & \lim_{n\to\infty} \sup \left\{\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 dx - 2\int_\Omega \left[|\nabla u_n(x)|\,|\nabla u_0(x)|\right]dx + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx\right\}
\end{aligned}$$

[2]On dit que $T : H \to H$ est un opérateur continue si $u_n \to u$ dans H alors $Tu_n \to Tu$ dans H .

[3]Si pour tout suite bornée dans E (pour la norme de E) il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F).

$$\geq \lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 \, dx - 2 \left[\left(\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx \right.$$
$$\left. + \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 \, dx \right\} \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz)}$$
$$\geq \lim_{n\to\infty} \sup \left[\|u_n\|^2_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} - 2 \|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \|u_0\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \right]$$
$$\geq \lim_{n\to\infty} \sup \left[\|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} - \|u_0\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \right]^2 \geq 0,$$

d'où

$$\|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \to \|u_0\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)}$$

et grâce à la convexité uniforme de $\mathring{W}^1_2(\Omega)$ on a

$$u_n \to u_0 \text{ dans } \mathring{W}^1_2(\Omega),$$

donc J satisfait la condition (S_+).

Enfin, nous prouvons d).

En effet, on a

$$\langle J(u) - J(v), u - v \rangle > 0 \text{ pour } u \neq v,$$

par conséquent, J est injectif.

Pour prouver que J^{-1} est continue, nous découlons par contradiction, supposons qu'il existe une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \to f$ dans $\left(\mathring{W}^1_2(\Omega)\right)^*$ et $\|J^{-1}(f_n) - J^{-1}(f)\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \geq \delta$ où $\delta > 0$.

Soit $u_n = J^{-1}(f_n)$ et $u = J^{-1}(f)$, il s'ensuit que

$$\|f_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \geq \langle f_n, u_n \rangle = \langle J(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2_{\mathring{W}^1_2(\Omega)},$$

(i.e.)

$$\|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \leq \|f_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)}.$$

Nous pouvons alors supposer que $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$ dans $\mathring{W}^1_2(\Omega)$, par la réflexivité de $\mathring{W}^1_2(\Omega)$, on obtient

$$\langle J(u_n) - J(\tilde{u}), u_n - \tilde{u} \rangle = \langle J(u_n) - J(u), u_n - \tilde{u} \rangle + \langle J(u) - J(\tilde{u}), u_n - \tilde{u} \rangle \to 0,$$

(i.e.)

$$J(u_n) \to J(u) \text{ dans } \left(\mathring{W}^1_2(\Omega)\right)^*,$$

donc on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle J(u_n) - J(\tilde{u}), u_n - \tilde{u} \rangle \geq \lim_{n\to\infty} \left[\|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} - \|\tilde{u}\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \right]^2 \geq 0,$$

(i.e.) $\|u_n\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)} \to \|\tilde{u}\|_{\mathring{W}^1_2(\Omega)}$, par conséquent $u_n \to \tilde{u}$ car $\mathring{W}^1_2(\Omega)$ est un espace de Banach uniformément convexe, donc J est continue et injective, alors $u = \tilde{u}$, contradiction. ■

Nous présentons notre résultat principal comme suite

Théorème 4.2 *Soit $\lambda < \lambda_1$, et soit $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory bornée, donc le problème* (4.1) *admet une solution faible.*

Preuve. Posons
$$T = J - \lambda G - S,$$
telle que J, G et S sont comme ci-dessus.

Alors l'existence d'une solution faible de (4.1) est équivalente à l'existence de la solution de l'équation
$$T(u) = 0. \tag{4.3}$$

Notre plan est d'utiliser l'argument de degré pour prouver l'existence de la solution de (4.3), d'après lemme (4,1), l'opérateur T est borné, semi-continu et satisfait la condition (S_+), l'opérateur J satisfait
$$\langle J(u), u\rangle = \|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)},$$
par ailleurs, J et G sont des applications impaires et homogènes[4].

Notre procédure est le suivant

L'existence d'une solution de (4.3) suivra
$$\deg(J - \lambda G - S, B(0; R), 0) \neq 0, \tag{4.4}$$
si nous trouvons une boule $B(0; R)$ pour que (4.4) est valable.

Pour prouver (4.4), nous utilisons les propriétés invariances d'homotopie du degré[5], et relier l'opérateur $J - \lambda G - S$ avec l'opérateur $J - \lambda G$ sur le bord de la boule $B(0; R)$ avec un rayon grand $R > 0$.

Nous utilisons finalement
$$\deg(J - \lambda G, B(0; R), 0) \neq 0 \ ^{6}, \tag{4.5}$$
alors, pour compléter la preuve nous devons trouver une homotopie admissible relier l'opérateur $J - \lambda G - S$ et l'opérateur $J - \lambda G$.

Nous définissons une homotopie
$$T_\tau(u) = J(u) - \lambda G(u) - \tau S(u),\ \tau \in [0, 1],\ u \in \mathring{W}_2^1(\Omega),$$
il suffit de prouver qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $\|u\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = R$ et $\tau \in [0, 1]$, on obtient
$$T_\tau(u) \neq 0. \tag{4.6}$$

[4] $J(tu) = tJ(u)$ et $G(tu) = tG(u)$ pour tout $t > 0$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

[5] Voir théorème (4.1).

[6] La valeur du degré dans (4.5) est un nombre impaire d'après le théorème $(4{,}1)$.

Supposons par contradiction qu'il n'existe aucun $R > 0$, (i.e.) nous pouvons trouver une suite $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{W}_2^1(\Omega)$ et $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ telle que $\|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \to \infty$ et

$$J(u_n) - \lambda G(u_n) - \tau_n S(u_n) = 0, \tag{4.7}$$

posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}}$, divisant (4.7) par $\|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}$ et utilisant l'effet que J et G sont homogènes pour obtenir

$$J(v_n) - \lambda G(v_n) - \tau_n \frac{S(u_n)}{\|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} = 0, \tag{4.8}$$

grâce à la réflexivité de $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ et la compacité de l'intervalle $[0,1]$, passons à une sous suite, nous pouvons supposer que

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \text{ dans } \mathring{W}_2^1(\Omega) \text{ et } \tau_{n_k} \to \tau \in [0,1].$$

Soit $M = \sup\limits_{x\in\Omega,\, s\in\mathbb{R}} |h(x,s)|$, alors d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz et l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|h(x,u_{n_k}(x))|}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} |v(x)|\,dx &\leq M \int_\Omega \frac{|v(x)|}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} dx \\
&\leq \frac{M}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} \left(\int_\Omega (1)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|v(x)|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \frac{M_1}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} \left(\int_\Omega (|\nabla v(x)|)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq M_1 \frac{\|v\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} \to 0 \text{ quand } k \to \infty,
\end{aligned}$$

où $M_1 > 0$ est un constant.

En résumé, puisque G est compact on obtient

$$\tau_{n_k} \frac{S(u_{n_k})}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} \to 0 \tag{4.9}$$

et

$$\lambda G(v_{n_k}) \to \lambda G(v) \tag{4.10}$$

dans $\left(\mathring{W}_2^1(\Omega)\right)^*$ quand $k \to \infty$.

Donc, en rassemblant (4.8)-(4.10), on obtient aussi que

$$J(v_{n_k}) \to \lambda G(v)$$

dans $\left(\mathring{W}_2^1(\Omega)\right)^*$, quand $k \to \infty$ (i.e.)

$$v_{n_k} \to J^{-1}(\lambda G(v))$$

dans $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ quand $k \to \infty$[7].

[7] N'oublier pas que J est inversible et son inverse est continu.

Puisque au même temps $v_{n_k} \rightharpoonup v$ dans $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, on a

$$v_{n_k} \to v \text{ dans } \mathring{W}_2^1(\Omega)$$

et

$$J(v) - \lambda G(v) = 0 \text{ dans } \left(\mathring{W}_2^1(\Omega)\right)^* \text{ pour un } \tau \in [0,1], \tag{4.11}$$

comme $\|v_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = 1$ pour tout $k = 1, 2, \dots,$ on a $\|v\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = 1$. Cependant, cela contredit l'hypothèse $\lambda < \lambda_1$.

Donc nous prouvons que (4.6) est vraie, (i.e.) l'homotopie T_τ est admissible. ■

4.2 Le cas $\lambda = \lambda_1$

Considérons le problème de la valeur propre

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}. \tag{4.12}$$

Il est connu que les valeurs propres de (4.12) forment une suite croissante

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots, \ \lambda_n \to \infty.$$

En réalité, il est aussi possible de montrer que λ_1 a la multiplicité 1[8], et la fonction propre correspondante $\varphi_1 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ est positive dans Ω.

De plus on a

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1(x)\nabla v(x)dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1(x)v(x)dx, \text{ pour tout } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{4.13}$$

Maintenant, nous formulons le théorème suivant :

Théorème 4.3 *Soit $h : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory bornée et satisfait les conditions suivantes :*

i) $\lim\limits_{s\to+\infty} h(x,s) = h(x,+\infty),\ \lim\limits_{s\to-\infty} h(x,s) = h(x,-\infty)$, *pour tout* $x \in \Omega$.

ii) $h(x,-\infty) < h(x,s) < h(x,+\infty)$, *pour tout* $x \in \Omega$ *et pour tout* $s \in \mathbb{R}$.

Alors, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda_1 u(x) + h(x,u(x)) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.14}$$

admet une solution faible si et seulement si

$$\int_\Omega h(x,-\infty)\varphi_1(x)dx < 0 < \int_\Omega h(x,+\infty)\varphi_1(x)dx. \tag{4.15}$$

[8] $\lambda_1 < \lambda_2$.

Preuve. Pour la partie de suffisance, nous suivrons un schéma similaire pour la preuve de théorème (4,2), mais maintenant $J, G, S : \mathring{W}_2^1(\Omega) \to \mathring{W}_2^1(\Omega)$ et

$$\begin{aligned}
(J(u), v)_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = (u,v)_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}\,, \\
(G(u), v)_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} &= \int_\Omega u(x)v(x)dx, \\
(S(u), v)_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} &= \int_\Omega h\left(x, u(x)\right) v(x)dx,
\end{aligned}$$

pour tout $u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Pour $\delta > 0$ très petit que $\lambda_1 + \delta < \lambda_2$, nous définissons une homotopie

$$T_\tau(u) = u - \lambda_1 G(u) - (1-\tau)\,\delta G(u) - \tau S(u), \tau \in [0,1]\,, u \in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

En effectuant toutes les étapes comme dans la preuve du théorème (4,2), nous arrivons à un analogue de (4.11) c'est-à-dire

$$v - \left[\lambda_1 + (1-\tau)\,\delta\right] G(v) = 0, \;\; \|v\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = 1 \text{ pour un } \tau \in [0,1]\,,$$

c'est une contradiction si $\tau \neq 1$, comme $\lambda_1 + (1-\tau)\,\delta$ n'est pas une valeur propre.

$$(\lambda_1 < \lambda_1 + (1-\tau)\,\delta < \lambda_2) \text{ et } v \neq 0.$$

Supposons que $\tau = 1$, (i.e.), $\tau_{n_k} \to 1$.

Donc, nous n'avons aucune contradiction, comme λ_1 est une valeur propre et

$$v - \lambda_1 G(v) = 0$$

admet une solution avec $\|v\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = 1$.

Maintenant, pour arriver à une contradiction et prouver que l'homotopie T_τ est admissible, nous devons modifier la dernière étape quand passant à la limite dans

$$v_n - \lambda_1 G(v_n) - (1-\tau_n)\,\delta G(v_n) - \tau_n \frac{S(u_n)}{\|u_n\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} = 0$$

et utilisons des propriétés spéciales de S, c'est-à-dire

$$u_{n_k} - \lambda_1 G(u_{n_k}) - (1-\tau_{n_k})\,\delta G(u_{n_k}) - \tau_{n_k} S(u_{n_k}) = 0$$

est équivalente à l'identité intégrale

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k}(x)\nabla w(x)dx = [\lambda_1 + (1-\tau_{n_k})]\,\delta \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx + \tau_{n_k}\int_\Omega h(x, u_{n_k}(x))w(x)dx. \quad (4.16)$$

En effet

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k}(x)\nabla w(x)dx - \lambda_1 \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx - (1-\tau_{n_k})\,\delta \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx - \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))w(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u_{n_k}(x)\nabla w(x)dx = \lambda_1 \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx + (1-\tau_{n_k})\,\delta \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx + \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))w(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u_{n_k}(x)\nabla w(x)dx = [\lambda_1 + (1-\tau_{n_k})\,\delta] \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx + \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))w(x)dx,$$

pout tout $w \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Prenons $w = \varphi_1$ dans (4.16) et en utilisant le fait que

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k}(x)\nabla \varphi_1(x)dx = \lambda_1 \int_\Omega u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx \ \text{(voir (4.13))},$$

on obtient

$$\int_\Omega \nabla u_{n_k}(x)\nabla w(x)dx = [\lambda_1 + (1-\tau_{n_k})\,\delta] \int_\Omega u_{n_k}(x)w(x)dx + \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))w(x)dx$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \int_\Omega u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx = [\lambda_1 + (1-\tau_{n_k})\,\delta] \int_\Omega u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx + \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))\varphi_1(x)dx$$

$$\Rightarrow (1-\tau_{n_k})\,\delta \int_\Omega u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx + \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))\varphi_1(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow (\tau_{n_k}-1)\,\delta \int_\Omega u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx = \tau_{n_k}\int_\Omega h(x,u_{n_k}(x))\varphi_1(x)dx, \tag{4.17}$$

comme ci-dessus, $v_{n_k} = \dfrac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}} \to v$ dans $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ et $v = k\varphi_1$ avec $k \neq 0$.

Supposons que $k > 0$, comme $v_{n_k} \to k\varphi_1$ dans $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ et par l'injection compacte $\mathring{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, on a $v_{n_k} \to k\varphi_1$ dans $L^2(\Omega)$.

D'où (au moins pour une sous-suite) $v_{n_k}(x) \to k\varphi_1 > 0$ presque par tout dans Ω, (i.e.) $u_{n_k}(x) \to +\infty$ presque par tout dans Ω.

Passant à la limite dans (4.17) et utilisant $\tau_{n_k} \to 1_-$ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue[9], on obtient

$$\int_\Omega h(x,+\infty)\varphi_1(x)dx = \lim_{k\to+\infty} (\tau_{n_k}-1)\,\delta \int_\Omega u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx \leq 0,$$

cela contredit la première inégalité dans (4.15).

[9]Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonction de $L^1(\Omega)$ converge presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $f_n \leq g$ p.p sur Ω, alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$.

De même, si $k < 0$, alors (au moins pour une sous-suite) $u_{n_k}(x) \to -\infty$ presque par tout dans Ω.

Passant à la limite dans (4.17), on obtient

$$\int_{\Omega} h(x,-\infty)\varphi_1(x)dx = \lim_{k\to-\infty} (\tau_{n_k} - 1)\,\delta \int_{\Omega} u_{n_k}(x)\varphi_1(x)dx \geq 0,$$

cela contredit la première inégalité dans (4.15).

Cela preuve que T_τ est admissible, et donc (4.15) est suffisant pour l'existence d'une solution faible de (4.14).

Pour prouver que (4.14) est également nécessaire nous découlons comme suite :

Soit u_0 une solution faible de (4.14), (i.e.)

$$\int_{\Omega} \nabla u_0(x)\nabla v(x)dx = \lambda_1 \int_{\Omega} u_0(x)v(x)dx + \int_{\Omega} h(x,u_0(x))v(x)dx,$$

pour tout $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Prenons $v = \varphi_1$, alors on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u_0(x)\nabla \varphi_1(x)dx = \lambda_1 \int_{\Omega} u_0(x)\varphi_1(x)dx + \int_{\Omega} h(x,u_0(x))\varphi_1(x)dx,$$

en utilisant (4.13), on obtient

$$\int_{\Omega} h(x,u_0(x))\varphi_1(x)dx = 0,$$

par l'hypothèse ii), on a

$$h(x,-\infty) < h(x,u_0(x)) < h(x,+\infty), \tag{4.18}$$

multipliant (4.18) par $(\varphi_1 > 0)$ et intégrant sur Ω, alors

$$\int_{\Omega} h(x,-\infty)\varphi_1(x)dx < 0 < \int_{\Omega} h(x,+\infty)\varphi_1(x)dx,$$

et nous avons le résultat. ■

De même que la démonstration du théorème (4.3), nous pouvons prouver ce qui suit.

Théorème 4.4 *Soit $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory bornée et satisfait les conditions suivantes :*

i) $\mathit{lim}_{s\to+\infty}\, h(x,s) = h(x,+\infty)$, $\mathit{lim}_{s\to-\infty}\, h(x,s) = h(x,-\infty)$, *pour tout* $x \in \Omega$.

ii) $h(x,+\infty) < h(x,s) < h(x,-\infty)$, *pour tout* $x \in \Omega$ *et pour tout* $s \in \mathbb{R}$.

Alors, le problème (4.14) *admet une solution faible si et seulement si*

$$\int_{\Omega} h(x,+\infty)\varphi_1(x)dx < 0 < \int_{\Omega} h(x,-\infty)\varphi_1(x)dx. \tag{4.19}$$

Remarque 4.1 *Il est possible de résoudre le problème* (4.14) *directement par la théorie du degré de Leray-Schauder aussi, puisque l'opérateur J dans la preuve du théorème* (*4.2*) *n'est qu'une identité sur* $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté trois méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles de type elliptique linéaires. Ces méthodes sont utilisées pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité. Nous avons commencé par la méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'estimation à priori. La seconde technique est la formulation variationnelle des problèmes aux limites développée par Lax-Milgram.

En fin nous avons appliqué la méthode de degré topologique de Leray-Schauder pour traiter un problème quasi-linéaire.

Notre objectif ultime après ce travail est de traiter d'autres méthodes plus compliqués nous permet d'établir l'existence et l'unicité.

Bibliographie

[1] **G.A. Afrouzi , A. Hadjian, S. Shakeri** and **M. Mirzapour** : Existence resultats for a quasilinear boundary value problem investigated via degree theory. University of Mazandaran. Babolsar. Iran. Journal of Nonlinear Analysis and Optimization. Vol. 3. No. 1, (2012), 2532 ISSN : 19069605 http ://www.math.sci.nu.ac.th.

[2] **H. Brezis** : Analyse fonctionelle. Théorie et application. Editions Masson. Parie 1983.

[3] **R. Courant** et **D. Hilbert :** Methoden dermathematischen physik. Zweiter Bend. Berlin, springer 1937.

[4] **A.A. Dezin** : Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels, uspkhi. Math. Nauke, 14, n°3.87.1959.

[5] **J. Droniou** : Degrés topologiques et applications. UMR CNRS 5149. CC 051. Université Montpellier II. Place Eug ene Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5. France, 20/06/2006.

[6] **T. Gallouët, R. Herbin** : Equations aux dérivées partielles, université Aix Marseille, 10 novembre 2016.

[7] **L. Garding :** Cauchy problem for hyperbolic equation, university of Chicago. Lecture notes, 1957.

[8] **L. Garding :** Dirichlet's problem for elliptic pential differential equation. Math. Ssand., t.1, 1953.

[9] **O. Kavian** : Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. (French) [Introduction to critical point theory and application to elliptic problems] Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathématiques & Applications], 13. Springer-Verlag. Paris, 1993.

[10] **O. A. Ladyzhenskaya** : The boundary value problems of Mathematical physics. Springer-Verlag. New York Heidelberg Tokyo.

[11] **J. Leray.** et **J. Schauder :** Topologie et équations fonctionnelles. Ann, scien, de I'E :S. 3^{e} série, tome 51(1934).

[12] **J. L. Lions :** Problèmes aux limites, II. C. R. Acad. Sc. Paris. t. 1953.

[13] **L. Schwartz :** Les travaux de Garding sur les équations aux dérivées partielles elliptique séminaire bourbaki, t, 4, 1951/12.