Table des matières

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudiée quelques problèmes de types parabolique par la méthode des inégalités énergétiques.

Le premier problème est l'équation de la chaleur, le deuxième une équation parabolique sous forme générale, et le troisième un problème mixtes d'ordre supérieur impaire avec des conditions non locales (conditions intégrale).

Abstract

The objective of this work is to study some Problems of the parabolic type by the energy inequalities method.

The first problem is the heat equation, the second is a parabolic equation in the general form, and the third is a mixed problem of superior order with nonlocal conditions (integral conditions).

Notations

E, F	Espaces vectorielles.
$\|.\|$	Une norme.
E^*	Espace dual.
$(.,.)$	Un produit scalaire
$F^\perp$	L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F.
L^p	L'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de fonctions de puissance p-iéme intégrable.
$u_n \xrightarrow{f} u$	Convergence forte.
$u_n \rightharpoonup u$	Convergence faible.
$\dfrac{\partial^{\|k\|}u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$	Dérivée généralisée.
W_m^l	L'ensemblede tout les fonction $u \in L^m$ ayant des dérivées généralisées jusquà l'ordre l (inclus)dans L^m.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent de manière récurrente dans la modélisation des problèmes réels. Elles traduisent beaucoup des lois de la physique, mécanique thermodynamique ....

Elles interviennent également dans beaucoup d'autre domaines comme la chimie pour modélise les réactions, l'économie pour étudier le comportement des marchés...

Les équations aux dérivées partielles constituent encore aujourd'hui un sujet de recherche très actif pour la bonne et simple raison que d'une manière générale il est très difficile, surtout pour démontrer que le problème admet une unique solution.

Les conditions standard (Dirichlet, Neumann et le type Robin) qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours suffisantes car elles dépendent du contexte physique dont les données peuvent être mesurées au bord du domaine physique.

Beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par des problèmes aux limites non classiques qui relient les valeurs de la fonction inconnue sur la frontière et à l'intérieur du domaine comme la condition intégrale sur le domaine spatial d'une fonction de la solution cherchée. Les conditions aux limites non locales apparaissent principalement lorsque les données sur la frontière ne peuvent pas êtres mesurées directement, mais seulement leurs valeurs moyennes sont connues. Plus précisément, dans certains cas, il n'est pas possible de prescrire la solution u (pression, température, ...) ponctuellement, parce que la valeur moyenne de la solution peut être mesurée le long de la frontière ou sur une partie de celui-ci.

La signification physique des conditions non locales, telle qu'une moyenne, la masse totale, moments, etc, a servi comme cause fondamentale de l'intérêt considérable de ce genre de problèmes aux limites.

Les problèmes non locaux, spécialement avec conditions intégrales sont généralement rencontrées en génie chimique, la transmission de chaleur, la physique des plasmas, thermoelsticity.

Actuellement, les méthodes fonctionnelles sont devenues essentielles dans l'étude des problèmes mathématiques théoriques et appliqués. Le rôle principal des méthodes fonctionnelles, est de donner de meilleurs résultats par rapport à ceux obtenus par les techniques classiques, en conséquence, il y a eu des progrès considérables dans l'étude des équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Banach ou de Hilbert.

L'une des méthodes fonctionnelle utilisées dans l'étude des problèmes mixtes est la méthode des d'analyse fonctionnelle qu'on a développé et appliqué pour des problèmes aux limites dans cette mémoire.

La méthode d'analyse fonctionnelle dite aussi méthode des estimations a priori et méthode des inégalités énergétiques. Cette méthode est basée sur les idées de Dezin [3] et développée par Ladyzenskaya [4-5-6], où elle a été utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique.

Le point remarquable de cette méthode d'analyse fonctionnelle est qu'on peut tirer le théorème d'existence de la solution du problème posé, à partir du théorème d'unicité.

Les points difficiles de cette méthode résident dans le choix des espaces fonctionnels E et F et dans le choix du multiplicateur Mu.

Le programme suivant décrit les grandes lignes de la méthode des inégalités énergétiques :

1) On réécrit le problème posé sous la forme opérationnelle :

$$Au = f,$$

où A est l'opérateur engendré par l'équation et les conditions aux limites.

2) On démontre l'estimation à priori :

$$\|u\|_E \leq C \|Au\|_F , \tag{1}$$

pour tout $u \in D(A)$ où E et F sont deux espace convenablement choisis.

A partir de l'inégalité (1), on déduit l'unicité de la solution si elle existe. La démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u, ses dérivées et ses primitives. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F. Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F on construit la fermeture $\overline{A}$ de l'opérateur A ; et la solution de l'équation

$$\overline{A}u = \mathcal{F} \quad \mathcal{F} \in F,$$

est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D\left(\overline{A}\right)$ et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R\left(\overline{A}\right)$ de l'opérateur $\overline{A}$. Comme l'image de l'opérateur $\overline{A}$ est fermée dans F et que $R\left(\overline{A}\right) = \overline{R(A)}$. Pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$, il suffit d'établir la densité de $R(A)$ dans F qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi les quelles nous citons le choix des espaces fonctionnels et le choix du multiplicateur Mu.

L'objectif de cette mémoire est de donner un développement important de la méthode des inégalités énergétiques dans l'étude des problèmes aux limites, engendrées par des équations parabolique pour démontrer l'unicité de la solution

Notre mémoire se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions de la théorie des espaces fonctionnels et à la théorie des opérateurs, on citera aussi les inégalités utilisées dans cette mémoire et quelque théorème.

Dans le deuxième chapitre, on fait une synthèse et des idées sur la méthode des inégalités énergétiques.

Dans le troisième chapitre on traite deux problèmes parabolique le premier est l'équation de la chaleur et le deuxième une équation parabolique sous forme générale en appliquant la méthode des inégalités énergétiques, on démontre l'existence et l'unicité de la solution.

Et le quatrième chapitre, comporte des résultats obtenus par S.Mesloub, R.Mazoud Les auteurs ont traités un problème mixtes avec des conditions non locales pour une équation parabolique d'ordre supérieur impaire avec des conditions intégrale :

Ils utilisent les inégalités énergétique pour démontre l'unicité de la solution puis Ils démontrent l'existence de la solution.

On termine ce mémoire par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Les espaces de Banach et les espaces de Hilbert

Dans tout ce chapitre $\mathbb{k}$ est le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Un espace vectoriel E est dite espace normée si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|$ (norme de u) vérifiant les axiomes*

a) $\|u\| \geq 0$ $\|u\| = 0$ *si et seulement si* $u = 0$.

b) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad$ (*Inégalité triangulaire*) .

Définition 1.2 *Dans un espace normée $(E, \|.\|)$, on introduit la métrique (distance entre u et v) par*

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Définition 1.3 *La convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$d'éléments de E vers u dans la norme de E (convergence forte) est définie par*

$$\|u_n - u\| \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

et on not par $u_n \xrightarrow{f} u$.

Définition 1.4 *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$d'éléments de E est dite suite de Cauchy si*

$$\|u_p - u_q\|_E \to 0 \text{ quand } p, q \to \infty,$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p > N_\varepsilon, \forall q > N_\varepsilon \Longrightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.5 *On dit qu'un espace vectorielle normé E est un espace de Banach s'il est complet, c.à.d que toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est une suite convergente dans E.*

Exemple 1.1 *On définirt l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ par*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ u \in \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable} \ / \ \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \\ \textit{avec } 1 &\leq p < \infty. \end{aligned}$$

Lorsque $p = +\infty$ on dit que f est essentiellement bornée ou encore que $f \in L^\infty(\Omega)$ si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q $|f| \leq C$ p.p..sur Ω.

La norme dans $L^p(\Omega)$ donnée par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ \textit{avec } 1 \leq p < +\infty, \tag{1.1}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C \in \mathbb{R}_+; |u| \leq C \ \ p.p..\}.$$

Définition 1.6 *On appelle un produit scalaire sur E et on note $(.,.)$, tout forme sésquilinéaire, hermitienne, définie positive définir de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$, c.à.d.*

(1) Linéarité à gauche : $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

(2) Hermitienne : $\forall x, y \in E, (x, y) = \overline{(y, x)}$.

(3) Définie positive : $\forall x \in E - \{0\}, (x, x) > 0$ et $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Naturellement si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Corollaire 1.1 *On peut définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.7 *On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire.*

Proposition 1.1 *Pour chaque u et v d'un espace préhilbertien H, on a l'inégalité de Cauchy (Cauchy-Bunyakovski)*

$$\left|(u,v)_H\right| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H \, .$$

Théorème 1.1 *Pour qu'un espace normé E soit préhilbertien il faut et il suffit que sa norme satisfasse à l'identité du parallélogramme c.à.d.*

$$\|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2\left(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2\right) \quad \forall x, y \in E.$$

Définition 1.8 *Un espace de Hilbert $(H, (.,.))$ est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire. Plus naturellement on conclut du théorème ci-dessus un espace de Hilbert est un espace de Banach sa norme satisfait l'identité du parallélogramme.*

Exemple 1.2 *Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\ (u,v)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega uv \; dx. \end{aligned}$$

On peut considérer comme sous espaces dans $L^p(\Omega)$ les espaces

a) $C^\infty(\Omega)$.

b) L'ensemble de tous les polynômes.

c) $C_0^\infty(\Omega)$.

Définition 1.9 *En plus de la convergence forte dans H on considère aussi la convergence faible ou converge au sens de produit scalaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, on dit qu'elle converge faiblement vers u si*

$$(u_n - u, v)_H \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ pour tout } v \in H \; ,$$

et on note par : $u_n \to u$

Proposition 1.2 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge au norme vers* u*, alors elle converge faiblement vers* u*. L'inverse n'est pas vrai au général. Cependant si* $u_n \to u$ *et* $\|u_n\| \to \|u\|$*, alors dans ce cas* $u_n \xrightarrow{f} u$*.*

1.2 Quelques inégalités importantes

1. Inégalité de Cauchy

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

vraie pour toute forme quadratique non négative $a_{ij}\xi_i\xi_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}$, et pour $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$

sont les réels arbitraires. a_{ij} sont en général des fonctions.

2. Inégalité de Cauchy avec ε

$$|a.b| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \tag{1.3}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, b, a arbitraire (réels).

3. Inégalité de Cauchy généralisée (Inégalité de Young)

$$|a.b| \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p}\left|\frac{b}{\varepsilon}\right|^{\frac{p}{p-1}} \text{ pour tout } p > 1. \tag{1.4}$$

4. Inégalité triangulaire pour l'espace $L^2(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega (u+v)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

où $u, v \in L^2(\Omega)$.Une généralisation (1.5) donnant l'inégalité triangulaire pour les éléments de $L^p(\Omega)$

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \text{ pour } p \geq 1. \tag{1.6}$$

5. Inégalité de Hôlder

$$\int_{\Omega} u.v \; dx \leq \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a $u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ avec $u_i \in L^2(\Omega)$, $i = \overline{1, n}$, l'inégalité de Cauchy prend la forme

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \; dx \right| \leq \left| \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \right|. \tag{1.8}$$

Comme généralisation de (1.7) on a l'inégalité de Hôlder

$$\left| \int_{\Omega} u.v \; dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} |u \; |^p \, dx \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_{\Omega} |u \; |^q \, dx \right|^{\frac{1}{q}}, \text{ pour } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.9}$$

ou $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Pour tout $1 < p < +\infty$:on a $(L^p)^* = L^q$.

Il est vrais que aussi dans le cas des fonctions vectorielles $u = (u_1, u_2, .., u_n)$

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \; dx \right| \leq \left| \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \; dx \right)^{\frac{1}{q}} \right|. \tag{1.10}$$

1.3 Espace de Sobolev

1.3.1 Des définitions

Dérivées généralisées

On sait que pour deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ indéfiniment différentiables dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, c'est l'une d'elle par exemple $v \in C_0^\infty(\Omega)$, on à l'égalité

$$\int_{\Omega} \left\{ u \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{|k|} v \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\} dx = 0 \text{ où } k = (k_1, \ldots, k_n) \text{ avec } |k| = k_1 + \cdots + k_n$$

que l'obtient à l'aide de $|k|$ intégration par parties.

Définition 1.10 *On appelle dérivée généralisée* $\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}$ *d'une fonction* $u(x)$ *intégrable dans tout* $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, *la fonction* $W_{k_1 \ldots k_n}$ *si pour tout* $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, *on à l'égalité*

$$\int\limits_{\Omega} \left(u. \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}} + (-1)^{|k|} v W_{k_1.k_2..k_n} \right) dx = 0,$$

la fonction $W_{k_1 \cdots k_n}$ sera notée par

$$\frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

Cette notion de dérivée généralisé est une extension de la dérivée classique les D.G conservent beaucoup (mais pas toutes) de propriétés des D.G (somme, produit, ordre,...)

Cependant si $u(x)$ à des dérivées généralisées d'ordre inférieur à $|k|$ de sous type $|k| = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$ et si $\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty$ $(p > 1)$ (existe).

Alors dans ce cas u à toute ζ dérivées généralisées d'ordre inférieures à $|k|$ appartient à $L^p(\Omega)$.

Définition 1.11 $W_m^l(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de tout les fonction* $u \in L^m(\Omega)$ *ayant des dérivées généralisées jusqu'à l'ordre* l *(inclus) dans* $L^m(\Omega)$.*Si on munit* $W_m^l(\Omega)$ *de la norme suivante*

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,\Omega}^{(l)} &= \|u\|_{W_m^l(\Omega)} \\ &= \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{k=0}^{l} \sum_{|k|} \left| \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} \right|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

on obtient un espace de Banach.

$\overset{\circ}{W}{}_m^l$ *est le sous espace de* $W_m^l(\Omega)$ *constitués de toutes les fonctions* $u \in W_m^l(\Omega)$ *et en support compact dans* Ω.

L'espace $\overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ *joue un rôle très important pour la résolution des problèmes aux limites des*

E.D.P de second ordre de tous types. Le produit scalaire dans $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *et* $W_2^1(\Omega)$ *est défini par*

$$\begin{aligned}(u,v)_{2,\Omega}^{(1)} &= (u,v)_{W_2^1(\Omega)} \\ &= \int_\Omega (uv + u_x v_x)\,dx \\ &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u_x, v_x)_{L^2(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}u_x v_x &= \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i}, \\ v_x^2 &= \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2, \\ u_x^2 &= \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2.\end{aligned}$$

1.3.2 Quelques propriétés

Supposant que $\Omega \underset{borné}{\subset} \mathbb{R}^n$,on remarque que $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$, on à l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2 dx &\leq C_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx. \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_\Omega^2 \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Remarque 1.1 $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_m^l(\Omega)$ *et* $v \in W_2^1(\Omega)$ *on a alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\ dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.13}$$

Formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\ dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx + \int_{\partial\Omega} u.v \cos(\eta, x_i)\, d\sigma, \tag{1.14}$$

où η est le vecteur unitaire de la extérieure à $\partial\Omega$; $d\sigma$ est l'élément de surface de $\partial\Omega$.

Inégalité importante

$$\int_{\partial\Omega} |u|\, d\sigma \leq c\int_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + |u|\right) dx, \tag{1.15}$$

elle est vraie $\forall u \in W_1^1(\Omega)$ et $\partial\Omega$ (régulière). Si on pose $u = v^2$ où $v \in W_2^1(\Omega)$, alors $u \in W_1^1(\Omega)$ et on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \leq c_1 \int_{\Omega} \left\{|v|\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + v^2\right\} dx \leq \int_{\Omega} \left(\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + c_\varepsilon v^2\right) dx, \tag{1.16}$$

pour un ε positif arbitraire.

Remarque 1.2 *On prouve que si $v \in W_2^1(\Omega)$, alors $u \in W_1^1(\Omega)$*

$$\begin{aligned}
u &\in W_1^1(\Omega) \Longrightarrow u \in L^1(\Omega) \;\; et \;\; \frac{\partial u}{\partial x} \in L^1(\Omega). \\
\int_{\Omega} |u|\, dx &= \int_{\Omega} v^2 dx \\
&< \infty \Longrightarrow u \in L^1(\Omega). \\
\int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx &= \int_{\Omega} \left|2\frac{\partial v}{\partial x} v\right| dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx + \int_{\Omega} |v|^2\, dx \\
&< +\infty \Longrightarrow u \in L^1(\Omega), \;\; alors\ u \in W_1^1(\Omega).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} &= \int\limits_{\partial\Omega} v^2 d\sigma \\
&\leq 2c\int\limits_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| |v| + \frac{1}{2}v^2 \right) dx \\
&\leq 2c\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 \right) dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \left(c\varepsilon^2 \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \left(\frac{c}{\varepsilon^2} + c\right) v^2 \right) dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \left(c \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + c_\varepsilon v^2 \right) dx \\
&\leq k \left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \left\|v^2\right\|^2_{L^2_{(\Omega)}} \right) \\
&= k \left\|v^2\right\|^2_{W^1_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Lemme 1.1 *de Gronwelle*

Si $f(\tau), g(\tau)$ et $h(\tau)$ sont des fonction positives et $f(\tau), g(\tau)$ sont intégrable et $h(\tau)$ non décroissante, alors

$$\int\limits_0^\tau f(t)dt + g(\tau) \leq h(\tau) + c\int\limits_0^\tau g(t)dt,$$

implique

$$\int\limits_0^\tau f(t)dt + g(\tau) \leq c\exp(c\tau)h(\tau).$$

1.4 Quelques propriétés d'opérateurs bornées et fonctionnelles linéaires dans un Hilbert

Une fonctionnelle linéaire l sur un Hilbert réel H est une fonction linéaire numérique et continue $l(u)$

$$\begin{aligned} l \quad &: \quad H \to \mathbb{R}. \\ u \quad &\to \quad l(u). \end{aligned}$$

l est linéaire

$$l(\lambda u_1 + \beta u_2) = \lambda l(u_1) + \beta l(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in H \ \text{ et } \ \lambda, \beta \text{ réels constante.} \tag{1.17}$$

l est continue veulent dire

$$u_n \to u \Longrightarrow l(u_n) \to l(u).$$

l est bornée veulent dire

$$|l(u)| \leq c \, \|u\|_H \quad \forall u \in H, \qquad c \geq 0. \tag{1.18}$$

Théorème 1.1 *Le théorème de Reisz affirme qu'on peut toujours représenter un fonctionnel linéaire par un produit scalaire*

$$l(u) = (u, v)_H \quad \forall u \in H,$$

d'après l'inégalité de Cauchy la norme $\|l\| = \|v\|$ *.Il est claire que* $\|l\| = \sup\limits_{u \in H \setminus \{0\}} \dfrac{|l(u)|}{\|u\|}$, *est la plus petite des constantes* c *pour les quelle* (1.18) *est satisfaite.*

1.4.1 Les opérateurs

1.Opérateurs linéaires sur H :

Un opérateur A défini sur un ensemble $\mathbb{D}(A) \subset H$ fait aussi à chaque $u \in \mathbb{D}(A)$ un certain élément $v \in H$ (i.e)

$$Au = v.$$

A est linéaire si

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A(u_1) + \lambda_2 A(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{D}(A).$$

A bornée si

$$\exists c > 0, \text{ telle que } \forall u \in \mathbb{D}(A) \;\; \|Au\| \leq c \|u\|, \text{ sur } \mathbb{D}(A). \tag{1.19}$$

A peut être prolongé d'une manière continue sur la fermeture de A (i.e.) $\overline{\mathbb{D}(A)} = H$ (1.19) reste toujours vrai pour $u \in \overline{\mathbb{D}(A)}$.

Si $\overline{\mathbb{D}(A)} \neq H$, on peut prolonger A en différentes manière à tout H et (1.19) reste toujours valable.

Remarque 1.3 *On peut rencontrer plusieurs opérateurs bornés dans H*

$$\|A\| = \sup_{u \in H/\{0\}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \text{ est la norme de } A.$$

Deux classes d'opérateurs bornés sont intéressantes.

2. L'opérateurs auto-adjoints

Un opérateur A est dite auto-adjoint si

$$\forall u, v \in H \;\; \text{on a } (Au, v) = (u, Av). \tag{1.20}$$

Le spectre de cet opérateur est réel et est continue dans $[-\|A\|, \|A\|]$.

3. L'opérateurs complètements continues

Un opérateur complètement continue est un opérateur qui transformé un borné en un compacte. Le spectre de tel opérateur est formé du point zéro est d'un ensemble dénombrable de valeur propre ayant les seules points d'accumulation le point zéro. Chacun de ⌉ points d'accumulation, sauf le point zéro a un ordre de multiplicité fini.

4. Opérateurs non-bornés

Soit A un opérateur non-bornés sur un Hilbert H. ($A : H \to H$) ce type de opérateurs ne sont pas bornés (définis) sur tout H. (i.e.) dans (1.19) la constante c peut ne pas exister.

Soit $D(A) \subset H$ domaine de définition de A

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad \underset{H}{\underset{\cap}{D(A)}} \to \underset{H}{\underset{\cap}{R(A)}}. \text{ Ces opérateurs sont linéaires, ils vérifiant} \\ A(\lambda u + \beta v) \quad &= \quad \lambda A(u) + \beta A(v). \forall u, v \in H \text{ et } \lambda, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nous allons en générales considérer les opérateurs ayant $\overline{D(A)} = H$.

Remarque 1.4 *On s'intéresse aux opérateurs différentiels pour chaque expression différentielle correspond plusieurs opérateurs définis en indiquent leurs domaines de définition.*

Par exemple : L'expression différentielle $\mathcal{L}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, $x \in [0,1]$. Prenons $H = L^2([0,1])$. On peut associer avec cette expression différentielle l'opérateur

$$\begin{gathered} A : H \to H \text{ défini sur } C_0^\infty \\ L^2(\Omega) \to L^2(0,1) \end{gathered}$$

à support compact dans l'intervalle $[0,1]$. Donc pour $u \in D(A) = C_0^\infty(0,1)$. L'opérateur A est défini par

$$Au = \frac{d^2u}{dx^2} \quad A : C_0^\infty \to H.$$

On peut encore associer a $\mathcal{L}u$ un autre opérateur non borné $\tilde{A}$ défini sur $C^\infty([0,1])$

$$\tilde{A}u = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \tilde{A} : C^\infty \to L^2(0,1).$$

On a $D(A) \subset D\left(\tilde{A}\right)$ et $Au = \tilde{A}u$, $\forall u \in D(A)$ dans ce cas on dit que $\tilde{A}$ est une extension de A. Il est claire que le domaine de définition de l'opérateur A (opérateur associer à l'expression différentielle $\mathcal{L}u$) peut être choisi d'une infinité de manière et chaque foi en obtient un opérateur ayant de différant propriétés. Les deux opérateurs A et $\tilde{A}$ ont les propriétés différentes par exemple A vérifie

$$(Au, v) = (u, Av) \text{ où } u, v \in D(A). \tag{1.21}$$

En effet

$$\begin{aligned}
(Au, v)_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v \; dx \\
&= \int_0^1 u \frac{d^2v}{dx^2} \; dx \\
&= \int_0^1 u.Av \; dx \\
&= (u, Av)_{L^2(0,1)} \, .
\end{aligned}$$

Pour l'opérateur $\tilde{A}$, on a

$$\left(\tilde{A}u, v\right)_{L^2(0,1)} = \left(u, \tilde{A}v\right)_{L^2(0,1)} + \frac{du}{dx} v \mid_0^1 - u \frac{dv}{dx} \mid_0^1 \quad \forall u, v \in D\left(\tilde{A}\right), \tag{1.22}$$

on remarque que A à la propriété de symétrie, par contre $\tilde{A}$ ne l'a pas.

Remarque 1.5 *Les opérateurs symétriques possèdent un grand nombre de propriétés, et la théorie des opérateurs symétriques a été extensivement développer et utiliser pour des classes spécifiques d'opérateurs différentiels. L'une des plus importantes conceptions et celle des opérateurs auto-adjoint.*

Un opérateur non-borné A est dite auto-adjoint s'il est symétrique (i.e.)

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D(A), \tag{1.23}$$

et si l'identité

$$(Au, v) = (u, w), \tag{1.24}$$

où v, w sont fixées et $u \in D(A)$ arbitraire implique que $v \in D(A)$ et $w = Av$. En d'autre termes, A est auto-adjoint si sont adjoint A^* a le même domaine de définition que A et $A^* = A$ sur $D(A)$.

L'identité (1.24) *définit le domaine de définition de A^* ainsi que ces valeurs sur le domaine. Notamment les éléments pour tout $u \in D(A)$, constituant $D(A^*)$, avec $A^*v = w$.*

Remarque 1.6 *Dans la plus part des cas des opérateurs différentiels il est facile de vérifier la validité ou non validité de* (1.23) *(à l'aide des intégrations par parties).*

Remarque 1.7 *Il est en général considérablement difficile de décrire le domaine de définition de* A^* *pour le cas des opérateurs différentiels.*

Pour l'opérateur $\dfrac{d^2}{dx^2}$ *nous avons vu qu'il est symétrique (*A *est symétrique). [Il est facile de voir que* A *n'est pas auto-adjoint].*

La relation (1.23) *est satisfaite pour* A *non seulement pour* u *et* $v \in D(A)$ *mais aussi pour* $u \in D(A)$ *et* $v \in D(A^*)$. *Cela montre que* $D(A^*)$ *est plus large que* $D(A)$. *La question que se pose est-que* A *peut-être prolongé pour qu'il soit auto-adjoint ?*

Il est possible de faire ça. Et en une infinité de manières. La théorie des opérateurs donne le premier étape pour une telle extension (c'est le principe de fermeture). On procède de la manière suivante :

Soit A *un opérateur définit sur* $D(A) \subset H$. *On ajoute à* $D(A)$ *les éléments* u *qui sont limites des suites* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *de* $D(A)$ *pour lequel* Au_n *converge vers un élément* v. *On définit* $v = \overline{A}u$ *où* $\overline{A}$ *est la fermeture de* A. *L'ensemble* $D(A)$ *avec tous les éléments* u *constituant* $D\left(\overline{A}\right)$.

Remarque 1.8 *Il existe des opérateurs non bornés que ne sont pas fermable (non linéaire).*

Il n'est pas difficile de montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que un opérateur non-borné admet une fermeture et que $D(A^*)$ *soit dense dans* H.

Remarque 1.9 *En générale la procédure de la fermeture des opérateurs différentiels n'est pas simple (cas de E.D.P). En particulier* A *défini par* $\mathcal{L}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ *admet une fermeture. La fermeture* $\overline{A}$ *admet comme domaine de définition* $D\left(\overline{A}\right) = \mathring{W}_2^1(0,1)$. *Cette fermeture peut être achevée, si on ajoute a* $D(A)$ *l'ensemble des fonctions continue différentiables* $u(x)$ *s'annulant en* $x = 0$ *et* $x = 1$ *pour lesquelles* $\dfrac{du}{dx}$ *sont absolument continues et s'annulant en* $x = 0$ *et* $x = 1$ $\left(\dfrac{du}{dx} \in L^2(0,1)\right)$ *donc*

$$\begin{aligned} D\left(\overline{A}\right) &= \left\{u \ / u \in L^2(0,1)\,,\ \frac{du}{dx} \in L^2(0,1)\,,\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \ \textit{et} \ \frac{du}{dx}|_{x=0} = \frac{du}{dx}|_{x=1} = 0\right\} \\ &= \mathring{W}_2^1(0,1). \end{aligned}$$

$\overline{A}$ *est l'opérateur donnant les dérivées généralisées d'ordre 2*

L'opérateur $\overline{A}$ *défini sur* $D\left(\overline{A}\right) = \mathring{W}_2^2(0,1)$ *étant l'opérateur qui calcule les dérivées second généralisées (sens faibles) (ou sens des distribution).*

On va citer deux extensions de $\overline{A}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ *à* $D\left(\overline{A}\right) = \mathring{W}_2^2(0,1)$. *La première extension à la forme :* $\hat{A}u = \dfrac{d^2u}{dx^2}$ *où* $D\left(\hat{A}\right)$ *est l'ensemble des fonctions* $W_2^2(0,1)$ *s'annulant en* $x = 0$ *et* $x = 1$ *ici*

$$W_2^1 = \left\{ u \ /u \in L^2(0,1), \frac{du}{dx} \in L^2(0,1) \right\}.$$

Une telle extension est connectée à ce qu'on appelle premier problème aux limite pour

$$\mathcal{L}u = \frac{d^2u}{dx^2},$$

c'est le problème de déterminer la solution $u(x)$ *de l'équation*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{d^2u}{dx^2} \\ &= f(x), \end{aligned} \tag{1.25}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = 0, \ u(1) = 0. \tag{1.26}$$

Le problème $(1.25) - (1.26)$ *admet une solution unique* $u \in D\left(\hat{A}\right)$ *pour tout* $f \in L^2(0,1)$ *arbitraire.*

Remarque 1.10 *L'extension* $\hat{A}$ *de l'opérateur original* A *correspond au problème* $(1.25)-(1.26)$ *si on n'a pas prolongé* A*, on n'aura pas un bon théorème d'existence et d'unicité, et dans ce cas l'équation* $Au = f$ *peut ne pas avoir une solution dans* $D(A)$ *pour* $f \in L^2(0,1)$ *arbitraire.*

Remarque 1.11 *D'autre problème aux limites de l'équation* (1.25) *nécessite d'autres extensions. Par exemple à l'équation* (1.25) *on associée les conditions aux limites*

$$u\mid_{x=0} = 0, \ \frac{du}{dx}\mid_{x=1} = 0. \tag{1.27}$$

Alors on doit prolonger l'opérateur A *comme étant l'opérateur agissant sur* $W_2^2(0,1)$ *vérifiant les conditions* (1.27)*. Cette extension* $\breve{A}$ *est un opérateur auto-adjoint. L'équation* $\breve{A}u = f$ *est résoluble dans* $D(\breve{A})$ *pour* $f \in L^2(0,1)$ *où*

$$D(\breve{A}) = \left\{ u \ /u \in W_2^2(0,1), u\mid_{x=0}= 0 \ , \frac{du}{dx}\mid_{x=1}= 0 \right\}.$$

Chapitre 2

Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les E.D.P dans les espaces fonctionnels

Introduction

Le but de ce chapitre est de faire la synthèse de certaine idée et méthodes qui ont connu une grande application pour la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution généralisées pour les E.D.P en particulier les équations parabolique.

Ces idées et méthodes sont appelées méthodes d'analyse fonctionnelle qui ont été imitée par Sobolev et Friedricks.

Nous utilisons des exemples et des modèles simples pour expliquer cette méthode en suite des indications pour la généralisation.

2.1 Plant de l'étude de l'équation $\mathcal{L}u = f$

Soient E et F deux espaces euclidien de dimensions finies $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in F$ muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (u, w)_E &= \sum_{i=1}^{n} u_i w_i, \\ (u, u)_E &= \|u\|_E^2, \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \qquad \left(\|u\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

ainsi que pour l'espace F.

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire de $E \to F$, il est défini par la matrice $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\mathcal{L}u = v \quad v_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} u_i \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ddots & & & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Notre but est d'étudier l'équation

$$\mathcal{L}u = f, \tag{2.1}$$

on doit trouver les conditions pour lesquelles l'équation (2.1) admet une solution (existence) quelque soit $f \in F$ et une seule (unicité).

Nous utilisons le schéma suivant.

Lemme 2.1 *Pour que l'équation (2.1) admet une seule solution si et seulement si l'équation homogène*

$$\mathcal{L}u = 0 \tag{2.2}$$

ait la solution triviale.

Lemme 2.2 *La solution de l'équation (2.1) est unique si on a*

$$\|u\|_E \leq C \|\mathcal{L}u\|_F \tag{2.3}$$

pour tout $u \in E$ et C une constante positive indépendante de u.

Preuve lemme 2.2 $\Longrightarrow$ lemme 2.1

i) $\Longleftarrow$ **(insuffisance)** si on suppose que u_1 et u_2 deux solution (i.e)

$$\mathcal{L}u_1 = f, \text{ et } \mathcal{L}u_2 = f \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\| &\leq C \|\mathcal{L}(u_1 - u_2)\| \\ &= C \|\mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2\| \\ &= 0 \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

lemme 2.1 $\Longrightarrow$ lemme 2.2

ii) $\Longrightarrow$ (**nécessité**) supposons que la solution est unique (i.e) l'équation homogène admet seulement la solution trivial. On remarque que $\|\mathcal{L}u\|_F \leq C \|u\|_E$ qu'on obtenir de

$$\|\mathcal{L}u\|_F = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} u_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On peut avoir

$$\begin{aligned} \min \|\mathcal{L}u\|_F &= \delta \\ &\neq 0 \\ &\Rightarrow \|\mathcal{L}u\|_F \geq \delta \|u\|_E, \text{ pour } \|u\| = 1. \end{aligned}$$

Car l'ensemble $S = \{u \ / \ \|u\| = 1\}$ des fonctions vérifiant $\|u\| = 1$ est fermé.

On utilise la linéarité de $\mathcal{L}$ et $\left\| \dfrac{u}{\|u\|} \right\| = 1$

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\| &\geq \delta \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| \\ &= \delta \\ &\Rightarrow \frac{1}{\|u\|} \|\mathcal{L}u\| \geq \delta \\ &\Rightarrow \|\mathcal{L}u\| \geq \delta \|u\|, \ \forall u \in E. \end{aligned}$$

■

Passons à l'existence de la solution de (2.1), on a besoin de l'équation duale et l'opérateur dual. On peut définir l'opérateur dual à partir de l'identité

$$(\mathcal{L}u, v)_F = (u, \mathcal{L}^* v)_E ,$$

d'où l'équation duale

$$\mathcal{L}^* v = g. \tag{2.5}$$

Remarque 2.1 *L'ensemble des éléments $\mathcal{L}u$ est un sous espace de F.*

L'ensemble des éléments $\mathcal{L}^* u$ est un sous espace de E.

Lemme 2.3 *La solution de l'équation (2.1) existe pour tout $f \in F$ si et seulement si :*

$$\mathcal{L}^* v = 0, \tag{2.6}$$

admet la solution triviale uniquement ($v = 0$).

Preuve ($\Rightarrow$) Supposons que la solution (2.1) existe pour tout $f \in F$ et supposons que (2.6) admet une solution non nulle v.

Pour tout $u \in E$, on a

$$(\mathcal{L}^* v, u)_E = 0 \Rightarrow (v, \mathcal{L}u)_F = 0,$$

si on pose $v = \mathcal{L}u$, on obtient

$$\|v\|_F^2 = 0 \Rightarrow v = 0,$$

(i.e.) l'équation $\mathcal{L}^* v = 0$ admet seulement la solution triviale.

($\Leftarrow$)Supposons que (2.6) admet seulement la solution triviale.

Admettons maintenant que la solution de (2.1) existe mais pas pour tout $f \in F$, alors les éléments $\mathcal{L}u$ forme sous espace différent de F

$$R(\mathcal{L}) = \operatorname{Im} \mathcal{L},$$

donc on aura un orthogonal (complément de $\mathcal{L}u$) non réduit à zéro

$$\left(R^{\perp}(\mathcal{L}) \neq \{0\}\right),$$

d'où :

$$\text{il existe } v \neq 0 \text{ tel que } (\mathcal{L}u, v)_F = 0 \text{ pour tout } u \in E,$$

(i.e.)

$$(u, \mathcal{L}^* v)_E = 0, \ \forall u \in E,$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^* v = 0, \ v \neq 0,$$

d'où la contradiction. ■

Théorème 2.1 *Les équations* (2.1) *et* (2.5) *admettent une et une seule solution quelque soit le membre de droit si et seulement si pour les opérateurs* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{L}^*$ *on a les inégalités*

$$\begin{aligned} \|u\|_E &\leq C \|\mathcal{L}u\|_F, \\ \|v\|_F &\leq C^* \|\mathcal{L}^* v\|_E, \end{aligned}$$

où C *et* C^* *sont deux constantes positives indépendantes de* u *et* v *(respectivement).*

2.2 Inversibilité d'un opérateur

On désigne par $(E, \|.\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{k} := R$ ou $\mathbb{C}$. Si $(F, \|.\|_F)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, on désigne par $L(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Si $F := E$, on note simplement $L(E) := L(E, E)$ et $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$. Enfin, s'il y a risque de confusion on notera la norme de E par$\|.\|_E$.

Dans cette section, on regroupe certains résultats sur les opérateurs inversibles. En particulier, on donne une caractérisation de l'inversibilité d'un opérateur qui s'avérera très utile pour la suite.

Définition 2.1 *On rappelle qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit inversible s'il admet un inverse dans $\mathcal{L}(E)$, i.e. il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $ST = TS = I$, où I désigne l'opérateur identité de E. On note $G\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{L}(E)$ inversibles.*

Proposition 2.1 *Soient $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$ et $T \in \mathcal{L}(E, X)$ bijective. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *$T^{-1} \in \mathcal{L}(E, X)$.*
2. *Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E, \|Tx\|_X \geq C \|x\|_E$.*
3. *$(X, \|.\|_X)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{k}$.*

Preuve Voir Théorie spectrale Stéphane Maingot & David Manceau ■

Corollaire 2.1 *Soient $(Y, \|.\|_Y)$ un espace de Banach sur $\mathbb{k}$ et $T \in \mathcal{L}(E, Y)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe $C > 0$telle que, pour tout $x \in E$, on a $\|Tx\|_Y \geq C \|x\|_E$.*
2. *T est injectif et $Im(T)$ est fermé dans Y.*

Preuve On pose $X := Im(T)$. Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on a : $\|Tx\|_Y \geq C \|x\|_E$.

Alors, T est injectif donc est une bijection de E sur X. D'après la Proposition précédent, on en déduit que $X = Im(T)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans Y.

Supposons T injectif et X fermé dans Y. Alors, T est une bijection de E sur X et X est un espace de Banach. D'après la proposition précédent, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$ on $\|Tx\|_Y \geq C \|x\|_E$. ■

Corollaire 2.2 *Soient $(Y, \|.\|_Y)$ un espace de Banach sur $\mathbb{k}$ et $T \in \mathcal{L}(E, Y)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $Im(T) = Y$ *et il existe* $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$, *on* $\|Tx\|_Y \geq C \|x\|_E$.
2. T *est inversible.*

Preuve Si 1. a lieu, d'après le corollaire précédent, T est injectif et $Im(T)$ est fermé dans Y. Alors, $Im(T) = \overline{Im(T)} = Y$ donc T est surjectif et par suite inversible.

Réciproquement, si 2. a lieu, on a$Y = Im(T) \subset \overline{Im(T)} \subset Y$. Donc $\overline{Im(T)} = Im(T) = Y$, ce qui donne le résultat d'après le Corollaire précédent. ■

2.3 Espaces fonctionnelles, opérateurs

2.3.1 Notion sur les espaces fonctionnelles

Théorème 2.1 *L'espace $L^2(\Omega)$ est complet.*

Théorème 2.2 *L'espace $C(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$ c.à.d. $\overline{C(\Omega)} = L^2(\Omega)$.*

Remarque 2.2 *En vertu des théorème2.2 et théorème2.3 l'espace $L^2(\Omega)$ peut être obtenu de la manière suivant*

On considère l'ensemble de toutes les fonctions continues sur Ω et on définit dans cet ensemble un produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega uv dx, \tag{2.7}$$

en le complétant (en leur ajoutant) par les éléments idéaux (limites des suites fondamentales) on obtient $L^2(\Omega)$.

$$\left[\begin{array}{c} \|u\|^2 = \int_\Omega u^2 dx \Longleftrightarrow \|u\| = \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|u_n - u\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \qquad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite fondamentale.} \end{array}\right] \tag{2.8}$$

Remarque 2.3 *Tout élément idéal peut être identifié à une fonction de carré intégrable.*

Définition 2.2 *Toute fonction de carré intégrable peut être obtenue comme limite d'une suite de fonctions continues (dans la norme de L^2).*

Dans $[0,1] \subset \mathbb{R}$, on considère l'espace $C_0^1([0,1])$ vérifiant

$$u(0) = 0, \tag{2.9}$$

on munit cet espace du produit scalaire

$$(u,v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx, \tag{2.10}$$

on complète C_0^1 selon la norme induite par (2.10). L'epace obtenue est l'espace de Hilbert $\mathring{W}_2^1([0,1])$. Etudions cet espace, une fonction de C_0^1 peut être considérée comme élément de $L^2([0,1])$. Pour une telle fonction, on a l'inégalité :

$$u \in C_0^1([0,1]) \Longrightarrow \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathring{W}_2^1}. \tag{2.11}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2} &= \int_0^1 u^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{du}{d\xi} d\xi \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left[\left(\int_0^x d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 dx \quad \text{(Hölder)} \\
&\leq \int_0^1 \left(x \int_0^x \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi \right) dx \quad \text{comme } x \in [0,1] \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 d\xi \right) dx = \int_0^1 \|u\|_{\mathring{W}_2^1}^2 dx = \|u\|_{\mathring{W}_2^1}^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathring{W}_2^1}.$$

■

Soit maintenant u un élément quelconque de $\mathring{W}_2^1([0,1])$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C_0^1([0,1])$ qui converge fortement vers u $\left(\|u_n - u\|_{\mathring{W}_2^1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0\right)$ (i.e.) $u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} u$ dans $L^2([0,1])$.

D'après (2.11) la limite $u \in L^2([0,1])$ sera identifiée à un élément $v \in W_0^{1,2}([0,1])$ et de cette façon on définit l'injection canonique $\mathring{W}_2^1 \hookrightarrow L^2$.

Si $u_n \to u$ dans $\mathring{W}_2^1$. Alors $\left(\frac{du_n}{dx}\right)$ converge vers une fonction limite dans L^2 qu'on la note par $\frac{du}{dx}$ (appelée dérivée généralisée de la fonction $u \in \mathring{W}_2^1$ (au sens distribution)).

Remarque 2.4 *Pour tout $u \in \mathring{W}_2^1$, on a l'égalité $u(x) = \int\limits_0^x \frac{du}{d\xi} d\xi$.*

Remarque 2.5 *Si on définit C_1^1 avec la condition $u(1) = 0$, on construit la fermeture de C_1^1 selon* (2.10), *on obtient $W_1^1([0,1])$.*

Remarque 2.6 *On peut fermer (compléter) C^1 dans la norme induite par le produit scalaire*

$$\begin{aligned}
(u,v) &= \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \int_0^1 uv dx \\
&= (u,v)_{L^2} + \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir W_2^1.

Considérons $\mathring{C}^1(\Omega)$ où $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ avec

$$(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{du}{dx_1}.\frac{dv}{dx_1} + \frac{du}{dx_2}.\frac{dv}{dx_2}\right) dx_1 dx_2 + \int_\Omega uv dx_1 dx_2.$$

$\mathring{C}^1([0,1] \times [0,1])$, $u \mid_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} \mid_{\partial\Omega} = 0$.

Si on complète $\mathring{C}^1$ dans la norme induite par le produit scalaire, on obtient $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$.

Si on considère une fonction $u \in \mathring{C}^1$qu'on peut l'identifier un élément de L^2 et on utilise la représentation

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{du}{d\xi}(\xi, x_2)\, d\xi, \tag{2.12}$$

et repostons le raisonnement utilisé par la démonstration de (2.11). On obtient

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}. \tag{2.13}$$

L'inégalité (2.13) permet de définire l'injection canonique $\mathring{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L^2$.

2.3.2 Opérateurs linéaire(fermée, fermable)

Soit $T : H_1 \to H_2$ (opérateur linéaire), on note $D(T)$ sont domaine de définition, $D(T) \subset H_1$, et $R(T)$ l'ensembles des valeurs de T.

$$R(T) = \{Tu \ , u \in D(T)\} = \underset{u \in D(T)/\{0\}}{\cup} [Tu] .$$

La norme de T est donner par

$$\|T\| = \sup_{u \in D(T)} \frac{\|Tu\|_{H_2}}{\|u\|_{H_1}}.$$

1. Si $\|T\| < \infty$, on dit que T est borné. T est continue si $u_n \to u$ dans $H_1 \Rightarrow Tu_n \to Tu$ dans H_2. L'opérateur A est appelé extension de T si
2. $D(T) \subset D(A)$.
3. $Tu = Au, \forall u \in D(T)$.

Définition 2.3 *L'opérateur $T : H_1 \to H_2$ est dit fermé si pour toute suite $u_n \in D(T)$*

$$\begin{aligned} u_n &\to u \text{ dans } H_1 \\ Tu_n &\to f \text{ dans } H_2 \end{aligned}$$

alors

$$u \in D(T) \ et \ f = Tu.$$

Définition 2.4 *L'opérateur $T : H_1 \to H_2$ est dit fermable si pour tout suite*

$$u_n \in \mathbb{D}(T), u_n \to 0 \ et \ Tu_n \to f$$

alors

$$f = 0.$$

2.4 Dérivées généralisées

2.4.1 Dérivée généralisée faible, forte

Soit $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Alors pour tout $v \in C_1^1(\Omega)$, on a

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} u dx = -\int_0^1 f v dx, \tag{2.14}$$

où $f = -\dfrac{du}{dx}$ est la dérivée généralisée de u définie par (2.14).

Soit maintenant $u \in W_2^1(\Omega)$ / $\exists f \in W_2^1(\Omega)$ vérifiant (2.14) pour tout $v \in C_1^1(\Omega)$

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} u dx = -\int_0^1 f v dx \quad \forall v \in C_1^1(\Omega),$$

on dit que f est la dérivée généralisée faible de u, et la condition $u(0) = 0$ est satisfaite au sens faible.

La dérivée généralisée définie dans le paragraphe 1 (exemple) est appelée dérivée généralisée forte

$$\begin{aligned} u_n &\to u, \text{ dans } \overset{\circ}{W}{}_2^1([0,1]) \\ \frac{du_n}{dx} &\to \frac{du}{dx} = f, \end{aligned}$$

En définissant la dérivée généralisée, on a construit une nouvelle extension D^w de l'opérateur de la dérivation classique D définit sur $C_0^1(\Omega)$.

L'extension D^s est appelée dérivée généralisée forte et aussi une extension de D. L'existence de D^s entraine l'existence de D^w $(D^w \subset D^s)$.

En générale la réciproque n'est pas pour montrer que $D^s \equiv D^w$ (pour un opérateur différentiel) il est très difficile et reste un problème ouvert (pour la plus part des cas).

Chapitre 3

Les équations de type parabolique.

3.1 Position de problème aux limites et à valeurs initiales-problème de Cauchy

Considérons l'équation parabolique de la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x,t)u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u \\
&= f(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

comme ce particulier de (3.1), on a l'équation de **chaleur**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \qquad (3.2)$$

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad 0 \leq t \leq T,$$

qui décrit la propagation de la chaleur dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Les problèmes suivants sont fondamentaux pour (3.1) :

1/ Le problème de Cauchy : chercher la solution $u(x,t)$ vérifiant (3.1) pour $x \in \mathbb{R}^n$ et

$t > 0$ et vérifiant aussi pour $t = 0$ la condition

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{3.3}$$

2/ Le problème de Dirichlet : chercher la solution $u(x, t)$ vérifiant (3.1) dans

$$Q_T = \Omega \times [0, T] \quad \text{ou } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

et la condition initiale

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in \Omega, \tag{3.4}$$

et la condition ou limite

$$u\,|_{\partial\Omega} = \Psi(s, t). \tag{3.5}$$

Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ le domaine Q_T est appelé un cylindre, sa surface notée par

$$\begin{aligned} S_T &= S \times [0, T] \\ &= \partial\Omega \times [0, T]\,, \end{aligned}$$

et l'ensemble $\{(x, t) : x \in \Omega, t = 0\ \}$ et la base inferieure du cylindre.

3/ Le problème de Neumann : chercher la solution $u(x, t)$ vérifiant (3.1) et la condition initiale $u\,|_{t=0} = \varphi(x)$ et la condition ou limite

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta}\,|_{S_T} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\eta, x_i) \\ &= \chi(s, t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

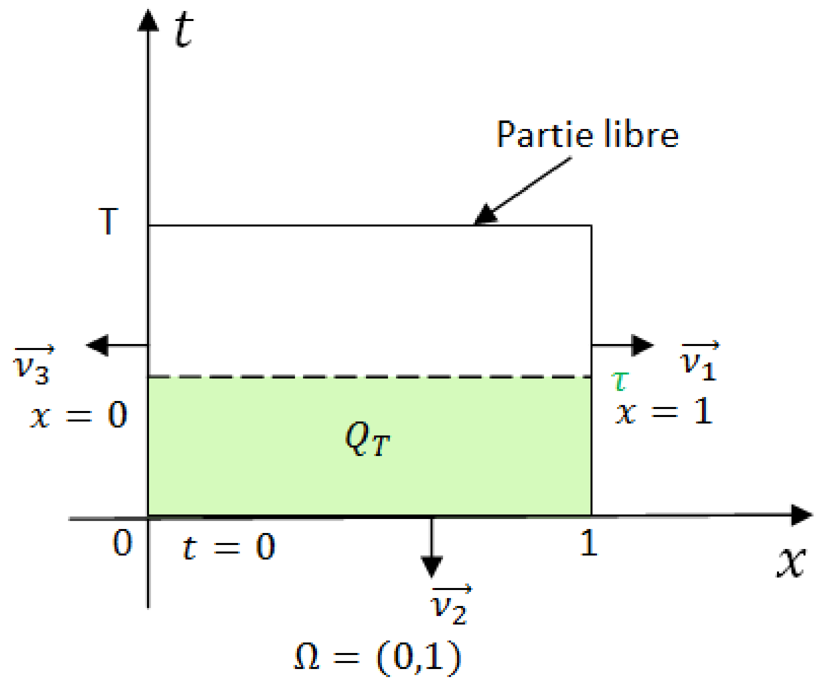
Si au lieu de la condition (3.6), on a la condition

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}\,|_{S_T} + u\,|_{S_T} = \eta(s, t), \tag{3.7}$$

on a ce qu'on appelle le $3^{ème}$ problème au limite et à valeurs initiale.

Exemple 3.1 *Soit l'équation*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f(x,t) \quad sur \quad Q_T = [0,1] \times [0,T], \qquad (*) \\ où \ \ \mathcal{L}u &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$



Comment poser problème aux limites pour l'équation (1) *dans* Q_T, *(i.e.) comment trouver les conditions initiale et aux limites pour que l'inégalité de l'énergie soit vérifiée.*

Solution :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad sur \quad Q_T = [0,1] \times [0,T] \qquad (1)$$

Si on multiplie l'équation (1) *par* $2u$, *et intégrer sur le domaine* Q_τ *où* $\tau \in [0,T]$ *(i.e.) on considère le problème dans* $L^2(Q_\tau)$ *de l'équation* (1) *et la fonction* $2u$.

$$2\int_{Q_\tau} u_t u dx dt - 2\int_{Q_\tau} u u_{xx} dx dt = 2(f,u)_{2,Q_\tau}, \qquad (2)$$

evaluons les 2 termes du membre gauche de (2)

$$\begin{aligned}
2\int\limits_{Q_\tau} u_t u dx dt &= \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2) dx dt \\
&= \int\limits_{\partial Q_\tau} u^2 \cos(\overrightarrow{\nu}, t) d\sigma \\
&= -\int\limits_0^1 u^2(x,0)dx + \int\limits_0^1 u^2(x,\tau)dx,
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
-2\int\limits_{Q_\tau} u u_{xx} dx dt &= -2\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x}(u_x u) dx dt + 2\int\limits_{Q_\tau} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx dt \\
&= -2\int\limits_{\partial Q_\tau} u_x u \cos(\overrightarrow{\nu}, t) d\sigma + 2\int\limits_{Q_\tau} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx dt \\
&= -2\int\limits_0^\tau u_x(1,t)u(1,t)dt + 2\int\limits_0^\tau u_x(0,t)u(0,t)dt + 2\int\limits_{Q_\tau} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx dt.
\end{aligned}$$

L'équation (2) *devient*

$$\int\limits_0^1 u^2(x,\tau)dx - \int\limits_0^1 u^2(x,0)dx + 2\int\limits_{Q_\tau} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx dt + 2\int\limits_0^\tau \left[u_x(0,t)u(0,t) - u_x(1,t)u(1,t)\right] dt = 2(f,u)_{2,Q_\tau},$$

(i.e.)

$$\int\limits_0^1 u^2(x,\tau)dx + 2\int\limits_{Q_\tau} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx dt = \int\limits_0^1 u^2(x,0)dx + 2\int\limits_0^\tau \left[u_x(1,t)u(1,t) - u_x(0,t)u(0,t)\right] dt + 2(f,u)_{2,Q_\tau}.$$

En utilisant l'inégalité : $2ab \leq a^2 + b^2$

$$\int_0^1 u^2(x,\tau)dx + 2\int_{Q_\tau} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dxdt \leq \int_0^1 u^2(x,0)dx + 2\int_0^\tau [u_x(1,t)u(1,t) - u_x(0,t)u(0,t)]\, dt + \|f\|^2_{2,Q_\tau} + \|u\|^2_{2,Q_\tau} \tag{3}$$

De (3) *on peut poser les problèmes suivants*

1/ Le problème de Neumann : *si on pose*

$$u_x(1,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=1}\ ,\ u_x(0,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=0}\ .$$

2/ Le problème de Dirichlet : *si on pose*

$$u(1,t) = 0 = u\,|_{x=1}\ ,\ u(0,t) = 0 = u\,|_{x=0}\ .$$

3/Le problème mixte : *si on pose*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=0} = 0, u\,|_{x=1} = 0, \quad ou \quad \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=1} = 0,\ u\,|_{x=0} = 0,$$

de

$$\int_0^\tau [u_x(1,t)u(1,t) - u_x(0,t)u(0,t)]\, dt = 0.$$

On peut avoir les conditions aux limites

$$(\delta_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2 u)\,\big|_{\partial Q_\tau = S*[0,t]} = 0 \quad /S = \partial\Omega = \{\{0\} \cup \{1\}\} \tag{*}$$

$$\begin{aligned} u_x(1,t)u(1,t) - u_x(0,t)u(0,t) &= u_x(1,t)\,[u(1,t) - u_x(0,t)] + u_x(1,t)u(0,t) \\ &\quad - u(0,t)\,[u_x(0,t) - u_x(1,t)] - u(0,t)u_x(1,t), \end{aligned}$$

donc

$$u_x(1,t)u(1,t) - u_x(0,t)u(0,t) = u_x(1,t)\,[u(1,t) - u_x(0,t)] + u(0,t)\,[u_x(1,t) - u_x(0,t)]\,,$$

d'où les conditions aux limites $(*)$ *On choisie* $u(x,0)=\varphi(x)$ *(condition initiale) l'inégalité obtenir*

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^2(x,\tau)dx+2\int_{Q_\tau}(\frac{\partial u}{\partial x})^2dxdt &\leq \int_0^1\varphi^2(x)dx+2\int_0^\tau\left[u_x(1,t)u(1,t)-u_x(0,t)u(0,t)\right]dt+\|f\|^2_{2,Q_\tau}+\|u\|^2_{2,Q_\tau}\\ &\leq \|\varphi\|^2_{2,(0,1)}+\|f\|^2_{2,Q_\tau}+\|u\|^2_{2,Q_\tau}\,,\end{aligned}$$

on utilise

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{2,Q_\tau} &= \int_0^\tau(\int_0^1 u^2(x,t)dx)dt\\ &= \int_0^\tau \|u(x,t)\|^2_{2,(0,1)}\,,\end{aligned}$$

$$\|u(x,\tau)\|^2_{2,(0,1)}+2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{2,Q_\tau}\leq \|\varphi\|^2_{2,(0,1)}+\|f\|^2_{2,Q_\tau}+\int_0^\tau\|u(x,t)\|^2_{2,(0,1)} \tag{4}$$

En utilisant lemme de Gronwelle pour éliminer le dernier membre droite de (4)

$$\left(\int_0^\tau f(t)dt+g(\tau)\leq h(\tau)+c\int_0^\tau g(t)dt\Longrightarrow\int_0^\tau f(t)dt+g(\tau)\leq c\exp(c\tau)h(\tau)\right),$$

on prand le $\min(1,2)=1$, *on pose*

$$h(\tau)=\|\varphi\|^2_{2,(0,1)}+\|f\|^2_{2,Q_\tau}\,,$$

$$\int_0^\tau f(t)dt=\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{2,Q_\tau},$$

et

$$g(\tau)=\|u(x,\tau)\|^2_{2,(0,1)}\,.$$

On obtient alors

$$\|u(x,\tau)\|^2_{2,(0,1)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{2,Q_\tau} \leq c\exp(c\tau)\left[\|\varphi\|^2_{2,(0,1)} + \|f\|^2_{2,Q_\tau}\right], \tag{5}$$

ici

$$c = 1,$$

passons au suprême un / à τ sur $[0,T]$ dans (5), on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq\tau\leq T}\left(\|u(x,\tau)\|^2_{2,(0,1)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{2,Q_\tau}\right) &\leq \exp(T)\left[\|\varphi\|^2_{2,(0,1)} + \|f\|^2_{2,Q_\tau}\right] \\ &= K\left[\|\varphi\|^2_{2,(0,1)} + \|f\|^2_{2,Q_\tau}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Si on pose

$$\|u\|_E = \sup_{0\leq\tau\leq T}\left(\|u(x,\tau)\|^2_{2,(0,1)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{2,Q_\tau}\right),$$

$$\|Au\|_F = \|\varphi\|^2_{2,(0,1)} + \|f\|^2_{2,Q_\tau},$$

où

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad E \to F \\ u \quad &\to \quad Au = \mathcal{F} = (f,\varphi) = (\mathcal{L}u, \ell u) \end{aligned}$$

où $F = L^2(Q_T) \times L^2((0,1))$ la plus petite classe de solutions est l'ensemble $C^{2,1}(Q_T)$.On peut choisir le domaine de définition (classe de solution) la férméture de $C^{2,1}(Q_\tau)$ (à la norme $\|u\|_E = \sup_{0\leq\tau\leq T}\left(\|u(x,\tau)\|^2_{2,(0,1)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{2,Q_\tau}\right)$) l'inégalité (6) peut être mise sous la forme :

$$\|u\|_E \leq K\|Au\|_F.$$

L'unicité de solution s'ensiont de 'inégalité obtenue.

3.2 Problème de Dirichlet pour l'équation de chaleur

Nous allons étudier en détail le problème de Dirichlet ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) borné, introduisons d'abord l'espace $W_2^{1,0}(Q_T)$ où le produit scalaire défini par

$$(u,v)_{2,Q_T}^{(1,0)} = \int\limits_{Q_T} uvdxdt + \int\limits_{Q_T} u_x v_x dxdt, \tag{3.8}$$

$$W_2^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in L^2(Q_T) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q_T) \right\},$$

on note par $\|.\|_{2,Q_T}^{(1,0)}$ la norme dans $W_2^{1,0}(Q_T)$, $\mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ est le sous espace de $W_2^{1,0}(Q_T)$ qu'est la fermeture dans $\|.\|_{2,Q_T}^{(1,0)}$ les fonctions réguliers s'annulant sur S_T.

3.2.1 Formulation du problème

Considérons le problème de trouver la solutions $u(x,t)$

$$\begin{aligned} M_0 u &= u_t - \Delta u \\ &= f(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

dans le domaine

$$Q_T = \Omega \times [0,T],$$

et la condition initiale

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3.10}$$

et la condition ou limite

$$u\,|_{S_T} = 0. \tag{3.11}$$

Les solutions généralisées sont les éléments de $W_2^{2,1}(Q_T)$ ayant le produit scalaire défini par

$$(u,v)_{2,Q_T}^{2,1} = \int\limits_{Q_T} (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx} + u_t v_t) dxdt, \tag{3.12}$$

ici

$$u_x v_x = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} \quad \text{et} \quad u_{xx} v_{xx} = \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} v_{x_i x_j}.$$

Plus précisément la solution généralisée de $(3.9) - (3.11)$ dans cet espace on obtient

$$W_{2,0}^{2,1}(Q_T) = W_2^{2,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$$

On introduit l'espace suivent l'espace $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ ayant les éléments $u \in L^2(Q_T)$ au u_t, u_x et $u_{xx} \in L^2(Q_T)$ avec la norme

$$\|u\|_{W_2^{\Delta,1}} = \left[\int\limits_{Q_T} (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + (\Delta u)^2) dxdt \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.13}$$

le produit scalaire dans $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ défini par

$$(u,v)_{W_2^{\Delta,1}} = (u,v)_{L^2(Q_T)} + (u_t, v_t)_{L^2(Q_T)} + (u_x, v_x)_{L^2(Q_T)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(Q_T)}. \tag{3.14}$$

Remarque 3.1 *Au lieu de la norme* (3.13) *on peut utiliser une norme équivalant*

$$\|u\|_{2,Q_T}^{\Delta,1} = \left[\int\limits_{Q_T} (u_t^2 + (\Delta u)^2) dxdt \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

Le produit scalaire aussi à l'espace

$$(u,v)_{2,Q_T}^{\Delta,1} = (u_t, v_t)_{L^2(Q_T)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(Q_T)}. \tag{3.16}$$

On s'intéresse aussi à l'espace

$$W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T) = W_2^{\Delta,1}(Q_T) \cap \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$$

On suppose que $f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = F \in L^2(Q_T)$.

On définit la solution généralisée du problème $(3.9) - (3.11)$ dans $W_2^{\Delta,1}(Q_T)$ comme étant les éléments $u \in W_{2,0}^{\Delta,1}(Q_T)$ vérifient (3.9) dans Q_T et la condition initiale $(u\,|_{t=0} = \varphi(x))$. On peut écrire le problème $(3.9) - (3.11)$ sou forme dite opérationnelle

$$Au = \{F, \varphi\}, \tag{3.17}$$

où A et l'opérateur transforment $u(x,t)$ à la paire d'élément $M_0 u$ et $u(x,0) = \varphi(x)$.

L'opérateur A est considérée comme étant l'opérateur non-borné agissant sur $L^2(Q_T)$ dans l'espace de Hilbert

$$\begin{aligned} W &= L^2(Q_T) \times \mathring{W}_2^{1,0}(\Omega), \\ A &: L^2(Q_T) \longrightarrow W = L^2(Q_T) \times \mathring{W}_2^{1,0}(\Omega), \end{aligned} \tag{3.18}$$

les éléments de W sont les pairs $\{f, \Psi\}$ avec $f \in L^2(Q_T)$ et $\Psi \in \mathring{W}_2^{1,0}(\Omega)$ ou le produit scalaire dans cet espace défini par

$$(\{f^1, \Psi^1\}, \{f^2, \Psi^2\})_W = \int\limits_{Q_T} f^1 f^2 dxdt + \int\limits_{\Omega} \Psi_x^1 \Psi_x^2 dx. \tag{3.19}$$

On démontre que l'opérateur A fermable (i.e.) on démontrer que si $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \in D(A)$ / $v_m \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(Q_T)$ et si $Av_m = \{f_m, \varphi_m\} \underset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \{f, \varphi\}$ dans W alors on démontre que $f = \varphi = 0$.

Preuve Soit $\eta(x,t)$ assez régulière avec $\eta\,|_{S_T} = 0$, $\eta(x,T) = 0$ et considère l'intégrale Q_T

$$\int\limits_{Q_T} M_0 v_m \eta dxdt \tag{*}$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= \int\limits_{Q_T} M_0 v_m \eta dxdt \\
&= \int\limits_{Q_T} (\frac{dv_m}{dt} - \Delta v_m)\eta dxdt \\
&= \int\limits_{Q_T} \frac{dv_m}{dt}\eta dxdt - \int\limits_{Q_T} \Delta v_m \eta dxdt \\
&= \int\limits_{\partial Q_T} v_m \eta \cos(v,t) d\sigma - \int\limits_{Q_T} v_m \eta_t dxdt - \int\limits_{Q_T} \eta \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_i^2} dxdt \\
&= \int\limits_{\Omega} v_m \eta \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int\limits_{Q_T} v_m \eta_t dxdt - \sum_{i=1}^{n}(\int\limits_{\partial Q_T = S_T = S*[0,T] = \partial\Omega*[0,T]} \eta \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \cos(v, x_i) d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_T} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} dxdt \\
&= \int\limits_{\Omega} v_m(x,T)\eta(x,T)dx - \int\limits_{\Omega} v_m(x,0)\eta(x,0)dx - \int\limits_{Q_T} v_m \eta_t dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_T} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} dxdt \\
&= -\int\limits_{\Omega} v_m(x,0)\eta(x,0)dx - \int\limits_{Q_T} v_m \eta_t dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial Q_T} v_m \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cos(v, x_i) d\sigma - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_T} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} v_m dxdt \\
&= -\int\limits_{\Omega} v_m(x,0)\eta(x,0)dx - \int\limits_{Q_T} v_m(\eta_t + \Delta\eta) dxdt,
\end{aligned}
$$

on faisant tende $m \longrightarrow \infty$ on obtient

$$
\int\limits_{Q_T} f\eta dxdt + \int\limits_{\Omega} \varphi \eta dx = 0,
$$

implique que les 2 intégrales s'annulent indépendamment

$$
\Leftrightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
\int\limits_{Q_T} f\eta dxdt = 0 \Leftrightarrow (f,\eta)_{L^2(Q_T)} = 0, \ \forall \eta \quad \text{assez régulière}, \\
\int\limits_{\Omega} \varphi \eta dx = 0 \Leftrightarrow (\varphi,\eta)_{L^2(\Omega)} = 0, \forall \eta \quad \text{assez régulière},
\end{array}
\right.
$$

$\overline{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ de $(\varphi, \eta)_{L^2(\Omega)} = 0$ $\forall \eta$ assez régulière alors $\varphi \equiv 0$.

$f \in L^2(Q_T)$ $(f, \eta)_{L^2(Q_T)} = 0$ $\forall \eta$ assez régulière alors $f \equiv 0$, (i.e.) A admet une fermeture $\overline{A}$. ■

3.2.2 Unicité de la solution

Pour le problème (3.9) − (3.11) on a l'égalité

$$\|v_x(x,\tau)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{Q_T} (v_t^2 + (\Delta v)^2) dxdt = \|v_x(x,0)\|^2_{2,\Omega} + \int\limits_{Q_T} (M_0 v)^2 dxdt, \text{ où } v \in D(A) \text{ et } \tau \in [0,T], \tag{3.20}$$

à partire des quelle on obtient l'estimation à priori

$$\left(\|v\|^{\Delta,1}_{2,Q_T}\right)^2 \leq \|Av\|^2_W .$$

Preuve de (3.20)

On peut déduire que la convergence forte d'une suite d'éléments d'une espace W entraine la convergence d'une suite d'éléments de l'espace $W^{\Delta,1}_{2,Q_T}$ (i.e) la convergence $(Av_m)_{m\in\mathbb{N}}$ $(v_m \in D(A))$ dans la norme de W implique la convergonce $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans la norme de $W^{\Delta,1}_{2,Q_T}$.

Pour démontrer (3.20) on considère l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_\tau} (M_0 v)^2 dxdt &= \int\limits_{Q_\tau} (v_t - \Delta v)^2 dxdt = \int\limits_{Q_\tau} (v_t^2 + (\Delta v)^2) dxdt - 2\int\limits_{Q_\tau} v_t \Delta v dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} (v_t^2 + (\Delta v)^2) dxdt - 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\tau} v_t \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} (v_t^2 + (\Delta v)^2) dxdt - 2\sum_{i=1}^{n} (\int\limits_{\partial Q_\tau} v_t \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \cos(v, x_i) d\sigma + 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_t) \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} (v_t^2 + (\Delta v)^2) dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 \Big|_{t=0}^{t=\tau} dx \\
&= \int\limits_{Q_\tau} (v_t^2 + (\Delta v)^2) dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x_i})^2 dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v(x,0)}{\partial x_i})^2 dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_{Q_\tau} (M_0 v)^2 dxdt = \|F\|^2_{2,Q_T} \, ,$$

et

$$\begin{aligned}
\|F\|^2_{2,Q_\tau} &= \|v_t\|^2_{2,Q_\tau} + \|\Delta v\|^2_{2,Q_\tau} + \left\| \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} \right\|^2_{2,\Omega} - \left\| \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} \right\|^2_{2,\Omega} \\
&\Leftrightarrow \|v_t\|^2_{2,Q_\tau} + \|\Delta v\|^2_{2,Q_\tau} + \left\| \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} \right\|^2_{2,\Omega} \\
&= \|M_0 v\|^2_{2,Q_\tau} + \left\| \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} \right\|^2_{2,\Omega} \\
&= \|F\|^2_{2,Q_\tau} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2_{2,\Omega} ,
\end{aligned}$$

de cette dernière égalité, on obtient

$$\|v_t\|^2_{2,Q_\tau} + \|\Delta v\|^2_{2,Q_\tau} \leq \|F\|^2_{2,Q_\tau} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2_{2,\Omega} ,$$

(i.e.)

$$\left(\|v\|^{\Delta,1}_{2,Q\tau} \right)^2 \leq \|Av\|^2_W \, , \tag{*}$$

et l'estimation à priori devient

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \|v(.,\tau)\|^{\Delta,1}_{2,\Omega} \leq \|Av\|^2_W \, .$$

On peut obtenir à partir de (3.20)

$$\sup_{0 \leq \tau \leq T} \|v_m(.,\tau)\|^{\Delta,1}_{2,\Omega} \leq \|Av_m\|^2_W \, ,$$

d'où la convergence $(Av_m)_{m \in \mathbb{N}}$ dans W implique la convergence de $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ dans la norme donnée $\sup_{0 \leq \tau \leq T} \|v(.,\tau)\|_{W^1_{2,\Omega}}$.

Si on prolonge $(*)$ avec solution forte, (i.e.) on a l'inégalité

$$\|v\|_{2,Q_T}^{\Delta,1} \leq \left\|\overline{A}v\right\|_W, \tag{**}$$

cela prouve que les éléments de $D(\overline{A}) = W_{2,Q_T}^{\Delta,1}$ l'opérateur $\overline{A}$ défini par

$$\begin{aligned}
\overline{A}v &= \{F, v(x,0)\} \\
&= \widetilde{\mathcal{F}} \\
&= (F, \varphi) \\
&= (\mathcal{L}v; \ell v),
\end{aligned}$$

où ℓ est l'opérateur de trace.

On peut déduire de $(**)$ l'unicité de la solution forte, aussi que $\overline{R(A)} = R(\overline{A})$, et pour conséquent $\overline{A}^{-1}$ existe sur $R(\overline{A})$. ■

3.2.3 Existence de la solution

Pour que l'équation $\overline{A}v = \{F, \varphi\}$ est résoluble il suffit de démontrer $\overline{A}$ est surjectif (i.e.)

$$\overline{R(A)} = W$$

Preuve Pour montrer que

$$\forall \widetilde{\mathcal{F}} = \{F, \varphi\} \in W, \exists! v / \ v = \overline{A}^{-1} \{F, \varphi\}, \tag{3.21}$$

il faut démontrer que

$$\begin{aligned}
\overline{R(A)} &= W \Longleftrightarrow R(A)^{\perp} = \{0\} \\
R(A)^{\perp} &= \{0\} \Longleftrightarrow (Av, V)_W = 0 \\
&\Rightarrow V = 0 \text{ où } V \in W \\
\text{(i.e) } V &= (w, w_0).
\end{aligned}$$

Car W espace de Hilbert

$$\begin{aligned}
(\{\mathcal{L}v; \ell v\}, \{w, w_0\}) &= (Av, V)_W \\
&= \int\limits_{Q_\tau} w(v_t - \Delta v)dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial w_0}{\partial x} v_x(x,0)dx
\end{aligned} \tag{3.22}$$

où $v \in D(A)$ arbitraire $v = (w, w_0) \in W$.

Démontrons qu'il existe de (3.22) $w = w_0 = 0$ ((i.e) $V \equiv 0$). Posons

$$v = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{t_1}^{t} \Delta^{-1} w(x,\tau)d\tau, & \text{si } t > t_1, \\ 0, & \text{si } t \leq t_1, \end{cases}$$

où $t_1 \in [0, T]$ arbitraire.

Remplaçons v dans (3.22) on obtient d'abord

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} \Delta v_t (v_t - \Delta v) dxdt &= 0 \\
&= \int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} (\Delta v_t) v_t dxdt - \int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} \Delta v_t \Delta v dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{\partial Q_{t_1}} \frac{\partial v_{t;x_i}}{\partial x_i} v_t \cos(v, x_i) d\sigma - \int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} (v_{x_i})^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Delta v)^2 \Big|_{t=t_1}^{t=T} dx \\
&= -\int_{t_1}^{T}\int_{\Omega} (v_{xt})^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Delta v)^2 (x, T), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où on déduit que $v_{xt} \equiv 0 \Longrightarrow \Delta v_t = 0 = w$ dans Q_T.

L'identité (3.22) prendre la forme $\int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial x} v_x(x, 0)dx = 0$ pour tout $v \in D(A)$. Puisque

$$w_0 \in \mathring{W}^1_{2,\Omega} \ \text{ et } \ \overline{W^1_{2,\Omega}(\Omega)} = L^2(\Omega), \tag{3.23}$$

alors d'après (3.23)

$$w_0 = 0 \Longrightarrow V \equiv 0 = (w, w_0),$$

d'où la théorème. ■

Théorème 3.1 *Pour tout $\Omega \in \mathbb{R}^n$ borné, le problème* (3.9)_(3.11) *admet une solution unique dans $W^{\Delta,1}_{2,Q_T}$ si $F = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in L^2(Q_T)$ et $\varphi \in \mathring{W}^1_{2,\Omega}$.*

Remarque 3.2 *Si $S \in C^2$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $u \in \mathring{W}^1_2(\Omega)$, alors $u \in W^2_{2,0}(Q_T)$, et dons ce cas $W^{\Delta,1}_{2,0}(Q_T)$ peut coïncider avec $W^{2,1}_{2,0}(Q_T)$ et par conséquent le théorème précédant peut être appliqué pour les éléments $v \in W^{2,1}_{2,0}(Q_T)$.*

Remarque 3.3 *Tout élément $u \in W^{\Delta,1}_{2,0}(Q_T)$ est un éléments $\mathring{W}^1_2(\Omega)$ pour tout $\tau \in [0, T]$,et de pend continument de τ dans la norme de $\mathring{W}^1_2(\Omega)$.*

De plus on a pour $\tau \in [0,T]$

$$\|u_x(x,\tau)\|^2_{2,\Omega} = \|u_x(x,0)\|^2_{2,\Omega} - \int_0^\tau (u_t(x,t), \Delta v(x,t))_{2,\Omega} dt,$$

3.3 Méthode de l'énergie pour les opérateurs paraboliques de type général

3.3.1 Formulation du problème

On considéré ce problème

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_{i,j}(x,t)u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u \\ &= f(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec la condition initiale

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3.25}$$

et la condition aux bord

$$u\,|_{S_T} = 0,$$

tel que

$$\Omega \text{ borné de } \mathbb{R}^n \qquad a_{i,j} = a_{j,i},$$

où

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \mu \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \leq \mu, \;\; |a| \leq \mu, \tag{3.26}$$

et

$$\varphi \in L^2(\Omega), f \in L^{2,1}(Q_T) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(Q_T), \tag{3.27}$$

on à aussi la condition

$$\nu\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2 \quad \mu, \nu > 0. \tag{3.28}$$

3.3.2 Unicité de la solution

Première inégalité de l'énergie

On note $f(x,t) = f(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, supposons que $\partial\Omega$ est régulière et si les coefficients de sont certaine propriétés de régularités, avec les conditions $(3.26), (3.27), (3.28)$ l'équation (3.24) peut prendre la forme

$$\begin{aligned} Mu &= u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} - a\,(x,t)\,u \\ &= f(x,t), \end{aligned} \tag{3.29}$$

à laquelle sont associées les conditions initiales et aux limites

$$\begin{cases} u\,|_{t=0} = \varphi(x), \\ u\,|_{S_T} = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

et

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji}, \\ \nu\ \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \xi_i\ \xi_j \leq \mu\ \xi^2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Où ν, μ des constantes positives

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \quad \xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

$$\varphi \in L^2(\Omega),\ f \in L^{2,1}(Q_T)$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right| \leq \mu_1 \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_2 \quad |a| \leq \mu_2 \end{cases} \tag{3.32}$$

On peut écrire le problème sou forme dite opérationnelle

$$A : E \longrightarrow F,$$

$$Au = \{f, \varphi\},$$

avec

$$\begin{aligned} \|u\|_E &= \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|u(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(Q_T)}, \\ \|Au\|_F &= \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}, \end{aligned}$$

Définition 3.1 *On appelle solution généralisée du problème* (3.29). (3.30) *toute fonction* $u \in \mathbf{W}^1_{2,0}(Q_T)$ *vérifiant l'identité*

$$-\int\limits_{Q_T} (u\eta_t + a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + a_i u_{x_i}\eta + au\eta)\, dxdt - \int\limits_{\Omega} \varphi\eta(x,0)dx = \int\limits_{Q_T} f\eta\, dxdt$$

pour tout $\eta \in \mathbf{W}^1_{2.0}(Q_T)$ *assez régulière avec* $\eta\,|_{S_T} = 0$, $\eta(x,T) = 0$.

Multiplions l'équation (3.29) par u et intégrant le résultat sur Q_τ

$$\int\limits_{Q_\tau} Mu\ u\ dxdt = \int\limits_{Q_\tau} fudxdt$$

On a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_\tau} Mu\ u\ dxdt &= \int\limits_{Q_\tau} u(u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) - a_i u_{x_i} - au)dxdt \\
&= \int\limits_{Q_\tau} uu_t\ dxdt + \int\limits_{Q_\tau} (-\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j})u - a_i u_{x_i} u - auu)dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)dxdt + \int\limits_{Q_\tau} (a_{ij}u_{x_j}u_{x_i} + a_i u_{x_i} u + au^2)dxdt. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)dxdt + \int\limits_{Q_\tau} (a_{ij}u_{x_j}u_{x_i} - a_i u_{x_i} u - au^2)dxdt = \int\limits_{Q_\tau} fudxdt.$$

En utilisant les conditions (3.31) , (3.32) dans l'expression (3.33) et effectuons les majorations suivantes

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)dxdt + \nu\int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau} (a_i u_{x_i} u + au^2)dxdt + \int\limits_{Q_\tau} fudxdt.$$

D'après inégalité de Cauchy on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)dxdt + \nu\int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt &\leq \left(\int\limits_{Q_\tau} u_{x_i}^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{Q_\tau} a_i^2 u^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \mu_2 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&\quad + \left(\int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu_2 \left(\int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \mu_2 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt \\
&\quad + \left(\int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité $|ab| \leq \frac{\nu}{2}a^2 + \frac{1}{2\nu}b^2$ on a

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)dxdt + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \leq \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt + \left(\frac{\mu_2^2}{2\nu} + \mu_2 + \frac{1}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt, \quad (3.34)$$

alors

$$\int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u^2)dxdt + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \leq C_1 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt,$$

où

$$C_1 = \frac{\mu_2^2}{\nu} + 2\mu_2 + 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} u^2 \Big|_{t=0}^{t=\tau} dxdt + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt &\leq C_1 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt, \\
\int\limits_{\Omega} u^2(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt &\leq C_1 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt \\
\int\limits_{\Omega} u^2(x,\tau)\,dx + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt &\leq C_1 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt \\
\int\limits_{\Omega} u^2(x,\tau)\,dx + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt &\leq C_1 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{\Omega} \varphi^2 dx + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt,
\end{aligned}$$

alors

$$\min\{1,\nu\}\left(\int\limits_{\Omega} u^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_{Q_\tau} u_x^2 dxdt\right) \leq \max\{C_1, 1\}\left(\int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int\limits_{\Omega} \varphi^2 dx + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt\right),$$

et par conséquent

$$\int_{\Omega} u^2(x,\tau)\,dx + \int_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \leq c\left[\int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} f^2 dxdt + \int_{Q_\tau} u^2 dxdt\right], \tag{3.35}$$

où

$$c = \frac{\max\{C_1, 1\}}{\min\{1, \nu\}}.$$

Utilisons maintenant le lemme de Granwall pour éliminer le dernier membre droit de (3.35)

$$\left(\int_0^\tau f(t)dt + g(\tau) \leq h(\tau) + c\int_0^\tau g(t)dt \Longrightarrow \int_0^\tau f(t)dt + g(\tau) \leq c\exp(c\tau)h(\tau)\right),$$

on pose

$$h(\tau) = \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{Q_\tau} f^2 dxdt,$$

$$\int_0^\tau f(t)dt = \int_{Q_\tau} u_x^2 dxdt,$$

et

$$g(\tau) = \int_{\Omega} u^2(x,\tau)\,dx.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\tau} u^2 dxdt + \int_{Q_\tau} u_x^2 dxdt &\leq c\ e^{c\tau}\left[\int_{\Omega} \varphi^2 dxdt + \int_{Q_\tau} f^2 dxdt\right], \\
\|u(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(Q_\tau)} &\leq c\ e^{c\tau}\left[\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_\tau)}\right],
\end{aligned}$$

en passant on sup par apport à τ sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{0\le\tau\le T}\|u(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(Q_T)} &\le c\,e^{cT}\left[\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right]\\ &\le k\left[\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right].\end{aligned}\tag{3.36}$$

Alors l'inégalité (3.36) peut être mise sous la forme

$$\|u\|_E\le k\|Au\|_F \quad k>0,$$

de cette dernière inégalité on peut déduire l'unicité de la solution généralisée du problème (3.29)−(3.30) .

La deuxième inégalité fondamentale

Pour les opérateurs paraboliques M de type général

$$\begin{aligned}Mu &= \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}+a_i(x,t)u)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x,t)u\\ &= f(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i},\end{aligned}$$

on note $F(x,t)=f(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, supposons que $\partial\Omega$ est régulière et si les coefficients de sont certaine propriétés de régularités, et si en plus des conditions (3.26), (3.27), (3.28), les coefficient de M vérifiant aussi les conditions

$$\left|\frac{\partial M_i}{\partial x_i}\right|\le\mu_1 \quad \left|\frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_k}\right|\le\mu_1 \quad \left|\frac{\partial a_{i,j}}{\partial t}\right|\le\mu_1.\tag{3.37}$$

En tendent compte que la condition $\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right| \leq \mu_1$, alors Mu peut prendre la forme et on

$$\begin{aligned}
Mu &= \frac{\partial u}{\partial t} - \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \hat{a}_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \hat{a}(x,t)u\right] \\
&= u_t - \mathcal{L}u \\
&= F(x,t), \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

où

$$|\hat{a}_i| \leq \mu_2 \quad |\hat{a}| \leq \mu_2.$$

Nous savons que l'opérateur elliptique $\mathcal{L}u$ réaliser

$$\|u_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\nu}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + c\left(\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}\right), \qquad (3.39)$$

avec c dépondant de u et S.

Il est évident que

$$\|u_x\|^2 \leq \frac{1}{2\nu\varepsilon_2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2} + C_{\varepsilon_2}\|u\|^2, \qquad (3.40)$$

qui est vrai pour tout $u \in W_2^1(\Omega)$, où $C_{\varepsilon_2} = \frac{2}{\nu}\left(\mu_2 + \frac{\mu_2^2}{\nu} + \varepsilon_2\right)$, $\varepsilon_2 > 0$, et u est solution généralisée dans $W_2^1(\Omega)$ du problème $\mathcal{L}u = F(x,t)$, $u\mid_S = 0$, $f \in L^2(\Omega)$.

Si on pose $\varepsilon_2 = \frac{\nu(c+1)}{4}$, on obtient la seconde inégalité de l'énergie pour les opérateurs elliptiques

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq \frac{2}{\nu}\|\mathcal{L}u\| + C_2\|u\|, \qquad (3.41)$$

où $C_2 = \sqrt{(1+c)(1+C_1)}$ et $C_1 = C_{\varepsilon_2}$ pour $\varepsilon_2 = \frac{\nu(c+1)}{4}$.

Dans le cas où $(\mathcal{L}u, u) \geq \delta_1\|u\|^2$ avec $\delta_1 > 0$ constant le dernier terme de (3.41) peut être estimé en terme de $\|\mathcal{L}u\|$ et au lieu de (3.41) on aura l'inégalité

$$\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leq C_3\|\mathcal{L}u\|, \qquad (3.42)$$

où

$$C_3 = \frac{2}{\nu} + \frac{C_2}{\delta_1},$$

et par conséquent

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leq \left(\frac{2}{\nu} + \frac{C_2}{\delta_1}\right) \|\mathcal{L}u\|.$$

On peut écrire le problème sou forme dite opérationnelle

$$A : E \longrightarrow F,$$

$$Au = \{f, \varphi\},$$

avec

$$\begin{aligned} \|u\|_E &= \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|u(x,\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|Au\|_F &= \|\varphi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Mu\|_{L^2(Q_T)}^2, \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale $\int\limits_{Q_\tau} (Mu)^2 dxdt$ pour une fonction arbitraire u assez régulière s'annulant sur les frontières

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_\tau} (Mu)^2 dxdt &= \int\limits_{Q_\tau} (u_t^2 - 2u_t\mathcal{L}u + (\mathcal{L}u)^2) dxdt \\ &= \int\limits_{Q_\tau} \left[u_t^2 + (\mathcal{L}u)^2 - 2u_t(a_{i,j}u_{x_j})_{x_i} - 2u_t\hat{a}_i u_{x_i} - 2\hat{a}uu_t\right] dxdt \\ &= \int\limits_{Q_\tau} (u_t^2 + (\mathcal{L}u)^2) dxdt + \int\limits_{\Omega} a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j} \Big|_{t=0}^{t=\tau} dx - \int\limits_{Q_\tau} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial t} u_{x_j}u_{x_i} dxdt - 2\int\limits_{Q_\tau} u_t(\hat{a}_i u_{x_i} + \hat{a}u) dxdt, \end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_{Q_\tau} (Mu)^2 dxdt + \int\limits_{\Omega} a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j} \big|_{t=0} dx = \int\limits_{Q_\tau} \left[u_t^2 + (\mathcal{L}u)^2 - \frac{\partial a_{i,j}}{\partial t} u_{x_j}u_{x_i} - 2u_t(\hat{a}_i u_{x_i} + \hat{a}u)\right] dxdt + \int\limits_{\Omega} a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j} \big|_{t=\tau} dx$$

d'où

$$\int\limits_{Q_\tau}(Mu)^2dxdt+\int\limits_{\Omega}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\,|_{t=0}\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\frac{\partial a_{i,j}}{\partial t}u_{x_j}u_{x_i}dxdt+2\int\limits_{Q_\tau}u_t\hat{a}_iu_{x_i}dxdt+2\int\limits_{Q_\tau}u_t\hat{a}udxdt.$$
$$=\int\limits_{Q_\tau}u_t^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}(\mathcal{L}u)^2dxdt+\int\limits_{\Omega}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\,|_{t=\tau}\,dx. \tag{3.43}$$

On utilise les conditions sur les coefficients du l'opérateur $\mathcal{L}$ et les inégalités de Cauchy avec ϵ. On obtient de (3.43) pour tout $\epsilon>0$

$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2_{2,Q_\tau}+\|\mathcal{L}u\|^2_{2,Q_\tau}+\int\limits_{\Omega}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\,|_{t=\tau}\,dx\\ \leq\;&\int\limits_{Q_\tau}(Mu)^2dxdt+\int\limits_{\Omega}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\,|_{t=0}\,dx+C_2\int\limits_{Q_\tau}\left[u_x^2+\epsilon u_t^2+\frac{1}{\epsilon}u^2\right]dxdt.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Remplaçants $\int\limits_{Q_\tau}(\mathcal{L}u)^2dxdt$ et $\int\limits_{\Omega}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\,|_{t=\tau}\,dx$ par des quantités plus petits en se basant sur l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|^2_{2,Q_\tau}\leq c^2(Q_\tau)\,\|u_x\|^2_{2,Q_\tau}\,,$$

en choisissant $\in=\frac{1}{2c_2}$, on obtient d'aprés (3.44)

$$\begin{aligned}\nu\int\limits_{\Omega}u_x^2(x,\tau)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{c}u_{xx}^2\right]dxdt\;&\leq\;\mu\int\limits_{\Omega}\varphi_x^2(x)dx+c_3\int\limits_{Q_\tau}\left[u_x^2+u^2\right]dxdt+\int\limits_{Q_\tau}(Mu)^2dxdt\\ &\leq\;\mu\int\limits_{\Omega}\varphi_x^2(x)dx+c_4\int\limits_{Q_\tau}u_x^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}(Mu)^2dxdt,\end{aligned} \tag{3.45}$$

i.e

$$\nu\,\|u_x(x,\tau)\|^2_{2,Q_\tau}\leq\mu\int\limits_{\Omega}\varphi_x^2(x)dx+c_4\int\limits_{Q_\tau}u_x^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}(Mu)^2dxdt,$$

alors

$$\|u_x(x,\tau)\|^2_{2,Q_\tau}\leq C\left[\|\varphi_x\|^2_{2,\Omega}+\|u_x\|^2_{2,Q_\tau}+\|Mu\|^2_{2,Q_\tau}\right].$$

Où

$$C = \frac{\max\{\mu, c_4, 1\}}{\nu}.$$

En utilisant lemme de Gronwelle, on obtient l'inégalité

$$\|u_x(x,\tau)\|^2_{2,Q_\tau} \leq K\left[\|\varphi_x\|^2_{2,\Omega} + \|Mu\|^2_{2,Q_\tau}\right],$$

en passant on sup par apport a τ sur $[0,T]$

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\|u_x(x,\tau)\|^2_{2,\Omega} \leq K\left[\|\varphi_x\|^2_{2,\Omega} + \|Mu\|^2_{2,Q_\tau}\right],$$

donc

$$\|u\|^2_E \leq K\|Au\|^2_F.$$

Chapitre 4

Un problème mixte pour une équation parabolique d'ordre supérieur avec des conditions intégrales

Dans ce chapitre nous étudions la solvabilité d'un problème mixte avec des conditions intégrales pour l'équation parabolique d'ordre supérieur impaire. L'existence et l'unicité de la solution forte sont établies à l'aide d'inversibilité de la fermeture d'opérateur générée par le problème considéré.

4.1 Formulation du problème

Soit le rectangle $Q_T = \Omega \times (0, T)$ où $T > 0$ et $\Omega = (0, l)$, on considère le problème mixte avec des conditions intégrales pour l' équation aux dérivées partielles de type parabolique d'ordre supérieur

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= u_t + (-1)^m \alpha(t) \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \\ &= f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\ell(u) = u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{4.2}$$

$$u(0,t)=0, \quad 0<t<T, \tag{4.3}$$

$$\int_0^l x^k u(x,t)dx=0, \qquad 0<t<T, \quad k=0,2m-1, \tag{4.4}$$

la fonction donnée $\alpha(t)$ et sa drivée $\alpha_t(t)$ satisfaisant aux conditions

$$\alpha(t)\leq c_0, \ \alpha_t(t)\geq c_1, \tag{4.5}$$

ou les constantes c_0 et c_1 sont strictement positives. $f(x,t)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions données.

Le problème $(4.1)-(4.4)$ peut être écrit sous la forme opérationnelle, on définit L l'opérateur sur E dans F par

$$L=(\mathcal{L},\ell),$$

on pose

$$D(L)=\left\{u\in E:\Im_x^m u_t,\Im_x^m u_x,...,\Im_x^m\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}\in L^2(Q_T)\right\},$$

tel que

$$\Im_x^m u=\int_0^x\int_0^{x_1}...\int_0^{x_{m-1}}u(\xi_{m-1},t)d\xi_{m-1}dx_{m-1}...dx_2dx_1.$$

Avec E est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned}\|u\|_E^2 &= \sup_{0\leq\tau\leq T}\|\Im_x^m u(.,\tau)\|^2_{L^2((0,l))}\\ &= \sup_{0\leq\tau\leq T}\int_0^l(\Im_x^m u(x,\tau))^2dx \quad \forall u(x,t)\in E.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Et F est un espace de Hilbert pour la norme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_F^2 &= \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\Im_x^m \varphi\|_{L^2((0,l))}^2 \\ &= \int_{Q_T} (f)^2 dxdt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi)^2 dx \quad \forall \mathcal{F} = (f, \varphi) \in F, \end{aligned} \tag{4.7}$$

la fonction φ vérifiez les conditions suivantes

$$\int_0^l x^k \varphi(x) dx = 0 \qquad k = \overline{0, 2m-1}, \tag{4.8}$$

et

$$\varphi(0) = 0. \tag{4.9}$$

4.2 Unicité de la solution

Théorème 4.1 *Si $u(x,t) \in E$, et si la fonction $\alpha(t)$ et sa drivée $\alpha_t(t)$ satisfaisant aux conditions* (4.5) *alors on a l'estimation a priori suivante*

$$\|u\|_E \leq c \, \|Lu\|_F \, ,$$

où

$$c = \max \left\{ \frac{l^{4m}}{2^{2m}}, 1 \right\}.$$

Preuve

On pose

$$Mu = (-1)^m \Im_x^{2m} u, \tag{4.10}$$

et

$$Q^\tau = (0, l) \times (0, \tau),$$

prendrons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation (4.1) et l'expression différentielle Mu on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} &= (-1)^m(u_t, \Im_x^{2m}u)_{L^2(Q^\tau)} + (-1)^{2m}(\alpha(t)\frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}, \Im_x^{2m}u)_{L^2(Q^\tau)} \\ &= (-1)^m(u_t, \Im_x^{2m}u)_{L^2(Q^\tau)} + (\alpha(t)\Im_x^{2m}u, \frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}})_{L^2(Q^\tau)} \qquad (4.11)\end{aligned}$$

on intègre par parties le côté droit de l'égalité (4.11) et utiliser les conditions (4.2), (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}(-1)^m(u_t, \Im_x^{2m}u)_{L^2(Q^\tau)} &= (\Im_x^m u_t, \Im_x^m u)_{L^2(Q^\tau)} \\ &= \int_0^l\int_0^\tau \frac{d}{dt}(\Im_x^m u(x,t))\Im_x^m u(x,t)dtdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^\tau \frac{d}{dt}(\Im_x^m u(x,t))^2 dtdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m u(x,t))^2\Big|_{t=0}^{t=\tau} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2 dx,\end{aligned}$$

i.e.

$$(-1)^m(u_t, \Im_x^{2m}u)_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2 dx, \qquad (4.12)$$

d'autre parte

$$\begin{aligned}
(\alpha(t)\Im_x^{2m}u, \frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}})_{L^2(Q^\tau)} &= (\alpha(t)u, \frac{\partial u}{\partial x})_{L^2(Q^\tau)} \\
&= \int_0^\tau \int_0^l \alpha(t)u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l \alpha(t)\frac{\partial}{\partial x}(u(x,t))^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)(u(x,t))^2 dt\Big|_0^l \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)(u(l,t))^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)(u(0,t))^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)(u(l,t))^2 dt,
\end{aligned}$$

on résulte que

$$(\alpha(t)\Im_x^{2m}u, \frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}})_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)(u(l,t))^2 dt. \tag{4.13}$$

Substituons les égalités (4.12) et (4.13) dans l'égalité (4.11)

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(t)(u(l,t))^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx = (\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2 dx. \tag{4.14}$$

Pour estimer le premier terme du côté droite de l'égalité (4.14). On a besoin des lemmes suivants

Lemme 4.1 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\|\Im_x^m u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l^2}{2}\left\|\Im_x^{m-1} u\right\|_{L^2(0,l)} \tag{4.15}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
(\Im_x^m u)^2 &= \Big(\int_0^x \Im_x^{m-1} u(\xi,t)d\xi\Big)^2 \\
&\leq \left[\left(\int_0^x (\Im_x^{m-1} u(\xi,t))^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (1)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&= x.\int_0^x (\Im_x^{m-1} u(\xi,t))^2 d\xi \\
&\leq x.\int_0^l (\Im_x^{m-1} u(\xi,t))^2 d\xi,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\|\Im_x^m u\|_{L^2(0,l)} &\leq \left\| x.\int_0^l (\Im_x^{m-1} u(\xi,t))^2 d\xi \right\|_{L^2(0,l)} \\
&= \|x\|_{L^2(0,l)} \int_0^l (\Im_x^{m-1} u(\xi,t))^2 d\xi \\
&= \frac{l^2}{2} \left\|\Im_x^{m-1} u\right\|_{L^2(0,l)}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 4.2 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\|\Im_x^m u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l^{2m}}{2^m} \|u\|_{L^2(0,l)}. \tag{4.16}$$

Preuve Nous utilisons la preuve par récurrence, on a d'après lemme précédent pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$\|\Im_x^m u\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l^2}{2} \left\|\Im_x^{m-1} u\right\|_{L^2(0,l)},$$

supposons que

$$\left\|\Im_x^{m-1} u\right\|_{L^2(0,l)} \leq \frac{l^{2m-2}}{2^{m-1}} \|u\|_{L^2(0,l)},$$

alors constatons que

$$\begin{aligned}
\|\Im_x^m u\|_{L^2(0,l)} &\leq \frac{l^2}{2}\left\|\Im_x^{m-1} u\right\|_{L^2(0,l)} \\
&\leq \frac{l^2}{2}\cdot\frac{l^{2m-2}}{2^{m-1}}\|u\|_{L^2(0,l)} \\
&= \frac{l^{2m}}{2^m}\|u\|_{L^2(0,l)}\,.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.1 *Les inégalités* (4.15) *et* (4.16) *peuvent être appliquées si on remplace l'intervalle* $(0,l)$ *par une région bornée* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *; il suffit de remplacer* l *par* $mes(\Omega)$ *(mesure de* Ω*).*

Revenons à la preuve du théorème

Par application de l'inégalité de Cauchy avec ε et (4.16) le premier terme du côté droite de l'égalité (4.14), peut être estimé par

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} &\leq \|\mathcal{L}u\|_{L^2(Q^\tau)}\|Mu\|_{L^2(Q^\tau)} \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q^\tau}(\Im_x^{2m}u)^2dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q^\tau}(\mathcal{L}u)^2dxdt \\
&\leq \frac{l^{4m}}{2^{2m+1}}\int\limits_{Q^\tau}(\Im_x^{m}u)^2dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q^\tau}(\mathcal{L}u)^2dxdt, \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

substituons l'égalité (4.17) dans l'identité (4.14), et utiliser la condition (4.5) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{c_0}{2}\int_0^\tau (u(l,t))^2dt + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2dx &\leq c_0\int_0^\tau (u(l,t))^2dt + \int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2dx \\
&\leq (\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2dx. \\
&\leq \frac{l^{4m}}{2^{2m+1}}\int_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2dx \\
&\leq \frac{l^{4m}}{2^{2m+1}}\int_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2dxdt + \int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2dxdt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2dx \\
&\leq c_2\left[\int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2dxdt + \int_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2dxdt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2dx\right],
\end{aligned}$$

i.e.

$$c_0\int_0^\tau (u(l,t))^2dt + \int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2dx \leq c_2\left[\int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2dxdt + \int_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2dxdt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2dx\right] \tag{4.18}$$

avec

$$c_2 = \max\left\{1, \frac{l^{4m}}{2^{2m+1}}\right\},$$

pour éliminer le deuxième terme du membre droit de inégalité ainsi obtenue, on utilise le lemme de Gronwall

$$h(\tau) = c_2\left(\int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2dx + \int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2dxdt\right),$$

$$\int_0^\tau f(t)dt = \int_{Q^\tau} (\Im_x^m u)^2,$$

et

$$g(\tau) = \int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx.$$

$$\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx + c_0 \int_0^\tau (u(l,t))^2 dt \leq c_2 \exp(c_2 T) \left[\int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2 dx dt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2 dx \right].$$

Négligeons le premier terme du membre gauche de l'inégalité précédant

$$\int_0^l (\Im_x^m u(x,\tau))^2 dx \leq c_2 \exp(c_2 T) \left[\int_{Q^\tau} (\mathcal{L}u)^2 dx dt + \int_0^l (\Im_x^m \varphi(x))^2 dx \right], \tag{4.19}$$

puisque la côté droite de l'inégalité ainsi ne dépend pas de τ, par conséquent passons au supremum par rapport a τ de 0 a T, on obtient l'inégalité (4.10) avec

$$c = c_2 \exp(c_2 T).$$

Proposition 4.1 *L'operateur L de E dans F est fermable.*

Preuve La démonstration se fait de la même manière que dans le chapitre 3 section 2. ■
Soit $\overline{L}$ la fermeture de L et $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Corollaire 4.1 *En dessous de la condition* (4.5)*, l'inégalité on peut prolonger* (4.10) *en passant a la limite :*

$$\|u\|_E \leq c \left\| \overline{L}u \right\|_F \qquad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{4.20}$$

Corollaire 4.2 *L'image $R(\overline{L})$ est un fermé de F, $\overline{R(L)} = R(\overline{L})$ et $\overline{L}^{-1} = \overline{L^{-1}}$ avec $\overline{L^{-1}}$ est extension de L^{-1} par continuité de $R(L)$ à $\overline{R(L)}$.*

Définition 4.1 *La solution de l'équation d'opérateur $\overline{L}u = \mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (4.1) - (4.4).*

4.3 Existence de la solution

Théorème 4.1 *Pour tout* $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ *de* F *le problème (4.1) - (4.4) admet une solution forte unique* $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$.

Preuve

Le corollaire (4.1) affirme que si la solution forte du problème $(4.1)-(4.4)$ existe il est unique et dépend continuement du $\mathcal{F}$. Le corollaire (4.2) stipule que il suffit de démontre la densité de l'ensemble $R(L)$ dans l'espace F pour montrer que le problème $(4.1)-(4.4)$ admet solution forte unique. On a besoin la proposition suivante

Proposition 4.2 *Supposons que les conditions de théorème 4.1 soient réalisé, et soit*

$$D_0(L) = \{u \in D(L);\ \ell(u) = 0\}.$$

Si $g \in L^2(Q)$ *et pour tout* $u \in D_0(L)$, *nous avons*

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} = 0. \tag{4.21}$$

Alors la fonction g *s'annule presque partout dans* Q.

Preuve

Premièrement, on définit ϕ par la relation

$$\phi(x,t) = \int_t^T g(x,s)ds, \tag{4.22}$$

soit $\frac{\partial}{\partial t}(\Im_x^{2m}u)$ une solution de l'équation

$$\alpha(t)(\Im_x^{2m}u)_t - \int_t^T \alpha_s(\Im_x^{2m}u)_s ds = \phi(x,t), \tag{4.23}$$

et soit

$$\Im_x^{2m}u = \begin{cases} \int_s^t \alpha_\tau (\Im_x^{2m}u)_\tau d\tau & s \le t \le T, \\ 0 & 0 \le t \le s, \end{cases} \tag{4.24}$$

de (4.22) et (4.23), il s'ensuit que

$$g(x,t) = -(\alpha(t)\Im_x^{2m}u_t)_t - \alpha_t \Im_x^{2m}u_t. \tag{4.25}$$

Nous avons les résultats suivants :

Lemme 4.3 *La fonction g et $\alpha_t \Im_x^{2m}u_t$ appartient à l'espace $L^2(Q_s)$,avec $Q_s = (0, \times l)(s,T)$.*

Preuve De (4.5) et (4.16) on résulte que la fonction $\alpha_t \Im_x^{2m}u_t$ appartient à l'espace $L^2(Q_s)$ il reste prouver que $\alpha(t)\Im_x^{2m}u_{tt} \in L^2(Q_s)$.

On utilise des opérateurs de régularisation (Friedricks)

$$(\rho_\epsilon h)(x,t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\frac{s-t}{\epsilon})h(x,t)ds,$$

avec

$$\omega \in C_0^\infty(0,T),\ \omega(t) \ge 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)dt = 1.$$

Appliquons les operateurs ρ_ϵ et $\frac{\partial}{\partial t}$ a l'équation (4.23) on obtient

$$\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \Im_x^{2m}u_t = -\alpha_t \rho_\epsilon \Im_x^{2m}u_t + \frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \phi + \frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha \rho_\epsilon \Im_x^{2m}u_t - \rho_\epsilon \alpha \Im_x^{2m}u_t\right] + \frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \int_t^T \alpha_s (\Im_x^{2m}u)_s ds, \tag{4.26}$$

il résulte de (4.26) que

$$\begin{aligned} \left\|\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \Im_x^{2m}u_t\right\|_{L^2(Q)}^2 \quad \le \quad & 4\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \phi\right\|_{L^2(Q)}^2 + 4\left\|\alpha_t \rho_\epsilon \Im_x^{2m}u_t\right\|_{L^2(Q)}^2 \\ & +4\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \int_t^T \alpha_s (\Im_x^{2m}u)_s ds\right\|_{L^2(Q)}^2 + 4\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha \rho_\epsilon \Im_x^{2m}u_t - \rho_\epsilon \alpha \Im_x^{2m}u_t\right]\right\|_{L^2(Q)}^2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

en tenant compte des conditions (4.5), lemme 4.2 et utilisant les propriétés des operateurs ρ_ϵ, on a

$$\left\|\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \Im_x^{2m} u_t\right\|^2_{L^2(Q)} \leq K \left\{\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \phi\right\|^2_{L^2(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2(Q)}\right\},$$

avec

$$K = \max\left(2c_1^2 \frac{l^{4m}}{2^{2m}}, 4\right).$$

Comme $\rho_\epsilon h \underset{\epsilon\to 0}{\to} h$ dans $L^2(Q)$ et la norme de $\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \Im_x^{2m} u_t$ est bornée dans $L^2(Q)$ on résulte que $\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\epsilon \Im_x^{2m} u_t \in L^2(Q)$. Ceci permet d'obtenir la preuve du lemme 4.3. ■

Revenons à la démonstration de la proposition en remplaçant $g(x,t)$ dans (4.21) par sa représentation (4.25) on obtient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} &= -\left(u_t, \left(\alpha \Im_x^{2m} u_t\right)_t\right)_{L^2(Q)} - \left(u_t, \alpha \Im_x^{2m} u_t\right)_{L^2(Q)} \\ &\quad +(-1)^{m+1}(\alpha \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}, \left(\alpha \Im_x^{2m} u_t\right)_t)_{L^2(Q)} + (-1)^{m+1}(\alpha \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}, \alpha \Im_x^{2m} u_t)_{L^2(Q)} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.28}$$

en intégrant chaque terme de(4.28) par parties, nous avons

$$-\left(u_t, \left(\alpha \Im_x^{2m} u_t\right)_t\right)_{L^2(Q)} = \frac{(-1)^m}{2}\int_0^l \alpha(s)\left[\Im_x^m u_t(x,s)\right]^2 ds + \frac{(-1)^m}{2}\int_{Q_s} \alpha_t (\Im_x^m u_t)^2 dxdt, \tag{4.29}$$

$$-\left(u_t, \alpha \Im_x^{2m} u_t\right)_{L^2(Q)} = (-1)^{m+1}\int_{Q_s} \alpha_t (\Im_x^m u_t)^2 dxdt, \tag{4.30}$$

$$(-1)^{m+1}(\alpha \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}, \left(\alpha \Im_x^{2m} u_t\right)_t)_{L^2(Q)} = (-1)^m \int_{Q_s} \alpha\alpha_t u_x u_t dxdt + \frac{(-1)^m}{2}\int_s^T \alpha^2 u_t^2(l,s)^2 dt, \tag{4.31}$$

$$(-1)^{m+1}(\alpha \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}, \alpha_t \Im_x^{2m} u_t)_{L^2(Q)} = (-1)^{m+1}\int_{Q_s} \alpha\alpha_t u_x u_t dxdt. \tag{4.32}$$

Combinaison d'égalités (4.28) − (4.32), donne

$$\int_0^l \alpha(s)\left[\Im_x^m u_t(x,s)\right]^2 ds + \int_s^T \alpha^2 u_t^2(l,s)^2 dt = 3\int_{Q_s} \alpha_t (\Im_x^m u_t)^2 dxdt. \tag{4.33}$$

Négligeons le terme $\int_s^T \alpha^2 u_t^2(l,s)^2 dt$ du l'inégalité précédant et utiliser le condition (4.5) on obtient

$$\int_0^l \left[\Im_x^m u_t(x,s)\right]^2 ds \leq \frac{c_1}{c_0}\int_{Q_s} \left(\Im_x^m u_t\right)^2 dxdt, \tag{4.34}$$

on dénote le terme intégral sur le côté droit de (4.34) par $\beta(s)$, alors nous avons

$$-\frac{d\beta(s)}{ds} \leq \frac{c_1}{c_2}\beta(s),$$

et par conséquent

$$-\frac{d}{ds}\left(\beta(s)\exp\left(\frac{c_1}{c_0}s\right)\right) \leq 0, \tag{4.35}$$

en intégrant l'inégalité (4.35) sur (s,T) et en prenant cela $\beta(T) = 0$ on obtient

$$\beta(s)\exp\left(\frac{c_1}{c_0}s\right) \leq 0.$$

D'où il résulte que $g = 0$ presque partout dans Q_{T-s}. Provenant de la même manière un nombre fini d'étapes, on prouve que $g = 0$ presque partout dans Q. Cela complète la preuve de la proposition 4.2.

Pour que nous terminons la démonstration du théorème 3.1, on suppose que pour un élément quelconque $G = (g, g_0) \in R(L)^{\perp}$

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} + (\Im_x^m \ell u, \Im_x^m g_0)_{L^2(0,l)} = 0, \tag{4.36}$$

il faut prouver que $G = 0$. Si nous mettons $u \in D_0(L)$ en (4.36), nous avons

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2(Q)} = 0, \qquad u \in D(L). \tag{4.37}$$

Appliquer la proposition 4.2 à (4.37), il s'ensuit que $g = 0$. Ainsi (4.36) prend la forme

$$(\Im_x^m \ell u, \Im_x^m g_0)_{L^2(0,l)} = 0 \quad u \in D(L) \tag{4.38}$$

Puisque l'ensemble de valeurs de l'operateur de trace est partout dense dans l'espace de Hilbert ayant la norme $\left(\int\limits_0^l (\Im_x^m g_0)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$, alors $g_0 = 0$ i.e. $G = 0$ ce qui achève la théorème 4.2.

Conclusion

Le but de notre travail a été l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problèmes pour des équations paraboliques.

La méthode utilisée dans ce traitement de ce problèmes est la méthode des inégalités énergétiques, Malgré la complexité des calculs techniques des méthodes utilisées, nous avons pu établir l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport des donnés initiales du problème proposé.

Bibliographie

[1] **L. C. Evans**, Partial Differential Equation, Graduate Studies in Mathematics, Volume19

p 353-388.

[2] **Mesloub Said**, Cours de Majister.

[3] **R. Dautray,** Analyse mathématique et calcul numérique, Volume 8 , p 608-612

[4] **A. A. Dezin**, Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekh. Math. Naouk.14. N 3. (37). 22-73. 1959

[5] **Ladyzenskaya O.A.**, Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obš. 7, 1958.

[6] **Ladyzhenskaya O.A.**, The boundary value problems of Mathematical physics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Tokyo 1985.

[7] **Ladyzenskaya O.A.**, On solution of nonstationary operator equations, Mat. Sbornik 39(1956), No 4.

[8] **S. Mesloub, Mezhoudi Rachida**, A mixed problem for a parabolic equation of higher order with integral conditions, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics Vol. 50, No 3, (2002), 59-68.