

Opérateur quotient sur un espace de Hilbert

Présentée par : Djamel Abid

Dirigé par : **Ismail Bouzenada**

Département de Mathématiques

Université Chikh Larbi tébessi

– Tebessa –

Juin 2017

23 mai 2017

TABLE DES MATIÈRES

1	Préliminaires	2
1.1	Espace de Hilbert	2
1.2	Opérateurs bornés	3
1.3	Opérateurs non bornés	6
2	Initiation aux opérateurs quotients	10
2.1	Généralités	10
2.2	Lemme de Douglas	11
2.3	Quotient par l'inverse généralisé	18
3	Opérations sur les opérateurs quotients	23
3.1	Multiplication par un scalaire	23
3.2	Somme	24
3.3	Produit	25
3.4	Itérés	26
3.5	Exemples matriciels	27
4	Caractérisations des opérateurs quotients	30
4.1	Bornitude	30
4.2	Compacité	32
4.3	Inversibilité	33
4.4	Fermeture	34
4.5	Adjoint	36

Dédicace

A mon père et ma mère,

A mes frères et mes soeurs,

A tout mes enseignants d'Universite de Tébessa,

A tout mes amis,

A tout les etudiants de departement de Maths et Inf.

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur de mémoire Monsieur "**Smail Bouzenada**", pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur "**Abdellatif Toualbia**", pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de presider le jury. De même je remercie Madame "**Hakima Degaichia**", pour l'honneur qu'elle m'a fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Enfin, merci à toute ma famille et tous mes amis et tous mes collègues.

Résumé

Soit H un espace de Hilbert complexe et $\mathcal{L}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur H .

Pour $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tels que le noyau de A inclu dans le noyau de B , on définit l'opérateur quotient B/A de l'image de A dans l'image de B pour tout $u \in H$ par : $Au \mapsto Bu$.

Dans ce travail nous étudions la classe des opérateurs quotients, nous présentons des résultats montrent que la somme et le produit préservent le caractère quotient, puis nous donnons comme applications des exemples matriciels.

Dans une autre partie nous étudions les caractérisations topologiques des opérateurs quotients tels que la bornitude, la compacité, l'adjoint, la fermeture,...etc.

Abstact

Let H be a complex Hilbert space and $\mathcal{L}(H)$ be the space of linear and bounded operators on H .

For $A, B \in \mathcal{L}(H)$, such that the kernel of A included in the kernel of B , we define the quotient operator B/A from the range of A to range of B for all $u \in H$ by : $Au \mapsto Bu$.

In this work we study the class of quotient operators, we present results show that the sum and the product preserve the quotient character, and then we give as applications matrix examples.

In another part, we study some topological characterizations of quotient operators such as boundarity, compactness, adjoint, closure,... etc.

Introduction

La notion du quotient est l'une des anciens concepts, bien qu'elle apparaisse dans beaucoup de sciences, sa valeur dans les mathématiques est la plus remarquable. Euclide par exemple, quand il a défini la division euclidienne, il a utilisé la notion du quotient pour décrire la partie entière du résultat de la division euclidienne de deux nombres entiers.

Le mot quotient est utilisé dans plusieurs branches des mathématiques, pour décrire les structures algébriques dont les éléments sont des classes d'équivalences de certaines relations d'équivalences et les espaces comme l'ensemble quotient, le groupe quotient, et aussi l'espace quotient d'un espace topologique dans la théorie de la topologie des espaces...etc.

La notion du quotient des opérateurs est nouvelle, elle est actuellement exploitée par plusieurs chercheurs dans différents domaines de mathématiques pures et appliquées.

La notion d'opérateurs quotients est apparue pour la première fois en 1949 par Jacques Dixmier [2] sous l'appellation (Opérateurs J uniforme). En 1978 l'appellation opérateur quotient avait vu la lumière par Kaufman [16].

Plus tard plusieurs auteurs comme Izumino [10], [11], Koliha [17], Hirasawa et Mesirdi [9], [19] ont étudié les différentes propriétés algébriques, topologiques, et spectrales.

Notre mémoire est d'objectif l'étude des opérateurs quotients et leurs caractérisations algébriques et topologiques.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous abordons les notions de bases nécessaires pour notre sujet. On commence par la définition d'un espace de Hilbert et la définition d'un opérateur borné et l'opérateur non borné, la caractérisation d'opérateur fermé, fermable, compact,...etc et quelques théorèmes et propriétés.

Le deuxième chapitre est une introduction à la notion du quotient des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. On expose un résultat très intéressant dans l'élaboration de notre travail. Ce résultat est connue sous le nom du lemme de Douglas. Ce lemme est incontournable tout au long de ce mémoire, il coupe une place importante dans ce travail.

Au troisième chapitre, Nous étudions les différentes propriétés algébriques d'un opérateur quotient telles que les opérations algébriques usuelles somme, produit, itérés et la multiplication par un scalaire.

Dans le quatrième chapitre, nous précisons également les différentes propriétés topologiques d'un opérateur quotient, telles que la bornitude, la compacité, l'invisibilité,...etc.

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1 Espace de Hilbert

H désigne un espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 1.1.1

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une norme sur H , tel que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in H.$$

Définition 1.1.1

Deux vecteurs x et y dans H sont dit **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Définition 1.1.2

Le **complémentaire orthogonal** d'un sous-ensemble $M \subset H$ est défini par :

$$M^\perp = \{x \in H, \forall y \in M; \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Théorème 1.1.1

Pour x et y dans H , l'inégalité de Cauchy-Schwartz est donnée par :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

1.2 Opérateurs bornés

Définition 1.2.1

Soient H et K deux espaces de Hilbert :

(1) Un opérateur linéaire T de H dans K est **borné** s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

(2) $\mathcal{L}(H, K)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans K , et si $H = K$, on note $\mathcal{L}(H, K) = \mathcal{L}(H)$.

(3) Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, l'**image de** A est l'ensemble défini par $R(T) = \{Tx, x \in H\}$, et le **noyau de** T est l'ensemble défini par $\ker(T) = \{x \in H; Tx = 0\}$.

(4) La **norme** d'un opérateur linéaire borné T est défini par

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

(5) On appelle opérateur **adjoint** de $T \in \mathcal{L}(H)$ l'unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall x, y \in H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle,$$

et de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Remarque

Le caractère borné pour un opérateur linéaire coïncide avec la continuité.

Définition 1.2.2

Si $H = H_1 \oplus H_2$ et $K = K_1 \oplus K_2$ et $T \in \mathcal{L}(H, K)$, alors T prend la forme matricielle

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

où $T_{ij} \in \mathcal{L}(H_j, K_i)$.

Définition 1.2.3

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **auto-adjoint** si $T^* = T$.

Définition 1.2.4

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **isométrique**, si $U^*U = I$.

Définition 1.2.5

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **unitaire**, si $U^*U = UU^* = I$.

Définition 1.2.6

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n = 0$ et est dit **n -nilpotent** si $T^n = 0$ et $T^{n-1} \neq 0$.

Définition 1.2.7

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **idempotent** si $T^2 = T$, et est dit **n -idempotent** si $T^n = T$ avec n est le plus petit entier vérifié $T^n = T$.

Définition 1.2.8

Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est dit **isométrie partielle** s'il existe un sous-espace fermé E dans H tel que :

$$\|Ux\| = \|x\|, \text{ pour tout } x \in E \text{ et } Ux = 0, \text{ pour tout } x \in E^\perp.$$

Définition 1.2.9

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit **positif**, s'il est auto-adjoint et si $(Tx, x) \geq 0$ pour tout $x \in H$. On note $T \geq 0$.

Notation

Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints de $\mathcal{L}(H)$ tels que $A - B$ soit positif, on note $A \geq B$.

Proposition 1.2.1

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est positif si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $T = B^*B$.

Proposition 1.2.2

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est positif si et seulement s'il existe un unique opérateur positif C tel que $T = C^2$. L'opérateur C est appelé **la racine carrée** de T et est noté $C = \sqrt{T}$.

Définition 1.2.10

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. La racine carée de l'opérateur positif T^*T est appelé **la valeur absolue** de T et est noté $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Théorème 1.2.1 (Décomposition polaire)

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe une unique isométrie partielle U définie de $\overline{R(|T|)}$ à valeurs dans $R(T)$, telle que $T = U|T|$. L'unicité de U découle du fait que $N(U) = N(T)$.

Définition 1.2.11

Soit T un opérateur linéaire sur H . On dit que T est **compact** s'il transforme tout sous-ensemble borné de H en un ensemble relativement compact (d'adhérence compact).

En d'autre terme, T est un opérateur compact si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ dans H la suite $(Tx_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans H .

On note par $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H dans lui-même.

Théorème 1.2.2

- (1) $\mathcal{K}(H)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(H)$.
- (2) $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$.

Définition 1.2.12

Un opérateur borné T est dit **de rang fini** si son image est de dimension finie. Le rang de T est la dimension de son image.

L'ensemble des opérateurs de rang fini de H dans H sera noté $\mathcal{K}_0(H)$.

Proposition 1.2.3

- (1) Tout opérateur de rang fini est compact.
- (2) Tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Définition 1.2.13

Un opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$ est dit **inverse généralisé** d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ si $TST = T$.

Théorème 1.2.3

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ admet un inverse généralisé si et seulement si $R(T)$ est fermé dans H .

Corollaire 1.2.1

L'inverse généralisé d'un opérateur borné n'est pas unique.

Théorème 1.2.4

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $R(T)$ est fermé dans H . Alors, il existe un unique opérateur dans $\mathcal{L}(H)$ noté $T^\#$ possède les propriétés suivantes :

1. $TT^\#T = T$.
2. $T^\#TT^\# = T^\#$.
3. $(TT^\#)^* = TT^\#$.
4. $(T^\#T)^* = T^\#T$.

Définition 1.2.14

L'opérateur $T^\#$ défini ci-dessus appelé **l'inverse généralisé de Moore-Penrose** de T .

Remarque

Si T est inversible on a $T^\# = T^{-1}$.

1.3 Opérateurs non bornés

Soit H un espace de Hilbert complexe.

Définition 1.3.1

Un opérateur **non borné** sur H est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset H$ à valeurs dans H . $D(T)$ est appelé le **domaine** de l'opérateur T .

Généralement, on note un opérateur non borné par $(T, D(T))$, mais s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine on note tout simplement T .

Soit T un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dans H . Alors :

- Le **noyau** et l'**image** de T sont respectivement les sous-espace de H définis par

$$N(T) = \{x \in D(T); Tx = 0\} \text{ et } R(T) = \{Tx ; x \in D(H)\}.$$

- Le **graphe** de T est le sous-espace de $H \times H$ donné par

$$G(T) = \{(x; Tx); x \in D(T)\}.$$

- La **norme du graphe** de T est définie pour tout $x \in D(T)$ par

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|.$$

• Les opérations usuelles telles que la somme, le produit et le passage à la limite sont toujours définis dans la classe des opérateurs non bornés, en faisant attention aux domaines. En fait : Si S est un autre opérateur non borné de domaine $D(S)$, on a

$$(T + S)x = Tx + Sx \text{ pour tout } x \in D(T + S) = D(T) \cap D(S), \text{ et}$$

$$(TS)x = T(Sx) \text{ pour tout } x \in D(TS) = \{x \in D(S); Sx \in D(T)\}.$$

L'opérateur T est inversible si il existe un opérateur borné noté T^{-1} dit l'inverse de T défini de H à valeurs dans $D(T)$ tel que $TT^{-1} = I$, où I désigne l'opérateur identité sur H .

Si le domaine $D(T)$ de T est dense dans H , on dit que T est densément défini.

Si T est borné défini partiellement sur un domaine dense $D(T)$ de H , il est alors prolongeable par continuité en un opérateur borné défini sur H tout entier. Au contraire, si T est non borné ce prolongement n'existe pas en général.

- Soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T)$ dans l'espace de Hilbert H .

Définition 1.3.2

On dit que T est **fermé** si son graphe $G(T)$ est un sous-espace fermé de $H \times H$.

Proposition 1.3.1

T est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que $x_n \longrightarrow x \in H$ et $Tx_n \longrightarrow y$ on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Théorème 1.3.1 ([15])

T est fermé si et seulement si $(D(T), \|\cdot\|_T)$ est un espace de Hilbert.

Notation

On note par $C(H)$ L'ensemble des opérateurs fermés dans H et

$$\mathcal{C}(H) = \{T \in C(H); D(T) \text{ est dense } H\}.$$

Remarque

(1) La somme et le produit de deux opérateurs fermés n'est pas forcément un opérateur fermé, il peut aussi être à domaine trivial réduit à $\{0\}$.

(2) Soit S un autre opérateur sur H . Alors :

(a) Si S est borné, alors $T + S$ est fermé si T l'est aussi.

(b) Si S et T sont fermés, alors le produit ST est fermé si S est inversible ou T est borné.

Lemme 1.3.1

Un sous-espace G de $H \times H$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si pour $v \in H$

$$(0.v) \in G \implies v = 0.$$

Définition 1.3.3

Étant donnés deux opérateurs S et T non bornés de domaines respectifs $D(S)$ et $D(T)$ dans H . On dit que S est une **extension** de T où que T est une **restriction** de S et on écrit $T \subset S$ si et seulement si $G(T) \subset G(S)$.

Ceci est équivalent à dire que $T \subset S$ si et seulement si $D(T) \subset D(S)$ et $Tx = Sx$ pour tout $x \in D(T)$.

Définition 1.3.4

Soit T un opérateur fermé de domaine $D(T)$ dense dans H . On note $D(T^*)$ l'ensemble des vecteurs $v \in H$, pour lesquels il existe $y \in H$ tel que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, y \rangle \text{ pour tout } u \in D(T).$$

Pour tout $v \in D(T^*)$, on pose $T^*v = y$ où y est le vecteur vérifiant l'égalité ci-dessus. T^* est appelé l'opérateur **adjoint** de T .

Proposition 1.3.2 ([19])

Soient S et T deux opérateurs de domaines respectifs $D(S)$ et $D(T)$ denses dans H .

On a

1. Si $T \subset S$ alors $S^* \subset T^*$.
2. $T^*S^* \subset (ST)^*$ si $D(ST)$ est dense dans H .
3. $T^*S^* = (ST)^*$ si $S \in \mathcal{L}(H)$.
4. $T^* + S^* \subset (T + S)^*$.
5. $T^* + S^* = (T + S)^*$ si T ou S est borné.
6. Si T est injectif, alors $D(T^{-1})$ est dense dans H et on a $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Définition 1.3.5

Soit T un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dense dans H . On dit que T est :

Symétrique si $T \subset T^*$.

Auto-adjoint si $T = T^*$.

Remarque

Soit T opérateur de domaine $D(T)$ dense dans H . Alors :

1. Si T est symétrique borné, il est alors auto-adjoint.
2. Si T est symétrique, alors $D(T) \subset D(T^*)$ ce qui implique que T^* est densément défini.
3. Si T est auto-adjoint, bijectif sur son image dense dans H . Alors l'opérateur inverse T^{-1} est aussi auto-adjoint.

CHAPITRE 2

Initiation aux opérateurs quotients

2.1 Généralités

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et $G(A, B) = \{(Au, Bu) : u \in H\}$ un sous ensemble de $H \times H$. Alors, $G(A, B)$ est le graphe d'un opérateur linéaire T sur H si pour tout $u \in H$

$$Au = 0 \Rightarrow Bu = 0.$$

Ce qui revient à dire que $G(A, B)$ est un graphe si et seulement si $N(A) \subset N(B)$. Dans ce cas T sera l'application définie par la relation suivante

$$\forall u \in H \quad Au \longmapsto Bu.$$

Ou encore, $Bu = T Au$ pour tout $u \in H$. On pose $T = B/A$. Nous avons alors la définition suivante :

Définition 2.1.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $N(A) \subset N(B)$. On appelle le quotient de B par A et on note B/A l'opérateur : $Au \longmapsto Bu$ pour tout $u \in H$. Il découle de cette définition que

1. Le domaine du quotient B/A est $D(B/A) = R(A)$.
2. L'image du quotient B/A est $R(B/A) = R(B)$.
3. Le graphe du quotient B/A est $G(A, B)$.

Nous avons trivialement pour tout opérateur A dans $\mathcal{L}(H)$.

1. $A = A/I$ avec I est l'opérateur identité sur H .

2. $A = A^n/A^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Si A est inversible, alors $A^{-1} = I/A$.

Remarque

1. L'opérateur quotient B/A peut être vu comme étant la solution X de l'équation abstraite $B = XA$.
2. Le quotient de deux opérateurs bornés n'est pas forcément un opérateur borné.

Exemple

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans \mathbb{R} définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $N(A) = N(B) = E$ avec E est l'espace engendré par le vecteur $(1, 1, 1)^t$. Le quotient B/A est donc la solution de l'équation $XA = B$.

$$B/A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Lemme de Douglas

Lemme 2.2.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $R(B) \subset R(A)$.
2. $BB^* \leq \lambda AA^*$ pour $\lambda > 0$.
3. Il existe $C \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = AC$.

De plus, si l'une de ces conditions est réalisée, il existe alors un unique opérateur C tel que :

- (a) $\|C\| = \inf\{\mu > 0; AA^* \leq \mu BB^*\}$,
- (b) $N(B) = N(C)$,
- (c) $R(C) \subset \overline{R(A^*)}$.

Preuve

$$(3) \Rightarrow (2)$$

On suppose que $B = AC$ où $C \in \mathcal{L}(H)$. Alors,

$$BB^* = ACC^*A^* = \|C\|^2 AA^* - A(\|C\|^2 I - CC^*)A^* \leq \|C\|^2 AA^*,$$

car

$$A(\|C\|^2 I - CC^*)A^* \geq 0.$$

En effet, pour tout $u \in H$ on a

$$\begin{aligned} \langle A(\|C\|^2 I - CC^*)A^*u, u \rangle &= \langle (\|C\|^2 I - CC^*)A^*u, A^*u \rangle \\ &= \langle \|C\|^2 A^*u, A^*u \rangle - \langle CC^*A^*u, A^*u \rangle \\ &= \|C\|^2 \|A^*u\|^2 - \|C^*A^*u\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (1) C'est claire.

(1) \Rightarrow (3) Supposons maintenant que $R(B) \subset R(A)$.

Pour tout $f \in H$ on a : $Bf \in R(B) \subset R(A)$, il existe alors $h \in (N(A))^\perp$ tel que $Ah = Bf$.

Soit C_1 un opérateur défini de H dans H par $C_1 f = h$. Alors, $\forall f \in H$, $Bf = AC_1 f$, i.e $B = AC_1$.

Montrons que C_1 est borné .

On sait d'après le théorème du graphe fermé que C_1 est borné si seulement si le graphe G_1 de l'opérateur C_1 est fermé dans $H \times H$.

Vérifions que G_1 est fermé : Soit $(f_n, h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_1 telle que :

$$\lim(f_n, h_n) = (f, h) \in H \times H.$$

Alors

$$\lim Bf_n = Bf \quad \text{et} \quad \lim Ah_n = Ah.$$

Ainsi, $Bf = Ah$ et $h \in (N(A))^\perp$. D'où, $C_1 f = h$, et par conséquent G_1 est fermé et donc C_1 est borné .

(2) \Rightarrow (3) Supposons que $BB^* \leq \lambda^2 AA^*$.

Soit D une application définie de $R(A^*)$ dans $R(B^*)$ par $D(A^*f) = B^*f$. Alors

$$\|D(A^*f)\|^2 = \|B^*f\|^2 = \langle B^*f, B^*f \rangle = \langle BB^*f, f \rangle \leq \lambda^2 \langle AA^*f, f \rangle = \lambda^2 \|A^*f\|^2.$$

Donc, on peut prolonger D sur $R(A^*)$ en posant $D = 0$ sur $(R(A^*))^\perp$. Alors, $DA^* = B^*$.

Posons $D = C_2^*$. On a donc $B = AD$ et par conséquent (2) implique (3).

De plus

$$N(D) = N(C_2^*) = (R(C_2))^{\perp} = (R(B^*))^{\perp} = N(B)$$

et

$$(R(A^*))^{\perp} \subset N(C_2) = (R(D))^{\perp}.$$

Donc

$$R(D) \subset \overline{R(A^*)}.$$

Montrons que D est unique :

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = AT$ et $R(T) \subset R(A^*)$. Alors $B = AT$ implique que

$$T^*A^* = B^* = D^*A^*.$$

D'où, $Tf = Df$ pour tout $f \in R(A^*)$.

Si $f \in (R(A^*))^{\perp}$, alors $f \in (R(T))^{\perp} = N(T^*)$, i.e $T^*f = D^*f = 0$, ainsi, $D = T$.

Remarque

L'unique opérateur C vérifiant les assertions (a), (b) et (c) est appelé la solution de Douglas de l'équation abstraite $B = AX$.

Corollaire 2.2.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et $AB = BA$ alors l'unique solution D de Douglas de $AX = B$ est exactement le quotient B/A .

Preuve

En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned} AB = BA &\Leftrightarrow AAD = ADA \\ &\Leftrightarrow AAD - ADA = 0 \\ &\Leftrightarrow A(AD - DA) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $R(AD - DA) \subset N(A)$.

D'autre part, comme $R(D) \subset \overline{R(A^*)} = (N(A))^{\perp}$, on a

$$R(AD - DA) \subset R(A) + R(D) \subset (N(A))^{\perp}.$$

D'où,

$$\left. \begin{array}{l} R(AD - DA) \subset N(A) \\ R(AD - DA) \subset (NA)^\perp \end{array} \right\} \implies R(AD - DA) = \{0\}.$$

Identiquement, $AD = DA$ et par conséquent : $B = AD = DA$, alors $D = B/A$.

Remarquons d'après la preuve précédente que

$$BB^* \leq \lambda^2 AA \Leftrightarrow \|B^*u\| \leq \lambda \|A^*u\|, \forall u \in H$$

Remarque

Si $R(A) = R(B)$ il existe alors deux opérateurs C et D définis respectivement de H dans $N(B)^\perp$ et de H dans $N(A)^\perp$ tels que $B = AC$ et $A = BD$. Les opérateurs DC et CD sont respectivement les opérateurs indentités sur $N(B)^\perp$ et $N(A)^\perp$. Si on suppose maintenant que A et B ont le même noyau on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.2.2 ([5])

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un opérateur inversible C tel que $B = AC$ si et seulement si A et B ont les mêmes images et noyaux.

Corollaire 2.2.3

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$, tels que $R(B) \subset (A)$ et $AB = BA$. Alors, il existe $C \in \mathcal{L}(H)$; $B = AC$ et $AC = CA$.

Preuve

On se limite à prouver que $AC = CA$.

$$\begin{aligned} AB = BA &\iff AAC = ACA \\ &\iff AAC - ACA = 0 \\ &\iff A(AC - CA) = 0. \end{aligned}$$

Alors, $R(AC - CA) \subset N(A)$. D'autre part on a $R(C) \subset N(C^*)^\perp \subset N(A)^\perp$.

Ainsi,

$$R(AC - CA) \subset R(A) + R(C) \subset (N(A))^\perp.$$

D'où, $AC = CA$.

Théorème 2.2.1

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Alors,

$$R(A) + R(B) = R(\sqrt{AA^* + BB^*}).$$

Preuve

Soit

$$T = \begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un opérateur sur $H \oplus H$. On a d'une part $R(T) = (R(A) + R(B)) \oplus \{0\}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} R(T) &= R(TT^*)^{1/2} \\ &= R\left(\begin{pmatrix} AA^* + BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= R(AA^* + BB^*)^{1/2} \oplus \{0\}. \end{aligned}$$

D où,

$$R(A) + R(B) = R(AA^* + BB^*)^{1/2}.$$

Définition

Posons $\mathcal{R}_{A,B} = \sqrt{AA^* + BB^*}$. Il est clair que $R(A) \subset R(\mathcal{R}_{A,B})$ et $R(B) \subset R(\mathcal{R}_{A,B})$. Il existe alors d'après le lemme de Duglous deux opérateurs bornés X et Y tels que $\mathcal{R}_{A,B}X = A$ et $\mathcal{R}_{A,B}Y = B$.

L'opérateur $AA^* \oplus BB^* = AX^*YB^*$ est appelé **la somme parallèle** de AA^* et BB^* .

Lemme 2.2.2

Soient A, B, X, Y et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A,B}$ les opérateurs définis ci-dessus. Alors :

1. $XX^* + YY^* = P$ est la projection orthogonale de $R(\mathcal{R})$ sur $\overline{R(\mathcal{R})}$.
2. $AA^* \oplus BB^* = BB^* \oplus AA^* = A(I - X^*X)A^* = B(I - Y^*Y)B^*$.

Preuve

1. On pose $Q = XX^* + YY^*$. On a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Q\mathcal{R} &= \mathcal{R}(XX^* + YY^*)\mathcal{R} \\ &= \mathcal{R}XX^*\mathcal{R} + \mathcal{R}YY^*\mathcal{R} \\ &= AA^* + BB^* = \mathcal{R}^2. \end{aligned}$$

Or : $\mathcal{R}(Q - P)\mathcal{R} = 0$. D'où, $R((Q - P)\mathcal{R}) \subset N(\mathcal{R})$.

Comme

$$\begin{cases} N(\mathcal{R}) \subset N(X^*) \\ N(\mathcal{R}) \subset N(Y^*) \end{cases},$$

on a

$$\begin{cases} R(X) \subset N(\mathcal{R})^\perp \\ R(Y) \subset N(\mathcal{R})^\perp \end{cases}.$$

Ainsi, $R(Q - P)\mathcal{R} \subset R(Q - P) \subset N(\mathcal{R})^\perp$. D'où, $(Q - P)\mathcal{R} = 0$, et comme $R(Q - P) = 0$, on aura $Q - P = 0 \Rightarrow Q = P = XX^* + YY^*$.

2. Comme $PX = X$, $PY = Y$ et d'après (1), on a XX^* commute avec YY^* .

D'où,

$$\begin{aligned} AA^* \oplus BB^* &= AX^* \oplus YB^* = \mathcal{R}XX^*YY^*\mathcal{R} \\ &= \mathcal{R}YY^*XX^*\mathcal{R} = BY^*XA^* \\ &= BB^* \oplus AA^*. \end{aligned}$$

Montrons les égalités restantes :

$$\begin{aligned} AA^* \oplus BB^* &= AX^*YB^* = AX^*YY^*\mathcal{R} \\ &= AX^*(P - XX^*)\mathcal{R} \\ &= A(X^* - X^*XX^*)\mathcal{R} \\ &= A(I - X^*X)X^*\mathcal{R} \\ &= A(I - X^*X)A^*. \end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$BB^* + AA^* = B(I - Y^*Y)B^*.$$

Remarque

L'opérateur $AA^* \oplus BB^*$ est un opérateur borné positif.

En effet $\forall u \in H$:

$$\begin{aligned} \langle (AA^* \oplus BB^*)u, u \rangle &= \langle A(I - X^*X)A^*u, u \rangle \\ &= \langle A(I - X^*X)^{1/2}(I - X^*X)^{1/2}A^*u, u \rangle \\ &= \langle (I - X^*X)^{1/2}A^*u, (I - X^*X)^{1/2}A^*u \rangle \\ &= \|(I - X^*X)^{1/2}A^*u\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Alors :

1. $R(\sqrt{AA^* \oplus BB^*}) = R(A) \cap R(B)$.
2. $R(\sqrt{(I - Y^*Y)}) = B^{-1}(R(A) \cap R(B)) = B^{-1}(R(A))$.

Preuve

Posons $\mathcal{R}^\oplus = \mathcal{R}_{A,B}^\oplus = \sqrt{AA^* \oplus BB^*}$.

(1) Montrons que $R(\mathcal{R}^\oplus) = R(A) \cap R(B)$.

Comme $R(S) = R(SS^*)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$ et d'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} R(\mathcal{R}^\oplus) &= R(A(I - X^*X)^{\frac{1}{2}}) \subset R(A) \\ &= R(B(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}) \subset R(B). \end{aligned}$$

D'où,

$$R(\mathcal{R}^\oplus) \subset R(A) \cap R(B).$$

Inversement

Soit $y \in R(A) \cap R(B)$, il exist alors $u, v \in H$ tels que $y = Au = Bv$.

$$\begin{aligned} Au - Bv = 0 &\iff \mathcal{R}Xu - \mathcal{R}Yv = 0 \\ &\iff \mathcal{R}(Xu - Yv) = 0. \end{aligned}$$

D'où, $X^*((Xu - Yv)) = 0$ On a donc

$$u = (I - X^*X)u + X^*Yv \in R(I - X^*X) + R(X^*Y).$$

Or d'après le théorème 2.2.1 on a

$$\begin{aligned} R(I - X^*X) + R(X^*Y) &= R((I - X^*X)^2 + (X^*Y)(X^*Y)^*)^{\frac{1}{2}} \\ &= R(I - X^*X)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$u \in R(I - X^*X)^{\frac{1}{2}} \implies Au \in R(A(I - X^*X))^{\frac{1}{2}} = R(\mathcal{R}^\oplus).$$

D'où, $y \in R(\mathcal{R}^\oplus)$.

(2) Montrons que $R(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}} = B^{-1}(R(A) \cap R(B)) = B^{-1}(R(A))$.

Comme

$$R(B(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}}) = R(\mathcal{R}^\oplus) = R(A) \cap R(B),$$

on a

$$R(I - Y^*Y)^{\frac{1}{2}} \subset B^{-1}(R(A) \cap R(B)) = B^{-1}(R(A))$$

Inversement, si

$$u \in B^{-1}(R(A) \cap R(B)) \Rightarrow Bu \in R(B(I - Y^*Y)^{1/2}),$$

On pose,

$$u = (I - Y^*Y)^{1/2}v + w \text{ où } v \in H \text{ et } w \in N(B).$$

Or,

$$w \in R((I - Y^*Y)^{1/2}), \text{ car } B = \mathcal{R}Y \Rightarrow B^* = \mathcal{R}Y^* \text{ et } \overline{R(B^*)} = \overline{R(Y^*)} \Rightarrow N(B) = N(Y).$$

D'où,

$$u \in R(I - Y^*Y)^{1/2}.$$

2.3 Quotient par l'inverse généralisé

Proposition 2.3.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ si $R(B) \subset R(A)$ et $R(A)$ est fermé on a : $\{CB, ACA = A\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation de douglas $AX = B$.

Preuve

En effet : $A(CB) = ACB = B$ car AC est la projection orthogonale sur $R(A)$, on sait d'après le lemme de Douglas qu'il existe une solution unique D de l'équation $AX = B$ pour laquelle $R(D) \subset R(A^*)$.

D'où, $D \in M$. Par conséquent, il existe un inverse généralisé unique C de A tel que $D = CB$.

Théorème 2.3.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et M un sous-espace fermé dans H tel que $N(A) \oplus M = H$. Alors il existe une solution unique X_M de l'équation $AX = B$, telle que $R(X_M) \subset M$.

Preuve

Le preuve est similaire a celle du théorème de Douglas

Remarque

La solution X_M est dite solution réduite de l'équation $AX = B$ sur le sous-espace M .

Proposition 2.3.2 ([7])

Soient A, B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et M un sous-espace fermé dans H tel que $N(A) \oplus M = H$.

Si $R(A)$ est fermé dans H , alors Y est la solution de réduite de l'équation $AX = B$ sur M si et seulement si $Y = \widehat{A}B$ où \widehat{A} vérifié les conditions (1) et (2) de Moore-Penrose.

Proposition 2.3.3 ([7])

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent, si $R(A)$ est fermé dans H et $Y \in \mathcal{L}(H)$, alors Y est la solution réduite de l'équation $AX = B$ si et seulement si $Y = CB$, où C vérifié les conditions (1) et (2), de l'inverse généralisé de Moore-Penrose.

Corollaire 2.3.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $R(A)$ est fermé et $R(B) \subset R(A)$. Alors $A^\#B$ est la solution de Douglas de l'équation $B = AX$.

Preuve

En effet : Il suffit de poser $M = R(A^*)$.

Définition

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$.

On dit que A majore B , s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $u \in H$ on a $\|Bu\| \leq M \|Au\|$.

Proposition 2.3.4

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A majore B .
2. Il existe $V \in \mathcal{L}(R(A), H)$ tel que $B = VA$ ou bien $V = B/A$.
3. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans H telle que $\|Ax_n\| \rightarrow 0$, alors $\|Bx_n\| \rightarrow 0$.

Preuve

(1) \Rightarrow (3)

On suppose que A majore B , il existe alors $M > 0$ tel que pour tout u dans H $\|Bu\| \leq M \|Au\|$. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments dans H telle que, $\|Ax_n\| \rightarrow 0$, on a alors

$$\|Bx_n\| \leq M \|Ax_n\| \rightarrow 0, \text{ D'où } \|Bx_n\| \rightarrow 0,$$

(3) \Rightarrow (2)

Supposon que pour toute suite $(x_n)_n$ dans H telle que $\|Ax_n\| \rightarrow 0$, alors $\|Bx_n\| \rightarrow 0$. On a danc comme conséquence immédiate $N(A) \subset N(B)$.

Alors on peut définir un opérateur $V = B/A$ de $R(A)$ dans H tel que $VAu = Bu$, pour tout u dans H D'où $B = VA$.

On a de plus V est continu sur $R(A)$. En effet :

Pour toute suite $(Ax_n)_n$ d'éléments de $R(A)$ convergente vers Ax , on a :

$$\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|A(x_n - x)\| \rightarrow 0.$$

Ainsi $\|B(x_n - x)\| \rightarrow 0$ d'après (3)

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|V(Ax_n) - V(Ax)\| &= \|V(Ax_n - Ax)\| \\ &= \|VA(x_n - x)\| \\ &= \|B(x_n - x)\|. \end{aligned}$$

D'où V est continu sur $R(A)$, il est donc prolongeable sur $\overline{R(A)}$ et par conséquent (2) est vérifiée.

(2) \Rightarrow (1)

Supposons qu'il existe $V = B/A$ défini de $\overline{R(A)}$ dans H tel que $B = VA$. On a danc pour tout u dans H ,

$$VAu = Bu \Rightarrow \|VAu\| = \|Bu\|.$$

Or,

$$\|VAu\| \leq \|V\| \|Au\|,$$

ainsi

$$\|Bu\| \leq \|V\| \|Au\|.$$

Ce qui montre que A majore B

Remarque

La condition A majore B est plus forte que $N(A) \subset N(B)$.

Proposition 2.3.5

Soient A et B deux opérateurs bornés tels que $R(A)$ est fermé dans H et $N(A) \subset N(B)$, Alors A majore B .

Théorème 2.3.3

Soient A et B deux opérateurs bornés dans H tels que ;

1. $R(A)$ est fermé dans H ,
2. $N(A) \subset N(B)$,
3. $R(B) \subset R(A)$.

Alors

- (a). A majore B
 - (b). Il existe $V = BA^\# \in \mathcal{L}(R(A), H)$ et $B = VA$.
 - (c). L'équation $AX = B$ admet une solution de Douglas $D = A^\#B$.
- Si de plus A commute avec B on a : $V = D = A^\#B = BA^\#$.

Preuve

On se limite à montrer le cas où A commute avec B .

Comme $AB = BA$, on a :

$$\begin{aligned} A^\#AB &= A^\#BA \Rightarrow B = A^\#BA \\ &\Rightarrow BA^\# = A^\#BAA^\# \\ &\Rightarrow BA^\# = A^\#B . \end{aligned}$$

Remarque

Si A est inversible on a $V = BA^{-1}$ et $D = A^{-1}B$.

Si de plus $AB = BA$, on a : $BA^{-1} = A^{-1}B$.

Corollaire 2.3.4

Si A majore B on a $B/A = BA^\#$ est borné sur H .

Preuve

En effet :

Si A majore B , il existe d'après le lemme de Douglas un opérateur borné C_1 tel que $B^* = A^*C_1$, ou bien $B = C_1^*A$.

D'où, $B/A \subset C_1^* = C$. Ainsi C est une extension bornés de B/A et par conséquent B/A est borné.

CHAPITRE 3

Opérations sur les opérateurs quotients

On définit dans ce qui suit la somme et le produit de deux opérateurs quotients et on va établir que ces opérations préservent le caractère quotient.

Etant donnés deux opérateurs quotients B/A et D/C tels que $N(A) \subset N(B)$ et $N(C) \subset N(D)$. Alors,

$B/A + D/C$ et $(B/A)(D/C)$ sont des opérateurs linéaires définis respectivement sur $R(A) \cap R(C)$ et $CD^{-1}(R(A))$.

Soient $\mathcal{R}_{A,C} = \sqrt{(AA^* + CC^*)}$ et $\mathcal{R}_{A,D} = \sqrt{(AA^* + DD^*)}$ et on considère les équations $\mathcal{R}_{A,C}X = A$, $\mathcal{R}_{A,C}Y = C$ et $\mathcal{R}_{A,D}Z = D$.

On a d'après le théorème 2.2.4

1. $R(\sqrt{AA^* \oplus CC^*}) = R(A) \cap R(C)$.
2. Si $A = (I - Z^*Z)^{1/2}$, alors $R(A) = D^{-1}(R(A))$.

3.1 Multiplication par un scalaire

Proposition 3.1.1

Soient A et B deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors,

1. $\lambda(B/A) = (\lambda B/A)$.
2. $(1/\mu)(B/A) = (B/\mu A)$.

Preuve

Comme $R(A)$ et $R(B)$ sont des sous-espaces vectoriels, alors

1. Pour tout $x \in H$

$$\lambda(B/A)Ax = \lambda Bx = (\lambda B)x = (\lambda B/A)Ax.$$

D'où,

$$\lambda(B/A) = (\lambda B/A).$$

2. Pour tout $x \in H$

$$(B/\mu A)(Ax) = (B/\mu A)(\mu A(1/\mu)x) = B(1/\mu)x = (1/\mu)Bx = (1/\mu)(B/A)Ax.$$

D'où,

$$(1/\mu)(B/A) = (B/\mu A).$$

3.2 Somme

Théorème 3.2.1

Soit $A, B, C, D \in \mathcal{L}(H)$ et $B/A, D/C$ deux opérateurs quotients. Alors,

$$B/A + D/C = (BC' + DA')/R_{A,C}^{\oplus},$$

où $R_{A,C}^{\oplus} = \sqrt{AA^* + CC^*}$ et C' et A' sont respectivement les solutions X et Y de Douglas des équations $AX = R_{A,C}^{\oplus}$ et $CY = R_{A,C}^{\oplus}$.

Preuve

L'idée de la preuve est de réduire au même dénominateur les deux opérateurs quotients B/A et D/C . Comme

$$D(B/A) = R(A) \text{ et } D(D/C) = R(C),$$

alors, on dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est un "dénominateur commun" de B/A et D/C si

$$R(T) = R(A) \cap R(C).$$

Prenons $T = R_{A,C}^{\oplus}$. On a d'après ce qui précède $R(R_{A,C}^{\oplus}) = R(A) \cap R(C)$ est incluse dans $R(A)$ et $R(C)$. D'où, l'existence de X et Y tels que

$$AX = R_{A,C}^{\oplus} \text{ et } CY = R_{A,C}^{\oplus}.$$

De plus, BX/AX et DY/CY sont respectivement les restrictions de B/A et D/C sur leur domaine commun $R(R_{A,C}^\oplus)$. Donc, la somme $(B/A) + (D/C)$ est l'application

$$R_{A,C}^\oplus u \longmapsto BXu + DY u$$

pour tout $u \in H$.

3.3 Produit

Théorème 3.3.1

Soit $A, B, C, D \in \mathcal{L}(H)$ et $B/A, D/C$ deux opérateurs quotients. Alors,

$$(B/A)(D/C) = BD'/CA',$$

où D' est la solution Z de Douglas de l'équation $AZ = DA'$.

Preuve

Notons par D_\times le domaine du produit $(B/A)(D/C)$. Alors,

$$\begin{aligned} &= \{Cv : Dv \in R(A), v \in H\} \\ &= \{Cv : v \in D^{-1}(R(A))\} \\ &= CD^{-1}(R(A)). \end{aligned}$$

Soit $A' \in \mathcal{L}(H)$ tel que $R(A') = D^{-1}(R(A))$. Alors $D_\times = R(CA')$. D'autre part la condition $R(DA') \subset R(A)$ est équivalente à dire qu'il existe un opérateur borné noté D' tel que $DA' = AD'$.

La restriction de D/C sur $R(CA')$ est application

$$CA'u \longmapsto DA'u \text{ avec } u \in H.$$

Donc, on a par la composition des applications pour tout $u \in H$

$$CA'u \longmapsto DA'u = AD'u \longmapsto BD'u.$$

Le produit $(B/A)(D/C) = BD'/CA'$.

Remarque.

Notons que la représentation en quotient de la somme de B/A et D/C n'est pas unique. En effet : Pour la somme, il suffit de remplacer l'opérateur $\sqrt{AA^* \oplus CC^*}$ par n'importe quel opérateur T tel que $R(T) = R(A) \cap R(C)$ et pour le produit on remplace l'opérateur A' par n'importe quel opérateur borné S tel que $R(S) = D^{-1}(R(A))$.

Dans ce cas les opérateurs C' , A' et D' sont respectivement les solutions de Douglas des équations $AX = T$, $CY = T$ et $AZ = DS$.

L'unique représentation irréductible de la somme (resp. du produit) est celle du théorème précédent.

3.4 Itérés

Notons au départ qu'on en a besoin de supposer que $R(B) \subset R(A)$, pour qu'on puisse définir les itérés de B/A .

Théorème 3.4.1

Soit B/A un opérateur quotient tel que $AB = BA$ et $R(B) \subset R(A)$. Alors,

$$(B/A)^n = B^n/A^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Preuve

Il suffit de procéder par récurrence sur les valeurs de n en utilisant la définition du produit des quotients.

Le quotient B/A est nilpotent (resp. idempotent) si $R(B) \subset R(A)$ et $(B/A)^2 = 0$ (resp. $(B/A)^2 = (B/A)$). Ceci implique immédiatement à l'aide du lemme de Douglas le résultat suivant.

Proposition 3.4.1 ([6])

Le quotient B/A est nilpotent (resp. idempotent) si la solution X de Douglas de l'équation $AX = B$ est nilpotente (resp. idempotente).

Corollaire 3.4.1

Il découle de la proposition précédente que le quotient de deux opérateurs idempotents est idempotent et si B est nilpotent alors B/A l'est aussi.

D'une manière générale, pour $n \in \mathbb{N}$, B/A est n -nilpotent (resp. n -idempotent) si $AX = B$ et $X^n = 0$ (resp. $X^n = X$). Le quotient B/A est dit quasi-nilpotent si son rayon spectral est nul. Autrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(B/A)^n Ax\|^{1/n} = 0.$$

Théorème 3.4.2

Le quotient B/A est quasi-nilpotent si la solution X de Douglas de l'équation $AX = B$ est quasi-nilpotente.

Preuve

Comme

$$\|(B/A)^n Ax\|^{1/n} = \|AX^n x\|^{1/n} \text{ pour tout } x \in H.$$

Alors, si X est quasi-nilpotent on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(B/A)^n Ax\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\|^{1/n} \|X^n x\|^{1/n} = 0.$$

3.5 Exemples matriciels

Soient A, B, C et D les quatre matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculons B/A et D/C

En effet : Comme A et C sont inversibles on a

$$B/A = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 1.754 & -0.25 \end{pmatrix}, D/C = DC^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ -4.5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons $B/A + D/C$.

On a d'après la définition de la somme de deux matrices

$$B/A + D/C = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ -2.75 & 3.75 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant $B/A + D/C$ comme étant la somme de deux quotients. On a

d'après le théorème 3.2.1

$$B/A + D/C = (BC_1 + DA_1)/\mathcal{R}^\oplus,$$

où $\mathcal{R}^\oplus = \mathcal{R}_{A,C}^\oplus = \sqrt{AA^* \oplus CC^*}$.

Calculons \mathcal{R}^\oplus . On a par définition $\mathcal{R}^\oplus = \sqrt{AA^* \oplus CC^*} = AX^*YC^*$ où X et Y sont les solutions de Douglas de $\mathcal{R}X = A$ et $\mathcal{R}Y = C$, où $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A,C} = \sqrt{AA^* + CC^*}$. D'où,,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 3.685322 & 2.901448 \\ 2.901448 & 5.965031 \end{pmatrix}.$$

De plus, $X = \mathcal{R}^{-1}A$ et $Y = \mathcal{R}^{-1}C$.

Ainsi

$$\mathcal{R}^\oplus = \begin{pmatrix} 0.794575 & 0.974576 \\ 0.802084 & 1.726026 \end{pmatrix}.$$

Calculons C_1 et A_1 .

On a : $AC_1 = \mathcal{R}^\oplus$ et $CA_1 = \mathcal{R}^\oplus$, alors, $C_1 = A^{-1}\mathcal{R}^\oplus$ et $A_1 = C^{-1}\mathcal{R}^\oplus$. D'où

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.554347 & 0.902173 \\ 0.858695 & 1.554347 \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 0.550869 & 1.380434 \\ 0.0978260 & -0.076087 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} B/A + D/C &= (BC_1 + DA_1)/\mathcal{R}^\oplus = (BC_1 + DA_1)(\mathcal{R}^\oplus)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ -2.75 & 0.75 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Calculons $(B/A) (D/C)$

D'après la définition du produit matriciel

$$(B/A) (D/C) = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Calculons $(B/A) (D/C)$ comme étant le produit de deux quotients. On a d'après le théorème 3.3.1

$(B/A) (D/C) = BD_2/CA_2$, où D_2 est la solution Z de Douglas de l'équation $AZ = DA_2$ avec $A_2 = (I - Y^*Y)^{1/2}$ et Y est la solution de Douglas de l'équation $\mathcal{R}_{A,D}Y = D$.

Commençons tout d'abord par le calcul de $\mathcal{R}_{A,D}$, Y et A_2 .

$$\mathcal{R}_{A,D} = \begin{pmatrix} 3.443782 & 1.772107 \\ 1.772107 & 4.456414 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{A,D}Y = D &\Leftrightarrow Y = \mathcal{R}_{A,D}^{-1}D \\ &\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0.294637 & 0.8004978 \\ 0.556023 & 0.128721 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.737746 & -0.244452 \\ -0.244452 & 0.5251796 \end{pmatrix}.$$

Calculons D_2 .

$$\begin{aligned} AD_2 = DA_2 &\Leftrightarrow D_2 = A^{-1}(DA_2) \\ &\Leftrightarrow D_2 = \begin{pmatrix} 0.125518 & 0.735725 \\ 0.616618 & 0.350909 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où,

$$(B/A)(D/C) = BD_2/CA_2 = BD_2(CA_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 4

Caractérisations des opérateurs quotients

Soient A et B deux opérateurs linéaires bornés sur H .

4.1 Bornitude

Vu que le quotient B/A est la solution de l'équation $B = XA$, il sera donc utile d'établir un lien entre la notion de la solution de Douglas d'une équation de type $B = AX$, (quand elle existe) et celle d'un opérateur quotient B/A afin d'explicitier quelques critères de bornitude de ce dernier.

On a d'après le corollaire 2.2.3 si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que $R(B) \subset R(A)$ et $AB = BA$ alors il existe $D \in \mathcal{L}(H)$; $B = AD$ et $AD = DA$.

Par conséquent si A commute avec B alors la solution D de Douglas de l'équation $B = AX$ est une extension bornée de B/A , ce qui montre que le quotient B/A est borné

Théorème 4.1.1

B/A est borné si et seulement si $R(B^*) \subset R(A^*)$.

Preuve

L'inclusion $R(B^*) \subset R(A^*)$ entraîne (d'après le lemme de Douglas) l'existence d'un opérateur $D^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B^* = A^*D^*$.

Ceci montre en passant à l'adjoint que $B = DA$.

D est une extension bornée de B/A . D'où B/A est borné.

Inversement, si B/A est borné, on a $B = (B/A)A$. Ce qui équivaut d'après le lemme de Douglas en passant à l'adjoint à $R(B^*) \subset R(A^*)$.

Corollaire 4.1.1

Si $R(B^*) = R(A^*)$, alors le quotient B/A est une isométrie partielle qui est unique si $N(A^*) \subset N(B/A)$.

On sait d'après le lemme de Douglas que la condition $R(B^*) = R(A^*)$ est équivalente à $B^*B = A^*A$.

Ainsi, pour $A = |B| = (B^*B)^{1/2}$, on obtient $B/A = B/|B|$ qui est une isométrie partielle définie sur la fermeture de l'image de $|B|$ par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} B/|B| : \overline{R(|B|)} &\longrightarrow R(B) \\ |B|u &\longmapsto Bu \end{aligned} .$$

Théorème 4.1.2

Si $R(B) \subset R(A)$ et s'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(\mu A - B)$ est fermé dans H pour tout $\mu > \lambda$ alors, le quotient B/A est borné.

Preuve

L'inclusion $R(B) \subset R(A)$ implique l'existence de $C \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B = AC$. Donc si $\mu > \|C\| + \lambda$, on a $(\mu I - C)$ est inversible et

$$R(A) = R(A(\mu I - C)(\mu I - C)^{-1}) = R(\mu A - B).$$

Donc, $R(A)$ est fermé, ainsi que $R(A^*)$.

$$R(B^*) \subset N(B)^\perp \subset N(A)^\perp = R(A^*).$$

Proposition 4.1.1

Si $N(A) \subset N(B)$ et $R(A)$ est fermé dans H , alors $R(B^*) \subset R(A^*)$. On obtient donc le résultat suivant :

Corollaire 4.1.2 ([1])

Si B/A est de domaine $R(A)$ fermé dans H , alors B/A est borné.

Cette condition est suffisante et pas nécessaire.

Exemple

On considère dans $l^2(\mathbb{N})$ l'opérateur A défini par

$$Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, \dots, \frac{1}{n+1}x_n, \dots\right).$$

Alors, A est compact car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $R(A)$ est dense mais non fermé dans $l^2(\mathbb{N})$.
 A est inversible d'inverse A^{-1} défini comme un quotient non borné I/A .

$$(I/A)(y) = A^{-1}(y) = (2y_1, 3y_2, 4y_3, \dots, (n+1)y_n, \dots).$$

Proposition 4.1.2 ([1])

Si B/A à image fermée et $N(A) = N(B)$, alors $R(A)$ est fermé dans H .

Remarque

Rappelons que la fermeture de $R(A)$ montre l'existence de l'inverse généralisé de Moore-Penrose $A^\#$ de A .

Corollaire 4.1.3

Si B/A est de domaine $R(A)$ fermé dans H , alors $B/A = BA^\#$. De plus, si A est inversible on a $B/A = BA^{-1}$.

Dans ce cas on note que si la solution D de Douglas de l'équation $AX = B$ existe elle sera de la forme $D = A^\#B$. De plus si A est inversible on obtient $D = A^{-1}B$.

4.2 Compacité

Proposition 4.2.1

L'opérateur quotient B/A est compact si $R(A)$ est fermé dans H et B est compact.

Inversement si B/A est compact, alors B l'est aussi.

Preuve

La fermeture de $R(A)$ assure la bornitude de B/A . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans H . Comme A est borné sur H , la suite $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée dans H . D'après la compacité de B la suite $((B/A)Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est exactement la suite $(Bx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans H . Donc B/A est compact sur H .

Inversement

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans H .

$$Bx_n = (B/A)Ax_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, comme B/A est compact la suite $((B/A)Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans H . Par conséquent B est compact sur H .

Remarque

1. Si $R(A)$ n'est pas fermé alors B/A n'est pas compact même si B est compact.
2. Le quotient de deux opérateurs compacts n'est pas forcément compact.

4.3 Inversibilité

Théorème 4.3.1

1. Si $N(A) = N(B)$, alors B/A est inversible d'inverse $(B/A)^{-1} = A/B$.
2. Si $N(A) = N(B)$, et $R(B)$ est fermé dans H , alors B/A est inversible d'inverse A/B borné sur H .
3. Si $R(A)$ et $R(B)$ sont fermés dans H , alors les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $B^\#B$ commute avec $A^\#(A^\#)^*$ et $A^\#A$ commute avec B^*B .
 - (b) $(B/A)^\#(B/A) = AB^\#BA^\#$ et $(B/A)(B/A)^\# = BA^\#AB^\#$.
 - (c) $(B/A)^\# = AB^\#$.

Preuve

1. L'opérateur A/B est bien défini d'après la condition $N(A) = N(B)$.
Vu que le domaine de A/B est $R(B)$ les compositions suivantes :

$$(A/B)(B/A) : Au \longmapsto Bu \longmapsto Au \text{ pour tout } u \in H$$

et

$$(B/A)(A/B) : Bv \longmapsto Av \longmapsto Bv \text{ pour tout } v \in H,$$

donnent l'égalité souhaitée.

2. Ceci découle directement de (1) et de la proposition 4.1.1.
3. Le fait que $R(A)$ et $R(B)$ sont tous les deux fermés dans H assure l'existence de $A^\#B^\#$ et $(B/A)^\#$. On a aussi $B/A = BA^\#$. Les équivalences entre (a), (b) et (c) découlent directement du corollaire 3.11 de [10].

Corollaire 4.3.1

Le quotient B/A admet un inverse borné défini sur H tout entier si et seulement si l'opérateur B est inversible. Formellement, On a :

$$(B/A)^{-1} = A/B = AB^{-1}.$$

4.4 Fermeture

Proposition 4.4.1

Le quotient B/A est fermé sur H si et seulement si $R(A)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B/A}$ du graphe de B/A défini est un espace de Hilbert, où le produit scalaire du graphe de B/A est défini pour tout u, v dans H par

$$\begin{aligned} \langle Au, Av \rangle_{B/A} &= \langle Au, Av \rangle + \langle (B/A)Au, (B/A)Av \rangle \\ &= \langle Au, Av \rangle + \langle Bu, Bv \rangle. \end{aligned}$$

Dont la norme associée est

$$\|Au\|_{B/A} = \sqrt{\|Au\|^2 + \|Bu\|^2}.$$

Preuve

Supposons que B/A est fermé et soit $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme du graphe $\|\cdot\|_{B/A}$ dans $R(A)$. Alors,

$$\|Ax_n - Ax_m\|_{B/A}^2 = \|Ax_n - Ax_m\|^2 + \|Bx_n - Bx_m\|^2.$$

Donc (Ax_n) et (Bx_n) sont convergentes respectivement vers u et v dans H .

Or, comme B/A est fermé il existe x dans H tel que $u = Ax$ et $v = (B/A)Ax = Bx$. Alors,

$$\|Ax_n - Ax\|_{B/A}^2 = \|Ax_n - Ax\|^2 + \|Bx_n - Bx\|^2$$

qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Ce qui montre que $(R(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{B/A})$ est complet.

Inversement

Si $(R(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{B/A})$ est complet, on considère une suite $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $R(A)$ telle que $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((B/A)Ax_n) = (Bx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers u et v pour la norme de H . Alors $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(R(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{B/A})$. Elle doit

converge vers Aw dans $R(A)$.

$$\|Ax_n - Aw\|^2 + \|Bx_n - Bw\|^2 = \|Ax_n - Aw\|_{B/A}^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Donc

$$Ax_x \longrightarrow Aw \text{ et } Bx_x \longrightarrow Bw.$$

D'où

$$u = Aw \text{ et } v = Bw.$$

Par conséquent B/A est fermé.

Remarque

Si B/A est fermé sur H , alors $B/A \in \mathcal{L}((R(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_{B/A}), H)$.

Le théorème suivant montre que tout opérateur fermé admet une représentation en quotient de deux opérateurs bornés.

Théorème 4.4.1

Soit $(C, D(C))$ un opérateur non borné sur H . Alors C est fermé sur H si et seulement s'il existe $T, S \in \mathcal{L}(H)$ tels que $C = S/T$ et $R(T^*) + R(S^*)$ est fermé dans H .

Preuve

L'idée principale de la démonstration est basée sur l'identification d'une fonction J définie pour tout x dans $R(T^*) + R(S^*)$ dans $H \times H$ par

$$J(x) = (A\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x, B\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x),$$

avec $\mathcal{R}_{T^*S^*} = (T^*T + S^*S)^{1/2}$.

J est une isométrie linéaire de $(R(T^*) + R(S^*), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dans $(G(T, S), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ car

$$\|Jx\|^2 = \|T\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x\|^2 + \|B\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x\|^2 = \langle \mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x; (T^*T + S^*S)\mathcal{R}_{T^*S^*}^{-1}x \rangle = \|x\|^2.$$

D'où la fermeture de S/T .

Corollaire 4.4.1

Si B est inversible, alors B/A est fermé dans H .

Preuve

Soit $B\prime = BP_{R(A)}$ où $PR_{(A)}$ est la projection orthogonale sur $\overline{R(A)}$.

car $R(B) = H$ et $R(P_{R(A)})$ est la fermeture de $R(A^*)$. Doù, $R(B\prime) + R(A^*)$ est fermé dans H .

Ainsi, d'après le thérème précédent on a $B/A = B\prime/A$ est fermé dans H .

Corollaire 4.4.2 ([7])

Soit C un opérateur fermé sur H . Alors C s'exprime comme le quotient de deux opérateurs bornés T et S sur H tels que $R(T^*) + R(S^*)$ est fermé dans H .

4.5 Adjoint

Rappelons que pour définir l'adjoint d'un opérateur non borné il faut qu'il soit de domaine dense. De ce fait on va supposer que $R(A)$ est dense H .

Dans ce qui suit on va voir que cette notion préserve le caractère quotient.

Pour cela on définit l'adjoint de B/A et on note $(B/A)^*$ comme étant l'opérateur qui a pour graphe, le sous-espace

$$G(A, B)^* = \{(x, y) \in H \times H; y = (B/A)^*x\} = \{(x, y) \in H \times H; B^*x = A^*y\}.$$

$$\begin{aligned} G(A, B)^* &= \{(x, y) \in H \times H; \langle x, (B/A)t \rangle = \langle y, t \rangle, \forall t \in R(A)\} \\ &= \{(x, y) \in H \times H; \langle x, (B/A)Au \rangle = \langle y, Au \rangle, \forall u \in H\} \\ &= \{(x, y) \in H \times H; \langle x, Bu \rangle = \langle y, Au \rangle, \forall u \in H\}. \end{aligned}$$

On peut aussi voir que :

$$G(A, B)^* = \{(x, y) \in H \times H; B^*x = A^*y\}.$$

L'adjoint $(B/A)^*$ admet donc pour domaine l'ensemble $B^{*-1}(R(A^*))$ qui est l'image d'un opérateur borné $A_* = (I - Y^*Y)^{1/2}$ tel que $\mathcal{R}_{A_*B^*}Y = B$, où $\mathcal{R}_{A_*B^*} = \sqrt{A^*A + B^*B}$.

On voit que $R(B^*A_*) \subset R(A^*)$, il existe alors d'après le lemme de Douglas un opérateur borné $B_* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B^*A_* = A^*B_*$, donc $G(A, B) = \{(A_*u, B_*u) : u \in H\}$.

Par conséquent on obtient l'expression irréductible en quotient de $(B/A)^*$ de la manière suivante :

Théorème 4.5.1

Si $R(A)$ est dense dans H , alors,

$$(B/A)^* = B_*/A_*,$$

avec $B_* \in \mathcal{L}(H)$; $A^*B_* = B^*A_*$.

Pour $\mathcal{R}_l = \mathcal{R}_{A^*,B^*}$, on pose A_l et B_l les solutions W et Z des équation $W\mathcal{R}_l = A$ et $Z\mathcal{R}_l = B$. Alors,

$$A_* = (I - B_l B_l^*)^{1/2} \text{ et } B_l = V_l B_l^*,$$

où V_l est une isométrie partielle obtenue d'après la décomposition polaire $A_l = V_l |A_l|$. En effet on note par P_l , la projection orthogonale sur $\overline{R(R_l)}$. Ainsi on obtient d'après le lemme lemme 2.2.2.

$$A_l^* A_l + B_l^* B_l = P_l.$$

D'après la définition de A_l et B_l et le fait que $|A_l| = A_l V_l$ on a

$$\begin{aligned} A^* B_* = B^* A_* &= R_l B_l^* (I - B_l B_l^*)^{1/2} = R_l (P_l - B_l^* B_l)^{1/2} B_l^* \\ &= R_l |A_l| B_l^* = R_l A_l^* V_l B_l^* = A_l^* V_l B_l^*. \end{aligned}$$

D'où, $B_* = V_l B_l^*$ car $N(A^*) = \{0\}$.

Corollaire 4.5.1 ([5])

Si B/A est densément défini, alors,

$$(B/A)^* = B_*/A_* = V_l B_l^* / (I - B_l B_l^*)^{1/2}.$$

Conclusion

La notion du quotient d'opérateurs joue un rôle important en théorie des opérateurs, elle a des applications dans les mathématiques pures (théorie spectrale des opérateurs fermés) et les mathématiques appliquées (résolutions des équations différentielles abstraites et des équations aux dérivées partielles).

Dans ce travail on a essayé d'étudier les opérateurs quotients algébriquement et topologiquement.

Dans notre travail on a recueilli, classé, et expliqué, puis présenté des résultats établis par différents auteurs dans des articles datant de 1978 jusqu'à 2015, concernant :

1. Le Lemme de Douglas pour la résolution de l'équation opératorielle $AX = B$.
2. Les opérations usuelles sur les opérateurs quotients telles que la multiplication par un scalaire, la somme, le produit et les itérés.
3. Les caractérisations topologiques des opérateurs quotients telles que la bornitude, la compacité, la fermeture, l'inversibilité et l'adjoint.

Comme perspectives, nous intéressons à l'étude spectrale de ces opérateurs et l'image numérique d'un opérateur quotient.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. A. Barnes, *Majorization, range inclusion, and factorization for bounded linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (205), 155-162.
- [2] J. Dixmier, *Etude sur les variétés et les opérateurs de Jilia*, Bull. Soc. Math. France, 77 (1949), 11-101.
- [3] R.G. Douglas, *On majorization and rang inclusion of operators in Hilber space*, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 413-416.
- [4] P. A. Fillmore, J. P.Wiliams, *On operator ranges*, Adv. Math., 7 (1971), 254-281.
- [5] A. Gherbi, *Quotient des opérateurs bornés extenion aux opérateurs non bornés et applications*, Thèse de Magister, Université d’Oran, 2010.
- [6] A. Gherbi, B. Messirdi. M. Benharrat. *Quotient operators : new generation of linear operators*, Funct. Anal. Approx. Comput. 7(1) (2015), 85-93.
- [7] A. Gherbi, *Quelques classes d’opérateurs quotients, caractérisations et applications*, Thèse de Doctorat, Université d’Oran 1, 2015.
- [8] S. Goldberg, *Unbounded LInear Operators* Mc Graw-Hill, New-York, 1966.
- [9] G. Hirasawa, *Quotient of bounded operators and Kaufman’s theorem*, Math. J. Totama Univ. 18 (1995), 215-224.
- [10] S. Izumino, *The product of operators with a closed range and an extension of reverseorder law*, Tohoki Math. J., 34 (1982), 43-52.
- [11] S. Izumino, *Quotient of bounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989), 427-435.
- [12] S. Izumino, *quotients of bounded operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1986), 427-435.

- [13] S. Izumino, *Decomposition of quotients of bounded operators and their weak adjoints*, J. Operator theory., 29 (1993), 83-96.
- [14] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, J. Anal. Math., 6 (1958), 261-322.
- [15] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New-York, (1966).
- [16] W. E. Kaufman, *Representing a closed operator as quotient of continuous operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 72 (1978), 531-534.
- [17] J. J. Koliha, *Convergent and stable operators and their generalization*, J. Math. Anal. Appl., 43 (1973), 778-794.
- [18] J. S. Mac-Nerney, *Investigation concerning positive definite continued fractions*, Duke Math. J., 26 (1959), 663-678.
- [19] S. Messirdi, M. Djaa and B. Messirdi, *Stability of Almost Closed Operators on a Hilbert Space*, Sarajevo J. of Math., 5, 17 (2009), 133-141.
- [20] S. Ôta, *Closed linear operators with domain containing their range*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 27 (1984), 229-233.