# Exitence et non existence globle pour quelques systémes de réaction-diffusion fractionnaires

Présentée par : THELAIDJIA Said et MEZHOUD Issam

Dirigé par : **Dr.Salim ROUAR**

Département de Mathématiques

Université Chikh Laarbi tebessi

– Tebessa –

Mai 2017

17 juin 2017

# TABLE DES MATIÈRES

# Dédicace

Pour ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Pour mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit . Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Pour mon frère **Tawfik** qui n'a cessé d'être pour moi un exemple de persévérance, de courage et de générosité.

Pour mes deux belle sœurs qui ont été toujours la pour moi, je vous aime enormement !

Pour mes fréres : **Zaki, Med.Ghazel,Nasr-Eddine, Hamza, Raouf, Zikou, et Salim**.

Pour tous les collégues d'enseignement.

Pour toute la famille **THELAIDJIA** !

# Dédicace

Pour ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Pour mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit . Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Pour mes frères **Sassi et Haroun et Sayeh** qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Pour mes belles sœurs qui ont été toujours la pour moi.

Pour les deux anges **Jannah et Loudjain**.

Pour tous les collégues.

Pour toute la famille **MEZHOUD** !

# Remerciements

*Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur* ***SALIM Rouar****, Maitre de Conférences classe B à l'université Chikh Laarbi tbessi- Tebessa -, pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien términé ce travail.*

*Mes remerciements vont également Monsieur* ***A.Hafdhallah****, Maitre de Conférences classe B à l'université Chikh Laarbi Tbessi - Tebessa -, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.*

*De même je remercie Monsieur* ***H.Mechri,*** *Maitre de Conférence classe B à l'université Chikh Laarbi Tbessi - Tebessa -, pour l'honneur qu'il m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.*

*Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connu à l'institut de mathématiques qui ont rendu mes séjours au département agréables.*

# Résumé

Le but de ce travail est de etudier **l'existence et la non-existence globale** des solutions des systèmes formés de deux équations appelé **systèmes de réaction-diffusion**. La technique utilisé est basée sur des **calculs fractionnaires** et **quelques inégalités célèbres**, Il est bien connu que pour démontrer la **non-existence globale** il suffit de deviner l'existence d'une **solution faible**,au cours de traitement une contradiction certaine implique automatiquement la **non-existence**.D'autre part si l'une des **condition nécessaire d'existence** est non vérifié cela implique aussi **la non-existence globale.**

Finalement des informations qualitatives sur **l'existence globale** ont été présentés.

# Abstract

The aim of this work is to elaborate the **existence and the global non-existence** of solutions of the formed systems called **reaction-diffusion**.**systems** Our technique is based on **fractional calculations** and some**famous inequalities**. It is well-known to prove the **global non-existence** it is enough to guess the **existence of a weak solution**,during treatment an unquestionable contradiction implies automatically the **non-existence**, on the other side On the other hand, if one of the **necessary conditions of existence** is not verified, it also implies **the global non-existence.**

Finally some qualitative informations about **global existence** has been mentioned.

# Introduction

Les phénomènes de la diffusion anormale ont été observés durant ces dernières années, dans de nombreux domaines, tels que ceux de la turbulence, de l'infiltration dans les milieux poreux et du contrôle des pollutions, bien que la demande de modélisations mathèmatiques appropriés soit élevée dans la biomécanique à la géophysique à l'acoustique, la modélisation de la diffusion anormale par des équations différentielles était longtemps une question de la physique mathématique embarrassantes.

Dans cette mémoire, on s'intéresse à l'étude de certains problèmes des systèmes de type réaction-diffusion qui décrivent la diffusion anormale

Ces équations sont définies avec des dérivées fractionnaires par rapport au temps ou par rapport à l'espace, par exemple l'équation

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D^{\alpha}} u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = f(x,t,u), \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{pour } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

où $f$ est le terme de réaction, généralement non linéaire.

$\underset{0/t}{D^{\alpha}} u, \alpha \in (0,1)$ est la dérivée fractionnaire par rapport au temps de Caputo, elle représente la diffusion anormale ( sub-diffusion ), caractérisée par la moyenne des carrés de déplacements sous la forme

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle \ltimes t^{\alpha}, 0 < \alpha < 1,$$

Tandis que la diffusion normale est caractérisée par

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle \ltimes t^{\alpha},$$

Les diffusions anormales peuvent être dériver des modèles CTRW[26], les marches aléatoires en temps continu, qui semblent bien adaptées avec les équations différentielles fractionnaires pour tenir compte des effets de mémoire, puisqu'il s'agit d'opérateurs non-locaux , la dérivée fractionnaire en temps contient des informations obtenues aux temps précédents.

Parmi les applications physiques importantes des modèles CTRW, on trouve la diffusion dans un écoulement turbulent, les modèles de percolation en milieux poreux $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$, milieux fractales, divers phénomènes biologiques, finance et dynamique des fluides.

$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u), \beta \in [1.2]$ est le laplacien fractionnaire, qui est un cas particulier de l'opérateur de Lévy. On note que dans la littérature de la physique mathématique, les problèmes d'évolution non-linéaires avec le laplacien fractionnaire décrivent la diffusion anormale, ou ce qu'on appelle la diffusion $\alpha-$ stable de Lévy.

On s'intéresse aussi dans ce travail a étudier la non-existence globale pour quelque systèmes d'équations fractionnaires de type réaction-diffusion avec des termes de réaction non-linéaires.Une solution d'équation d'évolution non linéaire est dite globale, si elle est définie pour tout temps positif. L'idée de base des démonstrations dans cette mémoire repose sur deux méthodes. **La premiere méthode** repose sur le changement d'échelle dans les fonctions tests choisies convenablement, ainsi que l'utilisation de quelques inégalités célèbres. **La deuxième méthode** est basée sur la donnée des conditions nécessaires pour l'existences globale.

Notre mémoire est structurée de la façon suivante :

**Dans le premier chapitre**, on introduit quelques notations et notions de base, la notion de dérivation et d'intégration fractionnaires selon quelques approches avec des exemples et applications.

**Dans le deuxiéme chapitre,** on étudie la non-existence des solutions globales pour deux systémes fractionnaires de type réaction-diffusion.

**Le premier système** est un définie par :

$$\begin{cases} u_t - aD_{0/t}^{1-\alpha}\Delta u = v^p \quad , \quad u > 0 \\ v_t - bD_{0/t}^{1-\beta}\Delta v = u^q \quad , \quad u > 0 \end{cases},$$

le système est complété par les conditions initiales suivante

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) \geq 0,\ v\left(x,0\right) = v_0\left(x\right) \geq 0, \tag{2}$$

**Le deuxième système** est de la forme :

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D^{\alpha}}(u-u_0) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u) = f(x,t)\left|v\right|^p dansQ, \\ \underset{0/t}{D^{\delta}}(v-v_0) + (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}(v) = g(x,t)\left|u\right|^q dansQ. \end{cases} \tag{3}$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0; v(x,0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

**Le troisième chapitre,** est consacré à l'étude des conditions nécessaires d'existences globale pour deux systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires.

**Le premier système**

On s'interesse dans cette partie à l'étude des conditions nécessaires pour l'existence globale du système de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{1}{\Gamma(1-\tau)} \int_0^1 (t-s)^{-\tau} v(s) ds, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v_t - \Delta v = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^1 (t-s)^{-\delta} u(s) ds, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \end{cases} \tag{5}$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}^N$$

**Le deuxième système**

est de la forme :

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |v|^p \quad , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \underset{0/t}{D}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^p \quad , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6}$$

On associe au système les conditions initiales suivantes

$$u(.,0) = u_0 \; ; v(.,0) = v_0, x \in \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

où $u_0$ et $v_0$ sont des fonctions continues non négatives.

**Dans le dérnier chapitre** on a fait une petite rapelle pour l'existence globale des solutions classiques des systèmes de réaction diffusion par ce que l'existence globale de solutions dans les systèmes de réaction-diffusion fractionnaires reste encore un domaine de recherche.

# CHAPITRE 1

## Préliminaires

Ce chapitre est consacré à un rappel des préliminaires utiles pour le reste de le mémoire. On introduit d'abord quelques notations et notions de base telles que les espaces fonctionnels, les inégalités célèbres , puis on donne un petit rappel sur l'intégration et la

dérivation fractionnaire ( non entière ) selon quelques approches ( Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo ).Egalement des applications de ces dérivations fractionnaires sont étudiées.

On termine le chapitre par la définition des systèmes de réaction-diffusion (classiques et fractionnaires) et les deux types de diffusion.

## 1.1 Rappels et notions de base

**Opérateurs différentiels**

Soit $n$ un entier, on note $x = (x_1, ..., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.

On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

qui à $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x))$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs défini par

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right),$$

Pour un champ de vecteurs $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de $u$ la fonction définie par

$$\operatorname{div} u(x) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x) + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x}(x),$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x),$$

Soit $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière.

On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $v(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \Omega$,$v(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.

On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.

On appelle dérivée normale d'une fonction régulière $u$ sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par $\frac{\partial u}{\partial v}(x) = \nabla u(x) \cdot v(x)$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $v(x)$).

**Espaces fonctionnels**

On dfinit l'espace $L^p(\Omega)$,par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable et } \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\},$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx,$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{mesurable } \exists C \text{ et } \quad |u| \leq C \text{ p p sur } \Omega\},$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\,|u(x)| = \inf\{C; |u| \leq C \text{ p p sur } \Omega\},$$

On définit les espaces $L^p(0,T,X)$,$1 \leq p \leq \infty$ comme suit

$$L^p(0,T,X) = \left\{u : [0,T] \to X : \text{ mesurable et } \|u\|_{L^p(0,T,X)} < \infty\right\},$$

Muni de la norme

$$\begin{cases} \|u\|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|u\|^p_X\, dt \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^{\infty}(0,T,X)} = \sup\limits_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_X \text{ si } p = \infty. \end{cases},$$

On définit les espaces $L^p_{loc}(\Omega)$,$1 \leq p < \infty$ comme suit

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable}\,; \exists k \text{ compacte telle que } \int\limits_k |u|^p\, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\},$$

Muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|k|} \int\limits_k |u|^p\, dx,$$

On définit les espaces $L^p_{loc}\left(Q, f(t,x), dtdx\right)$,$1 \leq p < \infty$ comme suit

$$L^p_{loc}\left(Q; f(t,x); dtdx\right) = \left\{u : Q \to \mathbb{R}\diagdown \int_k |u|^p\, f dtdx < +\infty; \text{pour } k \subset Q\right\},$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de **Sobolev** défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); 1 \leq i \leq n\right\},$$

Muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u|^2\, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx,$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega); \forall\alpha \in \mathbb{N}^* : |\alpha| \leq m\right\},$$

Muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} ,$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^P(\Omega); \forall\alpha : |\alpha| \leq m\right\},$$

Muni de la norme

$$\begin{cases} \| \ u \ \|^p_{m,p} = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \ \ si \ 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{x\in\Omega} \|D^\alpha u\|_{L\infty(\Omega)} \ \ si \ p = \infty. \end{cases},$$

Où $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_m^{\alpha_m}}, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_m$,est la dérivée au sens des distributions.

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur $\Omega$ muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)| ,$$

$C^k(\Omega)$,$k \in \mathbb{N}$ ,désigne l'espace des fonctions $k$ fois continûment différentiables sur $\Omega$ et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega),$$

$C^{r,k}_{x,t}(\Omega)$,$k; r \in \mathbb{N}$ ,désigne l'espace des fonctions $r$ fois continûment différentiable par rapport à $x$ sur $\Omega$ et désigne l'espace des fonctions $k$ fois continûment différentiable par rapport à $t$ sur $\Omega$.

Naturellement on a

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) et H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

.

## 1.2 Quelques inégalités utiles

**Inégalité de Hölder**

**Théorème 1**

Soient $1 < p; p' < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et $u$ une fonction de $L^p(\Omega)$ et $v$ une fonction de $L^{p'}(\Omega)$ : Alors l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \left( \int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_\Omega |v(x)|^{p'}\, dx \right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{1.1}$$

***preuve*** :voir Brezis[4]

**Inégalité de Young**

**Théorème 2**

Soit $f$ une fonction continue et croissante sur $[0; c]$ où $c > 0$ $f(0) = 0$, $a \in [0; c]$ et $b \in [0; f(c)]$, alors :

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx, \tag{1.2}$$

Où $f^{-1}$ est la fonction inverse de $f$.

**Preuve**

(Voir Mitrinovic, Pecaric et Fink [18]).

La fonction $f(x) = x^{p-1}$avec $p > 1$ dans chaque intervalle $[0, c]$ satisfait les conditions précédentes.

On applique (1.2) utilisant $p + \acute{p} = p\acute{p}$ ,on obtient

$$ab \leq \frac{a^{\acute{p}}}{\acute{p}} + \frac{b^p}{p}, \forall a; b \in \mathbb{R}^+,$$

Si on remplace la fonction $f(x)$ par $\varepsilon x^{p-1}$dans (1.2) alors on obtient l'inégalité de **Young avec** $\varepsilon$,

$$ab \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^{\acute{p}}, \forall X; Y \in \mathbb{R}^+,$$

## 1.3 Intégration et dérivation fractionnaires

Avant de donner la définition de la dérivation et l'intégration fractionnaires, on introduit les définitions de quelques fonctions utiles pour la suite.

### La fonction gamma

L'une des focntions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'euler** $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivant

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

Avec $\Gamma(0) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt = [-e^{-t} t^z]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z),$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

### La fonction Bêta

La fonction $B(p,q)$ est la fonction Béta (ou intégrale eurlienne de premiére éspéce),définie par :

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx \quad p > 0, q > 0,$$

On à une égalité éxprimant le lien entre l'intégrale eurlienne de premiére et seconde espéce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \mathrm{Re}(p) > 0; \mathrm{Re}(q) > 0,$$

### 1.3.1 Intégrale fractionnaire

Maintenant nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une premiére définition d'intégrale fractionnaire.

#### Définition

L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in L^1[a,b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ est définie par :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

Ou $\Gamma$ est la fonction Gamma lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$ ou $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0, \varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$,et $\varphi_\alpha \longrightarrow \delta$, quand $\alpha \longrightarrow 0$.

#### Théoréme

Pour $h \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de rimann liouville posséde la proprieté de semi groupe suivante

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta h(t)\right) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) \text{ pour } \alpha > 0, \beta > 0,$$

#### Propriétés

Nous avons les propriétés suivantes :

*i)* $I_a^0 h(t) = h(t)$,

*ii)* L'opérateur intégral $I_0^\alpha$ est linéaire.

### 1.3.2 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivation fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Grunwald-letnikov,Riemman-liouville,ainsi que Caputo.

#### Approche de Grunwald-letnikov

La dérivée de Grunwald-Letnikov d'ordre $\alpha$ est définie par

$$\left(D_{a^+}^\alpha f\right)(t) := \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{|n|} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh),$$

Les coefficients binomiaux avec des signes alternatifs pour des valeurs positives de $n$ sont définis comme

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!},$$

Pour les calcul des coefficients binomiaux on peut utilisés la relation entre la fonction Gamma d'Euler et la factorielle, définie comme

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)},$$

La dérivée de Grunwald-letnikov présente un intérét numérique évident. Si $h$ est assez petit,l'évaluation discréte de $h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{|n|}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(t-jh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur $\mathbb{R}$ (de Liouville). Par contre les inconvénients de cette approche sont les difficulté technique pour faire les calculs, les preuves et les grandes restrictions sur les fonction.

### Approche de Riemann-Liouville

Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,t]$ ,alors la dérivée fractionnaire d'ordre $p$ (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$\underset{at}{\overset{Rp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.3}$$

La dérivée à droite, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par

$$\underset{at}{\overset{Rp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.4}$$

La dérivée à gauche, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par

$$\underset{tb}{\overset{Rp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n\int_t^b (\tau-t)^{n-p-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.5}$$

**Exemple** La dérivée de $\underset{t/T}{D^\alpha}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l$au sens de Riemann-Liouville $(0 \leq \alpha < 1)$

$$\underset{t/T}{D^\alpha}\left(1-\frac{t}{T}\right)^l = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^1\int_t^b (\tau-t)^{-\alpha}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)^l d\tau.$$

On pose $\tau = \lambda T + (1-\lambda)\,t$ ,donc $\tau = (T-t)\,\lambda + t$.

Donc

$$\begin{aligned}
\underset{t/T}{D^{\alpha}}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{l} &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}T^{-l}\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{(T-t)^{l+1}(1-\lambda)^l}{((T-t)\lambda)^{\alpha}}d\lambda,\\
&= -T^{-l}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}(T-t)^{l+1-\alpha}\int_0^1 (1-\lambda)^l\lambda^{-\alpha}d\lambda,\\
&= T^{-l}\frac{(l+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(T-t)^{l-\alpha}\int_0^1(1-\lambda)^l\lambda^{-\alpha}d\lambda,\\
&= T^{-l}\frac{(l+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}(T-t)^{l-\alpha}\beta(l+1,-\alpha+1),\\
&= T^{-l}(T-t)^{l-\alpha}\frac{\Gamma(l+1)}{(l+1-\alpha)\Gamma(l+1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

**Composition avec l'integrale fractionnaire** • L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-liouville est un invers gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$^{RL}D^{\alpha}\left(I^{\alpha}f(t)\right)=f(t),$$

En général on a

$$^{RL}D^{\alpha}\left(I^{\beta}f(t)\right)={}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t),$$

Et si $\alpha-\beta<0$ alors $^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)=I^{\beta-\alpha}f(t)$.

• En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$$^{RL}D^{-\alpha}\left({}^{RL}D_t^{\beta}f(t)\right)={}^{RL}D^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[{}^{RL}D_t^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

avec $m-1\leq\beta<m$.

**Composition avec les dérivées d'ordre entier** La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entiér) ne commutent que si

$f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,...,n-1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^{RL}f(t))={}^{RL}D^{n+\alpha}f(t),$$

Mais

$$^{RL}D^{\alpha}(\frac{d^n}{dt^n}f(t))={}^{RL}D^{n+\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)},$$

**Composition avec les dérivés fractionnaires** Soit $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta$, alors

$$^{RL}D^{\alpha}\left(^{RL}D_t^{\beta}f(t)\right) =^{RL} D^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[^{RL}D^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

Et

$$^{RL}D^{\alpha}\left(^{RL}D_t^{\alpha}f(t)\right) =^{RL} D^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[^{RL}D^{\alpha-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

Par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D^{\alpha}$ et $^{RL}D^{\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$, ne commutent que si $\left[^{RL}D^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, ..., n$, et $\left[^{RL}D^{\alpha-k}f(t)\right]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, ..., m$.

### Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

**Définition** Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$) $f$ est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n}f \in L_1[a,b]$.

La dérivée fractionnaire d'ordre $p$ de $f$ au sens de Caputo est défnie par

$$\overset{Cp}{\underset{at}{D}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau, \tag{1.6}$$

La dérivée à droite, de Caputo, correspondante est définie par

$$\overset{Cp}{\underset{at}{D}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau, \tag{1.7}$$

La dérivée à gauche, de Caputo, correspondante est définie par

$$\overset{Cp}{\underset{tb}{D}}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_t^b (\tau-t)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau, \tag{1.8}$$

**Exemple** $(\tau-a)^{\alpha-n}$ d'ou La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo.Soit $p$ non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$,alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)},$$

$$\overset{Cp}{\underset{at}{D}}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura

$$\begin{aligned}
\overset{Cp}{\underset{at}{D}}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_0^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}d\tau,\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p},\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n-1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p},
\end{aligned}$$

**La relation avec la dérivée de Riemann-liouville** Soit $\alpha > 0$ avec

$$n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*),$$

Supposon que $f$ est une fonction telle que ${}_a^cD_t^{\alpha}f(t)$ et ${}_a^{RL}D_t^{\alpha}f(t)$ existent alors

$${}^cD^{\alpha}f(t) = ^{RL} D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-aa)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)},$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura ${}^cD^{\alpha}f(t) = ^{RL} D^{\alpha}f(t)$.

**Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire** si $f$ est une fonction continue on à

$${}^cD^{\alpha}\ I^{\alpha}f(t) = f \text{ et } I_a^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!},$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse a droite.

**La linéarité des dérivées fractionnaires**

Similairement à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^p\left(\lambda f\left(t\right) + \mu g\left(t\right)\right) = \lambda D^p f\left(t\right) + \mu D^p g\left(t\right)$$

Où $D^p$ désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans ce travail.

La linéarité de différentiation fractionnaire vient directement de la définition correspondante. Par exemple, pour les dérivées fractionnaires de Grunwald-Letnikov définies par

$$\begin{aligned} D_t^p\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right) &= \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum\left(-1\right)^r\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}\left(\lambda f\left(t-rh\right)+\mu g\left(t-rh\right)\right) \\ &= \lambda\lim_{h\to 0} h^{-p}\sum\left(-1\right)^r\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f\left(t-rh\right)+\mu\lim_{h\to 0} h^{-p}\sum\left(-1\right)^r\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} g\left(t-rh\right) \\ &= \lambda D^p f\left(t\right)+\mu D^p g\left(t\right), \end{aligned}$$

De même, pour les dérivées de Riemann-Liouville d'ordre $p$ $(k-1\leq p<k)$ définies par (1.3), on a

$$\begin{aligned} D_t^p\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(k-p\right)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{k-p-1}\left(\lambda f\left(\tau\right)+\mu g\left(\tau\right)\right)d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma\left(k-p\right)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{k-p-1} f\left(\tau\right)+\frac{\mu}{\Gamma\left(k-p\right)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{k-p-1} g\left(\tau\right)d\tau \\ &= \lambda D^p f\left(t\right)+\mu D^p g\left(t\right), \end{aligned}$$

## 1.4 Applications des dérivées fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science.

Cependant, le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années.

### Exemple simple

**Interprétation physique de L'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville** Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture.

Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse de conducteur et l'horloge qui affiche le temps $\tau$ . Cependant, le temps $\tau$ affiché par l'horloge est incorrect.

Nous supposons que la relation entre le temps incorrect $\tau$ (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact), et le temps exact $T$ est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ telle que $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[ t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha} \right], \tag{1.9}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$ , le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$ .

Le conducteur A représente le conducteur de la voiture ; ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique

$$S_A(t) = \int_0^t V(\tau)\, d\tau, \tag{1.10}$$

Un observateur , lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect $\tau$ au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture.

$$S_0(t) = \int_0^t V(\tau)\, g_t(\tau) = I^{\,\alpha} V(t), \tag{1.11}$$

Avec

$$I^{\,\alpha} V(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} V(\tau)\, d\tau,$$

L'intégrale donnée par l'équation (1.10) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures

Une mesure correct de la vitesse et une mesure incorrect du temps. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation (1.11) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour le quel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $V(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle ) et la valeur locale du temps $\tau$ (temps individuel ),sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ .

La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène,qui dépend non seulement de $\tau$, mais aussi du paramètre$t$ qui représente la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile. quand $t$ change, l'intervalle de temps cosmique change également.

La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace temps,le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent ; l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change.

Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet mobile. Donc, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la vitesse individuelle $V(t)$ d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel ;et le temps cosmique $T$ à chaque instant $t$ est donnée par la fonction connue $T = g_t(\tau)$ , décrite par l'équation (1.9) représente la véritable distance$S_0(t)$ parcourue par cet objet.

**Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-liouville** En utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, on peut exprimer l'expression de la vitesse individuelle $V(\tau)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_0(t)$ : La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse individuelle

$$V(\tau) = D^{\alpha} S_0(t),$$

Avec

$$D^{\alpha} S_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_0(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \quad \text{et} \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

On peut aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport à la variable de temps $t$ qui donne la relation entre la vitesse $V_0(t) = S_0(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant et la vitesse individuelle $V(t)$.

$$V_0(t) = \frac{d}{dt} I^{\alpha} V(t) = D^{1-\alpha} V(t) \ ,$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1-\alpha)$ de la vitesse individuelle $V(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $V_0(t)$ , si le temps individuel $\tau$ et le temps cosmique $T$ sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$ décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\right] \ ,$$

Pour $\alpha = 1$ ; quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident : $V_0(t) = V(t)$ .

## 1.5 Systèmes de réaction-diffusion

### Systèmes de réaction-diffusion classiques

Dans un milieu continu, soient $N$ espèces chimiques (ou constituants fluides). On note $i = 1, 2, ...N$ l'une de ces espèces, soient alors $u_i(x,t)$ sa concentration (ou densité) au temps $t$ et au point $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et $D_i$ son coefficient de diffusion. Les concentrations $u_i(x,t)$ représentent les variables étudiées dans un modèle de réaction-diffusion dont l'évolution est régie par le système d'équations aux dérivées partielles suivantes, appelées équations de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u),$$

Où $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$ est l'inconnue, $f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_m(x,t,u(x,t)))$ est la réaction (généralement non linéaire ) et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de $u$.

En chimie $u$ est un vecteur de concentrations chimiques et $f$ représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

En dynamiques des populations, $u$ représente le vecteur de densités des populations et $f$ l'effet des relations prédateurs-proie, des relations de compétitions ou de symbiose. Le terme $D\Delta u$ représente des mouvements aléatoires d'individus de la population étudiée.

En biologie, par exemple, lors du transport sanguin du sucre ; $u = (u_1, u_2, u_3)$ désigne les concentrations respectives en sucre complexe (sucrose) et sucres simple :

$$\text{sucrose} \quad \xrightarrow{\textit{hydrolysis by acid}} \quad \text{glucose} \oplus \ \text{fructose}$$

$$u_1 \longrightarrow u_2 \oplus u_3$$

$f(u)$ représente les réactions chimiques sur les sucres et $D\Delta u$ désigne, comme toujours,le flux de ces sucres à travers la frontière de la surface où se produit cette réaction.

L'équation de réaction-diffusion (2.1.1) est une équation aux dérivées partielles paraboliques non linéaire. Pour l'étudier, sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ , il faut lui adjoindre des conditions initiales de $u(x,0)$ ainsi que des conditions aux limites.

**Systèmes de réaction-diffusion fractionnaires**

Lorsque on extend les dérivée dans les systémes de réaction-diffussion à des dérivées fractionnaire par rapport au temps et/ou par rapport à l'espace, on parle des systémes de réaction-diffusion fractionnaires. Dans cette thés on s'intéresse à l'étude de quelque systémes des réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires par rapport au temp et à l'espace, comme par exemple le systéme suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0/t}(u-u_0)+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u=|v|^p \\ D^{\delta}_{0/t}(v-v_0)+(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}u=|u|^q \end{cases}$$

Posé pour $x\in\mathbb{R}^N$, $t>0$.et les exposants $p,q\geq 1$ sont des nombres réels, où $D^{\alpha}_{0/t}$ est la dérivée par rapport au temp d'ordre arbitraire $\alpha\in(0,1)$ au sens de caputo, qui décrit la diffusion anormale,

et $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$,$\beta\in[1,2]$ est le laplacien fractionnaire, par rapport à $x$, d'ordre $\frac{\beta}{2}$,lequel est défini par

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}v(x,t)=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta}\,\mathcal{F}(v)(\xi))(x,t), \tag{1.12}$$

Où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$son l'inverse.(La même chose pour $D^{\delta}_{0/t}$ et $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$).

## 1.6 Diffusions normale et anormale

De même que la loi normale joue un rôle central dans la description statistique de la plupart des phénomènes, on s'attend à priori à ce que la diffusion s'observe dans tous les milieux de la même façon. Lorsque les mouvements d'un traceur ne suivent pas les lois de la diffusion, on parle de la diffusion anormale

### Diffusion normale

Dans un fluide homogène au repos, on observe que la concentration d'un soluté tend toujours à s'uniformiser.

On précise même qu'un flux diffusitif($j = \rho \overrightarrow{v}$) est proportionnel à l'opposé du gradient de la concentration, c'est la loi de Fick :

$$\text{flux} = j = -d\nabla\rho$$

Où $\rho$ est la densité particulaire, d est un coefficient positif, appelé coefficient de diffusion et $\overrightarrow{v}$ est la vitesse Eulérienne.

L'équation de la conservation de la masse est

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \overrightarrow{v}\right) = 0$$

Devient

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(d\nabla\rho\right) = 0$$

Et encore

$$\frac{\partial p}{\partial t} - d\nabla\rho = 0$$

Qui est la célèbre équation linéaire de la chaleur sans sources.Lorsque les conséquences de la loi de Fick sont observées, c'est à dire lorsque la concentration évolue selon l'équation d'advection diffusion

$$\partial_t C = \nabla\left(d\nabla C\right) - V\nabla C$$

On dit que la diffusion est normale. Le moyen le plus simple sur le plan théorique, pour vérifier si tel est le cas consiste à déterminer la moyenne carrée des déplacements de particules de soluté et à vérifier qu'elle évolue en restant proportionnelle au temps.

$$\left\langle x^2\left(t\right)\right\rangle = D_m t,$$

$D_m t$ étant la diffusivité moléculaire.

Notons que ceci n'est pas toujours facile à vérifier expérimentalement. Dans certains milieux ou certaines circonstances, on observe des comportements différents, on parle alors de diffusion anormale.

### Diffusion anormale

Dans certains fluides complexes, le mouvement peut étre gêné à cause de la composition même du milieu.

On observe aussi que la moyenne carrée des déplacements de particules n'obéit pas toujours à la loi ci dessus dans des fluides homogénes ne présentant pas cette anormale, comme l'éau par exemple, lorsqu'ils sont le siége d'un champ de vitesse non uniforme à l'échelle macroscopique.Prenons à un écoulement poiseuille de vitesse moyenne $V$ dans un tuyau cylindrique.

Taylor a démontré que les déplcement éffectués par un traceur sur de petits intervalles de temp $t$ vérifient

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = \alpha.t^{\frac{1}{2}},$$

Pour des durées $t$ appartenant à un intervalle fini, au du quel on obtient

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = D.t,$$

Avec

$$D = D_m + K\left(\frac{V.d}{D_m}\right),$$

$d$ étant le diamétre du tuyau.

On voit que l'interaction entre la diffusion de soluté et un champ des vitesse non uniforme a un effet non trivial en termes de transport .

Des expériences en milieux poreux ont suggéré que

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = D_\alpha t^\alpha, \alpha \neq 1$$

$D_\alpha$ est le coefficient de la diffision géneralisée.

Lorsque $\alpha > 1$, on parle de super-diffusion ou diffusion renforcée, et pour $\alpha < 1$, on a ce qu'on appelle une sub-diffusion ou diffusion réduite. Ces processus sont souvent non Gaussiens.

Sous certaines conditions, on a suggéré que la diffusion simple(sans influence de l'environnement exterieur) anormale peut étre décrite par une équation généralisée de la forme

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}P(x,t) = D_{\alpha,\beta}\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}P(x,t)$$

Où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels, $D_{\alpha,\beta}$ est le coefficient de diffusion généralisé et les opérateurs différentielles dans les membres de gauche et de droite de l'équation sont les opérateurs de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville.

# CHAPITRE 2

# Non-existence globale des solutions pour certains systèmes de réaction diffusion

Ce chapitre contient une étude de la non-existence globale des solutions pour deux systèmes de type réaction-diffusion ($2\times 2$).

## 2.1 Premier système

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} u_t - aD_{0/t}^{1-\alpha}\Delta u = v^p \quad , \quad u > 0 \\ v_t - bD_{0/t}^{1-\beta}\Delta v = u^q \quad , \quad u > 0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

Où $x \in \mathbb{R}^N, t > 0, a, b$ Les constantes de diffusion telle que $a, b > 0$ ,

Et les exposants $p, q > 0$ Sont des nombres réels pour $0 < \alpha < 1$ l'opérateur non local $D_{0/t}^{\alpha}$ est défini, pour une fonction continue $f$, par

$$D_{0/t}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau,$$

Pour une fonction absolument continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ,et pour $f, g$ possédant une régularité appropriée la formule d'intégration par parties est vraie.

$$\int_0^T f(t)\, D_{0/t}^{\alpha} g(t)\, dt = \int_0^T g(t)\, D_{0/t}^{\alpha} f(t)\, dt \ , \tag{2.2}$$

Les lemmes suivants basés sur la fonction $\varphi$ suivante

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda}, & 0 \le t \le T \quad .\lambda >> 1 \\ 0, & t > T \end{cases}, \tag{2.3}$$

**Lemme 1**

Soit $\varphi$ comme dans (2.3). on a

$$\int_0^T D_{t/T}^{\alpha} \varphi(t)\, dt = K_{\alpha,\lambda} T^{1-\alpha} \ , \tag{2.4}$$

Avec

$$K_{\alpha,\lambda} = \frac{\lambda \Gamma(\lambda - \alpha)}{(\lambda - \alpha + 1)\, \Gamma(\lambda - 2\alpha + 1)},$$

**Preuve**

Utilisant la derivée a gauche

$$D_{T-}^{\alpha} \varphi(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} T^{-\lambda} \int_t^T \frac{(T-\sigma)^{\lambda-1}}{(\sigma - t)^{\alpha}} d\sigma,$$

Utilisant le changement de variable

$$y = \frac{\sigma - t}{T - t},$$

On peut écrire

$$D^{\alpha}_{T-}\varphi(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} T^{-\lambda} (T-t)^{\lambda-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-y)^{\lambda-\alpha-1}}{y\alpha} dy,$$

La dernière intégrale est la fonction bêta

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^{\lambda-\alpha-1}}{y\alpha} dy = \frac{\Gamma(\lambda-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)},$$

Ainsi

$$D^{\alpha}_{T-}\varphi(t) = \frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)} T^{-\lambda} (T-t)^{\lambda-\alpha}, \tag{2.5}$$

Par intégration

$$\int_0^T D^{\alpha}_{t/T}\varphi(t)\, dt = \frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{(\lambda-\alpha+1)\Gamma(\lambda-2\alpha+1)} T^{1-\alpha},$$

**Lemme 2**

Soit $\varphi$ comme dans (2.3) et $q > 1$. pour $\lambda > q-1$, on a

$$\int_0^T \varphi(t)^{1-q} \mid \varphi'(t)|^q\, dt = \Lambda_q T^{1-q}, \tag{2.6}$$

Avec

$$\Lambda_p = \frac{\lambda^p}{(\lambda+1-p)},$$

Alors pour $\lambda > q\alpha - 1$, on a :

$$\int_0^T \varphi(t)^{1-q} \left| D^{\alpha}_{t/T}\varphi(t)\right|^q dt = \Lambda_{q,t} T^{1-\alpha q}, \tag{2.7}$$

Avec

$$\Lambda_{q,t} = \frac{\lambda^q}{(\lambda+1-q\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda+1-2\alpha)} \right\},$$

**Preuve**

En utilisant (2.3),

$$\begin{aligned}\int_0^T \varphi(t)^{1-q} \mid \varphi'(t)|^q \, dt &= \int_0^T \left[T^{-\lambda}(T-t)^{\lambda}\right]^{1-q} \left|-\lambda T^{-\lambda}(T-t)^{\lambda-1}\right|^q dt \\ &= \lambda^q T^{-\lambda(1-q)} T^{-\lambda q} \int_0^T (T-t)^{\lambda(1-q)+(\lambda-1)q} \, dt \\ &= \lambda^q T^{-\lambda} \int_0^T (T-t)^{\lambda-q} \, dt = \lambda^q T^{-\lambda} \frac{T^{\lambda+1-q}}{\lambda+1-q} = \frac{\lambda^q}{\lambda+1-q} T^{1-q},\end{aligned}$$

En utilisant (2.3) et (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T \varphi(t)^{1-q} \mid D^{\alpha}_{t/T}\varphi(t)\big|^q \, dt \\ =& \int_0^T \left[T^{-\lambda}(T-t)^{\lambda}\right]^{1-q} \left|\frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)} - T^{-\lambda}(T-t)^{\lambda-\alpha}\right|^q dt \\ =& \; T^{-\lambda(1-q)} \left[\frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)} T^{-\lambda}\right]^q \int_0^T (T-t)^{\lambda(1-q)+q(\lambda-\alpha)} \, dt \\ =& \left[\frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)}\right]^q T^{-\lambda} \int_0^T (T-t)^{\lambda-q\alpha} \, dt \left[\frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)}\right]^q T^{-\lambda} \frac{T^{\lambda+1-q\alpha}}{\lambda+1-q\alpha},\end{aligned}$$

**Résultats principaux**

En considérant le systeme pour $x \in \mathbb{R}^N$ ou $x \in \Omega$ le domain borné on pose

$$\int_Q := \int_{R^N} \int_0^T,$$

Le cas de $x \in \mathbb{R}^N$ le système (2.1) est complété par les conditions initiales suivante

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \;\; v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \tag{2.8}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,on commence par la formulation variationelle du problème (2.1). On observe que

$$\int_Q u_t \Delta D^{1-\alpha}_{0/t} \phi dxdt = -\int_{R^N} u_0(x)\,\phi(x,0)\,dx - \int_Q u\phi_t dxdt,$$

Si $\phi$ est réguliere tel que

$$\phi(x,T) = 0$$

Et

$$\int_Q \phi \Delta D_{0/t}^{1-\alpha} u dx dt = \int_Q u \Delta D_{0/t}^{1-\alpha} \phi dx dt,$$

**Définition**

Soit $Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^N; 0 \leq T \leq \infty$ .On dit que $(u,v) \in L_{loc}^q(Q_T) \times L_{loc}^p(Q_T)$ est une solution faible de (2.1) défini si

$$\int_Q v^p \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x,0)\, dx,$$

$$= -\int_Q u\phi_t dx dt + \int_Q u \Delta D_{0/t}^{1-\alpha} \phi dx dt, \tag{2.9}$$

Et

$$\int_Q u^q \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\phi(x,0)\, dx,$$

$$= -\int_Q v\phi_t dx dt + \int_Q v \Delta D_{0/t}^{1-\beta} \phi dx dt, \tag{2.10}$$

Pour certaine fonction test $\phi$,telle que $\phi(x,T) = 0$

**Théorème**

Soient $u_0$ , $v_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$.tel que $\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, dx > 0$ , $\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\, dx > 0$,alors le Problème (2.1) n'admet aucune solution globale.

$$\frac{N}{2} \leq \frac{1}{p^2(q-1) + q(p-1)} \min\left\{p^2 + q \ , \ q\left(\alpha p^2 + 1\right) \ , \ p(q\beta + p) \ , \ pq(\alpha p + \beta - 1)\right\},$$

Pour $\alpha p + \beta > 2$
Où

$$\frac{N}{2} \leq \frac{1}{q^2(p-1) + p(q-1)} \min\left\{q^2 + p \ , \ p\left(\beta q^2 + 1\right) \ , \ q(p\alpha + q) \ , \ pq(\beta q + \alpha - 1)\right\},$$

Pour $\beta q + \alpha > 2$

**Preuve**

On a la formule variationelle suivante

$$\int_Q v^p \phi dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\phi(x,0)\,dx$$

$$= -\int_Q u\phi_t dxdt + \int_Q u\Delta D_{0/t}^{1-\alpha}\phi dxdt,$$

$$\leq \int_Q u\,|\phi_t|\,dxdt + \int_Q u\left|\Delta D_{0/t}^{1-\alpha}\phi\right| dxdt \tag{2.11}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder , on obtient

$$\int_Q u\,|\phi_t|\,dxdt = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^T u\phi^{\frac{1}{q}}\phi^{\frac{-1}{q}}\,|\phi_t|\,dxdt,$$

$$\leq \left(\int_Q u^q\phi dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_Q \phi^{\frac{-q'}{q}}\,|\phi_t|^{q'}\,dxdt\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{2.12}$$

Où $q + q' = qq'$
On obtient l'estimation suivante

$$\int_Q u\left|\Delta D_{0/t}^{1-\alpha}\phi\right| dxdt \leq \left(\int_Q u^q\phi dxdt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_Q \phi^{\frac{-q'}{q}}\left|\Delta D_{0/t}^{1-\alpha}\phi\right|^{q'} dxdt\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{2.13}$$

Utilisons les estimations (2.11), (2.12) et (2.13),

$$\int_Q v^p\phi dxdt + \int_{R^N} u_0(x)\,\phi(x,0)\,dx \ \leq \left(\int_Q u^q\phi dxdt\right)^{\frac{1}{q}}(A_q + B_{q,\alpha}), \tag{2.14}$$

Où

$$A_q = \left(\int_Q \phi^{\frac{-q'}{q}}\,|\phi_t|^{q'}\,dxdt\right)^{\frac{1}{q'}} \quad , \quad B_{q,\alpha} = \left(\int_Q \phi^{\frac{-q'}{q}}\left|\Delta D_{0/t}^{1-\alpha}\phi\right|^{q'} dxdt\right)^{\frac{1}{q'}},$$

De même, on obtient l'estimation

$$\int_Q u^q \phi dxdt + \int_{R^N} v_0(x)\,\phi(x,0)\,dx \ \leq \left( \ \int_Q v^p \phi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} (A_p + B_{p,\beta}), \tag{2.15}$$

Où

$$A_p = \left( \int_Q \phi^{\frac{-p'}{p}} |\phi_t|^{p'} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}} \ , \ B_{p,\beta} = \left( \int_Q \phi^{\frac{-p'}{p}} \left| \Delta D_{0/t}^{1-\beta} \phi \right|^{p'} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

On pose

$$\begin{aligned} I &= \int_Q u^q \phi dxdt, \\ J &= \int_Q v^q \phi dxdt, \end{aligned}$$

$$I_0 = \int_{R^N} v_0(x)\,\phi(x,0)\,dx \ \ , \ J_0 = \int_{R^N} u_0(x)\,\phi(x,0)\,dx \ \ ,$$

Alors les inégalités (2.14) et (2.15) deviennent

$$\begin{aligned} I + I_0 &\leq J^{\frac{1}{p}} (A_p + B_{p,\beta}), \\ J + J_0 &\leq I^{\frac{1}{q}} (A_q + B_{q,\alpha}), \end{aligned}$$

Maintenant,on choisir

$$\phi(x,t) = \varphi(t)\,\psi(x),$$

Où $\varphi(t)$ est comme dans (2.3) et

$$\psi(x) = \chi\left(\frac{|x|}{R}\right),$$

Où $\chi$ est une fonction régulière telle que

$$\chi(r) \ = \begin{cases} 1\ , & 0 \leq r \leq 1 \\ \searrow\ , & 1 \leq r \leq 2\ , \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$

Ensuite, nous avons cela

$$D_{t/T}^{1-\alpha}\varphi(t) = \frac{\lambda\Gamma(\lambda-1-\alpha)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)}\,T^{-\lambda}(T-t)^{\lambda-1-\alpha},$$

On observe que

$$\begin{aligned}\int_Q \phi^{\frac{-q'}{q}}\left|\Delta D_{0/t}^{1-\alpha}\phi\right|^{q'}dxdt &= \int_Q \varphi^{-\frac{q'}{q}}(t)\,\psi^{-\frac{q'}{q}}(x)\left|\Delta\psi(x)\right|^{q'}\left|D_{t/T}^{1-\alpha}\varphi(t)\right|^{q'}dxdt\\ &= \left(\int_0^T \varphi^{-\frac{q'}{q}}(t)\left|D_{t/T}^{1-\alpha}\varphi(t)\right|^{q'}dt\right)\left(\int_{supp\ \Delta\psi}\Psi^{-\frac{q'}{q}}(x)\left|\Delta\Psi(x)\right|^{q'}dx\right),\end{aligned}$$

Où supp $\Delta\psi$ est le support de $\Delta\psi$.

$$\int_Q \phi^{-\frac{q'}{q}}(t)\left|\phi_t\right|^{q'}dxdt = \left(\int_0^T \varphi^{-\frac{q'}{q}}(t)\left|\varphi'(t)\right|^{q'}dt\right)\left(\int_{supp\ \Delta\psi}\psi^{-\frac{q'}{q}}(x)\left|\psi(x)\right|^{q'}dx\right),$$

Où $supp\psi$ est le support de $\psi$

Notons que :

$$-\frac{q'}{q}+q' = \left(1-\frac{1}{q}\right) = q'\frac{1}{q'} = 1,$$

En outre, nous constatons que

$$\int_0^T \varphi^{-\frac{1}{q-1}}(t)\left|\phi_0'(t)\right|^{\frac{q}{q-1}'}dt = \Lambda_q T^{\frac{-1}{q-1}},$$

Et

$$\int_0^T \varphi^{-\frac{q'}{q}}(t)\left|D_{t/T}^{1-\alpha}\varphi(t)\right|^{q''}dt = \Lambda_{q,\alpha}T^{1-\frac{1-\alpha q}{q-1}},$$

Estimons maintenant

$$\int_{supp\ \Psi}\psi^{-\frac{q'}{q}}(x)\left|\Delta\psi(x)\right|^{q'}dx\ ,$$

On changer le variable( $y := R^{-\frac{1}{2}}x, dx = R^{\frac{N\ \sigma}{2}}dy, \Delta_x\Psi = R^{-1}\Delta_y\Psi$)

Donc

$$\int_{supp\ \psi}\psi^{-\frac{q'}{q}}(x)\left|\Delta\Psi(x)\right|^{q'}dx\ = C_0R^{-q'+\frac{N}{2}},$$

Tel que $C_0$ est un constant positif et

$$\int_{supp\ \psi} \psi^{-\frac{q'}{q}}(x)\,\psi(x)^{q'}\,dx \; = C_1 R^{\frac{N}{2}},$$

Où $C_1$ est un constant positif.
Collecte des estimations, on obtient

$$I + I_0 \leq J^{\frac{1}{q}} \left( R^{-\frac{1}{q}\left(1-(p-1)\frac{N}{2}\right)} + R^{-\left(\left(1-\frac{N(p-1)}{2p}\right)-1++1-\alpha\right)} \right),$$

Où on pose $T = R$ .D'une manière similaire on a

$$J + J_0 \leq I^{\frac{1}{q}} \left( R^{-\frac{1}{p}\left(1-(q-1)\frac{N}{2}\right)} + R^{-\left(\left(1-\frac{N(q-1)}{2q}\right)-1+\beta\right)} \right),$$

Alors

$$I + I_0 \leq I^{\frac{1}{pq}} \left( R^{-\frac{1}{q}\left(1-(p-1)\frac{N}{2}\right)} + R^{-\left(\left(1-\frac{N(p-1)}{2p}\right)-1+\beta\right)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left( R^{-\frac{1}{p}\left(1-(q-1)\frac{N}{2}\right)} + R^{-\left(\left(1-\frac{N(q-1)}{2q}\right)-1+1-\alpha\right)} \right),$$

Alors

$$\begin{array}{c} I^{1-\frac{1}{pq}} \leq \left( R^{-\frac{1}{p^2}\left(1-(p-1)\frac{N}{2}\right)} + R^{-\frac{1}{p}\left(\left(1-\frac{N(p-1)}{2p}\right)-1+\beta\right)} \right) \\ \times \left( R^{-\frac{1}{q}\left(1-(q-1)\frac{N}{2}\right)} + R^{-\left(\left(1-\frac{N(q-1)}{2q}\right)-1+1-\alpha\right)} \right) \end{array},$$

$$= R^{\rho_1} + T^{\rho_2} + T^{\rho_3} + R^{\rho_4} \tag{2.16}$$

où

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\frac{1}{p^2}\left(1-(p-1)\frac{N}{2}\right) - \frac{1}{q}\left(\left(1-(q-1)\frac{N}{2}\right)\right) \\
\rho_2 &= -\frac{1}{p^2}\left(1-(p-1)\frac{N}{2}\right) - \left(\left(1-\frac{N(q-1)}{2q}\right) - 1 + 1 - \alpha\right) \\
\rho_3 &= -\frac{1}{p}\left(\left(1-\frac{N(p-1)}{2p}\right) - 1 + \beta\right) - \frac{1}{q}\left(1-(p-1)\frac{N}{2}\right) \\
\rho_4 &= -\frac{1}{p}\left(\left(1-\frac{N(p-1)}{2p}\right) - 1 + \beta\right) - \left(\left(1-\frac{N(q-1)}{2q}\right) - 1 + 1 - \alpha\right)
\end{aligned}$$

Si $\rho_1 < 0, \rho_2 < 0, \rho_3 < 0, \rho_4 < 0$ et $R \to \infty$.on obtient une contradiction.

Si on suppose que

$$\int_{R^N} u_0 dx > 0,$$

Ou

$$\int_{R^N} v_0 dx > 0.$$

Analysons l'inégalité

$$\max(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) < 0$$

On obtient

$$\frac{N}{2} \leq \frac{1}{p^2(q-1)+q(p-1)} \min\left\{p^2+q \ , \ q\left(\alpha p^2+1\right) \ , \ p(q\beta+p) \ , \ pq(\alpha p+\beta-1)\right\}, \tag{2.17}$$

pour $\alpha p + \beta > 2$,

une analyse par $J$ conduit à la contrainte

$$\frac{N}{2} \leq \frac{1}{q^2(p-1)+p(p-1)} \min\left\{q^2+p \ , \ p\left(\beta q^2+1\right) \ , \ q(p\alpha+q) \ , \ pq(\beta q+\alpha-1)\right\}, \tag{2.18}$$

Pour $\beta q + \alpha > 2$,

Le cas des égalités dans (2.17) ou (2.18) peut être traité de la même manière que dans [2.13] ou [2.6].

## 2.2 Deuxième système

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D}^{\alpha}(u-u_0)+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(u)=f(x,t)\,|v|^p\, dansQ \\ \underset{0/t}{D}^{\delta}(v-v_0)+(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}(v)=g(x,t)\,|u|^q\, dansQ \end{cases}, \tag{2.19}$$

Où $N \geq 1$, $p, q$ sont des nombres réels positive.$\underset{0/t}{D}^{\alpha}$désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha \in (0,1)$ au sense de Caputo,$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$, $\beta \in [1,2]$ est le laplacien fractionnaire, par rapport à $x$, d'ordre $\frac{\beta}{2}$,lequel est défini par

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta}\,\mathcal{F}(v)(\xi))(x,t), \tag{2.20}$$

Où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$son inverse.

Le système (2.19) est complété par les conditions initiales suivantes

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0; v(x,0)=v_0(x)\geq 0, x\in\mathbb{R}^N, \tag{2.21}$$

Où

$$\alpha > 0, \delta < 1 \leq \gamma, \beta \leq 2,$$

Où les fonctions $f$ et $g$ sont supposées satisfaire aux conditions

$$f(x,t)\geq C_1 t^{\omega_1}\,|x|^{d_1}\,, g(x,t)\geq C_2 t^{\omega_2}\,|x|^{d_2}\,, \tag{H$_1$}$$

Pour

$$t>0, x\gg 1, \omega_1,\omega_2\geq 0.d_1,d_2\geq 0.$$

**Définition**

Soit $Q_T=(0,T)\times\mathbb{R}^N$ ;$0\leq T\leq\infty$, On dit que $(u;v)\in\left(L^1_{loc}\left(Q_T\right)\right)^2$ est une solution faible locale de (2.19) définie sur $Q_T$ si

$$u^p, v^q \in L^1_{loc}\left(Q_T\right);\text{pour } i=1,2,$$

Et satisfait

$$\int_{Q_{TR}} u_0 \underset{t/TR}{D}^{\alpha}\xi_1 + \int_{Q_{TR}} f\,|v|^p\,\xi_1 = \int_{Q_{TR}} u \underset{t/TR}{D}^{\alpha}\xi_1 + \int_{Q_{TR}} u.(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\xi_1, \tag{2.22}$$

Et

$$\int_{Q_{TR}} v_0 \underset{t/TR}{D}^{\delta}\xi_2 + \int_{Q_{TR}} g\,|u|^q\,\xi_2 = \int_{Q_{TR}} v \underset{t/TR}{D}^{\delta}\xi_2 + \int_{Q_{TR}} v.(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\xi_2, \tag{2.23}$$

Pour certaines fonctions test $\xi_i \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$,telle que $\xi_i(x,T) = 0$ pour $(i = 1,2)$. Si $T = +\infty$, on dit que $(u;v)$ est une solution faible globale.

**Remarque**

Soient $T$ et $R$ deux réels positifs et soient $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$,pour le changement de variable suivant : $\tau = \frac{t}{R^{\frac{2}{\theta}}}$ et $y = \frac{x}{R}$ ,on a

$$(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\beta}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}, \tag{2.24}$$

$$\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}^{\alpha}\varphi(x,t) = R^{\frac{-2\alpha}{\theta}} \underset{\tau/T}{D}^{\alpha}\phi(|y|^2 + \tau^{\theta}), \tag{2.25}$$

$\underset{0/t}{D}^{\alpha}$désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha \in [0,1]$ au sense de Caputo.$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$,$\beta \in [1,2]$ est le laplacien fractionnaire, par rapport à $x$, d'ordre $\frac{\beta}{2}$.

**Preuve**

$$\begin{aligned}
(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \cdot \frac{\partial y_i^2}{\partial x_i^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}, \\
&= \left(R^{-2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\beta}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}},
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}^{\alpha}\varphi\,(x,t) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{\frac{2}{\theta}}} \frac{\varphi(x,\delta)}{(\delta-t)^{\alpha}}d\delta, \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{\frac{2}{\theta}}} \frac{\phi\left(y^2 + (\frac{\delta}{R^{\frac{2}{\theta}}})^{\theta}\right)}{(\delta-t)^{\alpha}}d\delta,
\end{aligned}$$

On pose $\frac{\delta}{R^{\frac{2}{\theta}}} = M$ alors : $d\delta = R^{\frac{2}{\theta}} dM$ donc

$$\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t) = \frac{-1}{R^{\frac{2\alpha}{\theta}}\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{T} \frac{\phi\left(y^2 + M^{\theta}\right)}{(M-\tau)^{\alpha}} dM,$$

Donc

$$\underset{t/TR^{\frac{2}{\theta}}}{D}{}^{\alpha}\varphi(x,t) = R^{\frac{-2\alpha}{\theta}} \underset{\tau/T}{D}{}^{\alpha}\phi(|y|^2 + \tau^{\theta}).$$

**Théorème**

Soit $p > 1, q > 1$. Supposons la condition ($\mathrm{H}_1$) est vérifié,Si

$$N \leq \max\left\{N_1, N_2\right\},$$

Où

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{\frac{\delta}{q}+\alpha-(1-\frac{1}{pq})+\frac{1}{pq}(\omega_1+\frac{\delta}{\gamma}d_1)+\frac{1}{q}(\omega_2+\frac{\alpha}{\beta}d_2)}{\frac{\delta}{\gamma q\grave{p}}+\frac{\alpha}{\beta\grave{q}}} \\ N_2 = \dfrac{\frac{\alpha}{p}+\delta-(1-\frac{1}{pq})+\frac{1}{pq}(\omega_2+\frac{\alpha}{\beta}d_2)+\frac{1}{p}(\omega_1+\frac{\delta}{\gamma}d_1)}{\frac{\alpha}{\beta p\grave{q}}+\frac{\delta}{\gamma\grave{p}}} \end{cases}, \tag{2.26}$$

Alors le problème (2.19) n'admet aucune solution faible non négative globale non triviale.

**Preuve**

Supposons que le problème (2.19) admet une solution faible globale non triviale, et donc $(u\ ,v)$ existe dans $(0,T^{*})^2$ pour tout $T^{*} > 0$. Soient $T$ et $R$ deux réels positifs tels que $0 < TR^{\frac{\beta}{\alpha}} < T^{*}$ et soit $\varphi$ une fonction test positive assez régulière.

Comme la condition initiale $u_0$,(resp $v_0$) est positive, la formulation variationnelle (2.22),(resp (2.23)) entraîne

$$\int_{Q_{TR}} f\left|v\right|^{p}\xi_1 \leq \int_{Q_{TR}} u \underset{t/TR}{D}{}^{\alpha}\xi_1 + \int_{Q_{TR}} u.(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\xi_1, \tag{2.27}$$

Et

$$\int_{Q_{TR}} g\left|u\right|^{q}\xi_2 \leq \int_{Q_{TR}} v \underset{t/TR}{D}{}^{\delta}\xi_2 + \int_{Q_{TR}} v.(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\xi_2. \tag{2.28}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\int_{Q_{TR}} f\left|v\right|^{p}\xi_1 \leq \left(\int_{Q_{TR}} \left|u\right|^{q}\xi_2 g\right)^{\frac{1}{q}} \cdot A, \tag{2.29}$$

Où

$$A = \left( \int_{Q_{TR}} \left| \underset{t/TR}{D}^{\alpha} \xi_1 \right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\grave{q}}} + \left( \int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\grave{q}}}.$$

Et

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 g \leq \left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 f \right)^{\frac{1}{p}} \cdot B, \tag{2.30}$$

Où

$$B = \left( \int_{Q_{TR}} \left| \underset{t/TR}{D}^{\delta} \xi_2 \right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\grave{p}}} + \left( \int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} \xi_2 \right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\grave{p}}}.$$

En Combinant (2.29) et (2.30) on aura

$$\left( \int_{Q_{TR}} |v|^p \xi_1 f \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq B^{\frac{1}{q}} \cdot A, \tag{2.31}$$

Et

$$\left( \int_{Q_{TR}} |u|^q \xi_2 g \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq A^{\frac{1}{p}} \cdot B. \tag{2.32}$$

Prenons maintenant

$$\xi_j(x,t) = \phi \left( \frac{|x|^{2\theta_j} + t^2}{R^2} \right), j = 1, 2$$

Où $\phi$ est une fontion  test positive et décroissante et

$$\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \theta_2 = \frac{\gamma}{\delta},$$

Maintenant ,on utilise le changement de variables dans (A) suivant

$$t = R\tau, x = R^{\frac{\alpha}{\beta}} y,$$

Et

$$\Omega_1 = \left\{ (y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \tau^2 + |y|^{\frac{2\beta}{\alpha}} < 2 \right\},$$

Choisir $\theta$ telle que

$$\left( \int_{Q_{TR}} \left| \underset{t/TR}{D}^{\alpha} \xi_1 \right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\grave{q}}} \leq \acute{C}_1 R^{\frac{1+\frac{N\alpha}{\beta} - \alpha\grave{q} - \frac{\grave{q}}{q}(\omega_2 + \frac{\alpha d_2}{\beta})}{\grave{q}}}, \tag{2.33}$$

Où

$$\acute{C}_1 = \left( \int_{\Omega_1} \left| \underset{\tau/T}{D}^{\alpha} \phi \right|^{\grave{q}} \left( C_2 \tau^{\omega_2} |y|^{d_2} \phi \right)^{\frac{-\grave{q}}{q}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{\grave{q}}},$$

Et comme $(\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} = R^{-\alpha}(\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}}$(voir remarque ) et $dxdt = R^{N+\frac{\alpha}{\theta}} dy d\tau$ nous obtenons

$$\left( \int_{Q_{TR}} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi_1 \right|^{\grave{q}} (\xi_2 g)^{\frac{-\grave{q}}{q}} \right)^{\frac{1}{\grave{q}}} \leq \acute{C}_2 R^{\frac{1+\frac{N\alpha}{\beta} - \alpha\grave{q} - \frac{\grave{q}}{q}(\omega_2 + \frac{\alpha d_2}{\beta})}{\grave{q}}}, \tag{2.34}$$

Où

$$\acute{C}_2 = \left( \int_{\Omega_1} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \phi \right|^{\grave{q}} \left( C_2 \tau^{\omega_2} |y|^{d_2} \phi \right)^{\frac{-\grave{q}}{q}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{\grave{q}}}.$$

Par la somme de (2.33) et (2.34) on obtient

$$A \leq C_1 R^{-L_1}, \tag{2.35}$$

Où

$$C_1 = \acute{C}_1 + \acute{C}_2,$$

Et

$$L_1 = \alpha - \frac{1}{\grave{q}} \left( 1 + \frac{N\alpha}{\beta} - \frac{\grave{q}}{q}(\omega_2 + \frac{\alpha d_2}{\beta}) \right).$$

Maintenant ,on utilise le changement de variables dans (B) suivant

$$t = R\tau, x = R^{\frac{\delta}{\gamma}} y,$$

Et

$$\Omega_2 = \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \tau^2 + |y|^{\frac{2\delta}{\gamma}} < 2 \right\}.$$

On obtient

$$\left( \int_{Q_{TR}} \left| \underset{t/TR}{D}^{\delta} \xi_2 \right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}} \right)^{\frac{1}{\grave{p}}} \leq \acute{C}_3 R^{\frac{1-\delta\grave{p}+\frac{N\delta}{\gamma} - \frac{\grave{p}}{p}(\omega_1 + \frac{\delta d_1}{\gamma})}{\grave{p}}}, \tag{2.36}$$

Où

$$\acute{C}_3 = \left( \int_{\Omega_1} \left| \underset{\tau/T}{D}^{\delta} \phi \right|^{\grave{p}} \left( C_1 \tau^{\omega_1} |y|^{d_1} \phi \right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dy d\tau \right)^{\frac{1}{\grave{p}}}.$$

Et comme $(\Delta_x)^{\frac{\gamma}{2}} = R^{-\gamma}(\Delta_y)^{\frac{\gamma}{2}}$(voir remarque ) et $dxdt = R^{N+\frac{\delta}{\gamma}}dyd\tau$ nous obtenons

$$\left(\int_{Q_{TR}} \left|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\xi_2\right|^{\grave{p}} (\xi_1 f)^{\frac{-\grave{p}}{p}}\right)^{\frac{1}{\grave{p}}} \leq \acute{C}_4 R^{\frac{1-\delta\grave{p}+\frac{N\delta}{\gamma}-\frac{\grave{p}}{p}(\omega_1+\frac{\delta d_1}{\gamma})}{\grave{p}}}, \tag{2.37}$$

Où

$$\acute{C}_4 = \left(\int_{\Omega_1} \left|(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}\phi\right|^{\grave{p}} \left(C_1\tau^{\omega_1}\,|y|^{d_1}\,\phi\right)^{\frac{-\grave{p}}{p}} dyd\tau\right)^{\frac{1}{\grave{p}}}.$$

Par la somme de (2.36) et (2.37) on obtient

$$B \leq C_2 R^{-L_2}, \tag{2.38}$$

Où

$$C_2 = \acute{C}_3 + \acute{C}_4,$$

Et

$$L_2 = \delta - \frac{1}{\grave{p}}\left(1 + \frac{N\delta}{\gamma} - \frac{\grave{p}}{p}\left(\omega_1 + \frac{\alpha d_1}{\beta}\right)\right).$$

Ainsi,de (2.35) et (2.38), il suit

$$\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\,\xi_1 f\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \hat{C}_1 R^{-(\frac{1}{q}L_2+L_1)}, \tag{2.39}$$

Et

$$\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\,\xi_2 g\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \hat{C}_2 R^{-(\frac{1}{p}L_1+L_2)}, \tag{2.40}$$

Maintenant,dans le cas où $\max\left\{-\left(L_1+\frac{1}{q}L_2\right);-\left(L_2+\frac{1}{p}L_1\right)\right\} < 0.$

L'exposant de $R$ dans (2.39) et (2.40) est négatif,En faisant tendre $R$ vers l'infini, nous obtenons

$$\begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} |u|^q\,g\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq 0, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}} |v|^p\,f\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq 0, \end{cases}.$$

Alors que $v \equiv 0$ et $u \equiv 0$, Ceci contredit le fait que (u,v) est une solution faible non-triviale de (2.19).

Finallement ,dans le cas où $\max\left\{-\left(L_1+\frac{1}{q}L_2\right);-\left(L_2+\frac{1}{p}L_1\right)\right\} = 0$,d'après la convergence des intégrales (2.39) et (2.40) si

$$C_R = \left\{(y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, R^2 < |y|^{\frac{2\beta}{\alpha}} + t^2 \leq 2R^2\right\},$$

Et

$$\acute{C}_R = \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, R^2 < |y|^{\frac{2\gamma}{\delta}} + t^\theta \leq 2R^2 \right\},$$

Donc

$$\lim_{R \to +\infty} \left( \int_{C_R} |v|^p \, \xi_1 f \right) = 0, \tag{2.41}$$

Ou

$$\lim_{R \to +\infty} \left( \int_{\acute{C}_R} |u|^q \, \xi_2 g \right) = 0. \tag{2.42}$$

D'aprés (2.31), on obtien :

$$\int_{Q_{TR}} f \, |v|^p \, \xi_1 \leq \left( \int_{C_R} f \, |v|^p \, \xi_1 \right)^{\frac{1}{pq}} \cdot \hat{C}_1.$$

D'aprés (2.32),on obtient :

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \, \xi_2 g \leq \left( \int_{\acute{C}_R} |u|^q \, \xi_2 g \right)^{\frac{1}{pq}} \cdot \hat{C}_2. \tag{2.43}$$

En faisant tendre $R$ vers l'infini, et on utilisant (2.41) où (2.42) nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}} |v|^p \, f = 0,$$

Où

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}} |u|^q \, g = 0,$$

Alors que $v \equiv 0$ ou $u \equiv 0$, Ceci contredit le fait que (u,v) est une solution faible non-triviale de (2.19).

# CHAPITRE 3

# Conditions nécessaires d'existence globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnairs

Ce chapitre est consacré à l'étude des conditions nécessaires d'existences globale pour deux systèmes de réaction diffusion($2\times 2$) avec des dérivées fractionnaires.

## 3.1 Premier système

Soit le systéme de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{1}{\Gamma(1-\tau)} \int_0^1 (t-s)^{-\tau} v(s) ds, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v_t - \Delta v = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^1 (t-s)^{-\delta} u(s) ds, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

Ou $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N), \tau \in (0,1), p, q > 1$ et $\Gamma$ est la fonction d'Euler.

$u_t$ désigne la dérivée par rapport au temps de $u$ ,$(-\Delta)$ est l'opérateur Laplacien avec le domaine $D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^N)$, où $H^2(\mathbb{R}^N)$ est l'espace standard de sobolv.

L'espace $C_0(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues décroissantes vers zéro à l'infini.

On note que les conditions nécessaires pour l'existence globale dépendent du comportement des conditions initiales à l'inifinie.

**Théoréme**

Soient $u_0, v_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N), u_0, v_0 \geq 0$ et $p, q > 1$.Si $(u,v)$ est une solution globale faible pour le probléme, alors il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \to +\infty} \inf (u_0(x) \left|x\right|^{2\alpha_1} &\leq C \\ \lim_{|x| \to +\infty} \inf (v_0(x) \left|x\right|^{2\alpha_2} &\leq C \end{aligned}$$

Ou $\alpha_1 = \frac{(2-\tau)+(2-\delta)p}{pq-1}, \alpha_2 = \frac{(2-\delta)+(2-\tau)q}{pq-1}$

**Preuve**

Soit $(u,v)$ une solution globale faible pour le probléme(3.1)(3.2) alors $u \in L^q([0,R]; L^\infty(B_{2R}))$ et $v \in L^p([0,R]; L^\infty(B_{2R}))$ pour $1 \ll R$, où $B_{2R}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $2R$.

On choisit la fonction test $\widetilde{\varphi} = \varphi(\frac{x}{R})\varphi_2(t)$ où $\varphi_2(t) = (1 - \frac{t}{R^2})_+^t$ et $0 \leq \varphi_1 \in H^2(B_2)$ et la premiére fonction propre de l'opérateur $(-\Delta)$ dans $B_2$ associée à la premiére valeur propre $\lambda_1 = \inf\{\left|\left|u\right|\right|_{H^1}; \left|\left|u\right|\right|_{L^2} = 1$ et $u = 0$ dans $\partial B_2\}$.

Alors on a d'aprés la formulation faible

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi(.,0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha}_{0/t}(|v|^{p-1}\, v)\varphi = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\varphi - \int_0^T \int u\varphi_t$$

Et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0\psi(.,0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J^{\alpha}_{0/t}(|u|^{p-1}\, u)\psi = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} v\Delta\psi - \int_0^T \int v\psi_t$$

Pour toutes fonctions test avec des supports compacts $\varphi, \psi \in C^1([0,T], H^2(\mathbb{R}^N))$ telles que $\varphi(.,T) = \psi(.,T) = 0$.

Donc

$$CR^{-2\alpha} \int_{\Omega} u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) + \int_{\Omega T} D^{\alpha}_{0,t} J^{\alpha}_{0,t}(v^p)\widetilde{\varphi} = -\int u\Delta D^{\alpha}_{t/T}\widetilde{\varphi} + \int uD^{\alpha+1}_{t/T}\widetilde{\varphi}$$

Où

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 2R\}, \Omega_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty); |x| \leq 2R, t \leq R^2$$

Et

$$\int_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} dxdt, \int_{\Omega} = \int_{\Omega} dx.$$

Donc

$$CR^{-2\alpha} \int_{\Omega} u_0\varphi\left(\frac{x}{R}\right) + \int_{\Omega_T} v^p\widetilde{\varphi} = -\int_{\Omega_T} u\Delta D^{\alpha}_{t,T}\widetilde{\varphi} + \int_{\Omega_T} uD^{\alpha+1}_{t/T}\widetilde{\varphi}$$

Et comme $\widetilde{\varphi}(x,t) = \varphi_1(\frac{x}{R})\varphi_2\,(t)$ on a

$$\begin{aligned} & CR^{-2\alpha} \int u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) + \int v^p\widetilde{\varphi} \\ \leq\ & C\int_{\Omega_T} u\widetilde{\varphi}^{\frac{1}{q}}\widetilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}(-\Delta_x)\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha}_{t/,T}\varphi_2(t) + C\int_{\Omega} u\widetilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}\widetilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) D^{\alpha+1}_{t/T}\varphi_2(t) \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} & CR^{-2\alpha} \int_{\Omega} u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) + \int_{\Omega_T} v^P\widetilde{\varphi} \\ \leq\ & C\left(\int_{\Omega_T} u^q\widetilde{\varphi}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{\left(\int_{\Omega_T} \widetilde{\varphi}^{-\frac{q'}{q}} |(-\Delta)\varphi_1|^{q'} \left|D^{\alpha}_{t,T}\varphi_2(t)\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{\Omega_T} \widetilde{\varphi}^{-\frac{q'}{q}} \varphi_1^{q'}\left(\frac{x}{R}\right) \left|D^{\alpha+1}_{t/T}\varphi_2(t)\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right\} \end{aligned}$$

Donc

$$V_3 + CR^{-2\alpha}\int_{\Omega} u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \leq (U_3)^{\frac{1}{q}}\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{q'}} + f_1^{\frac{1}{q'}}\right), \tag{3.3}$$

Où

$$\begin{aligned}
V_3 &= \int_{\Omega_T} v^p\widetilde{\varphi},\\
U_3 &= \int_{\Omega_T} u^q\widetilde{\varphi},\\
\varepsilon_1^{\frac{1}{q'}} &= C\left(\int_{\Omega_T}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\varphi_2(t)\right)^{-\frac{q'}{q}}|(-\Delta)\varphi_1|^{q'}\left|D^{\alpha}_{t/T}\varphi_2(t)\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},\\
f_1^{\frac{1}{q'}} &= C\left(\int \widetilde{\varphi}^{-\frac{q'}{q}}\varphi_1^{q'}\left(\frac{x}{R}\right)\left|D^{\alpha+1}_{t/T}\varphi_2(t)\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},
\end{aligned}$$

Et de même maniére, on trouve

$$U_3 + CR^{-2\beta}\int_{\Omega} v_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \leq V_3{}^{\frac{1}{p}}\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p'}} + f_2^{\frac{1}{p'}}\right), \tag{3.4}$$

Où

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2^{\frac{1}{p'}} &= C\left(\int_{\Omega_T}\left(\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\varphi_2(t)\right)^{-\frac{q'}{q}}\left|(-\Delta)\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\right|^{q'}\left|D^{\beta}_{t/R^2}\varphi_2(t)\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\\
f_2^{\frac{1}{p'}} &= C\left(\int \varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)\varphi_2^{-\frac{1}{p-1}}\left|D^{\beta+1}_{t/R^2}\varphi_2(t)\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

La combinaison (3.3)et(3.4) nous donne

$$V_3 + CR^{-2\alpha}\int_{\Omega} u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \leq (V_3)^{\frac{1}{pq}}\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p'q}} + f_2^{\frac{1}{qp'}}\right)\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{q'}} + f_1^{\frac{1}{q'}}\right), \tag{3.5}$$

et

$$U_3 + CR^{-2\beta}\int_{\Omega} v_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \leq (U_3)^{\frac{1}{pq}}\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{pq'}} + f_1^{\frac{1}{qp'}}\right)\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p'}} + f_2^{\frac{1}{p'}}\right), \tag{3.6}$$

On utilisant l'inégalité de Young dans le membre droit de (3.5)et(3.6) on obtien

$$V_3 + CR^{-2\alpha}\int_{\Omega} u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \leq V_3 + \left[\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p'q}} + f_2^{\frac{1}{qp'}}\right)\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{q'}} + f_1^{\frac{1}{q'}}\right)\right]^{\frac{pq}{pq-1}}$$

Et

$$U_3 + CR^{-2\beta}\int_\Omega v_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \le U_3 + \left[\left(\varepsilon_1^{\frac{1}{pq'}} + f_1^{\frac{1}{pq'}}\right)\left(\varepsilon_2^{\frac{1}{p'}} + f_2^{\frac{1}{p'}}\right)\right]^{\frac{pq}{pq-1}}$$

Ces estimations impliquent

$$CR^{-2\alpha}\int_\Omega u_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \le \left[\left(\varepsilon_2^{\frac{p-1}{pq-1}} + f_2^{\frac{p-1}{pq-1}}\right)\left(\varepsilon_1^{\frac{p(q-1)}{pq-1}} + f_1^{\frac{p(q-1)}{pq-1}}\right)\right] \tag{3.7}$$

Et

$$CR^{-2\beta}\int_\Omega v_0\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \le \left[\left(\varepsilon_1^{\frac{q-1}{pq-1}} + f_1^{\frac{q-1}{pq-1}}\right)\left(\varepsilon_2^{\frac{q(p-1)}{pq-1}} + f_2^{\frac{q(p-1)}{pq-1}}\right)\right] \tag{3.8}$$

Si on utilise le changement de variables $\tau = R^{-2}x$ ,$\xi = R^{-1}x$et le fait que

$$(-\Delta_x)\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) = R^{-2}\lambda_1\varphi_1\left(\frac{x}{R}\right),$$

On obtient

$$CR^{-2\alpha}\int_\Omega u_0(R\xi)\varphi_1(\xi) \le \overline{C_1}(R)\int_{|\xi|\le 2}\varphi_1(\xi)d\xi$$

Et

$$CR^{-2\beta}\int_\Omega v_0(R\xi)\varphi_1(\xi) \le \overline{C_2}(R)\int_{|\xi|\le 2}\varphi_1(\xi)d\xi$$

Où

$$\overline{C_1}(R) = CR^{-2\frac{(1+\beta p)+p(1+\alpha q)}{pq-1}}, \overline{C_2} = CR^{-2\frac{(1+\alpha q)+q(1+\beta p)}{pq-1}}$$

Les inégalités (3.7) et (3.8) peuvent étres écrites sous

$$\int_{|\xi|\le 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi) \le \overline{C_3}(R)\int_{|\xi|\le 2}\varphi_1(\xi)d\xi$$

$$= \overline{C_3}(R)\int_{|\xi|\le 2}|R\xi|^{2\alpha}|R\xi|^{-2\alpha}\varphi_1(\xi)d\xi \le C\int_{|\xi|\le 2}|R\xi|^{-2\alpha}\varphi_1(\xi)d\xi \tag{3.9}$$

Et

$$\int_{|\xi|\leq 2} v_0(R\xi)\varphi_1(\xi) \leq \overline{C_4}(R)\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1(\xi)d\xi$$

$$= \overline{C_4}(R)\int_{|\xi|\leq 2}|R\xi|^{2\beta}|R\xi|^{-2\beta}\varphi_1(\xi)d\xi \leq C\int_{|\xi|\leq 2}|R\xi|^{-2\beta}\varphi_1(\xi)d\xi, \tag{3.10}$$

Où

$$\overline{C_3}(R) = CR^{2\alpha}\overline{C_1}(R) = CR^{-2\alpha}, \overline{C_4}(R) = CR^{2\beta}\overline{C_2}(R) = CR^{-2\beta}$$

Utilisant l'estimation

$$\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi)|R\xi|^{2\alpha})\int_{|\xi|\leq 2}(R\xi)^{-2\alpha}\varphi_1(\xi)d\xi \leq \int_{1<|\xi|\leq 2}u_0(R\xi)\varphi_1(\xi) \leq \int_{|\xi|\leq 2}u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)$$

Et

$$\inf_{|\xi|>1}(v_0(R\xi)|R\xi|^{2\beta})\int_{|\xi|\leq 2}(R\xi)^{-2\beta}\varphi_1(\xi)d\xi \leq \int_{1<|\xi|\leq 2}v_0(R\xi)\varphi_1(\xi) \leq \int_{|\xi|\leq 2}v_0(R\xi)\varphi_1(\xi)$$

dans le membre droit de (3.9) et (3.10), on conclut, aprés la division par $\int_{|\xi|\leq 2}|R\xi|^{-2\alpha}\varphi_1(\xi)d\xi$ et $\int_{|\xi|\leq 2}|R\xi|^{-2\beta}\varphi_1(\xi)d\xi$, que

$$\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi)|R\xi|^{2\alpha}) \leq C \text{ et } \inf_{|\xi|>1}(v_0(R\xi)|R\xi|^{2\beta}) \leq C \tag{3.11}$$

Et passant à la limite dans (3 .11) lorsque $R\to\infty$, on obtient

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf_{|\xi|>1}\left(u_0(x)|Rx|^{2\alpha}\right) \leq C \text{ et } \lim_{|x|\to\infty}\inf_{|\xi|>1}\left(v_0(x)|Rx|^{2\beta}\right) \leq C$$

## 3.2 Deuxième système

On s'interesse dans cette partie à l'étude des conditions nécessaires pour l'existence globale du système de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \underset{0/t}{D}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |v|^p \ , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ \underset{0/t}{D}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^p \ , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.12}$$

Où $N \geq 1$ ; $p$ et $q$ sont deux réels positifs, $\underset{0/t}{D}^{\alpha_1} u$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha_i$ $(i = 1; 2)$ par rapport au temps .

$(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}$ désigne le Laplacien à la puissance $\frac{\beta_i}{2}$ par rapport à $x$, défini par

$$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x,t),$$

Où $\mathcal{F}$ est la tronsformée de Fourier et est $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse.

On associe au système (3.12) les conditions initiales suivantes

$$u(.,0) = u_0 \qquad ; \qquad v(.,0) = v_0, x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.13}$$

Où $u_0$ et $v_0$ sont des fonctions continues non négatives.

**Théoréme**

Supposons que le système (3.12) avec (3.13) admit une solution globale faible non negative non triviale ,alors il existe des constantes positives $H$ et $K$ telles que

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf \ u_0(x) |x|^{\frac{(\alpha_1 + p\ \alpha_2)}{(p\ q-1)}} \leq H. \tag{3.14}$$

Et

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf \ v_0(x) |x|^{\frac{(\alpha_2 + q\ \alpha_1)}{(p\ q-1)}} \leq K. \tag{3.15}$$

**Preuve**

D'aprés la formulation variationnelle on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_0 D_{t/T}^{\alpha_1} \varphi_1 &\leq \int_{Q_T} u D_{t/T}^{\alpha_1} \varphi_1 + \int_{Q_T} u\, (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \\ \int_{Q_T} v_0 D_{t/T}^{\alpha_2} \varphi_2 &\leq \int_{Q_T} v D_{t/T}^{\alpha_2} \varphi_2 + \int_{Q_T} v\, (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \end{aligned}$$

Pour toutes fonctions tests $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$ ,satisfaient $\varphi_1(.,T) = \varphi_2(.,T) = 0$.
Utilisant l'inégalité de Hölder,on obtient

$$\int_{Q_T} u\left|D^{\alpha_1}_{t/T}\varphi_1\right| \leq \left(\int_{Q_T}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_T}\left|D^{\alpha_1}_{t/T}\varphi_1\right|^{q'}\varphi_2^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Et

$$\int_{Q_T} u\left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right| \leq \left(\int_{Q_T}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_T}\left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right|^{q'}\varphi_2^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Et donc

$$\int_{Q_T} u_0 D^{\alpha_1}_{t/T}\varphi_1 \leq \left(\int_{Q_T}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}.A. \tag{3.16}$$

Où

$$A = \left(\int_{Q_T}\left|D^{\alpha_1}_{t/T}\varphi_1\right|^{q'}\varphi_2^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_T}\left|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\right|^{q'}\varphi_2^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Utilisant une autre fois l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{Q_T} v_0 D^{\alpha_2}_{t/T}\varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T}|v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}.B. \tag{3.17}$$

Où

$$B = \left(\int_{Q_T}\left|D^{\alpha_2}_{t/T}\varphi_2\right|^{p'}\varphi_1^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_T}\left|(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2\right|^{p'}\varphi_1^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Et comme $u_0$ et $v_0$ sont des fonctions non negatives, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}|v|^p\varphi_1 &\leq \left(\int_{Q_T}|u|^q\varphi_2\right)^{\frac{1}{q}}.A\\ \int_{Q_T}|u|^q\varphi_2 &\leq \left(\int_{Q_T}|v|^p\varphi_1\right)^{\frac{1}{p}}.B\end{aligned}$$

Et par conséquence

$$\left(\int_{Q_T}|v|^p\varphi_1\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq B^{\frac{1}{p}}A, \tag{3.18}$$

Et

$$\left(\int_{Q_T} |u|^q \varphi_2\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq BA^{\frac{1}{q}}, \tag{3.19}$$

On applique (3.18) et (3.19) respectivement dans (3.16) et (3.17), on obtient

$$\left(\int_{Q_T} u_0 D^{\alpha_1}_{t/T}\varphi_1\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq B^{\frac{1}{p}}A, \tag{3.20}$$

Et

$$\left(\int_{Q_T} v_0 D^{\alpha_2}_{t/T}\varphi_2\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq BA^{\frac{1}{q}}, \tag{3.21}$$

On considére la fonction test suivante

$$\varphi_1(x,t) = \varphi_1(x,t) = \phi\left(\frac{x}{R}\right) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}.$$

dans (3.20) et (3.21) , où $\phi \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est une fonction non negative,son support inclu dans

$\{R < |x| < 2R\}$ et satisfait

$$\begin{array}{c} (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\phi \leq K\phi \text{ pour un certain } K > 0 \\ (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\phi \leq h\phi \text{ pour un certain } h > 0 \end{array}, \tag{3.22}$$

L' exposant l est un nombre réel positif quelconque si

$$\min\left(p - \frac{1}{1-\alpha_2}, q - \frac{1}{1-\alpha_1}\right) \geq 0$$

Et $\lambda > \max(\alpha_1 q' - 1, \alpha_2 p' - 1)$ si

$$\min\left(p - \frac{1}{1-\alpha_2}, q - \frac{1}{1-\alpha_1}\right) < 0$$

Où $p', q'$ sont respectivement les conjugués des exposants p et q :

Notant que

$$D^{\alpha_1}_{t/T}\varphi_1(x,t) = \Lambda_1 T^{-\alpha_1}\phi\left(\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-\alpha_1}$$

Où

$$\Lambda_1 = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\lambda-\alpha_1)}$$

D'une façon similaire, on a

$$D_{t/T}^{\alpha 2}\varphi_2(x,t) = \Lambda_2 T^{-\alpha_2}\phi\left(\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-\alpha_2}$$

Où

$$\Lambda_2 = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\lambda-\alpha_2)}$$

Considérons maintenant le changement de variables

$$t = T\tau, x = Ry$$

On obtient

$$\int_{Q_T} u_0 D_{t/T}^{\alpha_1}\varphi_1 = \frac{\Lambda_1 T^{1-\alpha_1}}{1+\lambda-\alpha_1}\int_{R^N} u_0(Ry)\,\Phi(y)\,dy, \tag{3.23}$$

Tenant compte de (3.22), on obtient

$$A \leq \left(\frac{\Lambda_1^{q'} T^{1-q'\alpha_1} R^N}{(\lambda-\alpha_1)\,q' - \lambda\left(\frac{q'}{q}\right)+1}\int_{R^N}\phi(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{TR^{-\beta_1 q'+N}K^{q'}}{\lambda+1}\int_{R^N}\phi(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.24}$$

Et encore

$$A \leq R^{\frac{N}{q}}\left(\frac{\Lambda_1 T^{1-q'\alpha_1}}{\left((\lambda-\alpha_1)\,q' - \lambda\left(\frac{q'}{q}\right)+1\right)^{\frac{1}{q}}} + \frac{T^{\frac{1}{q}}R^{-\beta_1}K}{(\lambda+1)\,\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{R^N}\phi(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.25}$$

Et d'une façon analogue,utulisant (3.22) , on obtient

$$A \leq R^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\Lambda_2 T^{1-p'\alpha_2}}{\left((\lambda-\alpha_2)\,p' - \lambda\left(\frac{p'}{p}\right)+1\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{T^{\frac{1}{p}}R^{-\beta_1}K}{(\lambda+1)\,\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{R^N}\phi(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.26}$$

D'aprés (3.23) ; (3.25) et (3.26) avec l'inégalité (3.20) ; on obtient

$$T^{\frac{(1-\alpha)}{1-\frac{1}{pq}}} \left\{ \int_{R^N} u_0 \left(Ry\right) \phi \left(y\right) dy \right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$

$$\leq \left( C_1 T^{\frac{1}{q}-\alpha_1} + C_2 T^{\frac{1}{q}} R^{-\beta_1} \right) \left( C_3 T^{\frac{1}{p}-\alpha_2} + C_4 T^{\frac{1}{p}} R^{-\beta_2} \right) \left( \int_{R^N} \phi \left(y\right) dy \right), \tag{3.27}$$

Multipliant par la quantité $|x|^{\frac{(\alpha_{1+p}\ \alpha_2)}{(pq-1)}}\ |x|^{-\frac{(\alpha_{1+p}\ \alpha_2)}{(pq-1)}}$dans l'intégrale précédente, et comme $supp\left(\phi\right) \subset \{1 < y < 2\}$ , (3.27)devient

$$T^{\frac{(1-\alpha)}{1-\frac{1}{pq}}} \left\{ u_0 \left(x\right) |x|^{\frac{(\alpha_{1+p}\ \alpha_2)}{(pq-1)}} \right\}^{1-\frac{1}{pq}} \leq \left( C_1 T^{\frac{1}{q}-\alpha_1} + C_2 T^{\frac{1}{q}} R^{-\beta_1} \right) \left( C_3 T^{\frac{1}{p}-\alpha_2} + C_4 T^{\frac{1}{p}} R^{-\beta_2} \right) \left(2R\right)^{\frac{\alpha_{1+p}\ \alpha_2}{pq}}$$

On prend $T = R$,il suit

$$\inf \left\{ u_0 \left(x\right) |x|^{\frac{(\alpha_{1+p}\ \alpha_2)}{(pq-1)}} \right\}^{1-\frac{1}{pq}} \leq 2^{\frac{(\alpha_{1+p}\ \alpha_2)}{pq}} C_1 C_3^{\frac{1}{q}},$$

Donc on obtient l'inégalité (3.14) pour

$$H = 2^{\frac{(\alpha_{1+p}\ \alpha_2)}{pq}} \left( C_1 C_3^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{pq}{pq-1}},$$

Et comme précédemment on obtient l'inégalité (3.15) avec

$$K = 2^{\frac{(\alpha_{2+q}\ \alpha_1)}{pq}} \left( C_1^{\frac{1}{p}} C_3 \right)^{\frac{pq}{pq-1}},$$

# CHAPITRE 4

# Existence globale des solutions des systèmes de réaction diffusion

Dans ce chapitre, on va donner une rappelle pour l'existence globale des solutions classiques des systèmes de réaction diffusion par ce que l'existence globale des solutions dans les systèmes de réaction-diffusion fractionnaire reste encore un domaine de recherche.

## Introduction

Il n'existe pas de solutions générales des sysèmes d'équations de réaction-diffusion. On dispose cependant d'informations qualitatives sur l'existence globale des solutions et leur comportements attendus lorsque la variable $t$ tend vers l'infini.

Le fait que ces systèmes modélisent des phénomènes du monde réel, les questions mathématiques importantes qui les concernent sont :

-Existence et unicité de la solution pour des données initiales données dans une vaste

-classe de fonctions.

-Caractère globale de la solution.

-Positivité de la solution chaque fois que les données initiales sont positives.

-Comportement asymptotique de la solution globale lorsque le temps t tend vers 1.

-Dépendance continue de la solution des données initiales.

## Fonctionnelles de Lyapunov classiques

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que **la méthode des régions invariantes**,**l'effet régularisant**, **méthodes fonctionnelles basées sur des estimations à priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov** Ici, nous n'exposons pas les deux premières méthodes puisqu'elles ne donnent pas toujours l'existence globale vu la difficulté et la complexité des termes de réaction de certains systèmes de réaction-diffusion, mais nous nous consacrons à la dernière méthode qui donne des résultats satisfaisants.

## Définition

On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de $m$ équations, toute fonction

$$L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

Telle que

$$\frac{d}{dt}(L(u_1(t;.), ...., u_m(t;.))) \leq 0$$

Pour tout $t > 0$ et toute solution $(u_1(t;.), ...., u_m(t;.))$ de système.

**Existence globale des solutions pour un système de réaction-diffusion avec deux équations**

Considérons le système de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = g(u,v) = \Lambda - \lambda(t) f(u,v) - \mu u \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\Delta u - d\Delta v = h(u,v) = \lambda(t) f(u,v) - \mu v \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{4.2}$$

Et les données initiales continues et bornées

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x) \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{4.3}$$

Où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^1$,avec la frontière $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial\eta}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.

$a, b, d$,$\Lambda$,et $\mu$ sont des constantes telle que

$$a > 0; b > 0, d - a \geq b, \mu > 0 \text{ et } \Lambda \geq 0. \tag{4.4}$$

On suppose que $t \to \lambda(t)$ est une fonction non négative et bornée sur $C(\mathbb{R}^+)$,et que $f$ est non négative continûment différentiables sur $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$ ,et satisfait $f(0,s) = 0, \forall s \in \mathbb{R}^+$,et

$$\lim_{s \to +\infty} \left(\frac{\ln(1 + f(.,s)}{s}\right) = 0. \tag{4.5}$$

**Existence globale**

Il est bien connu que pour montrer l'existence globale des solutions pour (2,1) -(2,3) (voir Henry[11],pp 35-62), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|f(u,v)\|_p$ et $\|g(u,v)\|_p$ pour $t \in [0; T_{max}[$ dans l'espace $L^p(\Omega)$, pour un certain $p > \frac{n}{2}$ Notre but est de construire une fonctionnelle de Lyapunov à croissance exponentielle pour trouver des estimations à priori de la solution.

Considérons la fonctionnelle $J(t) = \displaystyle\int_\Omega (1 + \delta(u + u^2))e^{\varepsilon v} dx$ (voir Haraux and Youkana[10]).

Où $\delta$ et $\varepsilon$ sont des constantes telle que

$$0 < \delta \leq \min(\frac{\mu}{2\Lambda(1+2k)}, 2(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \frac{1}{1+2k})^2), \tag{4.6}$$

Et

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{1+\delta(k+k^2)} \min(1, \frac{d-a}{b}). \tag{4.7}$$

**Théoréme**

Soit $(u(t,\cdot), v(t,\cdot))$ une solution de (2.1) - (2.3) sur $(0, T^*)$, alors il existe une constante positive $\gamma$ telle que pour toute $t \in (0, T^*)$ la fonctionnelle

$$J(t) = \int_{\Omega} (1 + \delta(u + u^2) e^{\varepsilon v} dx, \tag{4.8}$$

Satisfait la relation

$$\frac{d}{dt} J(t) \leq -\frac{\mu}{2} J(t) + \gamma. \tag{4.9}$$

**Existence globale des solutions pour un système avec trois équations**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a_1 \Delta u = f(u,v,w) = \sigma - b_1 u + \frac{u^{p_1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+c)}, & \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - a_2 \Delta v = g(u,v,w) = -b_2 v + \frac{u^{p_2}}{v^{q_2} w^{r_2}} & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - a_3 \Delta w = h(u,v,w) = -b_3 w + \frac{u^{p_3}}{v^{q_3} w^{r_3}}. & \end{cases} \tag{4.10}$$

Avec les conditions de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times \{t > 0\}, \tag{4.11}$$

Et les données initiales

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_1(x) > 0, & \\ v(x,0) = \varphi_2(x) > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w(x,0) = \varphi_3(x) > 0. & \end{cases} \tag{4.12}$$

Et $\varphi_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ,pour tout $i = 1, 2, 3$,où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^1$avec la frontière $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale extérieure sur $\partial\Omega$.

$c, p_i, q_i, r_i$ sont non négatifs avec $\sigma, b_i, a_i > 0$, pour tout $i = 1, 2, 3$

$$0 < p_1 - 1 < \max\left\{p_2 \min\left(\frac{q_1}{q_2+1}, \frac{r_1}{r_2}, 1\right), p_3 \min\left(\frac{r_1}{r_3+1}, \frac{q_1}{q_3}, 1\right)\right\}. \tag{4.13}$$

Posons $A_{ij} = \frac{a_i+a_j}{\sqrt[2]{a_i a_j}}$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$. $\alpha, \beta$ et $\gamma$ soient des constantes positives telles que

$$\alpha > 2\max\left\{1, \frac{b_2+b_3}{b_1}\right\}, \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{\beta} > 2A_{12}^2, \tag{4.15}$$

Et

$$\left(\frac{1}{2\beta} - A_{12}^2\right)\left(\frac{1}{2\gamma} - A_{13}^2\right) > \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} A_{23} - A_{12}A_{13}\right)^2. \tag{4.16}$$

**Existence globale**

Il est bien connu que pour trouver l'existence globale des solutions pour (2.22) -(2.24) (voir Henry[11],pp 35-62), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\|g(u,v)\|_p$ ; $\|g(u,v)\|_p$ pour $t \in [0; T_{max}[$ dans l'espace $L^p$ $(\Omega)$, pour un certain $p > \frac{n}{2}$

**Théoréme**

Supposons que les fonctions $f, g$ et $h$ sont satisfaisants la condition (2.25).

Soit $(u(.,t)v(.,t), w(.,t))$ Une solution de (2,22) - (2,24) et soit

$$L(t) = \int_\Omega \frac{u^\alpha(t,x)}{v^\beta(t,x)w^\gamma(t,x)}dx, \tag{4.17}$$

Alors, la fonction $L$ est uniformément bornée sur l'intervalle $[0, T^*]$ , $T^* < T_{\max}$ .

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons utilisé deux méthodes pour étudié la non existence globale des solutions pour quelques systéme de reaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires.

Mais pour l'existence globale nous avons donné une petite rapelle sur l'existence des solutions dans les systèmes de réaction diffusion classiques puisque dans le cas fractionnaire cette derniere reste encore un domaine de recherche.

Une extension éventuelle de ce travail peut traiter l'existence globale des solution de ce type des systémes.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] S.Abdelmalek A.Youkana Global existence of solutions for some coupled systems of reactiondiffusion arXiv :1009.5687v2 [math.AP] 29 Jan 2011

[2] P.Biler,T.Funaki and W. A.Woyczynski, Fractal Burgers equations, J.Differential Equations 148 (1998) 9-46. .

[3] H.Bresis,Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[4] W.Feng,Coupled Systems of Reaction-Diffusion Equations and Applications. Ph.D Thesis,North Carolina State University (1988).

[5] A.Friedman,Partial Differential Equations of Parabolic Type.Prentice Hall Englewood Chiffs. N.J ;1964.

[6] H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo Sect. I 13 (1966) 109–124.

[7] M.Guedda and M.Kirane, Criticality for some evolution equations,Differential Equations 37 (2001) 540-550.

[8] D.Henry, Geometric Theory of Semi linear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[9] M.Kirane and M.Qafsaoui Global Nonexistence for the Cauchy Problem of Some Nonlinear Reaction–Diffusion Systems J. Appl. Math 268,217–243 (2002).

[10] M.Kirane and S. Kouachi, Global Solutions to a System of Strongly Coupled ReactionDiffusion Equations. Nonlinear Analysis Theory, Methods and applications. Vol 126, n8 ; (1996) USA.

[11] M.Kirane and S.Kouachi, A Strongly Nonlinear Reaction-Diffusion Model for a Deteministic Diffusion Epidemie. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. Vol 12 n 1,(1995). JAPAN.

[12] M.Kirane and S.Kouachi, Asymptitic Behavior for a System Describing Epidemics with Migration and Spatial Spread of Infection. Dynamical Systems and applications, Vol 12 number 1, (1993), 121-130.

[13] M.Kirane, B.Ahmad • A.Alsaedi • M.Al-Yami Systems of reaction-diffusion equations • Nonlocal operators • Fractional calculus • Blow-up solutions.

[14] M.Kirane, Y.Laskri and N-e.Tatar, Critical exponent of Fujita type for certain evolution equations and systems with spacio-temporal fractional.

[15] M.Kiranea,Y.Laskri, N-e.Tatar Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives J. Math. Anal. Appl. 312.

[16] E.Mitidieri and S.I.Pohovavev, Apriori estimates and blow-up of solutions to a non linear partial differential equations and inequalities,Proc.Steklov.Ins.math.234 (2001) 1-383.

[17] J.Morgan, Global Existence for Semilinear Parabolic Systems. SIAM. J.Math. Anal 20, (1989), 1128-1144.

[18] B.Rebiai and K.Haouam Non existence of Global Solutions to a Nonlinear Fractional Reaction-Diffusion System IAENG International Journal of Applied Mathematics, 45 :4, IJAM_45_4_02 14 November 2015.

[19] B.Rebiai, S. Rouar and K.Haouem, Critical exponents for a nonlinear reaction-diffusion systèm with fractional derivatives.

[20] B.Rebiai, S.Benzeghari and K.Haouem, Necessary conditions of existence for a non-linear reaction-diffusion system with fractional derivatives.Novi Sad J.Math.