



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Larbi Tébessi –Tébessa -

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et informatique



# MEMOIRE DE MASTER

**Domaine:** Mathématiques et informatique

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Mathématiques Appliquées

**Thème:**

**Systemes Dynamiques et Chaos**

**Présenté par:**

- KHEMICI Souad

- BOUTORA Basma

**Devant le jury:**

Rachida MEZHOUD	M.A.A	Université de Tébessa	Président
Ahlem GASRI	M.A.A	Université de Tébessa	Rapporteur
Imen OTMANI	M.A.A	Université de Tébessa	Examineur

**Date de soutenance:**

24/05/2017

**Note:** ..... **Mention:** .....

# remerciements

Tout d'abord et avants tout, Nous remercions ALLAH de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.

Nous exprimons toutes notre profonde reconnaissance à notre encadreur

**GASSRI Ahlem** de nos avoir guidés et conseillés tout au long de ce projet, nous également exprimer à lui toute nos gratitude pour son soutien scientifique et humain, et la confiance qu'il m'accorde pour réaliser ce travail.

Dr **Mezhoud Rachida** nous la prie de bien vouloir accepter nos respectueuse gratitude, pour l'honneur qu'il nos fait en présidents ce jury.

Dr **Othmani Imen** nous la prie de bien vouloir accepter nos respectueuse gratitude, pour l'honneur qu'il nos fait en examinateur jury.

Nous remercions également notre famille pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.

Aussi nous adressons nos sincères remerciements à l'ensemble des enseignants et tout le personnel du département *mathématique et informatique*.

Sans oublier tous ceux et tous celle qui ont contribué, de loi ou de prés à la réalisation de ce mémoire.

# Liste de figure

Figure N <sup>0</sup>	Titre	Page
Figure (1.1)	Classification des pts d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$ .	13
Figure (1.2)	Section de Poincaré.	21
Figure (1.3)	Système périodique.	21
Figure (1.4)	Système quasi-périodique.	22
Figure (1.5)	Système chaotique.	22
Figure (2.1)	Diagramme de bifurcation nœud-col.	27
Figure (2.2)	Diagramme de bifurcation fourche.	28
Figure (2.3)	Diagramme de bifurcation transcritique.	29
Figure (2.4)	Diagramme de bifurcation hopf.	30
Figure (2.5)	Diagramme de bifurcation hétéroclinique.	32
Figure (2.6)	Diagramme de bifurcation homoclinique.	32
Figure (3.1)	Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état $x_1$	36
Figure (3.2)	Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase.	41
Figure (4.1)	Attracteur de Lorenz pour $r=5$ .	49
Figure (4.2)	Attracteur de Lorenz pour $r=10$ .	49
Figure (4.3)	Attracteur de Lorenz pour $r=15$ .	49
Figure (4.4)	Attracteur de Lorenz pour $r=20$ .	50
Figure (4.5)	Attracteur de Lorenz pour $r=24$ .	50
Figure (4.6)	Attracteur de Lorenz pour $r=28$ .	50
Figure (4.7)	Attracteur étrange de Lorenz	51
Figure (4.8)	Illustration de l'aspect aléatoire de l'état $x$ du système de Lorenz	51
Figure (4.9)	Illustration de l'aspect aléatoire de l'état $y$ du système de Lorenz	52
Figure (4.10)	Illustration de l'aspect aléatoire de l'état $z$ du système de Lorenz	52
Figure (4.11)	Attracteur étrange de Rössler.	53
Figure (4.12)	Etat chaotique $x_1$ du système du Rössler.	56
Figure (4.13)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=0.5$ et $x_{eq}=0$ .	57
Figure (4.14)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=1$ et $x_{eq}=0$ .	58
Figure (4.15)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=1$ et $x_{eq}=0.33333$ , $x_{eq}=0$ .	58
Figure (4.16)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=1.5$ et $x_{eq}=0$ .	59
Figure (4.17)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=3$ et $x_{eq}=0.66667$ , $x_{eq}=0$ .	59

Figure (4.18)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=3.3 < 1 + \sqrt{6}$ .	<b>60</b>
Figure (4.19)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=3.5 > 1 + \sqrt{6}$ .	<b>61</b>
Figure (4.20)	L'évolution des points fixes de l'application logistique pour $r=3.57 > 3.569945$	<b>61</b>
Figure (4.21)	Trajectoire de la fonction logistique.	<b>62</b>
Figure (4.22)	Illustration des aspects aléatoires de l'application logistique pour $r=4$ .	<b>62</b>
Figure (4.23)	Diagramme de la bifurcation logistique.	<b>62</b>

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les systèmes dynamiques</b>	<b>7</b>
1.1	Système dynamique . . . . .	7
1.1.1	Système dynamique continue . . . . .	9
1.1.2	Système dynamique discret . . . . .	10
1.2	Point fixe . . . . .	10
1.3	Portrait de phase et de cycles limites . . . . .	11
1.3.1	Orbite périodique . . . . .	12
1.4	Stabilité . . . . .	12
1.4.1	Cas des systèmes dynamiques continues . . . . .	12
1.4.2	Cas des systèmes dynamiques discrets . . . . .	14
1.4.3	Stabilité au sens de Poincaré . . . . .	17
1.4.4	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	17
1.5	Section de Poincaré . . . . .	21
1.5.1	Les cas typiques observés . . . . .	21
1.6	Méthode des fonctions de Lyapunov . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Bifurcations</b>	<b>26</b>
2.1	Introduction . . . . .	26
2.2	Définition de bifurcation . . . . .	26
2.3	Diagramme de bifurcation . . . . .	27
2.4	Différents types de Bifurcation . . . . .	27
2.4.1	Bifurcation locale . . . . .	27
2.4.2	Bifurcation super-critique et sous-critique . . . . .	32
2.4.3	Bifurcation globale . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Théorie du chaos</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Définitions du chaos . . . . .	35
3.3	Caractéristique du chaos . . . . .	36
3.3.1	La non linéarité . . . . .	36
3.3.2	Le déterminisme . . . . .	37
3.3.3	L'espace aléatoire . . . . .	37
3.3.4	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	37
3.4	Les attracteurs . . . . .	38
3.4.1	Définitions d'attracteurs . . . . .	38
3.4.2	Les propriétés d'un attracteur . . . . .	40
3.4.3	Les types d'attracteur . . . . .	40
3.5	Détection du chaos . . . . .	43
3.5.1	Les exposants de Lyapunov . . . . .	43
3.5.2	Dimension fractale . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Quelques systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>47</b>
4.1	Le chaos continue . . . . .	47
4.1.1	Système de Lorenz . . . . .	47
4.1.2	Le système de Rössler . . . . .	55
4.2	Le chaos discret . . . . .	58
4.2.1	Fonction logistique . . . . .	58

## Notations

$x^*$	point fixe
$\lambda$	valeur propre
$\operatorname{Re}(\lambda)$	partie réel du valeur propre
$\operatorname{Im}(\lambda)$	partie imaginaire du valeur propre
$Df(x)$	la matrice jacobienne
$m$	le multiplicateur
$v(x_1, \dots, x_n)$	fonction de Lyapunov
$\mu$	paramètre de contrôle
$\overline{Y}$	fermeture de $Y$
$\{y_n\}$	suite des points
$d$	la distance
$f^{(j)}$	$j$ ème itération de $f$
$\varphi_t(x)$	flot du système
$A$	attracteur
$B(A)$	bassin d'attracteur
$T$	la période de solution
$(C)$	cercle
$R$	zone de capture
$C^1$	classe des fonctions continue et dérivable une fois
$\lambda(x_0)$	exposant de Lyapunov
$\exp$	exponentielle
$H$	fonction de Heaviside
$V$	dimension de corrélation
$d_l$	dimension de Lyapunov
$d_c$	dimension de capacité (Kolmogorov)
$d_H$	dimension de Housdorff
$\mu_d(M)$	la mesure de l'ensemble $M$
$Id$	identité

---

## Résumé

Ce travail de mémoire est focalisé sur les systèmes dynamiques continus et discrets et leurs applications dans de nombreux domaines, nous étudions les différents types de bifurcation. Ainsi nous donnons quelques définitions du chaos, les attracteurs et leurs types. Enfin, nous abordons quelques systèmes dynamiques chaotiques.

**Mots clés :** chaos, stabilité de Lyapunov, bifurcation, attracteurs, espace des phase, les exposants de Lyapunov, modèle de Lorenz, modèle de Rössler, fonction logistique.

## Abstract

This memory work is focused on discrets, continuous dynamic systems and their application in many fields, we study the different types of bifurcation. Thus, we give some definition of the chaos, the attractors and their types. Finally, we approach some dynamical chaotic systems.

**Keywords :** chaos, Lyapunov stability, bifurcations, attractors, phase space, Lyapunov exponents, Lorenz model, Rössler model, logistic function.

---

## Introduction Générale

Un **système dynamique** consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui *détermine de façon unique* l'état présent du système en fonction de ses états passés. Aucun élément aléatoire n'est admis dans notre définition d'un système dynamique déterministe. Par exemple, un modèle possible pour déterminer le prix de l'or en fonction du temps serait de dire que le prix du jour est celui de la veille plus ou moins un dollar, avec les deux possibilités équiprobables. Au lieu d'être appelé système dynamique, un tel modèle est souvent appelé un **processus aléatoire ou stochastique**. Une réalisation typique d'un tel modèle pourrait être de jouer à pile ou face chaque jour pour déterminer le nouveau prix. Ce type de modèle n'est pas déterministe, et est rejeté de notre définition de système dynamique.

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. La nature de cette étude diffère suivant la système dynamique étudié, nature qui dépend des outils utilisés (analytique, géométriques probabilistes).

En 1963, le titre de la communication du météorologue Edward Lorenz énonce bien le problème : "Est-ce qu'un battement d'ailes de papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas?". Il y analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non- linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "**système**" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "**espaces des phases**"; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire.

La notion de bifurcation est l'une des plus récentes notions dégagées par les mathématiciens. Généralement, la bifurcation décrit un changement immédiat de forme, d'état ou de comportement entraîné par la variation des paramètres distincts des variables d'état. Nouveauté de la forme, de l'état, du comportement : la bifurcation mathématique est un outil permettant de comprendre la genèse et la fin des chaos. L'exemple le plus simple qu'on puisse donner d'une

---

bifurcation relève encore de l'observation des paysages montagnards.

La théorie du chaos s'intéresse aux systèmes dits "chaotique", qui ont une forte dépendance aux conditions initiales : une petite variation des conditions initiales croît rapidement pour donner un résultat totalement différent ( le célèbre "**effet papillon**").

Le pionnier est Poincaré, à la fin de XIXe siècle, qui étudiait la gravitation entre plusieurs corps (comme le système solaire). Mais le domaine a vraiment décollé suite aux travaux de Lorenz dans la deuxième moitié du XXe siècle ; c'était un météorologue qui s'est rendu compte que des erreurs d'arrondi dans ses simulations conduisaient à d'énormes différences.

La théorie de chaos née avec Poincaré au XIX<sup>ème</sup> siècle, dans son étude du système solaire et de sa stabilité. Il cherchait à savoir si le système était stable, ou s'il allait un jour se dissoudre, pouvant engendrer des collisions entre les corps. Elle est donc née avec la mécanique céleste.

Toujours au même siècle le mathématicien Russe Alexandre Lyapunov effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduisait l'idée de mesure l'écart entre deux trajectoires ayant deux conditions initiales voisines ; lorsque cet écart évolue exponentiellement, on parle de sensibilité aux conditions initiales, les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli seront, plus tard, très précieux pour étudier certains aspects de la théorie de chaos.

Le comportement chaotique a été considéré comme un phénomène exotique qui peut être seulement d'intérêt mathématique et ne serait jamais rencontré dans la pratique. Plus tard, le chaos a été largement appliqué à beaucoup de disciplines scientifiques mathématiques, la programmation, la microbiologie, la biologie, l'informatique, l'économie, l'ingénierie, la chimie, la finance, la philosophie, la physique, la dynamique de la population, la communication, médecine.

Ce mémoire comprend quatre chapitres, sa structuration représente comme suite :

**Chapitre 1** : Ce chapitre est consacré à donner des notions de base sur les systèmes dynamiques (continues et discrets), nous représentons aussi la notion de stabilité des systèmes dynamiques.

**Chapitre 2** : Dans ce chapitre nous étudions les différents types de bifurcations (noeud-col, fourche, transcritique, hopf) et leurs diagrammes.

**Chapitre 3** : Nous évoquons dans ce chapitre la théorie du chaos, nous donnons quelques définitions du chaos, caractéristique du chaos, et les attracteurs et leurs types (régulier et étrange).

**Chapitre 4** : Nous donnons quelques exemples de systèmes chaotiques, nous prenons les deux modèles (Lorenz et Rössler) dans le temps continu et le modèle le plus connue (fonction logistique "**fonction de Chebyshev**") dans le temps discrets.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques

### 1.1 Système dynamique

**Définition 1.1** *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet  $(X, T, F)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $F : X \times T \rightarrow X$  qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système à toute instant.*

**Définition 1.2** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :*

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que :

- $U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- $U(0, x) = x$ .
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .

Soit le système dynamique linéaire :

$$\begin{cases} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$  associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x \tag{1.2}$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

**Définition 1.3** Soit le système non linéaire

$$x' = f(x). \tag{1.3}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.3), le point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(x_0) = 0$$

**Définition 1.4** Considérons le système (1.3).

Le système :

$$x' = Ax$$

où

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisation de (1.3) en  $x_0$ .

**Définition 1.5** On appelle point critique hyperbolique de (1.3), le point  $x_0$  telle que  $A$  n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

**Espace de phase**

**Définition 1.6** Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variable d'état, qui est la propriété de défini complètement d'état du système à un instant donnée. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état de le point associé à cet état décrit une trajectoire.

### Espace d'état

**Définition 1.7** L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaire à la description complète d'un système. Cet espace peut être discret, il peut aussi être continue.

### La trajectoire

**Définition 1.8** La trajectoire est une solution du système différentiel.

### Système autonomes et non-autonomes

- Lorsque la variable libre  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $f$ , le système est dit non autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.
- On peut toujours transformer un système non autonome en système autonome (où  $t$  n'apparaît pas explicitement), en posant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = t \\ x'_{n+1} = f_{n+1}(x, p) = 1 \end{cases}$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une unité, mais cela permet remplacer systématiquement  $t$  dans les équations par  $x_{n+1}$ . Les algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles vous en remercieront.

**Remarque 1.1** Par un changement de variable approprié on peut transformer un système non autonome de dimension  $n$  à un système autonome équivalent de dimension  $n + 1$ .

#### 1.1.1 Système dynamique continue

Un système dynamique dans le cas continue est représenté par un système d'équation différentielle de la forme :

$$x'_t = f(x, t, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial

$$x_0 = x(t_0)$$

Pour chaque couple choisi,  $(x_0, t_0)$  on peut identifier une solution unique :

$$\Phi(\cdot; x_0, t_0) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que

$$\Phi_f(t_0; x_0, t_0) = x_0 \text{ et } \Phi'_f(t; x_0, t_0) = f(\Phi_f(t; x_0, t_0), t)$$

Cette solution appelée souvent trajectoire, fournit les états successifs occupés par le système à chaque instant  $t$  [7].

### 1.1.2 Système dynamique discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$x_{k+1} = g(x_k, p) \text{ où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, \dots$$

$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  indique la dynamique du système en temps discret.

On peut également identifier pour chaque couple  $(x_0, k_0)$  une solution unique

$$\Phi_g(\cdot; x_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que ;

$$\Phi_g(k_0; x_0, k_0) = x_0 \text{ et } \Phi_g(k+1; x_0, k_0) = g(\Phi_g(k; x_0, k_0), k)$$

Si le variable  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $f$ , le système est dit **non-autonome** [7].

## 1.2 Point fixe

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système. Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système. De plus,

ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettant d'indiquer une classification des changements des comportements.

**a. Cas des systèmes dynamiques continus :**

**Définition 1.9** Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation :  $x'_t = f(x, t, p)$  est un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $f(x^*) = 0$ .

**b. Cas des systèmes dynamiques discrets :**

**Définition 1.10** Un point fixe d'une application  $x_{k+1} = g(x_k, p)$  est un point invariant par  $f$ , c'est-à-dire un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $g(x^*) = x^*$ .

**Géométriquement :** Le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction  $y = f(x)$  avec la bissectrice  $y = x$ .

### 1.3 Portrait de phase et de cycles limites

**Définition 1.11** Soit le système planaire :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $P, Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.4) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

**Définition 1.12** Une solution périodique du système (1.4) est une solution telle que :

$$(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

a toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

**Définition 1.13** Un cycle limite du système (1.4) est une orbite isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

**Définition 1.14** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  sur le cycle limite.

### 1.3.1 Orbite périodique

**Définition 1.15** Un cycle d'ordre  $p$  (ou orbite périodique d'ordre  $p$  ou encore un  $(p - \text{cycle})$ ) est un ensemble de  $p$  points  $\{x_0^*, \dots, x_{p-1}^*\}$  vérifiant :

$$x_{i+1}^* = g(x_i^*), \quad i = 0, \dots, p - 2.$$

$$x_p^* = g(x_{p-1}^*) = x_0.$$

$$x_i^* = g^p(x_i^*), \quad i = 0, \dots, p - 1.$$

$$x_i^* \neq g^h(x_i^*), \quad i = 0, \dots, p - 1; \quad 1 \leq h \leq p.$$

$p$  est l'entier minimal tel que :  $x_0^* = g^p(x_0^*)$ .

Ainsi, les  $n$  éléments d'une orbite de période  $n$  correspondent aux points fixes propres de  $g^n$ .

## 1.4 Stabilité

### 1.4.1 Cas des systèmes dynamiques continus

#### Classification des points d'équilibre

##### a. Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

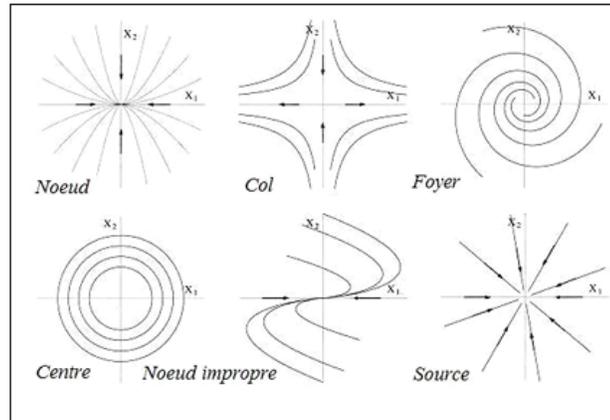
$$x' = Ax \tag{1.5}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $A$  une matrice constante inversible. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

**Définition 1.16** • Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles et de même signe, la solution  $x = 0$  est appelée noeud.

- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution  $x = 0$  est appelée selle.
- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ . La solution  $x = 0$  est appelée foyer.

- Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$ . La solution  $x = 0$  est appelée centre [7].



FIG(1.1)- Classification des points d'équilibre dans  $\mathbb{R}^2$

### b. Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$x' = f(x) \tag{1.6}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n).$$

**Définition 1.17** Un point critique de  $x_0$  de (1.6) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives ; il est appelé sources si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles positives ; il est appelé selle s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

**Définition 1.18** Deux systèmes planaires :

$$x' = f(x) \tag{1.7}$$

et

$$x' = g(x) \tag{1.8}$$

définies sur deux ouverts  $U$  et  $V$  respectivement, sont topologiquement équivalentes s'il existe un homéomorphisme  $h : U \rightarrow V$  tel que  $h$  transforme les orbites de (1.6) en celles (1.7) et préserve le sens du mouvement.

**Théorème 1.1** Si  $x_0$  est un point d'équilibre hyperbolique de (1.5), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système  $x' = f(x)$  est topologiquement équivalent à son linéarisé  $x' = Ax$ .

### Stabilité

**Théorème 1.2** Soit  $x' = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique continu. Si  $x^*$  un point fixe ( $f(x^*) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont de partie réelle négative,  $x^*$  est stable et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Df(x^*)$  est de partie réelle positive.

### 1.4.2 Cas des systèmes dynamiques discrets

**Définition 1.19** Considérons une application non-linéaire  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit le multiplicateur  $m$  de  $g$  au point fixe  $x^*$  comme suit :

$$m = g'(x^*)$$

Il est clair que  $m$  est la pente de la tangente au point fixe  $x^*$  de  $g$  qui détermine le type de point fixe.

**Théorème 1.3** Supposons que  $x^*$  est un point fixe de  $x_{k+1} = g(x_k)$ , alors le point fixe est :

1. Attractif si  $|m| < 1$ .
2. Répulsif si  $|m| > 1$ .
3. Indifférent si  $|m| = 1$ .
4. Super stable si  $m = 0$ .

**Preuve.** Nous utilisons la formule de Taylor au voisinage de  $x^*$  :

$$g(x) = g(x^*) + m(x - x^*) + O((x - x^*)^2).$$

$$= x^* + m(x - x^*) + O((x - x^*)^2).$$

et

$$\begin{aligned} g^2(x) &= g(g(x)) \\ &= g(g(x^*)) + m(m(x - x^*)) + O(2). \end{aligned}$$

$$= x^* + m^2(x - x^*) + O(2).$$

$$= \dots$$

$$g^p(x) = x^* + m^p(x - x^*) + O(2).$$

■

Ainsi l'éloignement par rapport à  $x^*$  est multiplié par  $m$  à chaque itération (d'où le nom multiplicateur donné à  $m$ ). Après  $p$  itérations le point  $x$  voisin de  $x^*$  se trouve à la distance  $m^p(x - x^*)$ .

1. Si  $m = 0$ , l'attraction est la plus forte car le terme du premier ordre en  $(x - x^*)$  disparaît complètement, d'où le nom "super attractif".
2. Si  $m = \pm 1$ , la nature de  $x^*$  dépend des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor.

**Théorème 1.4** Soit  $x \mapsto g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique discret. Si  $x^*$  un point fixe ( $g(x^*) = x^*$ ), il est (asymptotiquement) stable si toutes les valeurs propres de  $Dg(x^*)$  sont de module inférieur à 1 et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Dg(x^*)$  a un module plus grand que 1.

**Exemple 1.1** Soit l'application de Chirikov (ou l'application de standart) suivante :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n), & k > 0 \\ x_{n+1} = x_n + r_n - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \end{cases}$$

Où  $r$  et  $x$  sont définis modulo 1.

Les points fixes de cette application sont définis par :

$$\begin{cases} r^* = 0 \\ x^* = 0 \vee \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il y a deux points fixes  $(r^*, x^*) = (0, 0)$  et  $(0, \frac{1}{2})$ .

La matrice jacobienne s'écrit :

$$Dg(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & 1 - k \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - (2 - k)\lambda + 1 = 0.$$

Le point fixes  $(0, 0)$  est stable si  $0 < k < 4$  pour  $k > 0$ .

La matrice jacobienne s'écrit :

$$Dg \left( 0, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 - (2+k)\lambda + 1 = 0.$$

Dans ce cas le point fixe  $\left( 0, \frac{1}{2} \right)$  est toujours instable.

Comme les points fixes peuvent être attractifs ou répulsifs, de même, une orbite périodique est soit attractive ou répulsive et le théorème suivant décrit la stabilité d'une orbite périodique.

En dimension 1 ; le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de chaîne. En effet, la dérivée de  $g^p$  au point  $x_0$  s'écrit :

$$(g^p)'(x_p) = g'(x_{p-1}) \dots g'(x_1) g'(x_0)$$

Mais  $x_0 = x_p$ , on en déduit que la valeur  $(g^p)'(x_0)$  est la même pour toutes les dérivées et notée  $m_p$ .

On définit le multiplicateur du cycle  $m_p$  par :

$$m_p = (g^p)'(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, p-1$$

Rappelons que les points  $x_i, i = 0, 1, \dots, p-1$  sont les points fixes de  $g^p$ . D'où en se reportant au développement de Taylor de la fonction  $g^p$ .

**Théorème 1.5** Pour  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le cycle  $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$  est :

1. Attractif si  $|m_p| < 1$ .
2. Répulsif si  $|m_p| > 1$ .
3. Indifférent si  $|m_p| = 1$ .
4. Super stable si  $m_p = 0$ .

En général, si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on calcule les valeurs propres  $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$  de la matrice jacobienne de  $g^p$ .

· Si  $\lambda_i$  sont réelles :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$ , il s'agit d'un noeud attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$ , il s'agit d'un noeud répulsif.

$\exists i, j \leq i \leq n$ , tel que  $|\lambda_i| < 1$  et  $|\lambda_j| > 1$ , il s'agit d'un noeud col.

· Si  $\lambda_i$  sont complexes :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$ , il s'agit d'un foyer attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$ , il s'agit d'un foyer répulsif.

**Définition 1.20** Un point fixe  $x^*$  de  $x_{k+1} = g(x_k)$  est un point hyperbolique si  $|\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)| \neq 1$ . Plus généralement, en dimension  $n$ ,  $x^*$  est un point hyperbolique si aucune des valeurs propres de  $Dg(x^*)$  a un module égal à 1.

### Flot du système :

On note :

$\varphi_t(x)$  : la solution à l'instant  $t$  partant de l'état initial  $x$  à l'instant 0 ;

$\varphi_t$  : l'application  $x \mapsto \varphi_t(x)$ .

Propriétés :

1. Pour tout  $t$  où  $\varphi_t$  est défini,  $\varphi_t$  est difféomorphisme local.
2. l'application  $x \mapsto \varphi_t(x)$  est  $C^\infty$ ,
3.  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$  pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$  et  $\varphi_0 = Id_\varphi$ .

L'application  $x \mapsto \varphi_t(x)$  est appelée flot du système.

### 1.4.3 Stabilité au sens de Poincaré

La solution  $x(t)$  de condition initiale  $x_0$  à  $t = t_0$  est stable au sens de Poincaré si la trajectoire du flot initié avec  $x_0 + \delta x_0$  à  $t = t_0$  reste dans un tube de rayon  $\varepsilon_\delta$ , autour de la trajectoire de  $x(t)$ .

Par suite, nous attardons la stabilité au sens de Lyapunov.

### 1.4.4 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

#### a. Cas des systèmes à temps continus

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique :

$$\begin{cases} x' &= f(x(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue. Nous désignons par  $x^*$  un point d'équilibre de (1.9)  $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq t_0$ , et par  $x(t, t_0, x_0)$  la solution à l'instant  $t \geq t_0$  du système (1.9) initialisée en  $x_0$  à l'instant  $t_0$ , et  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.21 (Stabilité)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  stable au sens de Lyapunov du système (1.9) est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

**Définition 1.22 (Stabilité uniforme)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  uniformément stable au sens de Lyapunov du système (1.9) est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

**Définition 1.23 (Attractivité)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  attractif du système (1.9) est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(t_0) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, t_0, x_0)) = 0, \forall t \geq t_0$$

Lorsque  $\delta(t_0) = +\infty$ , on dit que l'origine est globalement attractive.

**Définition 1.24 (Stabilité asymptotique)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable du système (1.9) s'il est stable attractif (resp. globalement attractif)*

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0$$

La stabilité asymptotique signifie qu'on peut déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un point  $x(0)$  appartenant à un voisinage de  $x^*$  tende vers  $x^*$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

**Définition 1.25 (Stabilité exponentielle)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  localement exponentielle stable du système (1.9) s'il existe deux constantes strictement positives  $a, b$  telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in B_r$$

Lorsque  $B_r = \mathbb{R}^n$ , on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

**Définition 1.26 (Instabilité)** Le point d'équilibre  $x^*$  est dit instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

- Soit le système des équations :

$$x' = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

On suppose que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

**Définition 1.27** Une solution  $\Phi(t)$  du système (1.10) telle que  $\Phi(t_0) = \Phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que toute solution  $x(t)$  de (1.10) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie :

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand  $\Phi(t) = 0$  la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que toute solution  $x(t)$  de (1.10) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie :

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

si en plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

alors  $\Phi(t) = 0$  est asymptotiquement stable.

**Exemple 1.2** ( $n = 1$ )

$$\begin{cases} x' &= -x + 1; \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

La solution telle que  $x(0) = 1$  est :

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$$

La solution  $\Phi(t)$  telle que  $\Phi(0) = 1$  est  $\Phi(t) = 1$

$$|x(t) - \Phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \forall t > 0$$

Il suffit de prendre  $\delta \leq \varepsilon$ ;  $\delta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t)$  est stable.

Stabilité asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{-t}| = 0$$

d'où  $\Phi(t)$  est asymptotiquement stable.

**Exemple 1.3** ( $n = 2$ )

Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution qui vérifie  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t - y_0 \cos t \end{pmatrix}; \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$  telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \forall t > 0$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|)$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta; \text{ on prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}; \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est stable au sens de Lyapunov.

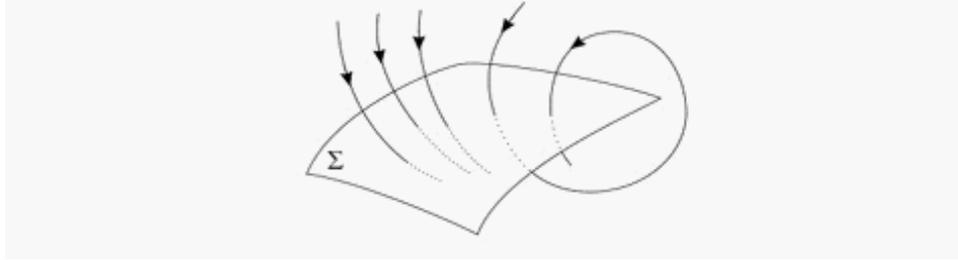
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \not\rightarrow 0$$

donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

## 1.5 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système.

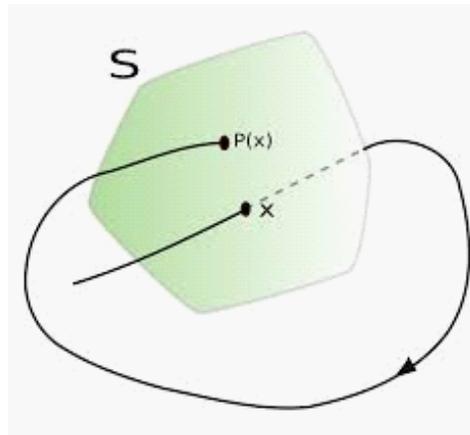
Faire une section de Poincaré revient à compter la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire (en dimension trois, par exemple), avec un plan.



FIG(1.2)- Section de Poincaré

### 1.5.1 Les cas typiques observés

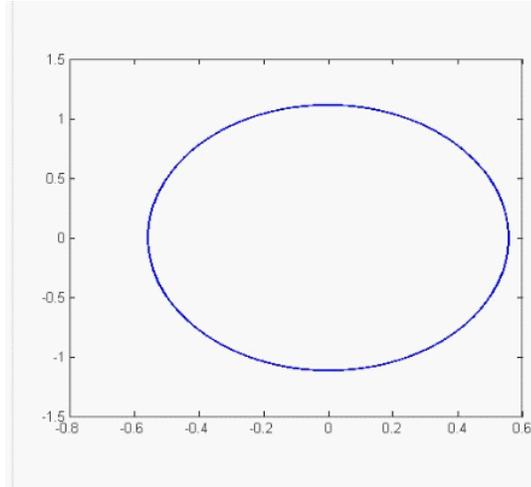
1. La solution est périodique dans  $\mathbb{R}^n$  (c'est un cycle limite) : la section de Poincaré est un point.



FIG(1.3)- Système périodique

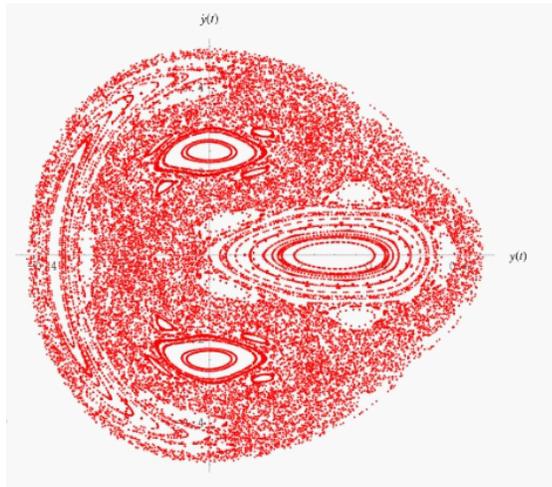
2. La solution est quasi-périodique à deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  selon le rapport  $r = \frac{f_1}{f_2}$  est rationnel ou pas :

- a) Si  $r$  n'est pas rationnel la section de Poincaré est une courbe fermée.
- b) Si  $r$  est rationnel la section de Poincaré se compose de quelque points.



FIG(1.4)- Système quasi-périodique

3. La solution est chaotique la section de Poincaré est un nuage des points.



FIG(1.5)- Système chaotique

**Remarque 1.2** Dans les systèmes à temps discret, pour une variable d'état  $x$ , l'application de premier retour consiste plus simplement à associer  $x(t)$  à  $x(t - 1)$ .

**Définition 1.28** Soit le système dynamique défini par :

$$\begin{cases} x' &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

Avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$  et soit  $\Omega$  un ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , l'intersection du plan  $\Omega$  et la trajectoire du le système précédent nous permet de définir une fonction  $G$  comme suit :

$$\begin{aligned} G : U \subset \Omega &\rightarrow \Omega \\ x(t) &\rightarrow \Phi(x(t), \tau) \end{aligned}$$

Avec  $\tau$  désigne le temps qu'il faut pour que les trajectoires  $x(t)$  démarre de  $U$  pour arriver à  $\Omega$ . La fonction  $G$  est appelée la fonction de premier retour.

## 1.6 Méthode des fonctions de Lyapunov

Soit  $v(x_1, \dots, x_n)$  une fonction différentiable.

Soit le système autonome :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.11}$$

$$v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \tag{1.12}$$

si  $x(l) = (x_1(l), \dots, x_n(l))$  satisfait (1.11) .

**Théorème 1.6** Pour le système (1.11); il existe une fonction  $v(x_1, \dots, x_n)$  de signe défini positif (ou négatif) telle que  $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle alors le point d'équilibre  $(0, \dots, 0)$  est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, \dots, x_n)$  est dite fonction de Lyapunov.

**Exemple 1.4** Soit le système hamiltonien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{array} \right.$$

où  $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ . On suppose que  $H(p, q)$  est définie positive.

Par exemple :  $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = p_1^2 + \dots + p_n^2 + q_1^2 + \dots + q_n^2$ .

$$\text{On suppose } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial q_1}(0, \dots, 0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n}(0, \dots, 0) = 0 \end{array} \right. ,$$

c.à.d  $(0, \dots, 0)$  point d'équilibre, alors  $\Phi(t) = (0, \dots, 0)$  est stable.

**Preuve.** Posons  $v(x_1 = p_1, \dots, x_{2n} = q_n) = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(p, q) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x)}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x)}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dH}{dp_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dH}{dq_i} = 0 \end{aligned}$$

■

$\Rightarrow (p, q) = (0, \dots, 0)$  est stable au sens de Lyapunov.

**Exemple 1.5** Soit le système :

$$\begin{cases} x' &= -xy^4 \\ y' &= yx^4 \end{cases}$$

Soit :  $v(x, y) = x^4 + y^4$  définie positive.

$$v' = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est stable.}$$

Les orbites vérifient  $x^4(t) + y^4(t) = c, (c > 0)$ .

**Théorème 1.7** Si pour le système (1.11) il existe une fonction de signe définie  $v(x_1, \dots, x_n)$  telle que  $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction de signe défini inverse de  $v$  alors le point d'équilibre  $x = (0, \dots, 0)$  est asymptotiquement stable.

**Exemple 1.6** Soit le système :

$$\begin{cases} x' &= y - x^3 \\ y' &= -x - 3y^3 \end{cases}$$

Soit  $v(x, y) = x^2 + y^2$ , alors  $\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -(x^4 + 3y^4)$  définie négative.

$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.3** La forme des fonctions de Lyapunov sont généralement de la forme :

$$v(x, y) = ax^2 + by^2, ax^4 + by^4, ax^4 + by^2, ax^2 + by^4, \dots$$

**Théorème 1.8** Supposons que pour le système (1.11) il existe une fonction  $v(x_1, \dots, x_n)$  différentiable dans un voisinage de l'origine et telle que  $v = (0, \dots, 0) = 0$ .

Si  $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine  $(0, \dots, 0)$  des points en les quels  $v(x_1, \dots, x_n) > 0$  alors le point d'équilibre  $(0, \dots, 0)$  est instable.

**Exemple 1.7** Soit le système :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  alors  $(0, 0)$  est instable.

Posons  $v(x, y) = x^2 - y^2, v(x, 0) = x^2 > 0 \forall x \neq 0$ .

$v' = 2x^2 + (-2y)(-y) = 2(x^2 + y^2)$  elle est définie positive alors  $(0, 0)$  instable.

Nous démontrons l'exemple de la remarque précédente  $x' = \sin^2(x)$ .

Soit  $v(x) = x$ , alors  $v'(x) = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \sin^2(x)$  définie positive dans un voisinage de  $x = 0$  alors  $x = 0$  instable d'après le théorème précédente.

**Théorème 1.9** Supposons que pour le système (1.11) il existe une fonction  $v(x_1, \dots, x_n)$  différentiable dans un voisinage de  $(0, \dots, 0)$  et satisfaisant aux conditions suivantes :

- Dans n'importe quel voisinage  $\Omega$  de  $(0, \dots, 0)$  il existe un domaine  $\Omega_1$  dans lequel  $v(x_1, \dots, x_n) > 0$  et  $v(x_1, \dots, x_n) = 0$  pour  $(x_1, \dots, x_n) \in Fr_{\Omega_1}$ .
  - Le point d'équilibre  $(0, \dots, 0) \in Fr_{\Omega_1}$ .
  - Dans  $\Omega_1; \frac{\partial v}{\partial t} = f \cdot \nabla v$  est une fonction définie positive.
- Alors le point d'équilibre  $(0, \dots, 0)$  de (1.11) est instable.

**Exemple 1.8** Soit le système :

$$\begin{cases} x' = x^5 + y^3 \\ y' = x^3 + y^5 \end{cases}$$

Posons  $v(x, y) = x^4 - y^4, \Omega = \mathbb{R}^2, \Omega_1 = \{(x, y) / |x| > |y|\}$

$v(x, y) = 0, \forall (x, y) \in Fr_{\Omega_1}$ .

$v(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \Omega_1; v' = 4x^3(x^5 + y^3) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8)$ . Elle est définie positive dans  $\Omega_1$  alors  $(0, 0)$  est stable.

# Chapitre 2

## Bifurcations

### 2.1 Introduction

Le terme de bifurcation a été introduit par Henri Poincaré au début du *XXe* siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. On s'intéresse ici aux changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres. De tels changements sont appelés bifurcations. Pour les systèmes continus dérivant d'un potentiel, le mathématicien René Thom emploie, au lieu de bifurcation, le terme catastrophe, terme qui a connu une fortune médiatique importante. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés.

### 2.2 Définition de bifurcation

Le terme bifurcation est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suite à la variation de l'un de ces paramètres ; une bifurcation correspond donc à la collision de deux objets ( point répulsif ou selle, attracteur) ou de deux variétés et ceci est une méthode géométrique efficace pour les décrire ; la collision de deux objets donne naissance à une bifurcation locale alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation globale.

Soit :

$$x' = f(x, t, \mu) \tag{2.1}$$

avec le paramètre de contrôle  $\mu$ , et soit  $x^*$  sa solution.

**Définition 2.1** Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système (2.1) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre  $\mu$  pour laquelle le système (2.1) n'est pas structurellement stable).

## 2.3 Diagramme de bifurcation

**Définition 2.2** Un système diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation. Les logiciels actuels ne permettent pas de construire que des diagrammes de bifurcation en deux dimensions.

Les ensembles des points des bifurcation de même nature (noeud-col, fourche, hopf,...)

## 2.4 Différents types de Bifurcation

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations : bifurcation locale, bifurcation super-critique, sous-critique et la bifurcation globales.

### 2.4.1 Bifurcation locale

Les bifurcations locales sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation de système au voisinage de la solution. Le critère de détection utilisé dans le cas des bifurcations locales concerne les valeurs propres de jacobien. Il existe plusieurs types de bifurcation locales, parmi les quelles on peut citer :

- a) Bifurcation noeud-col ou saddle node,
- b) Bifurcation fourche ou pitchwork,
- c) Bifurcation transcritique,
- d) Bifurcation de hopf.

#### Bifurcation noeud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change le nombre de racines en fonction du paramètre  $\mu$  est le polynôme quadratique :

$$f(x) = \mu - x^2$$

Considérons le système (2.1). Si on peut réécrire la fonction  $f$  sous la forme :

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (2.2)$$

Nous appelons la fonction (2.2) la forme normale de la bifurcation noeud-col. Etudions le comportement de l'équation (2.2).

Les points fixes de cette dernière sont :

$$x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\mu} \quad (2.3)$$

qui existent seulement pour  $\mu > 0$  ; leur stabilité est déterminée par :

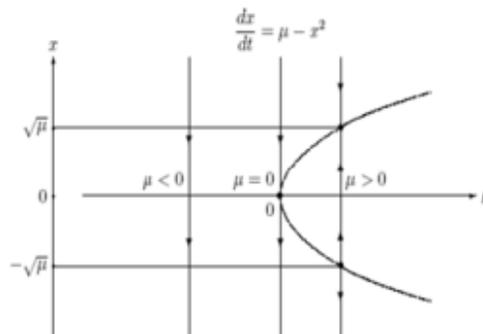
$$f'(x_{\pm}^*) = -2\tilde{x}_{\pm} = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \pm\sqrt{\mu} \quad (2.4)$$

selon les signes de  $f'(x^*)$  ; on voit que  $x_+^* = \sqrt{\mu}$  est stable, tandis que  $x_-^* = -\sqrt{\mu}$  est instable.

**Remarque 2.1** Même étude faite lorsque  $f(x; \mu) = -\mu - x^2$ ,  $f(x; \mu) = +\mu + x^2$ , et  $f(x; \mu) = -\mu + x^2$ .

Mais dans tous les cas, il y a une transition à  $\mu = 0$  entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable. La figure (FIG(2.1)) présente ce qu'on appelle le diagramme de bifurcation noeud-col (la variation du point d'équilibre en fonction de paramètre pour le cas :  $f(x; \mu) = \mu - x^2$ ).

►Diagramme



FIG(2.1)- Diagramme de bifurcation noeud-col

## Bifurcation fourche

Si on peut réduire  $f(x; \mu)$  à un polynôme cubique a ces quatre cas :

$$f(x; \mu) = \mu x - x^3 \quad (2.5)$$

$$f(x; \mu) = \mu x + x^3 \quad (2.6)$$

$$f(x; \mu) = -\mu x + x^3 \quad (2.7)$$

$$f(x; \mu) = -\mu x - x^3 \quad (2.8)$$

L'équation (2.5) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche super-critique.

Nous calculons ses points fixes :

$$x^* (\mu - (x^*)^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes.

$$f'(x^*) = (\mu - 3(x^*)^2) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \quad (2.10)$$

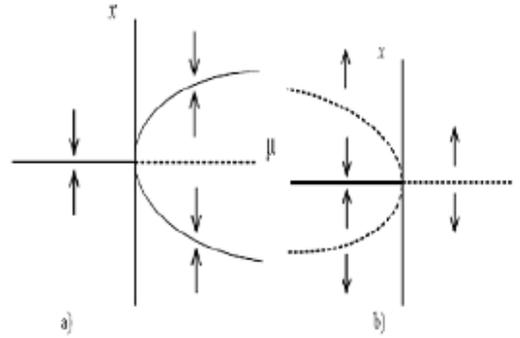
Le point fixe  $x^* = 0$  est donc stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu > 0$ , quand les branches de nouveaux points fixes  $x^* = \pm\sqrt{\mu}$  sont créés. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Faisons le même calcul pour (2.6), qui est la forme normale d'une bifurcation fourche sous-critique.

$$x^* (\mu + x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$f'(x^*) = (\mu + 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases} \quad (2.12)$$

Comme pour le cas super-critique, le point fixe  $x^* = 0$  est stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ . Mais contrairement au cas super-critique, les autres points fixes  $\pm\sqrt{-\mu}$  existent dans la région où  $x^* = 0$  est stable, et sont toujours instables (FIG (2.2)).



FIG(2.2)- Diagramme de bifurcation fourche a)sup-critique b)sou-critique

### Bifurcations transcritiques

Si  $f$  est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$x^* = \mu x - x^2$$

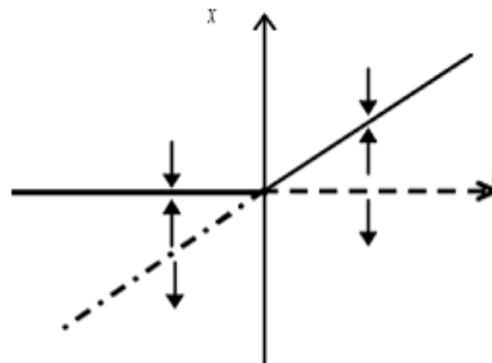
L'analyse usuelle donne :

$$x^* (\mu - x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = \mu \end{cases} \quad (2.13)$$

$$f'(x^*) = (\mu - 2x^*) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ -\mu & \text{pour } x^* = \mu \end{cases} \quad (2.14)$$

Donc  $x^* = 0$  est stable pour  $\mu < 0$ , instable pour  $\mu > 0$ , tandis que  $x^* = \mu$  fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité (FIG (2.3)).

► Diagramme



FIG(2.3)- Diagramme de bifurcation transcritique

## Bifurcation de hopf

Tandis que toutes les bifurcations décrites sont stationnaires, la bifurcation de hopf donne naissance à des solutions oscillantes ; l'espace des phases a maintenant deux composantes et la forme s'écrit dans le plan complexe.

Forme normale :

$$Z' = \mu Z - |Z|^3 Z \quad (2.15)$$

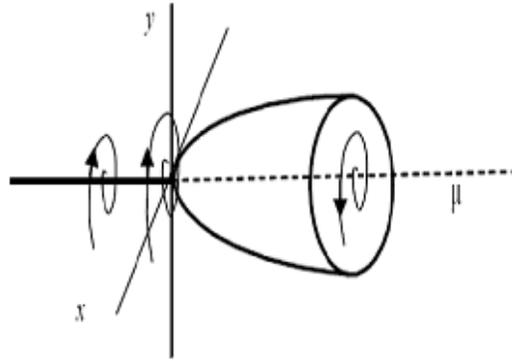
En posant  $\mu = \mu_r + i\mu_I$  ;  $Z = X e^{i\theta}$  , et on obtient alors :

$$\begin{cases} x' &= \mu_r x - x^3 \\ y' &= \mu_I \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse  $\mu_I$ . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite. Naturellement la bifurcation de hopf peut être également sous-critique si le coefficient du terme  $|Z|^2 Z$  est de signe positif, il faut alors un terme négatif en  $|Z|^4 Z$  pour obtenir une saturation non-linéaire.

On va s'intéresser maintenant à l'étape qui suit la régularité temporelle. Selon Landau la bifurcation d'un point d'un comportement stationnaire (**point fixe**) vers un comportement périodique (**cycle limite**) puis bipériodique (**un tore**) constituent les premières étapes de la transition vers la turbulence, cette dernière présente un phénomène très intéressant qu'on appelle le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'oppose à l'ordre et à la méthode. De nombreux chercheurs en sciences se sont intéressés aux mouvements dit chaotiques. Ils ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre, de l'organisation dans la désorganisation (*FIG (2.4)*).

► *Diagramme*



FIG(2.4)- Diagramme de bifurcation hopf

### 2.4.2 Bifurcation super-critique et sous-critique

La distinction de la bifurcation super-critique et sous-critique est intéressante, car les deux n'ont pas de toute la même signification. En effet, pour des valeurs décroissantes du paramètre, dans le cas de la bifurcation super-critique le système passe continûment d'un équilibre "**haut**" ou "**bas**" à un équilibre moyen. Au contraire, dans le cas de la bifurcation sous-critique, le système est sur l'équilibre "**moyen**" et brusquement cet attracteur disparaît et la solution du système saute de manière discontinue vers un autre attracteur ou diverge vers l'infini par exemple, si le système représente une population, il y a une différence énorme entre le passage doux d'un régime de croissance à un autre (bifurcation super-critique) et l'extinction brutale de la population (bifurcation sous-critique).

### 2.4.3 Bifurcation globale

Ces types de bifurcations correspondent à des collisions de deux variétés et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution. Ici les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune d'aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "**globales**" et parmi ces types on peut citer :

- a) Orbites hétérocliniques,
- b) Orbites homocliniques

Les orbites hétérocliniques et homocliniques ont une grande importance pour l'étude du comportement chaotique des systèmes dynamiques et les solutions des ondes progressives dans les équations aux dérivées partielles.

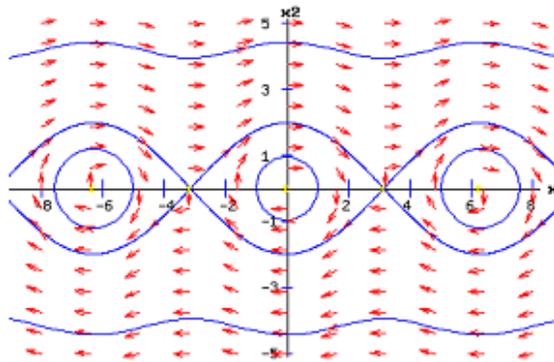
## Orbites hétérocliniques

Ces bifurcations résultant de la collision de variétés stables et instables de deux **selles séparées**. C'est on effet un phénomène assez rare.

**Exemple 2.1** Un exemple de l'apparition des orbites hétérocliniques est montrer à partir du système non linéaire qui décrit le mouvement d'un pendule simple :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -\sin(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

Les points fixes dans le système (2.17) sont les points  $(x^*, y^*) = (n\pi, 0)$  pour  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , si  $n = 0$  ou un nombre pair, les points fixes sont des centres, si  $n$  est un nombre impair, les points fixes sont hyperboliques, points de selles (FIG (2.5)).



FIG(2.5)- Diagramme de bifurcation hétérocliniques

## Orbites homocliniques

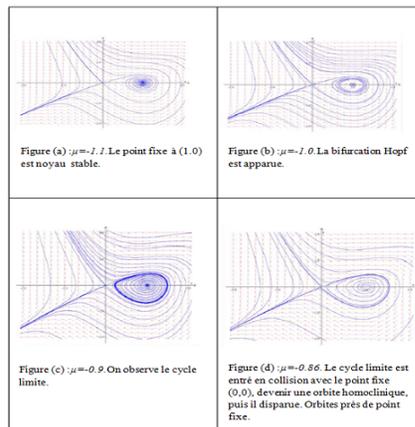
Ce sont les variétés stables et instables d'une même selle qui entrent en collision selon le signe d'une certaine quantité.

**Exemple 2.2** Consignons le système suivant :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \mu y + x - x^2 + xy \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\mu$  est un paramètre. Pour tous les valeurs de  $\mu$  ; il y a deux points fixes  $\{(0.0), (1.0)\}$ .

Pour tous les valeurs de  $\mu$ ,  $(0.0)$  c'est un selle. Mais pour le point fixe à  $(1.0)$ , il y a un changement de type de bifurcation (FIG (2.6)).



FIG(2.6)- Bifurcation homoclinique

# Chapitre 3

## Théorie du chaos

### 3.1 Introduction

Depuis la fin des années 70, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences : physique, chimie, mécanique, géophysique, psychologie, économie, sociologie, etc ...

Chaos, ou un système chaotique c'est un système produira des comportements différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement, le domaine des mathématiques s'intéresse depuis longtemps aux systèmes dynamiques chaotiques, cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques.

### 3.2 Définitions du chaos

**Définition 3.1** *On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modifiés par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique ; pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoires, relevant du seul calcul des probabilités.*

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos, avant de donner la définition du chaos, due à **R.Devaney**, quelques définitions de base sont nécessaires.

**Définition 3.2** *Supposons que  $X$  un ensemble et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ .  $Y$  est dense dans  $X$  si, pour n'importe quel élément  $x \in X$ , il existe un élément  $y$  dans le sous-ensemble  $Y$  arbitrairement proche de  $x$ , c'est-à-dire si la fermeture de  $Y$  est égale à  $X$  ( $\overline{Y} = X$ ). Ce qui revient à dire que  $Y$  est dense dans  $X$  si pour tout  $x \in X$  on peut trouver une suite de points  $\{y_n\} \in Y$  qui convergent vers  $x$ .*

**Définition 3.3**  $f$  est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $x_0 \in X$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe un point  $y_0 \in X$  et un entier  $j \geq 0$  satisfaisant :  $d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta$ , où  $d$  représente la distance et  $f^{(j)}$  la  $j$  ième itération de  $f$ .

**Définition 3.4**  $f$  est topologiquement transitive si  $U$  et  $V$  étant deux ensembles non vides ouverts dans  $X$ , il existe  $x_0 \in U$  et un indice  $j \in \mathbb{Z}^+$ , tel que pour  $f^{(j)}(x_0) \in V$  ou, de façon équivalente, il existe un indice  $j \in \mathbb{Z}^+$ , tel que pour  $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$ .

On est maintenant en position d'énoncer la définition du chaos, au sens de **Devaney**.

**Définition 3.5** Une fonction  $f : X \rightarrow X$  est dite constituée d'une dynamique chaotique si :

- (i)  $f$  possède une sensibilité aux conditions initiales,
- (ii)  $f$  est topologiquement transitive,
- (iii) L'ensemble des points périodiques de  $f$  est dense dans  $X$ .

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables [2].

**Ensemble invariant :**

**Définition 3.6** Un ensemble  $A$  est dit invariant (resp. positivement invariant) s'il contient son image par le flot pour tout  $t$  (resp. pour tout  $t \geq 0$ ) :

$$\varphi_t(A) \subset A, \forall t \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \forall t \geq 0 \text{)}.$$

### 3.3 Caractéristique du chaos

Les définitions et les propriétés suivantes permettant de comprendre qualitativement les points marquants des systèmes chaotiques.

#### 3.3.1 La non linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire ne peut pas être chaotique.

### 3.3.2 Le déterminisme

La notion de déterminisme signifie la capacité de "prédire" le future d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarité.

Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

### 3.3.3 L'espace aléatoire

Tout les états d'un système chaotique présentent des aspects aléatoires.

### 3.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

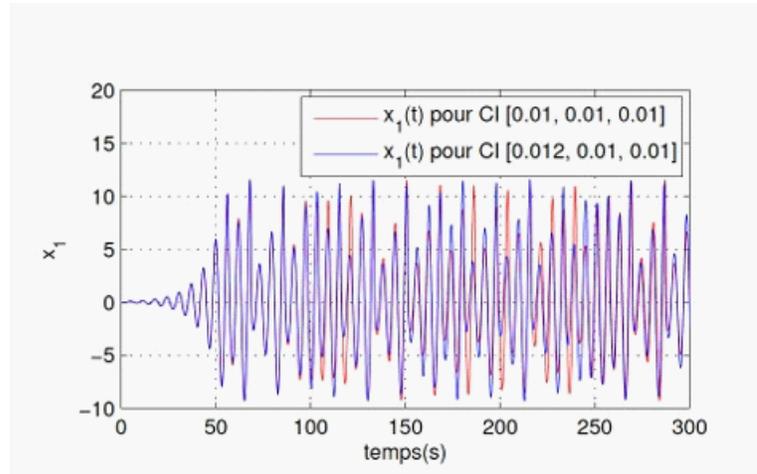
La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilités aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incompatibles.

D'une point de vue mathématique, on dit que  $f$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D \text{ telque :}$$

$$\|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta$$

Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilités aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant du taux de divergence des trajectoires. [7]



FIG(3.1)- Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état  $x_1$

## 3.4 Les attracteurs

### 3.4.1 Définitions d'attracteurs

Dans la littérature, on trouve plusieurs définitions d'attracteurs. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui attire toute les autres orbites vers elle. On donne quelque définitions possibles d'attracteur :

**Définition 3.7** Soit  $(X, f)$  un système dynamique discret, une sous-partie  $A$  de  $X$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée.
2.  $A$  est positivement invariante.
3.  $A$  est attractive c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - a.  $U$  est positivement invariante.
  - b.  $U$  est attiré pour  $A$ ,  $\forall u \in U$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t u, A) = 0$$

**Définition 3.8** Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases c'est-à-dire une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, queles que soient ses conditions initiales, si  $A$  ensemble compact fermée de l'espace des phases, on suppose que  $A$  est invariant pour le flot  $\Phi_t$ ,  $A$  est attracteur si :

1. Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$
2. Il existe un orbite dense dans  $A$ .

$$\cap \Phi_t(V) = A; \forall t \geq 0$$

**Définition 3.9** Soit  $(X, f)$  un système discret à un pas. Un ensemble clos  $A \subset X$ , tel que  $f(A) = A$ , est appelée attracteur s'il est le plus petit ensemble pour le quel il existe un  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x(0) \in X, d(x(0), A) < \eta$$

il se produit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(x(t), A) = 0$$

L'ensemble :

$$\left\{ x(0) \in X; \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \in A \right\}$$

est appelé le **bassin d'attraction**.

**Exemple 3.1** Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ , considérons un système

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x + y, x + y)$$

La variété instable

$$R_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$$

est non vide, fermé et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas.

Au contraire, la variété instable

$$R_s^2 = W^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -y\}$$

est non vide, fermé et strictement positivement invariante mais n'est pas attracteur.

## Bassin d'attracteur

**Définition 3.10** *Le bassin d'attracteur  $B(A)$  d'un attracteur  $A$  est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers  $A$ , donc*

$$B(A) = \cup \Phi_t(V)$$

On appelle bassin d'attracteur  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés c'est-à-dire :

$$B(A) = \cup \{U \in \Phi(x)\}$$

$U$  est un voisinage attiré  $A$ .

### 3.4.2 Les propriétés d'un attracteur

Un attracteur avoir les propriétés suivantes :

1. Tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .
2. Il existe un ensemble  $A \subset B$ , tel que pour tout voisinage de  $A$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bord d'un temps fini dans se voisinage de  $A$ .

Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans  $B$  tend vers l'attracteur est le bassin d'attracteur.

3. Un attracteur est indicomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

### 3.4.3 Les types d'attracteur

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs régulier (non chaotique) et les attracteurs étranges ( chaotique).

#### 3.4.3.a. Les attracteurs réguliers

Pour les attracteurs réguliers, des trajectoirs qui partant des "points" proches l'un de l'autre dans l'espace des phases restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes, à partir d'une situation connue.

Les attracteurs réguliers peuvent être de quatre sortes :

**a. Point fixe** C'est le cas le plus courant et le plus simple d'attracteur.

**Définition 3.11** Toute solution  $x^*$  vérifiant la relation  $f(x^*) = 0$  est appelée **point d'équilibre**, **point singulier**, et **point fixe**.

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes, il s'agit des noeuds stables et des foyers stables.

**b. Cycle limite périodique (orbite périodique)** Une solution  $x(t)$  d'un système dynamique est périodique s'il existe un entier  $T$  pour lequel : pour tout  $t$ ,  $x(t+T) = x(t)$  et  $x(t+\bar{T}) = x(t)$  pour  $0 < \bar{T} < T$ ,  $T$  est alors appelée **la période de solution**.

La présentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelée **cycle limite** et telle qu'aucune trajectoire commençant suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée, en général, on a trois types de cycle limite :

1. cycle limite stable.
2. cycle limite instable.
3. cycle limite semi-stable (en pratique instable).

**c. Cycle limite quasi-périodique** Un comportement quasi-périodique peut être vu comme la somme d'un nombre fini de termes périodique dont le rapport de périodes deux à deux n'est pas rationnel. Il existe des systèmes dont la solution orbitale en régime permanent (dans le plan de phase) oscille entre deux cycles limites relativement proche sans jamais passer deux fois de suite exactement sur le même trajectoire, on parle alors d'attracteur quasi-périodique.

**d. Tore** Un tore est un cas particulier de précédent ayant fréquences de base indépendantes.

Le tore est la surface engendrée par la rotation d'un cercle ( $C$ ) autour d'un autre cercle ( $C'$ ) c'est donc un tube de diamètre constant et d'âme un cercle.

### 3.4.3.b. Les attracteurs étranges

L'attracteur chaotique dit étrange n'est pas une surface repliée plusieurs fois sur elle-même. En effet, les trajectoires des points divergent (puisque, par définition deux points ne peuvent avoir la même évolution), mais comme l'attracteur a des dimensions finies, il doit se replier sur lui-même.

Un attracteur chaotique possède notamment la propriété remarquable suivante : la trajectoire ne repasse jamais par un même état. Ce qui signifie, entre autre, que cette trajectoire passe par une infinité d'états.

Il est à noter que pour observer les trajectoires d'un attracteur, il est parfois intéressant de réduire la dimension  $d$  de l'espace des phases.

Alors on peut donner cette définition :

**Définition 3.12** *Un sous ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$ , c'est-à-dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- **Attraction** :  $R$  est une zone de capture, ce que signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $R$  est entièrement contenue dans  $R$ , de plus toute orbite de ce type devient est reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.
- Il est contenu dans un espace fini, son volume est nul.
- Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.
- Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

**Définition 3.13** *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

**Définition 3.14** *Un attracteur étrange possédant un exposant de Lyapunov si  $\lambda_k > 0$ .*

**Les types d'attracteur étrange** Les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principaux :

**1. Attracteur hyperbolique** Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles limites structurellement stable (les orbites périodiques et orbites homoclines sont denses et sont de types de selle). Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

**2. Attracteur de type de Lorenz** Les types des attracteurs ne sont pas structurellement stable mais leur orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stable (hyperbolique) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres (comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même).

**3. Quasi-attracteur** Les types d'attracteurs sont des ensembles limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instable (par exemple les attracteurs générés par le circuit de chua).

## 3.5 Détection du chaos

Pour savoir c'est un système non linéaire est ou non chaotique, il existe plusieurs méthodes. Elle ne sont pas généralement très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en oeuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : les exposants de Lyapunov et dimension fractale.

### 3.5.1 Les exposants de Lyapunov

L'évolution chaotique est difficile à appréhender car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Pour cette raison on essaie si c'est possible de mesurer sinon d'estimer la vitesse de divergence ou convergence. Cette vitesse est donnée par l'exposant de Lyapunov qui caractérise le taux de séparation de deux trajectoires très proches.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Pour chaque point  $x_0$  on définit un exposant de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  comme suit :

$$\begin{aligned}\lambda(x_0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (|(f^n)'(x_0)|) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log (|(f)'(x_j)|)\end{aligned}$$

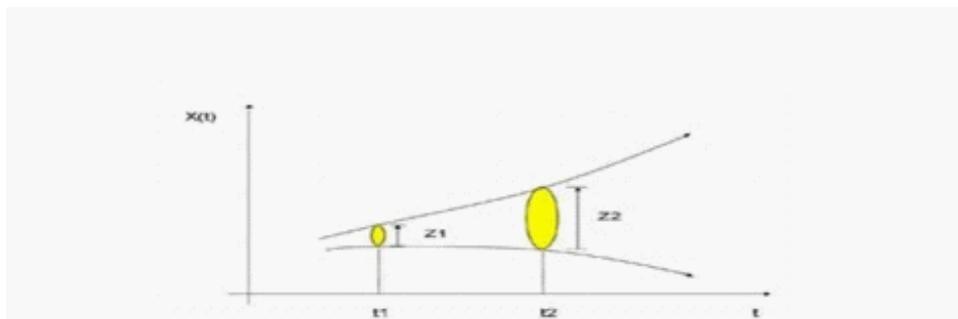
Avec

$$x_j = f^j(x_0)$$

Donc deux trajectoires dans le plan de phase initialement séparées par un temps  $\Delta t = t_2 - t_1$  vers  $z_2$  tel que :

$$|z_2| \approx \exp(\lambda \Delta t) \cdot |z_1|$$

où  $\lambda$  est l'exposant de Lyapunov [7].



FIG(3.2)- Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase

Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multiplieurs caractéristiques pour les solutions périodiques.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange précédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif (voir le tableau ci-dessous).

Etat stable		Dimension de Lyapunov	Exposant de Lyapunov
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre $k$	$k$ -tore	$k$	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

"Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov"

### Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps.

### 3.5.2 Dimension fractale

Nous pouvons calculer la dimension de l'attracteur du système étudié et aussi déterminer si oui ou non, il est construit de manière fractale si à l'issue du calcul, nous obtenons une valeur positive non entier ; cela signifie que le système possède un attracteur étrange, plusieurs dimensions ont été proposées, il y a la dimension de corrélation, Kolmogorov, Lyapunov et Hausdorff.

L'attracteur étrange avec sa dimension satisfait les propriétés suivantes :

1.  $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$
2.  $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$
3.  $d(A \cdot B) = d(A) + d(B)$

### Dimension de corrélation

On peut caractériser la dimension de corrélation à l'aide d'une fonction appropriée une telle fonction est définie par :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} V \quad (3.1)$$

Avec  $V$  représente le nombre de paire  $i, j$  dont la distance  $|x_i - x_j| < R$

On peut écrire la fonction (3.1) comme :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=j=1}^n H(R \cdot |x_i - x_j|)$$

Avec  $H$  la fonction de Heaviside, la dimension de corrélation est alors définie par :

$$V = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(C(R))}{\log(R)}$$

### Dimension de Lyapunov

Cette dimension définie par  $L_i$  et Yorke[2] elle est donnée par :

$$d_l = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{\max}|}$$

d'où  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$  sont les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et  $m$  le plus grand entier naturel tel que :  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0$ .

### Dimension de capacité (Kolmogorov)

La dimension de Kolmogorov est définie par :

$$d_c = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}$$

telle que :  $N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^2$  petit carré de cotés.

### Dimension de Housdorff

La dimension de Housdorff de  $M \subset \mathbb{R}^2$  est définie par :

$$d_H = \sup \{d, \mu_d(M) = +\infty\}$$

$$= \inf \{d, \mu_d(M) = 0\}$$

où  $\mu_d(M)$  est la mesure de l'ensemble  $M$ .

La dimension de Housdorff existe toujours, le calcul numérique de  $d_H$  est délicat, parce qu'il est difficile de trouver le recouvrement minimal.

# Chapitre 4

## Quelques systèmes dynamiques chaotiques

Les systèmes dynamiques chaotiques peuvent être classés en chaos continu, chaos discret, chaos commuté, chaos retardé, hyper-chaos ...

Dans ce qui suit, quelques systèmes chaotiques continus et discrets seront présentés.

### 4.1 Le chaos continu

Il y a plusieurs systèmes chaotiques continus parmi ces systèmes, on trouve le système de Lorenz, et le système de Rössler.

#### 4.1.1 Système de Lorenz

En 1963, Lorenz a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère (obtenu à partir des équations de Navier -Stokes ). C'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres.

##### 4.1.1.1. Les équations du modèle

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = rx - y - xz = x(r - z) - y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

où  $a, b, c$  représentent des paramètres réels.

L'espace des phases est tridimensionnel.

Les valeurs de  $a$  et  $b$  sont fixées, respectivement à 10 et  $\frac{8}{3}$ . Le paramètre de contrôle est  $r$  qui est positive, la solution triviale  $x = y = z = 0$  du système correspond physiquement à un régime où le fluide est au repos et où la chaleur se transmet uniquement par diffusion moléculaire (état conductif). Pour  $r$  grand cet équilibre est instable et il laisse la place à des régimes où le transfert de chaleur est réalisé par diffusion et par convection.

Les propriétés importantes de ces équations sont :

1. Elles sont autonomes.
2. Elles associent seulement les dérivées du premier ordre de sorte que l'évolution dépend seulement des valeurs instantanées de  $(x; y; z)$ .
3. Elles sont non-linéaires, ici à travers le terme quadratique  $xz$  et  $xy$  dans le seconde et la troisième équation.
4. Elles sont dissipatives : le terme "**diagonal**" tel que  $x' = -\partial x$  correspond à un affaiblissement de mouvement, mais plus systématiquement "**les volumes dans l'espace des phases**" se réduisent dans cette dynamique.
5. Les solutions sont fermées.

#### 4.1.1.2. Equilibres du modèle

On cherche les points d'équilibre  $(x, y, z)$  vérifiant  $x' = y' = z' = 0$ , pour  $r < 1$ , il n'y a qu'un seul point d'équilibre dans l'origine  $(0, 0, 0)$ , et pour  $r > 1$ ; il y a deux autres points :

on a :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) = 0 \\ y' = rx - y - xz = x(r - z) - y = 0 \\ z' = xy - bz = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ay = ax \\ y(r - z) = y \\ y^2 - b(r - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = r - 1 \\ y = \pm \sqrt{b(r - 1)} \end{cases}$$

donc les deux points sont :

$$\left( \sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, (r - 1) \right); \left( -\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, (r - 1) \right).$$

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne  $A$  obtenu en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre. L'expression de la matrice jacobienne  $A$  du système est :

$$DF \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix}$$

#### 4.1.1.3. La stabilité de l'équilibre nul (au point $(0, 0, 0)$ )

Au point  $(0, 0, 0)$  ; les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice jacobienne  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\det(|Id - \lambda A|) = \begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (\lambda + b) (\lambda^2 + (1 + a)\lambda + a(1 - r)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + b = 0 \\ (\lambda^2 + (1 + a)\lambda + a(1 - r)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -b \\ \Delta = (1 + a)^2 - 4a(1 - r) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -b \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{4a(r - 1) + (a + 1)^2} - \frac{1}{2} \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{4a(r - 1) + (a + 1)^2} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous reportons les valeurs de  $a$  et  $b$  on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{8}{3} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{40r + 81} - \frac{11}{2} \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{40r + 81} - \frac{11}{2} \end{cases}$$

- Pour  $r < 1$  ; les trois racines réelles sont négatives,  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$  ; l'équilibre est donc noeud stable.
- Pour  $r > 1$  ; une des valeurs propres est positive  $\lambda_3$  : l'équilibre est donc instable (col).
- Il y a une bifurcation quand  $r = 1$  ; l'équilibre est dit : **marginal**.

#### 4.1.1.4. Stabilité des équilibre pour $r > 1$

Pour les deux autres points d'équilibre, les valeurs propres de la matrice jacobienne sont solutions de l'équation en  $\lambda$  :

$$(-a - \lambda)[(-b - \lambda)(-1 - \lambda) + b(r - 1)] - a[r(-b - \lambda) + b(r - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + (a + b + 1)\lambda^2 + (b(a + r) - a(r - 1))\lambda + 2ab(r - 1) = 0$$

Selon les valeurs du paramètre  $r$ , ce polynôme de degré trois peut avoir trois racines réelles négatives (les équilibres sont donc stables) ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut chercher s'il existe une valeur critique de  $r$  pour laquelle les équations deviennent instables. La déstabilisation de ces équations par changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si  $\lambda = 0$  on a forcément  $r = 1$ . On peut donc rechercher pour quelles valeurs de  $r$  on peut obtenir deux racines  $i\beta$  et  $-i\beta$  de partie réelle nulle. En reportant la valeur  $\lambda = i\beta$  dans l'équation :

$$(i\beta)^3 + (a + b + 1)(i\beta)^2 + (b(a + r) - a(r - 1))(i\beta) + 2ab(r - 1) = 0$$

on obtient les deux conditions :

$$\begin{cases} -\beta^2(a + b + 1) + 2ab(r - 1) = 0 & \dots (1) \\ -i\beta^3 + i\beta(b(a + r) - a(r - 1)) = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

L'élimination de  $\beta^2$  entre les deux équations permet d'obtenir la valeur  $r_c$  critique :

$$\begin{cases} \text{de (1) on a : } \beta^2 = \frac{2ab(r_c - 1)}{(a + b + 1)} \\ \text{de (2) on a : } \beta^3 = \beta b(a + r_c) \Rightarrow \beta^3 = \beta\beta^2 \text{ d'où } \beta^2 = ab + br_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_c = \frac{ab + \frac{2ab}{a + 1 + b}}{\frac{2ab}{a + 1 + b} - b}$$

alors :

$$r_c = \frac{a(a + b + 3)}{(a - b - 1)}$$

et

$$\beta = \mp \sqrt{\left( ab + b \frac{ab + \frac{2ab}{a + 1 + b}}{2ab} \right) \frac{1}{a + 1 + b}}$$

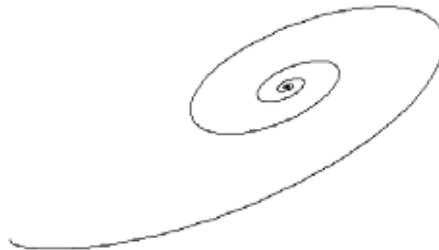
Pour les valeurs :  $a = 10$ ;  $b = \frac{8}{3}$ , la valeur critique est  $r_c = \frac{470}{19} \simeq 24.73$  et  $\beta = \mp 92.64$ .

La déstabilisation des équilibres correspond à une bifurcation de **hopf**. Deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires lorsque le paramètre  $r$  franchit la valeur critique  $r_c$ .

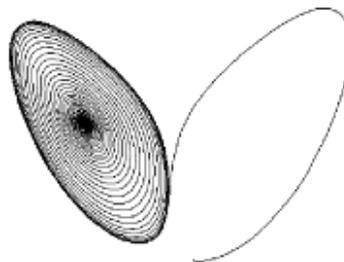
Lorsque  $r > r_c$  le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour l'un des deux équilibres instables comme si elle  $y$  convergeait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour  $y$  répéter le même type de comportement. On montre que la distance entre deux conditions très proches s'implifie très rapidement.

Toutes les trajectoires convergent vers l'attracteur étrange. On montre que la distance entre deux conditions initiales très proches s'implifie très rapidement.

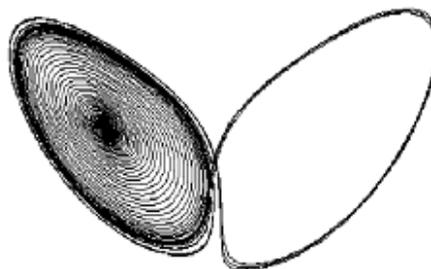
Cette sensibilité aux conditions initiales, ainsi que le chaos déterministe observés avec ce système dynamique, ont servi de base à ce que l'on appelle "**l'effet papillon**" [4].



FIG(4.1)- Attracteur de Lorenz pour  $r=5$



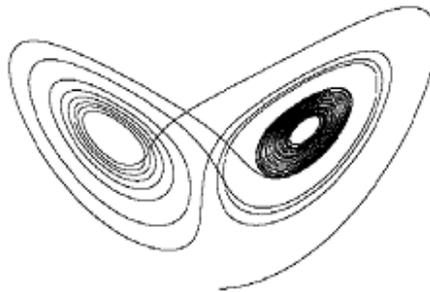
FIG(4.2)- Attracteur de Lorenz pour  $r=10$



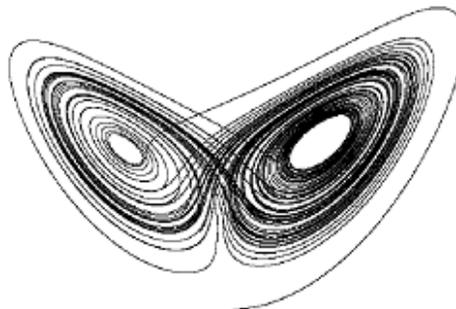
FIG(4.3)- Attracteur de Lorenz pour  $r=15$



FIG(4.4)- Attracteur de Lorenz pour  $r=20$



FIG(4.5)- Attracteur de Lorenz pour  $r=24$



FIG(4.6)- Attracteur de Lorenz pour  $r=28$

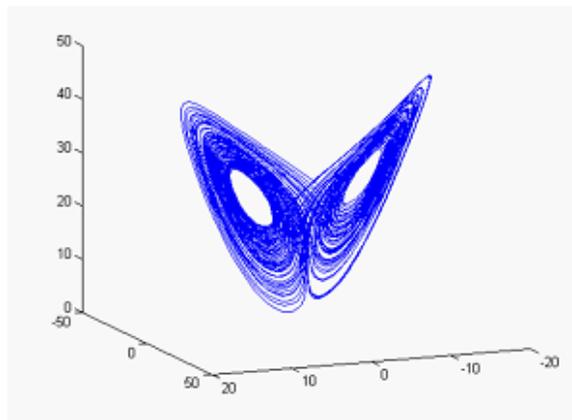
#### 4.1.1.5. Exemple de l'attracteur de Lorenz en matlab

```
function loren3
clear ;clf
global A B R
A=10;
B=8/3;
R=28;
u0=100*(rand(3,1)-0.5);
```

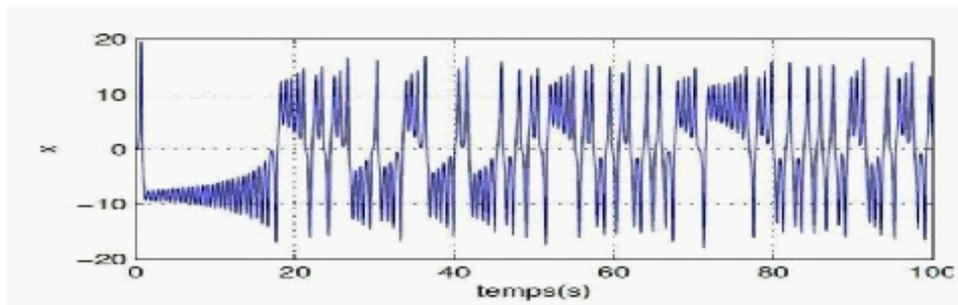
```

[t,u]=ode45(@lor2,[0,100],u0);
N=find(t>10);v=u(N,:);
x=v(:,1);
y=v(:,2);
z=v(:,3);
plot3(x,y,z);
view(158,14)
function uprime =lor2(t,u)
global A B R
uprime = zeros(3,1);
uprime(1)=-A*u(1)+A*u(2);
uprime(2)=R*u(1)-u(2)-u(1)*u(3);
uprime(3)=-B*u(3)+u(1)*u(2);

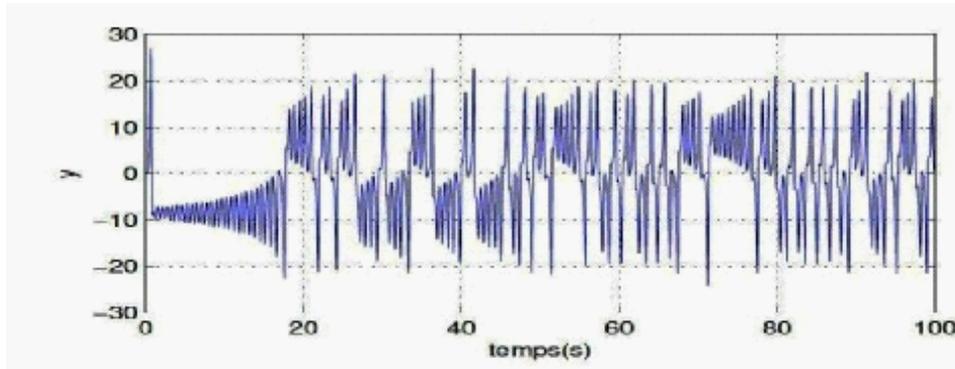
```



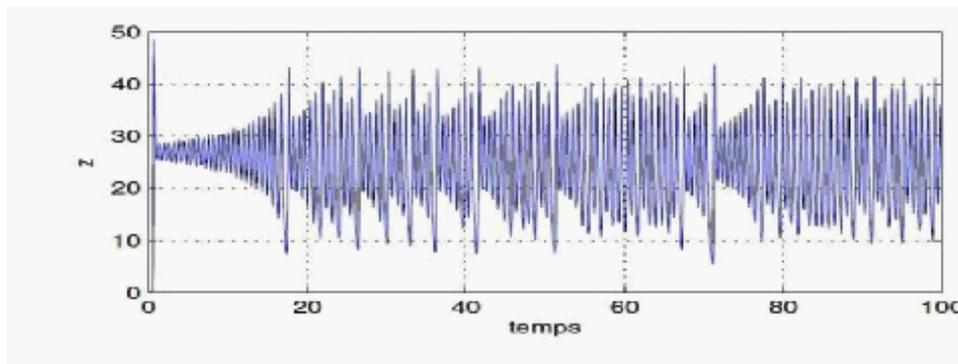
FIG(4.7)- Attracteur étrange de Lorenz



FIG(4.8)- Illustration de l'aspect aléatoire de l'état x du système de Lorenz



FIG(4.9)- Illustration de l'aspect aléatoire de l'état y du système de Lorenz



FIG(4.10)- Illustration de l'aspect aléatoire de l'état z du système de Lorenz

#### 4.1.1.6. Les exposants de Lyapunov

Les calculs des exposants de Lyapunov donne les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{8}{3} \\ \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40 * 28}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40 * 28}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{8}{3} \\ \lambda_2 = -22.828 \\ \lambda_3 = 11.828 \end{cases}$$

telque :

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = rx - y - xz = x(r - z) - y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

où  $a = 10$ ;  $b = \frac{8}{3}$ ;  $r = 28$ .

avec les conditions  $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.01$

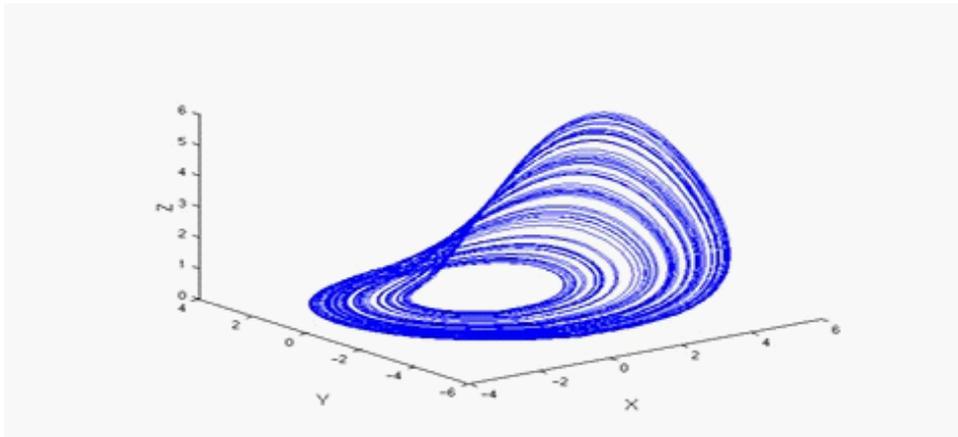
on a :  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  et  $\lambda_3 > 0$ ;

Donc d'après le tableau de classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov on voit que le système est **chaotique**.

L'attracteur chaotique de Lorenz est donné sur (FIG.4.7) pour les valeurs numériques  $a = 10$ ;  $b = \frac{8}{3}$ ;  $r = 28$ .

### 4.1.2 Le système de Rössler

L'attracteur de Rössler est l'attracteur associé au système dynamique de Rössler, un système de trois équations différentielles non-linéaires.



FIG(4.11)- Attracteur étrange de Rössler

#### Historique

**Allemand - Otto - Rössler** : conçut son attracteur en 1976 dans un but perment théorique, mais ces équations s'avèrent utiles dans les réactions chimiques. L'article été conçu pour fonctionner d'une façon similaire au système de Lorenz, mais également pour être plus simple à analyser, il ne présente qu'une seule spirale.

#### Le système de Rössler

Les équations de ce système sont :

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + z(x - c) \end{cases}$$

Rössler étudia l'attracteur pour  $a = 0.2$ ;  $b = 0.2$ ;  $c = 5.7$ , mais les propriétés de  $a = 0.1$ ;  $b = 0.1$  et  $c = 14$  sont aujourd'hui plus étudiées.

## Propriétés

Certaines propriétés du système de Rössler sont déduites par des méthodes linéaires et des vecteurs propres, mais les caractéristiques principales de ce système requiert des méthodes non-linéaire comme les sections de Poincaré ou les diagrammes de bifurcation .

Une orbite dans l'attracteur suit une spirale proche du plan  $x, y$  autour d'un point fixe instable. S'éloignant progressivement de ce point fixe, un second point fixe, réintégrant l'orbite dans la spirale.

Bien que les valeurs des différentes variables soient bornées, il est apparent que ce oscillations sont chaotique .

L'attracteur possède une structure fractale en mille-feuille, dont la dimension fractale à été estimée entre 2.01 et 2.02, donc très proche d'une surface plane.

## Vue depuis le plan X,Y

L'un des intérêts de l'attracteur de Rössler est le caractère linéaire de deux ses équations. poser  $z = 0$ , permet l'examen de sa projection dans le plans  $(x, y)$  .

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + ay \end{cases}$$

## Points fixes

Pour trouver les points fixes, les trois équations de Rössler sont posées égales à zéros, le système est alors résolu et donne le résultat suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -y - z = 0 \\ x + ay = 0 \\ b + z(x - c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ b - y(-ay - c) = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ ay^2 + cy + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = c^2 - 4ab > 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ y_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} ; y_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$

donc :

$$x = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}; y = - \left( \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right); z = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

ce qui maintenant peut être utilisé pour présenter les points fixes pour des valeurs données de paramètres :

$$\left( \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}; \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}; \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)$$

$$\left( \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}; \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}; \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)$$

comme cité plus haut l'un des points instables, est situé au centre de la spirale et l'autre se situe hors de l'attracteur.

### Régimes périodiques et chaotiques

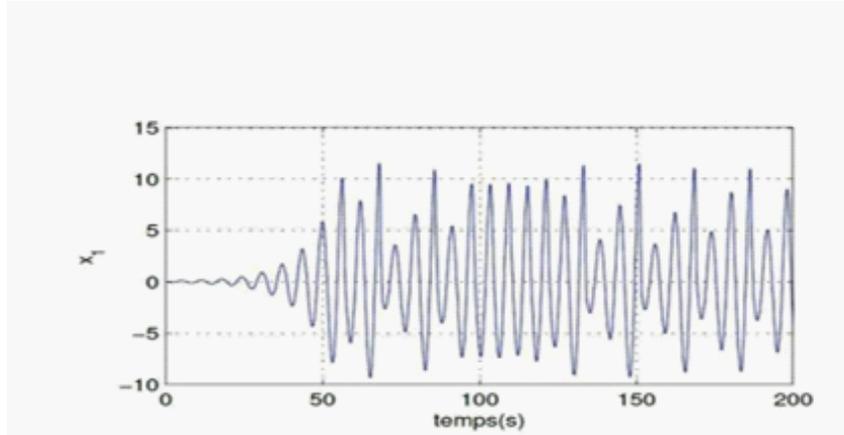
**Les exposants de Lyapunov** Posant  $a = 0.1$  et  $b = 0.1$  et en faisant varier le paramètre  $c$ , le système passe successivement par divers régimes périodiques ou chaotiques .

$$DF \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ -z & 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 0.1 - \lambda & 0 \\ -z & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0.1 - \lambda & 0 \end{vmatrix} - (c + \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 0.1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(0.1 - c) + \lambda(0.1c - 5\sqrt{c^2 - 0.04} - 5c) + 0.5\sqrt{c^2 - 0.04} + 0.5c + 1$$

- $c = 4 \Rightarrow$  période 1.
- $c = 6 \Rightarrow$  période 2.
- $c = 8.5 \Rightarrow$  période 4.
- $c = 9 \Rightarrow$  chaotique.
- $c = 12 \Rightarrow$  période 3.
- $c = 12.6 \Rightarrow$  période 6.
- $c = 13 \Rightarrow$  chaotique.
- $c = 18 \Rightarrow$  chaotique.

FIG(4.12)- Etat chaotique  $x_1$  du système de Rössler

## 4.2 Le chaos discret

Il y'a plusieurs systèmes chaotiques discrets parmi ces systèmes, on trouve la fonction logistique.

### 4.2.1 Fonction logistique

On présent ici un modèle de class de système dynamiques non linéaire à temps discret. Ce modèle est applé application quadratique (ou logistique).

L'équation logistique a été proposée par le biologiste **May** en 1979 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes [3].

$$x_{k+1} = g(x_k) = rx_k(1 - x_k)$$

$r \in [0, 4]$ ;  $x_k \in [0, 1]$  où  $k = 0, 1, 2, \dots$  (dénote le temps discret)

où  $x_k$  représente le pourcentage de population par rapport à une certaine valeurs maximale de référence.

Le graphique de  $g$  est une parabole ayant origine dans le points  $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$ , concave et symétrique par rapport à la droite verticale  $x = \frac{1}{2}$ .

- Les points fixes sont obtenus en résolvant l'équation  $rx(1 - x) = x$ . Les racines sont l'origine  $x_1^* = 0$ ;  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$ ;

- Notons aussi que les trajectoires ayant comme conditions initiales  $x(0) = 1$  et  $x(0) = \frac{1}{r}$  si  $r > 1$  sont constantes pour  $k \geq 1$ .

- Au fur et à mesure que le paramètre a augmente, le comportement qualitative du système change fortement.
- Afin de l'analyser il est important tenir en considération que :

$$g(x) = rx(1-x); \quad g'(x) = r - 2rx; \quad g^{(2)}(x) = -2r; \quad g^{(3)}(x) = 0.$$

### Etude de l'application logistique

Considérons l'application  $f$  qui est définie de  $[0, 1]$  dans lui-même par l'itération suivante :

$$g(x_k) = rx_k(1-x_k)$$

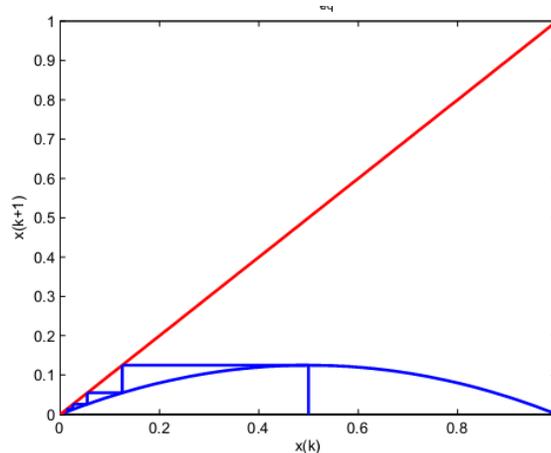
$$rx(1-x) = x \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0; & \text{pour } r \in [0, 4] \\ x_2^* = \frac{r-1}{r}; & \text{pour } r \neq 0 \end{cases}$$

$$g'(x^*) = r - 2rx = \begin{cases} r; & \text{pour } x_1^* = 0 \\ 2-r; & \text{pour } x_2^* = \frac{r-1}{r} \end{cases}$$

**Pour**  $0 \leq r < 1$  : Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

Le point fixe  $x_1^* = 0$  est donc stable pour  $|g'(0)| = |r| < 1$  (asymptotiquement stable) et devient instable à  $r = 0$ , mais pour le point fixe  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  est toujours instable quand il existe .

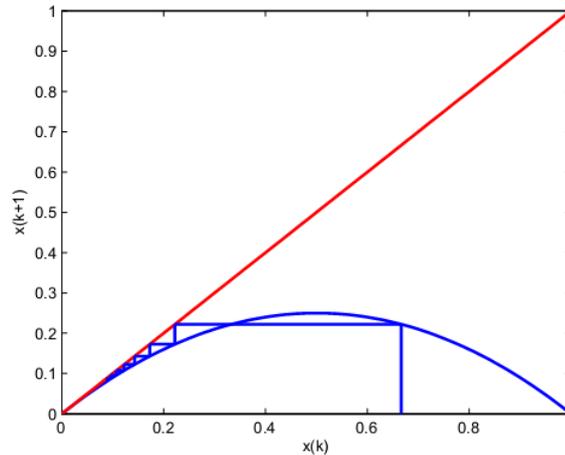
où  $r = 0.5$  et  $x_{eq} = 0$ .



FIG(4.13)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=0.5$  et  $x_{eq}=0$

Si  $r = 1$  pour le point fixe  $x_1^* = 0$   $|g'(0)| = r = 1$  et  $g^{(2)}(0) = -2a < 0$ , l'équilibre est supérieurement asymptotiquement stable.

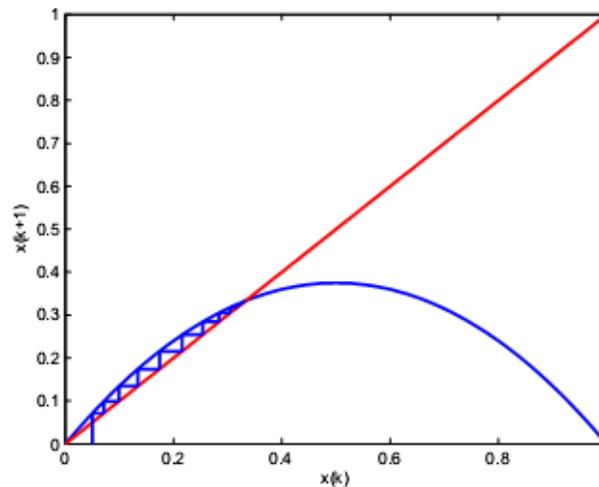
où  $r = 1$  et  $x_{eq} = 0$ .

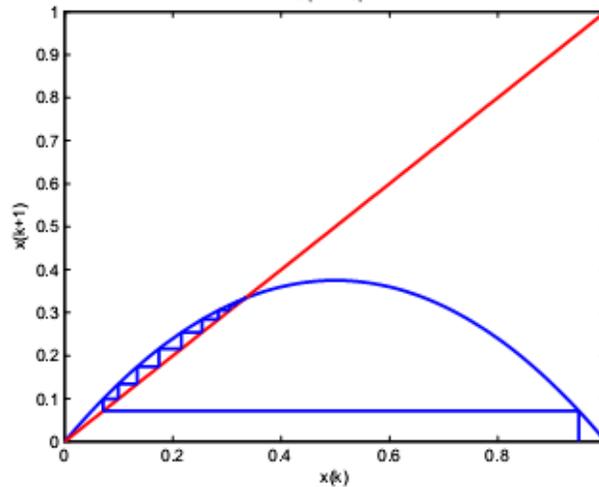

 FIG(4.14)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=1$  et  $x_{eq}=0$ 

**Pour  $1 < r < 3$  :** Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

Le point fixe  $x_1^* = 0$  est donc instable pour  $|g'(0)| = |r| > 1$ , mais pour le point fixe  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  l'équilibre est asymptotiquement stable.

où  $r = 1.5$  et  $x_{eq} = 0$  et  $x_{eq} = 0.33333$ .

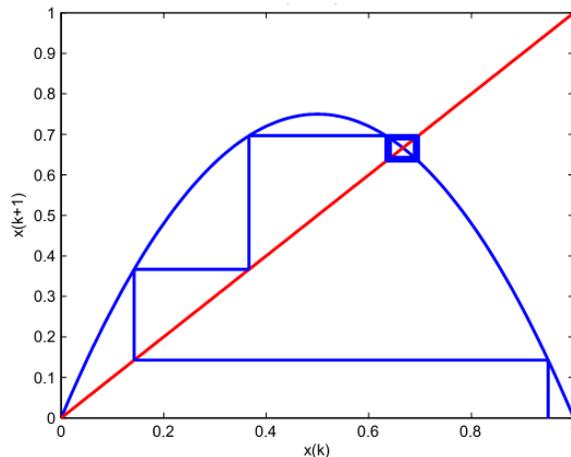

 FIG(4.15)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=1.5$  et  $x_{eq}=0$  et  $x_{eq}=0.33333$ .



FIG(4.16)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=1.5$  et  $x_{eq}=0$  et  $x_{eq}=0.33333$ .

**Pour  $r = 3$  :** Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

Le point fixe  $x_1^* = 0$  est donc instable pour  $|g'(0)| = |r| > 1$ , et pour  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  nous avons :  
 $|g'(x_2^*)| = 1$ ,  $|g^{(2)}(x_2^*)| = |-2r| < 1$ , l'équilibre est donc localement asymptotiquement stable.  
 où  $r = 3$  et  $x_{eq} = 0$  et  $x_{eq} = 0.66667$ .

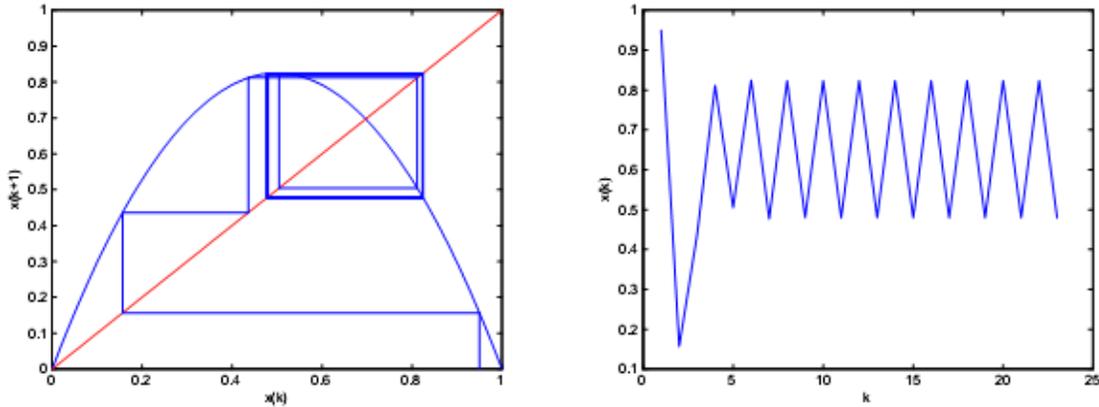


FIG(4.17)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=3$  et  $x_{eq}=0$  et  $x_{eq}=0.66667$ .

**Pour  $r > 3$  :**

- Si  $r = 3.3 < 1 + \sqrt{6}$  :

Un cycle stable et attracteur d'ordre 2 apparaît.


 FIG(4.18)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=3.3 < 1 + \sqrt{6}$ 

- Si  $3 < r \leq 4$  :

Un cycle stable et attracteur d'ordre 2 apparaît.

Ceci est vérifié par le fait que :

$$g^{(2)}(x) = g \circ g(x) = g[g(x)] = g[rx(1-x)] = r[rx(1-x)][1-(rx(1-x))]$$

$$g^2(x) = r^2x(1-x)(1-rx(1-x))$$

$\Leftrightarrow$

$$g^2(x) = x(r^3x^3 - (r^2 + r^3)x + r^2) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$g^2(x) = x \left( x - \frac{r-1}{r} \right) (-r^3x^2 + (r^2 + r^3)x - (r^2 + r)) = 0$$

à quatre solutions distinctes  $x_1^*, x_2^*$  et deux solutions additionnelles :  $x_1^* = 0$  et  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  ;

$$-r^3x^2 + (r^2 + r^3)x - (r^2 + r) = 0 \Rightarrow \Delta = r^4(r-3)(r+1)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{r+1 + \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}; \gamma = \frac{r+1 - \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Si  $3 < r \leq 1 + \sqrt{6}$  :

Le cycle est stable et attractif.

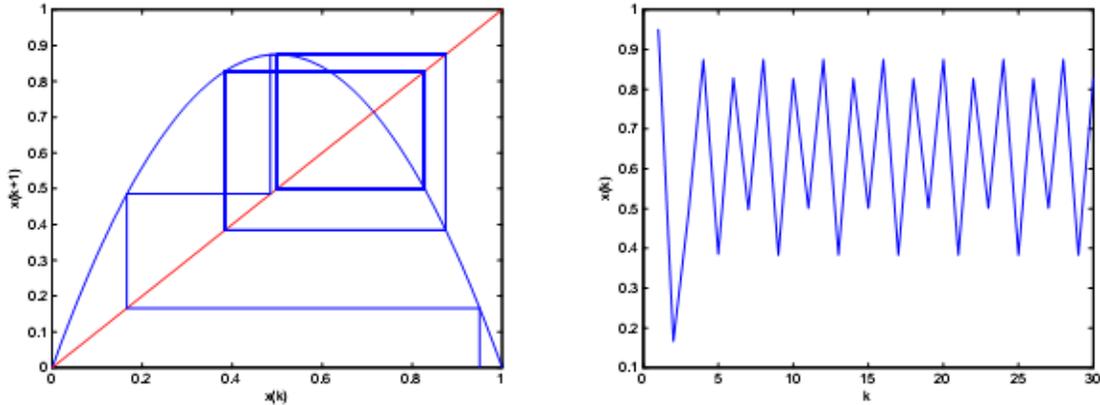
- Si  $3 > 1 + \sqrt{6}$  :

Le comportement devient beaucoup plus complexe le cycle n'est plus stable et un cycle d'ordre 4 apparaît .

À partir de ces valeurs on assiste à un doublement de l'ordre de la période jusqu'à  $r = 3.569945$  quand le système devient chaotique.

- Si  $r = 3.5 > 1 + \sqrt{6}$  :

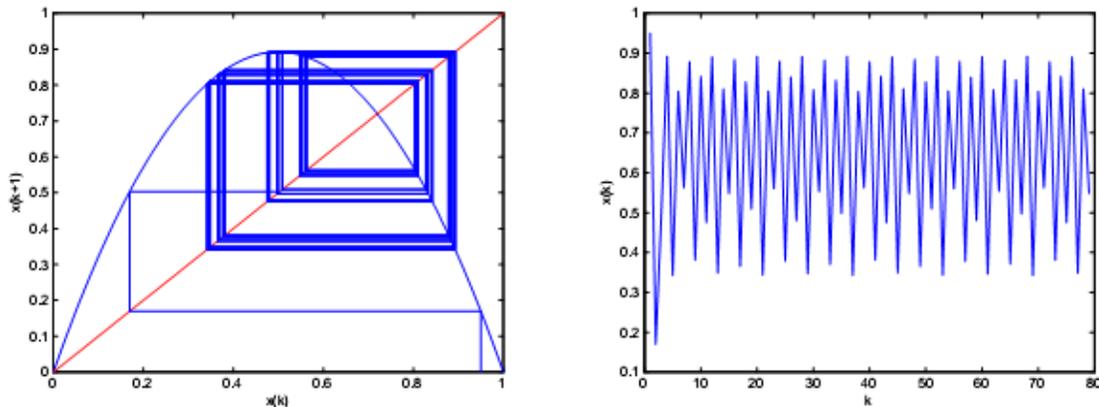
Un cycle stable et attracteur d'ordre 4 apparaît .



FIG(4.19)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=3.5 > 1 + \sqrt{6}$

- Pour  $r = 3.57 > 3.569945$  :

Un comportement chaotique apparaît.



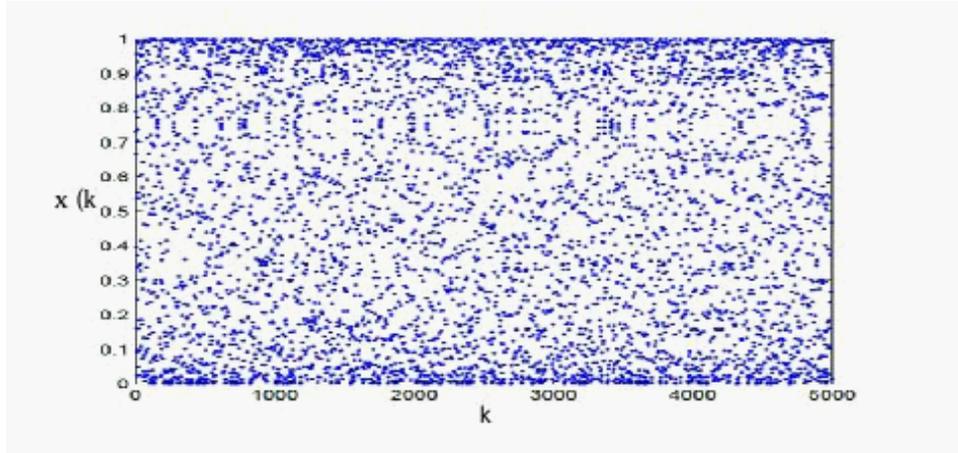
FIG(4.20)- L'évolution des points fixes de l'application logistique pour  $r=3.57 > 3.569945$

## Résultat

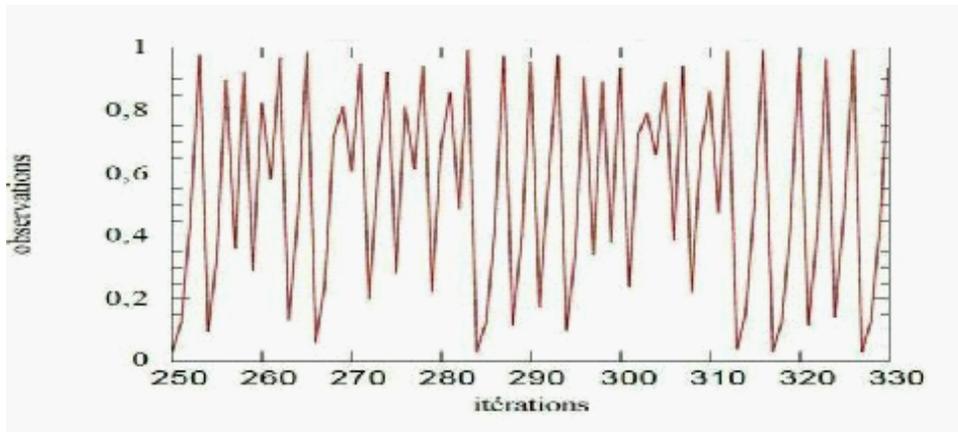
Un diagramme de bifurcation consiste à représenter les états finaux  $x$  en fonction du paramètre.

On peut alors constater les comportements de cette suite :

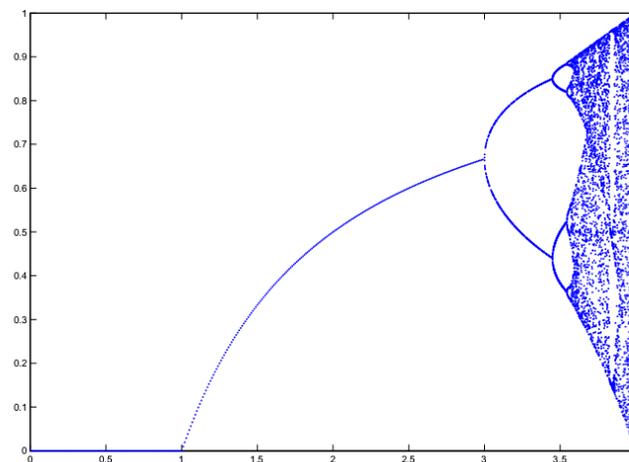
1. Si  $0 \leq r < 1$ , le système finit par arriver à  $x_1^* = 0$  et ne bouge alors plus.
2. Si  $1 < r \leq 3$ , le système se stabilise sur un point fixe  $x_2^*$ .
3. Si  $r = 3$ , le diagramme se divise en deux branches, puis après en quatre, puis huit, etc....
4. A partir de  $r = 3.57$ , la période n'est plus visible, c'est le **chaos**.



FIG(4.21)- Trajectoire de la fonction logistique



FIG(4.22)- Illustration de aspect aléatoire de l'application logistique pour  $r=4$



FIG(4.23)- Diagramme de la bifurcation de suite logistique

---

### Conclusion

On a étudié dans ce travail de mémoire le système dynamique chaotique, on consacré la première partie à l'étude des définitions des systèmes dynamiques et leurs types. Ainsi nous étudions comment étudier la stabilité de ces systèmes, nous donnons aussi la théorie de bifurcation.

La deuxième partie est dédiée à l'étude de système dynamique chaotique, ces derniers peuvent présenter des régimes permanents très complexes, la non linéarité, le déterminisme, l'aspect aléatoire et la sensibilité aux conditions initiales sont leurs principes caractéristiques, à la fin nous abordons quelques exemples de deux types de système dynamique chaotique en temps continue et discret.

# Bibliographie

- [1] **Abdallah Menasri**, Quelques bifurcations dans les systèmes quadratiques en trois dimension, Mémoire élaboré en vue de l'obtention du diplôme Magistère, Centre universitaire Abbes Laghrour-Khenchela, 2012.
- [2] **Devaney RL**, An introduction to chaotic dynamical systems. In Addison-wisley, Redwood City, CA37.
- [3] [http : // www. nlb. ac. bc/di](http://www.nlb.ac.bc/di), G.Boutempi, Boulevard de Trimphe-CP212.
- [4] **Ibtissem Talbi**, Systèmes dynamiques non-linéaires et phénomènes de chaos, Thèse de Magistère, Université Mentouri de Constantine, 29.06.2010.
- [5] **La Kshmanan M, Rajaseekar S**, Nonlinear Dynamics Integrability, Chaos and Patterns. Advanced Texts in Physics, Publisher Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [6] **L Perko** : "Differentiel equations and dynamical systems", Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [7] **M<sup>elle</sup> Megherbi Ouerdia**, Etude de réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques, Mémoire de Magistère, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 10.10.2013.
- [8] **Wiggins S**, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [9] [www. jdotec. net](http://www.jdotec.net), Critère de ROUTH.doc.doc, v1.3-24.03.2004.
- [10] **Zeraoulia Elhadj**, Etude de quelques types de systèmes chaotiques : généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen, Thèse de 3ème cycle, Université Mentouri de Constantine, 2006.