Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equation aux Dérivées Partielles et Applications

Thème:

Existence et unicité des solutions d'un problème non local avec p(x)-Laplace

Présenté par:
MAAMACHI Karima
GUEDRI Narimane

Devant le jury:

Tahar BOUALI	M.C.B	Université de Tébessa	Président
Rafik GUEFAIFIA	M.C.B	Université de Tébessa	Encadreur
Sonia ZEDIRI	M.A.A	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance:
25/05/2017

Note: ………. **Mention:** …………………………………………

ملخص

باستعمال الطريقة التغايرية (النقطة الحرجة) نبرهن الوجود والوحدانية للحل الضعيف لمعادلتين من نوع بيضوي تحت الشروط الحدية لديركلي

Dédicace

Je dédie le présente mémoire à :

Ma mère, et mon père qui m’ont toujours soutenu affectivement et moralement, ainsi que mon frère et mes sœurs pour leur soutien financier tout au long de mes amis.

KARIMA

Dédicace

Je dédie le présente mémoire à :

Ma mère, et mon père qui m’ont toujours soutenu affectivement et moralement, ainsi que mon frère et mes sœurs pour leur soutien financier tout au long de mes amis.

NARIMANE

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur ***Guefaifia Rafik.*** Maitre de conférences classe B à l'université de ***Larbi Tébessi-Tébessa***, pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également Monsieur ***Bouali Tahar.*** Maitre de conférences classe B à l'université Tébessa, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie ***Zderi Sonia*** à l'université Tébessa, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connu à l'institut de mathématiques que ont rendu mes séjours au département agréables.

Existence et unicité de solution d'un probléme non local avec p(x)-Laplace

présenté par Guedri Narimen et Maamachi Karima

Directeur de thése :Dr Rafik Guefaifia

24 MAI 2017

Introduction

Les équations différentielles aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes naturels en physique, mécanique, chimie, biologie....
Plusieurs phénomènes physiques : dynamique de fluide, mécaniques de continuum, simulation d'avion, graphiques des calculatrices et prédiction de temps sont modélisés par divers systèmes d'équations aux dérivées partielles.
Dans ce travail ou a étudier l'existence et l'unicité de deux type d'équations aux dérivées partielles elliptique non linéaire avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord
La première équation est de la forme suivant:.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Introduction

Où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $h \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, satisfait les deux conditions suivants :
1) $|f(t)| \leq a + b|t|^{q-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq p^*$
2) $f(t)\, t \leq 0$ et $(f(t) - f(s))(t - s) \leq 0$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}$
plusieurs d'auteurs ont étudier la question d'existence de ce type d'équation elliptique par exemple dans [5] pour obtenir un résultat d'existence, l'auteur à appliquer le théorème de col-montagne, avec des conditions sur f de type **Ambrosetti-Rabinowitz** où la fonctionnelle d'énergie J associé au le problème $(1,1)$ satisfait la condition de **Palais-Smale.**

La deuxième équation est de la forme suivante:

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = f(x,u) + h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

Introduction

Où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $2 \leq p(x) < N$, et M, f deux fonctions continues satisfaits des conditions de la forme
1) $m_1 t^{\alpha-1} \leq M(t) \leq m_2 t^{\alpha-1}$ pour tout $t > 0$ où m_1, m_2 et α des nombres réelles tel que $0 < m_1 < m_2$, $\alpha \geq 1$
2) $f(x,t) \leq a + b|t|^{q(x)-1}$, $x \in \overline{\Omega}$, $q \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ où $q(x) < p^*(x)$
3) $f(x,t)\, t \leq 0$ et $(f(x,t) - f(x,s))(t-s) \leq 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $t, s \in \mathbb{R}$
L'équation $(1,2)$ est dit non locale, est en relation avec la version de l'équation de **Kirchhoff**

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial U}{\partial X} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Présenté par **Kirchhoff** en 1883 (voir [11]).
Cette équation est un extension classique d'équation d'onde de **D'Alembert.**

Introduction

Le premier chapitre et un préliminaire qui comporte des définitions, des théorèmes, des propositions et des lemmes indispensables pour le reste de la mémoire.
Le deuxième chapitre contient des résultats d'existence et unicité de solution faible de certaines classes d'équation elliptique avec l'operateur p-Laplace par la méthode variationnelle (point critique)
Le troisième chapitre est une généralisation du chapitre 2 et comporte des résultats d'existences et unicité de solution d'un problème non local avec $p(x)-$Laplace; en utilisant la même méthode.

Préliminaire

1- Espace L^p.
2- Espace de Sobolev.
3- Espace de Sobolev généralisé (Espace de Sobolev à exposant variable).

Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de **Lebesgue** dx. Et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\,;\ \text{tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega)\,, 1 \leq i \leq n\}$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$
avec la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\, dx\right)$$

alors $W^{1,p}(\Omega)$ est un espaces de **Banach**

Theorem

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte continument dans* $L^{\infty}(\Omega)$ *(*$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$*) pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$*, i.e qu'il existe un constant* C *(dépendant seulement de* Ω *) tel que*

$$\|u\|_{L^{\infty}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definition

Pour $1 \leq p < +\infty$ on définit l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$,et on écrit

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}}$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui est équivalent à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$

Corollary

(Inégalité de **Poincarée***) On suppose que* Ω *est un ouvert borné alors il existe une constante* C *(dépendant de* Ω *et* P*) telle que:*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^P(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad 1 \leq p < \infty$$

en particuliere l'expression $\|\nabla u\|_{L^P}$ *est un norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalent à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Definition

Soient ω une partie d'un espace de **Banach** X et $F : \omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de **Gâteaux** (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $F(u + tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle .$$

on posera $F'(u) = l$.

Theorem

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un ouvert, Pour $p \in (1, +\infty)$ on définie une fonctionnelle

$$\begin{aligned} J &: W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ J(u) &= \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \end{aligned}$$

alors J est différentiable dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$J'(u)(v) = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Dans tout ce qui suit désigne Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$,
p:$\Omega \rightarrow [1; +\infty[$ une fonction mesurable et bornée.
On désigne par p^- et p^+ respectivement l'essentiel inf $(\inf_\Omega p(x))$ et l'essentiel sup $(\sup_\Omega p(x))$ de la fonction p.On suppose $p^- \leq p^+ < +\infty$.

Definition

(voir [7]) Soit p une fonction mesurable de $[1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.On défnit et on note $L^{p(x)}(\Omega)$ l'espace de Lebesgue d'exposant variable p :

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}$$

On défnit sur $L^{P(x)}(\Omega)$ la norme :

$$|u|_{p(x)} = \inf \left\{ u > 0 : \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

$\left(L^{P(x)}(\Omega), |.|_{p(x)} \right)$ est un espaces de **Banach.**

Definition

On définit l'espace de **Sobolev** généralisé (où encore espace de **Sobolev** d'exposant variable) $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}$$

On défnit sur $W^{1,p(x)}(\Omega)$ la norme :

$$\|u\|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$$

pour tout $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. L'éspace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est défini comme la fermeture de $C_0^{\infty}(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|u\|_{1,p(x)}$.
Pour $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on peut défini une norme équivalente

$$\|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$$

Proposition

(*Inégalité* **Hölder** *généralisé*) [13] *L'espace conjugué de* $L^{p(x)}(\Omega)$ *est* $L^{p'(x)}(\Omega)$, *où* $\frac{1}{p'(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1$, *pour tout* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, *alors:*

$$\int_{\Omega} |uv|\, dx \leq \left(\frac{1}{p^{-}} + \frac{1}{(p^{-})'} \right) |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)}$$

Proposition

(*Injection de* **Sobolev**) [8, 13] *Soit* $r \in C_+\left(\overline{\Omega}\right)$, *si* $r(x) < p^*(x)$ *pour tout* $x \in \overline{\Omega}$, *alors l'injection de sobolev*

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$$

est compact et continue, où

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & si\ p(x) < N, \\ +\infty & si\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de solution faible au probléme suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) + h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

avec condition de **Dirichlet** homogène, où Ω est un domaine régulière de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $h \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.
L'opérateur

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right), \; p > 1$$

Existence et unicité de solution faible pour une équation elliptique quasilinéaire avec l'opérateur p-Laplace

Definition

On dit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, est une solution faible de (2.1), si :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \varphi dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx + \int_\Omega h(x)\varphi dx.$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

La fonctionnelle d'énergie J correspondant à problème (2.1) est définie par

$$\begin{aligned} J \quad &: \quad W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ J(u) \quad &= \quad \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u)\, dx - \int_\Omega hudx, \end{aligned}$$

Definition

Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On dit que u est un point critique de J, si $J'(u) = 0$.

Remark

Il est bien connu que les solutions faibles de (2.1) *correspondent à des points critiques de la fonctionnelle* J.

Theorem

Supposons que les conditions suivants :
(H_0) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, et supposons qu'il existe* $a, b > 0$ *tel que:*

$$|f(t)| \leq a + b\,|t|^{q-1}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, *où* $1 < q < p^*$.
(H_1) $f(t)\,t \leq 0$ *et* $(f(t) - f(s))(t - s) \leq 0$, *pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$. *Sont vérifiés.*
Alors, le problème (2.1) *admet une solution faible unique.*

Proposition

Soit X est un espace de **Banach** *et $I : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable.*
Supposons que pour tout $u, v \in X$, $\langle I'(u) - I'(v), u - v\rangle \geq 0$. Alors I est convexe.
Si l'inégalité stricte se vérifie lorsque $u \neq v$. Alors I est strictement convexe.

Proposition

Soit X est un espace de **Banach** *et $I : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable et strictement convexe. Alors I admet un point critique unique dans X*

Lemma

(i) La fonctionnelle J est bien définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) La fonctionnelle J est de classe $C_1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ et

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(u)\varphi dx - \int_\Omega h\varphi dx$$

pour tout $u, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemma

(i) La fonctionnelle J est coércive.

(ii) La fonctionnelle J est strictement convexe.

Proof.

(de théorème (2.1)) :La fonctionnelle J est continue, convexe et coércive, alors J admet un minimum global, c'est le point critique de J.D'autre part d'après la proposition (2.2) J est différentiable et strictement convexe, alors le point critique de J est unique. $\square$

En expose dans ce chapitre l'existence et l'unicité des solutions du problème non local suivant:

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = f(x,u) + h(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que $2 \leq p(x) \leq N$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, M et f sont des fonctions continues certains conditions spécifiques et $h \in L^{p(x)/p(x)-1}(\Omega)$.

Definition (1)

On dit que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est une solution faible de (3.1) si :

$$M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \Phi dx - \int_\Omega f(x,u)\,\Phi dx$$

$$-\int_\Omega h\Phi dx = 0$$

pour tout $\Phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. La fonctionnelle d'énergie correspondant au problème (3.1)

Definition (1)

est défini comme:

$$J : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$J(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} dx\right) - \int_\Omega F(x,u)\, dx - \int_\Omega hudx$$

où $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$ et $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)\, ds$ pour $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$.
Il est clair que la solution faible de (3.1) est un point critique de la fonctionnelle J.

Theorem (1)

Supposons que les conditions suivants:
(H_0) $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue et satisfait la condition*

$$m_1 t^{\alpha-1} \leq M(t) \leq m_2 t^{\alpha-1}$$

Pour tout $t > 0$, *et* $\alpha \geq 1$, *où* m_1, m_2 *et* α *nombres réels tels que* $0 < m_1 \leq m_2$ *et* $\alpha \geq 1$,
(H_1) $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *est une fonction carathéodory et supposons qu'il existe* $a, b > 0$ *tel que :*

$$|f(x,t)| \leq a + b\,|t|^{q(x)-1}$$

Theorem (1)

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$, *où* $q \in C_{+}\left(\overline{\Omega}\right)$ *tel que* $q\left(x\right) < p^{*}\left(x\right)$,
$\left(f_1\right)$ $f\left(x,t\right)t$
et $\left(f\left(x,t\right) - f\left(x,s\right)\right)\left(t-s\right) \leq 0$ *pour tout* $x \in \overline{\Omega}$ *et pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$.
Alors le problème (3.1) *a exactement une solution.*

Proposition

Soit X est un espace de **Banach** *et $I : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable.*
Supposons que pour tout $u, v \in X$, $\langle I'(u) - I'(v), u - v \rangle \geq 0$. Alors I est convexe.
Si l'inégalité stricte se vérifie lorsque $u \neq v$. Alors I est strictement convexe.

Proposition

Soit X est un espace de **Banach** *et $I : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable et strictement convexe. Alors I admet un point critique dans X*

Lemma

(i) *La fonctionnelle* J *est bien défini sur* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
(ii) J *est une fonction de* **Gâteaux** *différentiable continue, i.e.* J *est de class* $C^1\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ *dont la dérivée est:*

$$\left\langle J'(u), \Phi\right\rangle = M\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|}{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \Phi dx - \int_\Omega f(x,u)\Phi dx$$

pour tout u, $\Phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

Lemma

(i) *La fonctionnelle* J *est coércive.*
(ii) *La fonctionnelle* J *est strictement convexe.*

Proof.

(de théorème (3.1)) :La fonctionnelle J est contunie et convexe, et donc semi-continu faible. En outre étant donné qu'il est coércive, il a un point minimal global, c'est le point critique de J, d'autre par d'aprés la proposition (3.2) J est différentiable et strictement convexe, alors le point critique de J est unique. $\square$

Conclusion

La méthode de point critique est un outil permettant de montrer l'existence d'oû moins une solution faible de problème semi linéaire grâce à la fonctionnelle d'énergie associée à ce problème.
En perspective : En généralisé l'équation $(3, 1)$ dans l'espace d'Olicz sobolev et démontrer l'existence et l'unicité par la mémé méthode.


Merci
pour cette
gentille attention