Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées

Thème:

EXISTENCE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE VISCOÉLACTICITÉ

Présenté par:
ABBAD Abir
TAIB Abir

Devant le jury:

Abderrahmane ZARAI	M.C.A	Université de Tébessa	Président
Nouri BOUMAZA	M.C.B	Université de Tébessa	Rapporteur
Fatiha MESLOUB	M.C.B	Université de Tébessa	Examinateur
Khaled ZENNIR	M.C.A	Université de Qassim Arabie Saoudite	Examinateur

Date de soutenance:
25/05/2017

Note: ………. **Mention:**……………………

Dédicace

A la plus belle créature que Dieu a crée sur terre,,,

A l'homme de ma vie et source de joie et de bonheur :

A mon cher Père.

A la lumière de mes jours, la flamme de mon c œ ur:

A ma belle Mère.

A mes chers frères: Adel (Hassni), Zine, Hicham, Khalil.

A toute la famille de mon père et ma mère surtout : mon grand-père Messoud, ma grande-mère Fatma, mon oncle Nadji Baaloudj et mes belles tantes Sahra, Naima.

A tous mes très chers amis les plus proches de mon c œ ur.

Promotion de **2012 :** Mathématiques Appliquées et EDP.

A tous mes enseignants.

Abir Abbad

Dédicace

Merci à dieu qui nous permis de bien accomplir ce modeste travail.

De tout mon cœur je dédie ce travail

A ma chère mère, la lumière qui nous a guidés vers

Le chemin de savoir.

A mon cher père, pour leur sacrifice.

A mes cheres sœurs.

A mes chers frères.

A toute ma famille.

A mes très chers amis les plus proches de mon cœur

Promotion Bac 2012

Promotion de Math appliquée et ebp

Master 2017.

Taib Abir

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions **Dieu**, notre créateur de nos avoir donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce travail modeste.

Nous adressons un grand remerciement à notre encadreur

Dr Nouri BOUMAZA qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils, ses remarques et ses orientation. Surtout pour sa confiance, sa patience et sa disponibilité.

Nous tenons également à remercier les membres de jury :

Dr Abderrahmane ZARAI.

Dr Fatiha MESLOUB.

Dr Khaled ZENNIR.

pour l'honneur qu'ils nos ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et pour toutes leurs futurs remarques et critiques .

Finalement, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles qui ont toujours soutenues et à tout ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

Merci à vous tous

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier l'existence locale, globale et le comportement asymptotique de la solution d'un problème de viscoélasticité non linéaire de type hyperbolique, fait par S. Berrimi et S. A. Messaoudi en [5].
De plus, nous avons étudié le cas où la solution de notre problème explose en temps fini.

Mots clés: viscoélasticité, fonction de relaxation, solution locale, solution globale, énergie, décroissance exponentielle, décroissance polynômiale, explosion.

ملخص

ألهدف من عملنا هو دراسة الوجود المحلي , الكلي و السلوك التقاربي للحل لمشكل اللزوجة غير الخطي من النمط الزائدي الذي قام به بريمي ومسعودي في [5].

علاوة على ذلك , قمنا بدراسة حالة أين يمكن لحل مشكلتنا أن ينفجر في زمن منتهي.

Abstract

The objective of this work is to study the locale, global existence and asymptotic behavior of the solution of a nonlinear viscoelastic hyperbolic problem, done by S. Berrimi and S.A. Messaoudi in [5].
More, we have studied the case where the solution blow-up in finite time.

Keywords: viscoelasticity, relaxation function, local solution, global solution, energy, exponential decay, polynomial decay, blow-up.

Table des matières

Introduction générale

Nous rappelons les résultats et les développements de ce thème par certains travaux, nous commençons par le problème général suivant :

$$\begin{cases} |u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - c\Delta u + a|u_t|^{m-2} u_t + b|u|^{p-2} u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné avec une frontière régulière Γ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $n \geq 1$, ρ vérifié : $0 < \rho < 2/(n-2)$ si $n \geq 3$, ou $\rho > 0$ si $n = 1.2$ et g est une fonction positive satisfaite les conditions suivantes :

$$g(0) > 0, \;\; 1 - \int_0^{\infty} g(s)ds = l > 0.$$

et

$$g'(t) \leq -\xi g^p(t), \quad t \geq 0, \;\; 1 \leq p < \frac{3}{2}.$$

Cavalcanti **[7],** a étudié l'équation non linéaire suivante :

$$|u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - k\Delta u_t = 0,$$

l'auteur a montré l'existence globale dans $L^{\infty}((0,\infty), H_0^1(\Omega))$ pour $k \geq 0$ et le comportement asymptotique pour $k > 0$, dans l'absence du terme d'explosion forte Δu_t dans Ω, il a prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie si la fonction de relaxation $g(t)$ décroit exponentiellement vers 0, il a utilisé l'énergie (modifiée) pour prolonger la stabilité asymptotique dans le cas $k = 0$._

Cavalcanti **[9]** a étudié l'équation (pour $\rho = 0$, $m = 2, b = 0$, $\Delta u_{tt} = 0$)

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + a(x)u_t + |u|^{\alpha} u = 0,$$

pour $\alpha > 0$, g est une fonction positive et $a : \Omega \to \mathbb{R}^+$ vérifié $a(x) \geq a_0 > a$ dans $w \subset \Omega$, w satisfait quelque géométrie et

$$-\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t),$$

les auteurs ont montrés la décroissance de façon exponentielle, le dernier résultat a modifié dans **l'article [8]** par Cavalcanti et dans **l'article [4]** par Birrimi et Messaoudi. Dans leur travail, Cavalcanti dans **[8]** a considéré deux situations : la dissipation interne dans une partie Ω et la dissipation viscoélasticité (dissipation faible) dans une autre partie, il a prouvés la décroissance exponentielle ou polynômiale d'après des conditions sur g. D'autre part Birrimi et Messaoudi dans **[4]** ont montrés que la dissipation interne est non linéaire. Ainsi ils ont prouvés que le terme mémoire est suffisant pour stabiliser le système et la solution décroit exponentiellement si la fonction g vérifiée la relation

$$g'(t) \leq -\xi g(t),\ t \geq 0.$$

Messaoudi **[30],** a montré la non existence globale pour l'équation suivante :

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + a\left|u_t\right|^{m-2} u_t = \left|u\right|^{p-2} u,$$

il a prouvé sous certains relation entre p, m et g l'explosion et l'existence globale, ce travail a généralisé par Georgiev et Todorova dans **[14]** et Messaoudi dans **[28],** ils ont trouvés le même résultat pour l'équation des ondes $(g = 0)$.
Dans l'**article [27],** les auteurs ont considérés l'équation suivante :

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + a\left|u_t\right|^{m-2} u_t - b\left|u\right|^{p-2} u = 0,$$

Ils ont changés le terme d'explosion non linéaire $a\left|u_t\right|^{m-2} u_t$ par $a\left|u_t\right|$, ensuite ils ont montrés l'explosion de la solution dans l'absence de terme viscoélastique $(g = 0)$ et pour $a = 0,$ dans ce cas le terme mémoire est suffisant pour l'explosion du solution en temps fini avec énergie négative (voir **[2]**). Pour $b = 0$ le terme d'explosion assure l'existence globale voir (**[16]**,**[28]**).
Georgiev et Todorova **[14]** ont développés le travail de Livine dans le cas où le terme d'explosion est non linéaire, tel que le terme est changé par $a\left|u_t\right|^{m-2} u_t$, dans leurs travail les auteurs ont introduit une méthode différente pour déterminer une relation entre m et p, précisément ils montraient l'existence globale si $m > p$ et l'explosion si $m < p.$
Messaoudi **[28],** a prouvé l'explosion de la solution sans que l'énergie soit négative, pour plus des résultats de même nature (voir **[23], [38]**).
Khaled Zennir dans **[40]** a étudié l'équation suivante :

$$u_{tt} - \Delta u - \omega\Delta u_t + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + a\left|u_t\right|^{m-2} u_t = b\left|u\right|^{p-2} u, \quad x \in \Omega, t > 0,$$

pour $\omega > 0, g \neq 0$ et $m \geq 2,$ il a démontré l'existence locale par la méthode de Faedo-Galerkin et la méthode de point fixe, il a prouvé que la solution locale est globale lorsque le temps tends vers l'infini, ensuite il a étudié le comportement asymptotique de cette solution. Enfin, il a montré que l'énergie associée à la solution décroît exponentiellement.
Dans ce mémoire, nous considérons le problème hyperbolique de viscoélasticité suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = \left|u\right|^{\gamma} u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u\left(x,t\right) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

qui a étudié par **Berrimi et Messaoudi [5]**, ils ont montrés que la dissipation donnée par le terme intégrale (viscoélastique) est suffisante pour stabiliser la solution avec la décroissance de façon exponentielle ou polynômiale.
Notre mémoire se compose en trois chapitres :
chapitre 1 :
Dans ce chapitre nous rappelons les principaux notions dont nous aurons besoins, commençons par les espaces normés, Banach et Hilbert, après nous donnerons les espaces L^p, les espaces de Sobolev. finalement nous présentons les inégalités nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire et aussi nous citons quelques théorèmes utiles.
chapitre 2 :
Dans ce chapitre nous étudions l'existence locale en utilisant la méthode de **Faedo-Galarkin**, ainsi la méthode de point fixe.
Nous considèrons pour $u \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$ le problème linéaire suivant :

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g(t-s)\Delta v\,(s)\,ds = |u|^\gamma\,u, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{3}$$

avec la condition initiale

$$v(x,0) = u_0(x), v_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega,$$

et la condition aux bord

$$v(x,t) = 0, t > 0, x \in \partial\Omega,$$

et nous allons montrer que le problème admet une solution locale unique v par la méthode de **Faedo-Galarkin**, cette méthode consiste une approximation de la solution, ensuite on obtient une estimation à priori nécessaire pour garantir la convergence de cette approximation. Comme la solution existe pour le problème (3), nous allons utiliser le théorème de l'application contractante pour montre l'existence locale de notre problème (2).
De plus, nous allons prouver que la solution locale est globale, pour cela nous allons démontrer que la norme $\|u\,(t)\|_2 + \|\nabla u\,(t)\|_2$ dans l'espace de l'énergie $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ de notre solution est borné avec une constante indépendant du temps t.
Chapitre 3 :
Ce chapitre est dévisé en deux sections :
Dans la section 1 :
Nous allons étudions le comportement asymptotique de la solution, c'est-à-dire si la solution et g la fonction de relaxation satisfait quelques conditions alors pour $p = 1$ notre solution décroit de façons exponentielle et décroit polynômiale pour $p > 1$.

Dans la section 2 :

Nous allons montrer l'explosion de la solution en temps fini.

Notations

Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Γ : La frontière régulière de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$: Le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

∇u : Gradient de u.

Δu : Laplacien de u.

$u, u(t)$: $u(x,t)$.

w_j : $w_j\left(x\right)$.

p.p : La convergence presque partout.

$\rightarrow$: La convergence forte.

$\rightharpoonup$: La convergence faible.

$\rightharpoonup^*$: La convergence faible étoile.

$\langle ., . \rangle$: Le produit scalaire.

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$: La dérivé partielle de u par rapport à t.

$D(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables avec support compact Ω.

$D'(\Omega)$: Espace de distribution.

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables continûment k fois dans Ω.

$C_0(\Omega)$: Espace des fonctions continues nulles sur le frontière de Ω.

H : Espace de Hilbert.

$H_0^1 = W_0^{1,2}$.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels, nous avons introduire les notions essentielles nécessaires à la compréhension des énoncés qui forment le thème de notre mémoire. Ces rappels concernent les espaces normés, les espaces de Banach, les espaces de Hilbert, les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev et quelques inégalités et des théorèmes importants.

1.1 Espace normé

Définition 1.1 *Un espace vectoriel linéaire E est dit espace* ***normé*** *si pour chaque élément $u \in E$, il existe un nombre réel noté par $\|u\|$, vérifiant les axiomes*

1) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0,$
2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E$ (inégalité triangulaire),
3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1 $(E, \|.\|_E)$ *est un espace normé.*

Définition 1.2 ***(Equivalence des normes)***

Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur V on dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes c_1, c_2 strictement positives telles que

$$\forall u \in V, \quad c_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1 .$$

Proposition 1.1 *Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence*

$$u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_1 \Longleftrightarrow u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_2 .$$

Définition 1.3 ***(Suite de Cauchy)***

Soit $(E, \|.\|)$ espace normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n,\ m \geq 0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.4 ***(Espace complet)***

Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace **complet** si toute suite de **Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'espace E est converge vers un élément u de E.

1.2 Espace de Banach

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.5 ***(Espace de Banach)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de **Banach** si E est un espace **complet**.

Définition 1.6 *E' est l'espace linéaire de toutes les fonctions linéaires continues*

$$f : E \to \mathbb{R},$$

et appelé l'espace dual de E.

Proposition 1.2 *(voir [37])*

L'espace E' muni de la norme $\|.\|_{E'}$ définie

$$\|f\|_{E'} = \sup\{|f(u)| : \|u\| \leq 1\},$$

est aussi un espace de Banach.
On note la valeur de $f \in E'$ au $u \in E$ par $f(u)$ ou $\langle f, u\rangle_{E,E'}$.

Définition 1.7 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de **Banach** tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F et on notera $E \hookrightarrow F$ ou $E \subset F$.*

On dira que cette inclusion est :
1) **Continue :** S'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$, et on notera $E \hookrightarrow_{continue} F$.

2) **Compact :** Si pour toute suite bornée dans E (pour la norme de E), on peut extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F), et on notera $E \hookrightarrow_{compact} F$.
3) **Dense :** Si pour tout $u \in E$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).

Théorème 1.1 *(voir [6])*

Soit E un espace de **Banach**, alors E est **réflexif** si et seulement si

$$B_E = \{u \in E : \|u\| \leq 1\},$$

est compact avec la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Définition 1.8 *Soit E espace de Banach et $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite dans E, alors u_n converge fortement vers u dans E si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0,$$

et notée par $u_n \to u$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

1.2.2 La topologie faible et faible étoile

Soit E un espace de Banach et $f \in E'$. On note par

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \varphi_f(u),$$

lorsque f dans E', on obtient la famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.9 *La topologie faible en E est la plus faible topologie en E, notée par $\sigma(E, E')$ pour tout $(\varphi_f)_{f\in E'}$ continue.*
allons définir la topologie faible étoile en E', qui notée par $\sigma(E', E)$. Pour tout $u \in E$, on a

$$\varphi_f : E' \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \varphi_u(f) = \langle f, u\rangle_{E',E}$$

lorsque $u \in E$, on obtient la famille d'applications de E' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.10 *La topologie faible étoile dans E' est la plus faible topologie dans E' pour tout $(\varphi_u)_{u\in E'}$ est continue.*

Remarque 1.2 *(voir [6])*

Puisque $E \subset E''$, il est claire que la topologie faible étoile $\sigma(E', E)$ est plus faible que la topologie $\sigma(E', E'')$.

Théorème 1.2 *Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Définition 1.11 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E est converge faiblement vers u si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)\,, \text{ pour tout } f \in E',$$

cela noté par

$$u_n \rightharpoonup u.$$

Remarque 1.3 *(voir [36])*

1) Si la limite faible existe, elle est unique.
2) Si $u_n \to u$ (fortement), alors $u_n \rightharpoonup u$ (faiblement).
3) Si $\dim E < +\infty$, alors la convergence faible implique la convergence forte.

Proposition 1.3 *(voir [37])*

Sur la compacité dans les trois topologies dans l'espace de Banach E :
1) La boule d'unité

$$B = \{u \in E, \|u\| \leq 1\}\,,$$

dans E est compact si et seulement si $\dim(E) < \infty$.
2) La boule d'unité B' dans E' est un compact faible dans E' si et seulement si E réflexif.
3) B' est toujours faiblement étoile compact dans la topologie faible étoile de E'.

Proposition 1.4 *(voir [6])*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E'. On a
1) $[f_n \rightharpoonup^* f \text{ dans } \sigma(E', E)] \Leftrightarrow [f_n(u) \to f(u)\,, \forall u \in E]\,.$
2) Si $f_n \to f$ (fortement), alors $f_n \rightharpoonup f$, dans $\sigma(E', E'')\,.$
3) Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E'')\,,$ alors $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)\,.$
4) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)\,,$ alors $\|f_n\|$ est borné et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|\,.$
5) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)$ et $u_n \to u$ (fortement) dans E, alors $f_n(u_n) \to f(u)\,.$

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.12 *Soit E un espace vectoriel, on appelle application de $E \times E$ dans le corp*

$K = \mathbb{C}$ définit par $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire si :

1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, pour tout $u, v \in E$,

2) $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, pour tout $u, v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$,

3) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Définition 1.13 *Un espace de **Hilbert** est un espace de Banach ($(E, \|.\|_E)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :*

$$\|u\|_E = \langle u, u \rangle^{1/2} \text{ (i.e) } \|u\|_E^2 = \langle u, u \rangle .$$

Définition 1.14 ***(Système orthonormé)***

Soit E un espace de Hilbert, la suite $\{e_n\}_{n \geq 1} \subset E$ est appelée un système orthonormé si

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

1) Si $e_n \perp e_m$ on dit que le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est orthogonal.

2) Si le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$est orthogonal alors le système $\left\{ \dfrac{e_n}{\|e_n\|} \right\}_{n \geq 1}$ est orthonormé.

Définition 1.15 ***(Base Hilbertienne)***

Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de E qu'est orthonormée pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.

Définition 1.16 ***(Espace séparable)***

Un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace séparable.

Exemple 1.1 *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$).*

Théorème 1.3 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Proposition 1.5 *Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base Hilbertienne de E, il existe une suite unique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$u_n = (u, e_n),$$

telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} u_n e_n$ converge vers u quand p tends vers l'infinie.

De plus on a

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n\geq 1} |(u, e_n)|^2.$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n\geq 1} (u, e_n) e_n.$$

Théorème 1.4 *(voir [36])*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert E, alors on peut extraire une sous-suite converge dans la topologie faible.

Théorème 1.5 *(voir [36])*

Dans l'espace de Hilbert, toute suite converge dans la topologie faible est bornée.

Théorème 1.6 *(voir [36])*

Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite convergente vers u dans la topologie faible et $(v_n)_{n\in N*}$ une autre suite converge faiblement vers v, alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n \rangle = \langle v, u \rangle.$$

Théorème 1.7 *(voir [36])*

Soit E un espace normé, alors la boule d'unité

$$B' = \{u \in E' : \|u\| \leq 1\},$$

de E' est compact dans la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.6 *(voir [36])*

Soit E et F deux espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in N^*} \in E$ une suite qui converge faiblement vers $u \in E$, soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors la suite $(A(u_n))_{n\in N^*}$ converge vers $A(u)$ dans la topologie faible de F.

1.4 Espaces des fonctions

1.4.1 L'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.17 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. On définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$, la norme est notée par :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et il existe une constante positive } C, \text{ telle que} \\ |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega. \end{array} \right\}.$$

Il sera muni de la norme du **sup-essentielle** :

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{x \in \Omega} \{C; \quad |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.18 *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ si $f \mid_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$*

Proposition 1.7 *$L^p(\Omega)$ muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de **Banach**, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.8 *$L^p(\Omega)$ est **séparable** pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.8 *$L^\infty(\Omega)$ est un espace de **Banach non séparable**.*

Théorème 1.9 *(voir [37])*

$L^p(\Omega)$ est un espace **réflexif**, pour $1 < p < \infty$.

Lemme 1.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(1 \leq p \leq \infty)$ et soient u_n, u sont des fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que u_n converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$ alors*

$$u_n \to u \text{ p.p dans } \Omega.$$

Lemme 1.2 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(1 \leq p \leq \infty)$ et soit u_n une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ converge presque partout vers u, alors*

1) u dans $L^p(\Omega)$.
2) u_n converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.10 *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente presque partout dans Ω.*

Si $u \in L^\infty(\Omega)$ alors

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega.$$

Remarque 1.4

1) La limite forte ou faible d'une suite de fonction est toujours unique.
2) Dans le cas $p = \infty$ la symbole * est posée pour montrer que la définition de convergence faible dans L^∞ n'est pas entièrement la même que dans les espaces $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. En effet, le dual de $L^\infty(\Omega)$ est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$.
3) La convergence forte dans $L^p(\Omega)$ implique la convergence faible dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.11 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$*

1) Si $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$, alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.
2) Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \rightharpoonup \|u\|_{L^p(\Omega)}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.
3) Si $1 \leq p < \infty$ et si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ et
$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|u_n\|_{L^p(\Omega)}$.
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$.
4) Si $1 < p < \infty$ et si $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p} \leq K$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} et $u \in L^p(\Omega)$ tels que $u_{n_i} \longrightarrow u \in L^p(\Omega)$.
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et on a alors $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$.
5) Si $1 \leq p \leq \infty$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} telle que $u_{n_i} \rightharpoonup u$ **p.p** et $|u_{n_i}| \leq h$ **p.p** avec $h \in L^p(\Omega)$.

Lemme 1.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, u_m et u des fonctions de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, telles que*

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq C \;\; , u_m \to u \;\; p.p \;\; dans \; \Omega.$$

Alors $u_m \to u$ dans $L^p(\Omega)$ faiblement.

Lemme 1.4 *$L^2(\Omega)$ est un espace de **Hilbert**, avec le produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \text{ pour tout } u, v \in L^2(\Omega).$$

1.4.2 L'espace $L^p((0,T)\,,E)$.

Définition 1.19 *Soit E un espace de **Banach**, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de **Lebesgue** à valeurs dans E et on note $L^p((0,T)\,,E)$ l'espace des fonctions $u:]0,T[\to E$, mesurable qui vérifient :*

$$\begin{aligned} \textit{i) Si } 1 &\leq p \leq \infty, \ \|u\|_{L^p((0,T),E)} = \left(\int_0^t |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty, \\ \textit{ii) Si } p &= \infty, \ \|u\|_{L^\infty((0,T),E)} = ess \sup_{x\in]0,T[} |u(x)| < \infty. \end{aligned}$$

Théorème 1.12 *(voir [36])*

L'espace $L^p((0,T)\,,E)$ est complet.

Remarque 1.5 *Supposons que $(1 \leq p \leq \infty)$ et E est un espace de Banach réflexif alors la convergence faible étoile équivalent à la convergence faible.*

Définition 1.20 *L'espace des fonctions indéfiniment différentiables $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est noté par $\mathcal{D}(\Omega)$ **(espace des fonctions test)**, c'est-à-dire*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\,; \exists K \subset \Omega,\ K \textit{ compact (fermé, borné) ; } u = 0 \textit{ sur } K\}.$$

Définition 1.21 *Notons par $\mathcal{D}'((0,T)\,,E)$ l'espace de distribution dans $]0,T[$ à valeurs dans E, et on définie*

$$\mathcal{D}'((0,T)\,,E) = \mathcal{L}(\mathcal{D}\,]0,T[\,,E),$$

où $\mathcal{L}(\phi,\varphi)$ est l'espace des fonctions linéaires continues de ϕ vers φ. Comme $u \in \mathcal{D}'((0,T)\,,X)$, on définie la dérivé de distribution par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}\,(]0,T[)\,,$$

et comme $u \in L^p((0,T)\,,E)$, on a

$$u(\varphi) = \int_0^t u(t)\,\varphi(t)\,dt,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}\,(]0,T[)\,.$$

Maintenant, nous allons introduire des résultats importants dans $L^p((0,T)\,,E)$:

Lemme 1.5 *(voir [25])*

Soit $u \in L^p((0,T),E)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T),E)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ alors la fonction u est continue de $[0,T]$ dans E (i.e) $u \in \mathcal{C}^1((0,T),E)$.

1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p((0,T),E)$ est un espace de Banach et en particulier $L^2((0,T),E)$ est un espace de Hilbert, lorsque E est un espace de Hilbert.

2) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E réflexif, alors $L^p(0,T,E)$ est aussi réflexif.

3) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E séparable, alors $L^p((0,T),E)$ est aussi séparable.

Lemme 1.6 *(voir [26])*

Soit $\varphi =]0,T[\times \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et soit g_μ, g deux fonctions dans $L^q([0,T], L^q(\Omega))$, $1 < q < \infty$ telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q([0,T],L^q(\Omega))} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N},$$

et

$$g_\mu \rightarrow g \ \text{ dans } \varphi,$$

alors

$$g_\mu \rightharpoonup g \ \text{ dans } L^q(\varphi).$$

Proposition 1.9 *(voir [12])*

L'espace $L^p((0,T),E)$ qui associé à la norme $\|.\|_{L^p((0,T),X)}$, est un espace de Banach.

Proposition 1.10 *(voir [14])*

Soit E un espace de Banach réflexif, de dual E' et $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors le dual de $L^p((0,T),E)$ est définie algébriquement et topologiquement dans $L^q((0,T),E')$.

Proposition 1.11 *(voir [12])*

Soit E, F deux espaces de Banach, $E \subset F$ avec injection continue alors

$$L^p((0,T),E) \subset L^p((0,T),E'),$$

avec injection continue.

Proposition 1.12 ***(De compacité)*** *(voir [25])*

Soient B_1, B_2 et B_3 trois espaces de Banach avec $B_1 \subset B_2 \subset B_3$, supposons que l'injection $B_2 \hookrightarrow B_3$ est continue et B_1, B_3 sont réflexifs. On définie pour $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$

$$W = \left\{u \in L^p((0,T),B_1) : \ u' \in L^q((0,T),B_3)\right\},$$

alors l'injection $W \hookrightarrow L^p((0,T),B_2)$ est compact.

1.5 Espace de Sobolev

1.5.1 Dérivée faible

Définition 1.22 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une* ***i-ème*** *dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de u au sens des distributions, on écrira :

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

1.5.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.23 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \text{ tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega)\}.$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1.5.3 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.24 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni par la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.25 *On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'espace fermé de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 1.26 *Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{1/2},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leq m}\langle D^\alpha u,D^\alpha v\rangle_{L^2}=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \partial^\alpha u\partial^\alpha v dx,\text{ pour tout } u,v\in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.13 *([36])*

1) Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
2) Si $m\geq m'$, $H^m(\Omega)\hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$, avec injection continue.
3) Si $m=0$ on a $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$.

Lemme 1.7 *Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, nous identifions un dual $H^{-m}(\Omega)$ de $H_0^m(\Omega)$ dans un sous-espace fermé sur Ω, on trouve*

$$\mathcal{D}(\Omega)\hookrightarrow H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-m}(\Omega)\hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Lemme 1.8 ***(Inégalité de Sobolev-Poincaré)***

Si

$$2\leq q\leq\frac{2n}{n-2},n\geq 3,$$
$$q\geq 2,\ n=1,2,$$

alors, il existe une constante $C(p,\Omega)$ telle que :

$$\|u\|_q\leq C(p,\Omega)\|\nabla u\|_2,\text{ pour } u\in H_0^1(\Omega).$$

Définition 1.27 ***(Intégration par partie)***

Soit $(u,v)\in H^1(\Omega)$, pour tout $1\leq i\leq n$ on a

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx=-\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial x_i}udx+\int_{\partial\Omega}uv\eta_i d\sigma,$$

où $\eta_i(x)=\cos(\eta,x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point et l'axe des x_i.

Lemme 1.9 ***(Formule de Green)***

Pour tout $u\in H^2(\Omega)$ et $v\in H^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_\Omega\Delta uvdx=\int_\Omega\nabla u\nabla vdx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}vds,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.10 *(voir [36])*

Soit $1 \leq p \leq r \leq q, \dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

Lemme 1.11 *(voir [36])*

Si $\mu(\Omega) < \infty, 1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, et

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/q} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.6 Quelques inégalités utiles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (\Omega \subset \mathbb{R}^n)$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \int_0^t |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{1/2},$$

(i.e)

$$\|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Cauchy avec ε (ε-inégalité)

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2.$$

Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.

Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, $|uv| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note q le conjugué de p $((L^p)^* = L^q)$, c'est à dire $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et on a l'inégalité :

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^p\, dx\right)^{1/q},$$

(i.e)

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inégalité algébrique de Young
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|ab| \leq \delta |a|^2 + \frac{1}{4\delta} |b|^2, \text{ avec } \delta > 0.$$

Inégalité de Young
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{q} |b|^q,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.
Inégalité de Young avec ε
Pour tout $\varepsilon > 0$ alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon) |b|^q,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et $c(\varepsilon) = \frac{1}{p}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.
Inégalité de Gronwall
Soit $T > 0$, φ une fonction telle que $\varphi \in L^1(0, T), \varphi \geq 0$, presque partout et $\phi \in L^1(0, T), \phi \geq 0$, presque partout et $\varphi\phi \in L^1(0, T)$, $C_1, C_2 \geq 0$.
Supposons que

$$\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \varphi(s)\phi(s)ds, \quad \text{p.p } t \in (0, T).$$

Alors on a

$$\phi(t) \leq C_1 e^{\left(C_2 \int_0^t \varphi(s)ds\right)}, \text{p.p } t \in (0, T).$$

Inégalité de Minkowski
Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

1.7 Méthodes d'existence

Ici, on énonce le théorème du point fixe qui s'appelle le théorème de l'application contractante. On utilise ce théorème pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème non linéaire.

Définition 1.28 *Soit $f : E \to E$ est une application d'un espace métrique E. Le point u est un point fixe de f si*

$$f(u) = u.$$

Définition 1.29 *Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. L'application $\varphi : E \to F$ est appelée contraction s'il existe une constante positive $C < 1$ telle que*

$$d_F(\varphi(u), \varphi(v)) \leq C d_E(u, v).$$

Théorème 1.13 ***(Théorème de point fixe pour application contractante)***

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $\varphi : E \to E$ est un contraction, alors φ admet un point fixe unique.

Chapitre 2

Existence de la solution

Dans ce chapitre nous allons démontrer **l'existence locale,** en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin** et le théorème de **l'application contractante.** Aussi nous allons démontrer **l'existence globale.**

2.1 Position du problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = |u|^\gamma u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0\ , \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in\ \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\gamma > 0$ est une constante, $g(t)$ est une fonction positive (dite de relaxation) satisfaite quelques conditions et Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ de frontière régulière $\partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont les données initiales.

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité.

Maintenant, nous énonçons les hypothèses générales sur la fonction de relaxation $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfaisante :

$$g(0) > 0,\ \ 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0. \tag{G1}$$

Il existe une constante positive ξ telle que :

$$g'(t) \leq -\xi g^p(t), \quad t \geq 0,\ \ 1 \leq p < \frac{3}{2}. \tag{G2}$$

Remarque 2.1 *Si* $p < \dfrac{3}{2}$ *on a* $\int_0^\infty g^{2-p}(s)ds < \infty$.

Remarque 2.2 *Un exemple pour une fonction qui satisfait **(G1)** et **(G2)** respectivement, est*

$$\begin{aligned} g\left(s\right) &= e^{-as}, \quad a>0, \\ g\left(s\right) &= b\left(1+s\right)^{-1/(p-1)}, \quad p>1, \quad b<\left(2-p\right)/\left(p-1\right). \end{aligned}$$

Lemme 2.1 *Pour tout $u \in \mathcal{C}^1([0,T], H_0^1(\Omega))$ on a :*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \int_0^t g(s) ds \int_\Omega \left|\nabla u(s)\right|^2 dx \right\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$(g \circ u)(t) = \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \left|u(s)-u(t)\right|^2 dx ds.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx &= \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds dx \\ &+ \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(t) ds dx, \\ &= \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u_t(t)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) dx ds \\ &+ \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx &= -\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s) \frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\nabla u(s) - \nabla u(t)\right|^2 dx ds \\ &+ \int_0^t g(s) \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx \right) ds, \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s) ds dx &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \int_0^t g(s) ds \int_\Omega \left|\nabla u(s)\right|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

■

2.2 Existence locale

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence locale du problème **(2.1)**, pour $u \in \mathcal{C}([0,T], H_0^1(\Omega))$.

Pour ce but, on considère le problème associé pour u fixé dans $\mathcal{C}([0,T], H_0^1(\Omega))$:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g(t-s)\Delta v(s)\, ds = |u|^{\gamma} u, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ \qquad v(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ \qquad v(x,0) = u_0(x), v_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

et nous prouvons **l'existence locale** en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin**, après en utilisant le théorème de l'application **contractante** pour montrer l'existence locale du problème **(2.1)**.
Notre technique pour cette démonstration est la même de Georgiev et Todorova [14], avec des modifications nécessaires qui sont supposés par la nature de notre problème.
La première étape est le choix de l'espace où l'existence locale est établit, la condition minimale pour cet espace est $u(x,t)$ continue. L'espace faible qui satisfait la condition $u \in \mathcal{C}([0,T], H)$ avec $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ est l'espace du problème **(2.1)**.
Avant de commencer la preuve, on introduit l'espace

$$Y_T = \mathcal{C}\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$

Et la norme associée est

$$\|u\|_{Y_T}^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \int_\Omega \left[|u_t|^2 + l\,|\nabla u|^2\right](x,t) \right\}.$$

Théorème 2.1 *Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, supposons que*

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma < \frac{2}{n-2},\ n > 2, \\ 0 &< \gamma,\ \ n = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

sont vérifiées. Alors le problème **(2.1)** admet une solution locale unique $u \in Y_T$ pour T assez petit.

La preuve de ce théorème est établit par des lemmes. La présence du terme $|u|^{\gamma} u$ dans le membre de droit du problème **(2.1)**, donne une valeur négative dans l'énergie. Pour cela on fixe $u \in \mathcal{C}([0,T], H_0^1(\Omega))$ dans le membre de droit du problème **(2.1)** et on montre que le problème **(2.3)** admet une solution.

Lemme 2.2 *Supposons que (2.4) sont vérifiées, alors pour $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ et*

$u \in \mathcal{C}([0,T], H_0^1(\Omega))$ le problème **(2.3)** admet une solution faible unique $v \in Y_T$.
Pour La preuve de ce lemme on suivre la même technique du a Lions [25], pour établir la convergence du terme non linéaire, premièrement il faut que les conditions initiales sont plus régulières $(u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega))$.

Lemme 2.3 *Si $u \in \mathcal{C}([0,T], H_0^1(\Omega))$. Supposons que*

$$\begin{aligned} u_0 &\in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ u_1 &\in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

*et **(G1), (G2)** sont vérifiées, alors il existe une solution locale unique v du problème **(2.3)** telle que :*

$$v \in L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \tag{2.5}$$
$$v_t \in L^\infty[0,T], H_0^1(\Omega)), \tag{2.6}$$
$$v_{tt} \in L^\infty[0,T], L^2(\Omega)).$$

Preuve.
Existence :
1) Solution approchée
Soit $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est un espace de **Hilbert** séparable, alors il existe une famille de sous-espace $\{V_n\}$ telle que :
i) $V_n \subset V$ $(\dim V_n < \infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
ii) $V_n \to V$, telle qu' il existe un sous-espace ϑ dense dans V et pour tout $v \in V$, on peut extraire une suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $v_n \to v$ dans V.
iii) $V_n \subset V_{n+1}$ et $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
Pour tout $n \geq 1$, soit $V_n =$Vect$\{w_1, w_2, ..., w_n\}$, où $\{w_j\}_{j=1}^n$ le système orthogonal tel que

$$\|w_j\| = 1, w_j \in H^2(\Omega), \quad \text{pour tout } j = 1, ..., n.$$

On note par $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ les coefficients de combinaison linéaire, où w_j sont les solutions du problème :

$$\begin{cases} -\Delta w_j = \lambda_j w_j, & j = 1, ..., n \text{ sur } \Omega, \\ w_j = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Par **(iii)**, on peut choisit $v_{n0}, v_{n1} \in \{w_1, w_{2,...,} w_n\}$ tel que

$$\begin{aligned} v_{n0} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} w_j \rightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \qquad (2.8) \\ v_{n1} &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{jn} w_j \rightarrow u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \qquad (2.9) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{jn} &= \int_\Omega u_0 w_j dx, \\ \beta_{jn} &= \int_\Omega u_1 w_j dx. \end{aligned}$$

Soient les fonctions $\varphi_1^n, ..., \varphi_n^n \in \mathcal{C}^2[0,T]$, telles que

$$v_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^n(t) w_j, \qquad (2.10)$$

avec

$$\varphi_j^n(t) = \int_\Omega v_n(t) w_j dx,$$

on résoud le problème

$$\begin{cases} \int_\Omega v_n''(t)\eta dx - \int_\Omega \Delta v_n(t)\eta dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\eta ds dx = \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\eta dx, \\ v_n(0) = u_{n0}, \quad v_n'(0) = u_{n1}, \end{cases} \qquad (2.11)$$

pour tout $\eta \in V_n$ et $t \geq 0$, on pose $\eta = w_j$ dans (2.11) on obtient le problème de **Cauchy** pour des équations différentielles par les inconnues φ_j^n :

$$\begin{cases} \varphi_j''^n(t) - \lambda_j \varphi_j^n(t) + \lambda_j \int_0^t g(t-s)\varphi_j^n(s) ds = \psi_j(t), \\ \varphi_j^n(0) = \int_\Omega u_0 w_j(x) dx, \quad \varphi_j'^n(0) = \int_\Omega u_1 w_j(x) dx, \quad j = 1, ..., n, \end{cases}$$

où

$$\psi_j(t) = \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t) w_j dx \in \mathcal{C}[0,T].$$

Donc ce problème admet une solution unique $\varphi_j^n \in \mathcal{C}^2[0,T]$. En résulte que v_n défini par (2.10) est unique et satisfait (2.11).

2) Estimations à priori

La première estimation à priori

Cette estimation pour montrer que l'énergie de (2.11) est bornée et on déduit que le temps maximal (final) T_m tends vers T.

On pose $\eta = v_n'(t)$ dans (2.11) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v_n''(t)\, v_n'(t)\, dx - \int_\Omega \Delta v_n(t)\, v_n'(t)\, dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \Delta v_n(s)\, v_n'(t)\, ds dx \\
= &\int_\Omega f(u)\, v_n'(t)\, dx, \forall n \geq 1, \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

où $f(u) = |u(t)|^\gamma u(t)$, lorsque

$$f : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$u \longmapsto |u(t)|^\gamma u(t),$$

est continue, on déduit que

$$|u(t)|^\gamma u(t) \in L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$

D'autre part, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ on peut déduire

$$f \in H^1(\Omega).$$

Le premier terme dans (2.12), s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_n''(t)\, v_n'(t)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_n'(t)|^2 dx, \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_n'(t)\|_2^2. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

En intégrant par partie le deuxième terme dans (2.12), il vient

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta v_n(t)\, v_n'(t)\, dx &= -\int_{\partial\Omega} \nabla v_n(t)\, v_n'(t)\, \eta_i d\sigma + \int_\Omega \nabla v_n(t)\, \nabla v_n'(t)\, dx, \\
&= \int_\Omega \nabla v_n(t)\, \nabla v_n'(t)\, dx, \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v_n(t)|^2 dx, \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v_n(t)\|_2^2. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

En intégrant le troisième terme dans (2.12) et utilisant le **lemme 2.1**, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\, v_n'(t)\, dsdx &= \int_\Omega v_n'(t) \int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\, dsdx, \\
&= -\int_\Omega \nabla v_n'(t) \int_0^t g(t-s)\nabla v_n(s)\, dsdx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \nabla v_n(t) \int_0^t g(t-s) v_n'(t)\, ds\eta_i d\sigma, \\
&= -\int_\Omega \nabla v_n'(t) \int_0^t g(t-s)\nabla v_n(s)\, dsdx, \\
&= -\frac{1}{2}(g' \circ \nabla v_n)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla v)(t) + \frac{1}{2} g(t) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds \int_\Omega |\nabla v_n(s)|^2\, dx\right),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\, v_n'(t)\, dsdx = -\frac{1}{2}(g' \circ \nabla v_n)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla v)(t) + \frac{1}{2} g(t) \|\nabla v_n(t)\|_2^2 \\
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds \|\nabla v_n(t)\|_2^2\right). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

En substituant (2.13), (2.14) et (2.15) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\|v_n'(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(t-s)ds\right)\|\nabla v_n(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla v)(t)\right)\right] - \int_\Omega f(u) v_n'(t)\, dx \\
= \ & \frac{1}{2}(g' \circ \nabla v)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla v_n(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} E_n(t) - \int_\Omega f(u) v_n'(t)\, dx = \frac{1}{2}(g' \circ \nabla v)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla v_n(t)\|_2^2, \qquad (2.16)$$

avec

$$E_n(t) = \frac{1}{2}\left[\|v_n'(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(t-s)ds\right)\|\nabla v_n(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla v)(t)\right],$$

est l'énergie associée au problème (2.11).

D'après **(G2)**, (2.16) vient

$$\frac{d}{dt} E_n(t) - \int_\Omega f(u) v_n'(t)\, dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_n(t) &\leq \int_\Omega f(u) v_n'(t)\, dx, \\
\frac{d}{dt} E_n(t) &\leq \left(\int_\Omega |f(u)|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v_n'(t)|^2\right)^{1/2}, \\
\frac{d}{dt} E_n(t) &\leq \|f(u)\|_2 \|v_n'(t)\|_2, \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Young dans (2.17) pour tout $\delta > 0$, on trouve

$$\frac{d}{dt}E_n(t) \leq \frac{1}{4\delta}\|f(u)\|_2^2 + \delta \|v_n'(t)\|_2^2,$$

en intégrant l'inégalité au-dessus par rapport à t sur l'intervalle $]0,t[\,, (t<T)$, il vient

$$\begin{aligned} E_n(t) &\leq \frac{1}{4\delta}\int_0^t \|f(u)\|_2^2\,ds + \delta\int_0^t \|v_n'(t)\|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\left(\|v_n'(0)\|_2^2 + \|\nabla v_n(0)\|_2^2\right), \\ E_n(t) &\leq \frac{1}{4\delta}\int_0^t \|f(u)\|_2^2\,ds + \delta\int_0^t \|v_n'(t)\|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\left(\|u_{n1}\|_2^2 + \|\nabla u_{n0}\|_2^2\right), \end{aligned}$$

lorsque $f \in L^2([0,T], L^2(\Omega))$, on déduit que

$$E_n(t) \leq \mathbf{C}_T\left(\|u_{n1}\|_2^2 + \|\nabla u_{n0}\|_2^2\right) + \delta\int_0^t \|v_n'(t)\|_2^2\,ds,$$

$$\begin{aligned} E_n(t) \leq\; & \mathbf{C}_T\left(\|u_{n1}\|_2^2 + \|\nabla u_{n0}\|_2^2\right) \\ & +\delta\int_0^t \left(\frac{1}{2}\left[\|v_n'(t)\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(t-s)ds\right)\|\nabla v_n(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla v)(t)\right]\right)ds. \end{aligned}$$

Donc

$$E_n(t) \leq \mathbf{C}_T\left(\|u_{n1}\|_2^2 + \|\nabla u_{n0}\|_2^2\right) + \delta\int_0^t E_n(s)\,ds,$$

d'après l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$E_n(t) \leq R_T,$$

où $R_T = \mathbf{C}_T\left(\|u_{n1}\|_2^2 + \|\nabla u_{n0}\|_2^2\right)$ est une constante positive.
On conclure que T_m tends vers T et

$$v_n \text{ est borné dans } L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right).$$

La deuxième estimation à priori

On pose $\eta = w_j$ dans (2.11), on trouve

$$\int_\Omega v_n''(t)\,w_j dx - \int_\Omega \Delta v_n(t)\,w_j dx + \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\,w_j ds dx = \int_\Omega f(u)\,w_j dx. \qquad (2.18)$$

En multipliant (2.18) par λ_j et posant $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$, on obtient

$$-\int_\Omega v''(t)\,\Delta w_j dx + \int_\Omega \Delta v_n(t)\,\Delta w_j dx - \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\,\Delta w_j ds dx = -\int_\Omega f(u)\,\Delta w_j dx. \quad (2.19)$$

En multipliant (2.19) par $\varphi_j'^n(t)$, il vient

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega v_n''(t)\,\Delta w_j\varphi_j'^n(t)\,dx+\int_\Omega \Delta v_n(t)\,\Delta w_j\varphi_j'^n(t)\,dx-\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\,\Delta w_j\varphi_j'^n(t)\,dsdx\\
=\;&-\int_\Omega f(u)\,\Delta w_j\varphi_j'^n(t)\,dx,
\end{aligned}$$

par l'utilisation de (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega v_n''(t)\,\Delta v_n'(t)\,dx+\int_\Omega \Delta v_n(t)\,\Delta v_n'(t)\,dx-\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\,\Delta v_n'(t)\,dsdx\\
=\;&-\int_\Omega f(u)\,\Delta v_n'(t)\,dx. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

En appliquant l'intégration par partie, le premier terme dans (2.20) devient

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega v_n''(t)\,\Delta v_n'(t)\,dx &= -\int_{\partial\Omega}\nabla v_n'(t)\,v_n''(t)\,\eta_i d\sigma+\int_\Omega \nabla v_n''(t)\,\nabla v_n'(t)\,dx,\\
&= \int_\Omega \nabla v_n''(t)\,\nabla v_n'(t)\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v_n'(t)|^2\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v_n'(t)\|_2^2. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme dans (2.20) s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta v_n(t)\,\Delta v_n'(t)\,dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v_n(t)|^2\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta v_n(t)\|_2^2. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Par le **lemme 2.1,** le troisième terme de (2.20) devient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\Delta v_n'(t)\,dsdx &= \frac{1}{2}(g'\circ\Delta v_n)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\Delta v_n)(t)-\frac{1}{2}g(t)\,\|\Delta v_n(t)\|_2^2\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\Delta v_n(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right\}. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

En intégrant par partie le premier terme du membre droit de l'égalité (2.20), il vient

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega f(u)\,\Delta v_n'(t)\,dx &= \int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dx-\int_{\partial\Omega}\nabla v_n'(t)\,f(u)\,\eta_i d\sigma,\\
&= \int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dx. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

D'après (2.21), (2.22) (2.23) et (2.24), l'égalité (2.20) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v_n'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta v_n(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta v_n)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\Delta v_n)(t)-\frac{1}{2}g(t)\,\|\Delta v_n(t)\|_2^2\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\Delta v_n(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right\}=\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\nabla v_n'(t)\right\|_2^2+(g\circ\Delta v_n)(t)+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\Delta v_n(t)\right\|_2^2\right]-\frac{1}{2}(g'\circ\Delta v_n)(t)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\Delta v_n(t)\right\|_2^2$$
$$=\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dx,$$

$$\frac{d}{dt}K_n(t)-\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dx=\frac{1}{2}(g'\circ\Delta v_n)(t)-\frac{1}{2}g(t)\left\|\Delta v_n(t)\right\|_2^2\leq 0,$$

Avec $K_n(t)=\frac{1}{2}\left[\left\|\nabla v_n'(t)\right\|_2^2+(g\circ\Delta v_n)(t)+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\Delta v_n(t)\right\|_2^2\right]$.

$$\frac{d}{dt}K_n(t)\leq\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dx. \tag{2.25}$$

En intégrant (2.25) par rapport à t sur l'intervalle $]0,t[\,,(t<T)$, on obtient

$$\begin{aligned}K_n(t)&\leq\int_0^t\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dxds+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla v_n'(0)\right\|_2^2+\left\|\Delta v_n(0)\right\|_2^2\right),\\ K_n(t)&\leq\int_0^t\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dxds+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u_{n1}\right\|_2^2+\left\|\Delta u_{n0}\right\|_2^2\right).\end{aligned} \tag{2.26}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Young au premier terme du membre de droit de (2.26), on trouve

$$\int_0^t\int_\Omega \nabla f(u)\,\nabla v_n'(t)\,dxds\leq\frac{1}{4\delta}\int_0^t\left\|\nabla f(u)\right\|_2^2ds+\delta\int_0^t\left\|\nabla v_n'(t)\right\|_2^2ds, \tag{2.27}$$

En substituant (2.27) dans (2.26), il vient

$$K_n(t)\leq\frac{1}{4\delta}\int_0^t\left\|\nabla f(u)\right\|_2^2ds+\delta\int_0^t\left\|\nabla v_n'(t)\right\|_2^2ds+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u_{n1}\right\|_2^2+\left\|\Delta u_{n0}\right\|_2^2\right),$$

$$K_n(t)\leq C_T\left(\left\|\nabla u_{n1}\right\|_2^2+\left\|\Delta u_{n0}\right\|_2^2\right)+\delta\int_0^t\left(\left\|\nabla v_n'(t)\right\|_2^2+(g\circ\Delta v_n)(t)+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\Delta v_n(t)\right\|_2^2\right)ds,$$

Donc

$$K_n(t)\leq C_T\left(\left\|\nabla u_{n1}\right\|_2^2+\left\|\Delta u_{n0}\right\|_2^2\right)+\delta\int_0^t K_n(t)\,ds. \tag{2.28}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, (2.28) devient

$$K_n(t)\leq S_T. \tag{2.29}$$

où $S_T=C_T\left(\left\|\nabla u_{n1}\right\|_2^2+\left\|\Delta u_{n0}\right\|_2^2\right)$ est une constante positive.
D'aprés la définition de $K_n(t)$, (2.29) équivalent à :

$$\left\|\nabla v_n'(t)\right\|_2^2+(g\circ\Delta v_n)(t)+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\Delta v_n(t)\right\|_2^2\leq S_T.$$

Alors, en résulte que

$$v_n \text{ est borné dans } L^{\infty}\left([0,T], H^2(\Omega)\right),$$
$$v_n' \text{ est borné dans } L^{\infty}\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right).$$

La troisième estimation à priori

Il est claire que

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n(s)\,ds\right] = g(0)\,\Delta v_n(t) + \int_0^t g'(t-s)\,\Delta v_n(s)\,ds, \tag{2.30}$$

en intégrant (2.30) par partie, il devient

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n(s)\,ds\right] = g(t)\,\Delta u_{n0} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n'(s)\,ds. \tag{2.31}$$

En dérivant (2.11) par rapport à t, vient

$$\int_\Omega v_n'''(t)\,\eta dx - \int_\Omega \Delta v_n'(t)\,\eta dx + \int_\Omega \frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\,ds\right]\eta dx = \int_\Omega (f(u))'\,\eta dx, \tag{2.32}$$

en substituant (2.31) dans (2.32), on trouve

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v_n'''(t)\,\eta dx - \int_\Omega \Delta v_n'(t)\,\eta dx + \int_\Omega \left(g(t)\,\Delta u_{n0} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n'(s)\,ds\right)\eta dx \\ =\; &\int_\Omega (f(u))'\,\eta dx,\end{aligned} \tag{2.33}$$

avec $(f(u))' = \dfrac{\partial f}{\partial t}$. On pose $\eta = v_n''(t)$ dans (2.33), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v_n'''(t)\,v_n''(t)\,dx - \int_\Omega \Delta v_n'(t)\,v_n''(t)\,dx + g(t)\,\Delta u_{n0}\int_\Omega v_n''(t)\,dx + \int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n'(s)\,v_n''(t)\,dsdx \\ =\; &\int_\Omega (f(u))'\,v_n''(t)\,dx.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Le premier terme dans (2.34) s'écrit

$$\begin{aligned}\int_\Omega v_n'''(t)\,v_n''(t)\,dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_n''(t)|^2\,dx, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_n''(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Le deuxième terme dans (2.34) par intégration par partie, vient

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \Delta v_n'(t)\,v_n''(t)\,dx &= -\int_{\partial\Omega} \nabla v_n'(t)\,v_n''(t)\,\eta_i d\sigma + \int_\Omega \nabla v_n'(t)\,\nabla v_n''(t)\,dx, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v_n'(t)|^2\,dx, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v_n'(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Le quatrième terme dans (2.34) par intégration par partie et le **lemme 2.1**, vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v_n''(t) \int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n'(s)\,dsdx &= \int_{\partial\Omega} v_n''(t) \int_0^t g(t-s)\,\nabla v_n'(s)\,ds\eta_i d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla v_n''(t) \int_0^t g(t-s)\,\nabla v_n'(s)\,dsdx, \qquad (2.37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v_n''(t) \int_0^t g(t-s)\,\Delta v_n'(s)\,dsdx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla v_n')(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^2 g(s)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}(g'\circ\nabla v_n')(t) + \frac{1}{2}g(t)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2. \qquad (2.38)\end{aligned}$$

En remplacent (2.35), (2.36) et (2.38) dans (2.34), il vient

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_n''(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 + (g(t)\,\Delta u_{n0})\int_{\Omega} v_n''(t)\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla v_n')(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2\,ds \\ -\frac{1}{2}(g'\circ\nabla v_n')(t) + \frac{1}{2}g(t)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 = \int_{\Omega}(f(u))'\,v_n''(t)\,dx,\end{gathered}$$

donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_n''(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla v_n')(t) + (g(t)\,\Delta u_{n0})\int_{\Omega} v_n''(t)\,dx \\ = &\int_{\Omega}(f(v))'\,v_n''(t)\,dx + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla v_n')(t) - \frac{1}{2}g(t)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2, \qquad (2.39)\end{aligned}$$

on note par

$$\varkappa_n(t) = \frac{1}{2}\left\{\|v_n''(t)\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla v_n')(t)\right\}.$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\{\|v_n''(t)\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla v_n')(t)\right\}\right] + (g(t)\,\Delta u_{n0})\int_{\Omega} v_n''(t)\,dx \\ = &\int_{\Omega}(f(v))'\,v_n''(t)\,dx + \frac{1}{2}(g'\circ\nabla v_n')(t) - \frac{1}{2}g(t)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2. \qquad (2.40)\end{aligned}$$

L'égalité (2.40) devient

$$\frac{d}{dt}\varkappa_n(t) - \int_{\Omega}(f(v))'\,v_n''(t)\,dx + (g(t)\,\Delta u_{n0})\int_{\Omega} v_n''(t)\,dx = \frac{1}{2}(g'\circ\nabla v_n')(t) - \frac{1}{2}g(t)\,\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 \leq 0.$$

En intégrant la formule au-dessus sur l'intervalle $]0,t[$ et estimant le deuxième terme par Cauchy-Schwartz et Young, on trouve

$$\varkappa_n(t) + (g(t)\,\Delta u_{n0})\int_0^t\int_{\Omega} v_n''(t)\,dxds \leq \frac{1}{2}\|v_{n0}''\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v_n'(0)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\int_0^t \left\|(f(u))'\right\|_2^2 ds + \delta\int_0^t \|v_n''(t)\|_2^2\,ds.$$

$$\varkappa_n(t) + (g(t)\,\Delta u_{n0}) \int_0^t \int_\Omega v_n''(t)\,dxds \leq R_T\left(\|v_{n0}''\|_2^2 + \|\nabla u_{n1}\|_2^2\right)$$
$$+\delta \int_0^t \left(\|v_n''(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla v_n'(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla v_n')(t)\right) ds.$$

Alors

$$\varkappa_n(t) + (g(t)\,\Delta u_{n0}) \int_0^t \int_\Omega v_n''(t)\,dxds \leq R_T\left(\|v_{n0}''\|_2^2 + \|\nabla u_{n1}\|_2^2\right) + \delta \int_0^t \varkappa_n(t)\,ds, \tag{2.41}$$

d'après l'inégalité de Gronwall, (2.41) vient

$$\varkappa_n(t) + (g(t)\,\Delta u_{n0}) \int_0^t \int_\Omega v_n''(t)\,dxds \leq R_T\left(\|v_{n0}''\|_2^2 + \|\nabla u_{n1}\|_2^2\right).$$

Ainsi, pour estimer le terme $\|v_{n0}''\|_2^2$, on pose $\eta = v_n''(t)$ et $t = 0$ dans (2.11)

$$\int_\Omega v_n''(t)\,v_n''(t)\,dx - \int_\Omega \Delta v_n(t)\,v_n''(t)\,dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta v_n(s)\,v_n''(t)\,dsdx = \int_\Omega f(u(0))\,v_n''(t)\,dx,$$

$$\int_\Omega v_n''(0)\,v_n''(0)\,dx - \int_\Omega \Delta v_n(0)\,v_n''(0)\,dx = \int_\Omega f(u(0))\,v_n''(0)\,dx,$$
$$\int_\Omega |v_n''(0)|^2\,dx = \int_\Omega \Delta v_n(0)\,v_n''(0)\,dx + \int_\Omega f(u(0))\,v_n''(0)\,dx.$$

Nous avons

$$\|v_{n0}''\|_2^2 = \int_\Omega \Delta u_{n0} v_{n0}'' dx + \int_\Omega f(u(0))\,v_{n0}'' dx, \tag{2.42}$$

à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, (2.42) s'écrit

$$\begin{aligned}\|v_{n0}''\|_2^2 &\leq \left(\int_\Omega |v_{n0}''|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\left(\int_\Omega |\Delta u_{n0}|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |f(u(0))|^{1/2}\,dx\right)^{1/2}\right), \\ &\leq \|v_{n0}''\|_2\left(\|\Delta u_{n0}\|_2 + \|f(u(0))\|_2\right),\end{aligned}$$

alors

$$\|v_{n0}''\|_2 \leq \|\Delta u_{n0}\|_2 + \|f(u(0))\|_2 \leq C. \tag{2.43}$$

Donc

$$\varkappa_n(t) \leq L_{T,} \tag{2.44}$$
$$\int_0^t \int_\Omega v_n''(t)\,dxds \leq L_T, \tag{2.45}$$

où L_T est un constante positive.

D'après (2.8), (2.43), (2.44) et (2.45) en résulte que

$$v_n'' \text{ est borné dans } L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right),$$
$$v_n' \text{ est borné dans } L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right).$$

Passage à la limite :

D'après la première, la deuxième et la troisième estimation, nous avons

$$\begin{aligned} &v_n \text{ est borné dans } L^\infty\left([0,T], H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right), \\ &v_n' \text{ est borné dans } L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right), \\ &v_n'' \text{ est borné dans } L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{2.46}$$

On déduit d'après (2.46) et le **théorème 1.2** qu'on peut extraire une sous-suite $(v_{nk})_{nk\in\mathbb{N}*}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et une fonction v telle que si on passe la limite dans (2.11), on trouve la solution faible v de **(2.3)** avec la régularité au-dessus.

$$\begin{aligned} v_{nk} &\rightharpoonup {}^*v \text{ dans } L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \\ v_{nk}' &\rightharpoonup {}^*v' \text{ dans } L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right), \\ v_{nk}'' &\rightharpoonup {}^*v'' \text{ dans } L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

En utilisant

$$\begin{aligned} &L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2([0,T], L^2(\Omega)), \\ &L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} v_{nk}' &\to v' \text{ fortement dans } L^2\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right), \\ v_{nk}'' &\to v'' \text{ fortement dans } L^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{2.47}$$

D'autre part

$$v_n' \text{ est borné dans } H_0^1\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right).$$

Par conséquent, l'injection

$$H_0^1\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right),$$

est compact, alors

$$v_{nk}' \to v' \text{ (converge fortement) dans } L^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} v_{nk}' &\to v' \text{ fortement dans } L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right), \\ v_{nk}'' &\to v'' \text{ fortement dans } L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{2.48}$$

D'après le **lemme 1.1,** on peut déduire

$$\begin{aligned} v'_{nk} &\rightarrow v' \text{ p.p dans } (0,T)\times\Omega, \\ v''_{nk} &\rightarrow v'' \text{ p.p dans } (0,T)\times\Omega. \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons passer la limite dans (2.11).
On pose $\eta = w_j$, $n = nk$ et fixe $j < nk$,

$$\int_\Omega v''_{nk}(t)\, w_j dx - \int_\Omega \Delta v_{nk}(t)\, w_j dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta v_{nk}(s)\, w_j ds dx = \int_\Omega f(u)\, w_j dx \qquad (2.49)$$

En intégrant par partie le deuxième et le troisième terme du membre de gauche de (2.49), on trouve

$$\int_\Omega v''_{nk}(t)\, w_j dx + \int_\Omega \nabla v_{nk}(t)\, \nabla w_j dx - \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla v_{nk}(s)\, \nabla w_j ds dx = \int_\Omega f(u)\, w_j dx. \qquad (2.50)$$

Par passage de la limite dans (2.50),on obtient

$$\int_\Omega v''(t)\, w_j dx + \int_\Omega \nabla v(t)\, \nabla w_j dx - \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla v(s)\, \nabla w_j ds dx = \int_\Omega f(u)\, w_j dx. \qquad (2.51)$$

Comme, le base $w_j\,(j = 1, ...)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, on peut généraliser (2.51) par

$$\int_\Omega v''(t)\, \varphi dx + \int_\Omega \nabla v(t)\, \nabla \varphi dx - \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla v(s)\, \varphi ds dx = \int_\Omega f(u)\, \varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).$$

Alors

$$\begin{aligned} &v \text{ est borné de } L^\infty\left([0,T], H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right), \\ &v_t \text{ est borné de } L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right), \\ &v_{tt} \text{ est borné de } L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

■

Unicité :
Soit $v_{1,}v_2$ deux solutions de **(2.3)**, et soit $w = v_1 - v_2$ satisfait :

$$w''(t) - \Delta w(t) + \int_0^t g(t-s)\Delta w(s)\, ds = 0. \qquad (2.52)$$

En multiplient (2.52) par w' et intégrant sur Ω, on trouve

$$\int_\Omega w''(t)\, w'(t)\, dx - \int_\Omega \Delta w(t)\, w'(t)\, dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta w(s)\, w'(t)\, ds dx = 0, \qquad (2.53)$$

le premier terme dans (2.53), s'écrit

$$\begin{aligned}\int_\Omega w''(t)\, w'(t)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w'(t)|^2\, dx, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_2^2 . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Une intégration par partie sur le deuxième terme dans (2.53) donne

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \Delta w(t)\, w'(t)\, dx &= \int_\Omega \nabla w(t)\, \nabla w'(t)\, dx, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|_2^2 . \end{aligned} \tag{2.55}$$

En intégrant le deuxième terme dans (2.53) par partie et utilisant le **lemme 2.1**, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta w(s)\, w'(t)\, dsdx &= -\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla w(s)\, \nabla w'(t)\, dsdx, \\ &= \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s)ds\int_\Omega |\nabla u(s)|^2\, dx\right\}, \\ &= -\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla w(t)\|_2^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla w(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right\}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

En remplaçant (2.54), (2.55) et (2.56) dans (2.53), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla w(t)\|_2^2$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla w(t)\|_2^2\int_0^t g(s)ds\right\} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w'(t)\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla w(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla w)(t)\right\} = \frac{1}{2}(g'\circ\nabla w)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla w(t)\|_2^2 .$$

On note par

$$N(t) = \frac{1}{2}\left\{\|w'(t)\|_2^2 + \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla w(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla w)(t)\right\}.$$

Comme

$$\frac{1}{2}(g'\circ\nabla w)(t) \le 0,$$

on conclure

$$\frac{d}{dt}N(t) \le 0.$$

C'est implique que $N(t)$ est uniformément borné par $N(0)$ et décroissante par rapport à t, d'autre part $w(0)=0$, on trouve

$$w=0 \text{ c'est-à-dire } v_1=v_2.$$

La preuve du lemme 2.2

Nous approchons u_0, u_1 par les sous-suites $\{u_{0\mu}\}$, $\{u_{1\mu}\}$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, et u par la suite $\{u^\mu\}$ dans $\mathcal{C}([0,T],\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))$, pour le problème **(2.3)**. Le **lemme 2.3** confirme l'existence du sous-suite $\{v^\mu\}$ de la solution unique qui satisfait (2.5) et (2.6). Maintenant, pour déterminer la preuve du **lemme 2.2**, nous allons démontrer que la sous-suite $\{v^\mu\}$ est de Cauchy dans Y_T.

Pour cela, on pose $w=v^\eta-v^\xi$, qu'est la solution du problème

$$\begin{cases} w_{tt}-\Delta w+\int_0^t g(t-s)\Delta w(s)ds=f(u^\eta)-f(u^\xi), \ x\in\Omega,\ t>0, \\ w(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ w(x,0)=w_0(x)=u_\eta^0(x)-u_\xi^0(x),\ x\in\Omega, \\ w_t(x,0)=w_1(x)=u_\eta^1(x)-u_\xi^1(x),\ x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.57}$$

avec

$$f(u^\eta)=|u^\eta|^\gamma u^\eta.$$

Après en multipliant l'équation (2.57) par w_t, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t(t)\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla w\|_2^2+(g\circ\nabla w)(t)\right\}$$

$$-\frac{1}{2}(g'\circ\nabla w)(t)+\frac{1}{2}g(t)\|\nabla w(t)\|_2^2=\int_\Omega\left(f(u^\eta)-f(u^\xi)\right)w_t(t)\,dx. \tag{2.58}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1$, pour estimer le membre de gauche de l'égalité (2.58), il vient

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega\left(f(u^\eta)-f(u^\xi)\right)w_t(t)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega\left[|u^\eta(t)|^\gamma u^\eta(t)-\left|u^\xi(t)\right|^\gamma u^\xi(t)\right]\left(v_t^\eta(t)-v_t^\xi(t)\right)dx\right|, \\ &\le C\int_\Omega \sup\left(|u^\eta(t)|^\gamma,\left|u^\xi(t)\right|^\gamma\right)\left|u^\eta(t)-u^\xi(t)\right|\left|v_t^\eta(t)-v_t^\xi(t)\right|dx, \\ &\le C\left\|u^\eta(t)-u^\xi(t)\right\|_q\left\|v_t^\eta(t)-v_t^\xi(t)\right\|_2\left(\|u^\eta(t)\|_{n\gamma}^\gamma+\left\|u^\xi(t)\right\|_{n\gamma}^\gamma\right). \end{aligned}$$

L'injection de Sobolev $L^q(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ donne

$$\left\|u^\eta(t)-u^\xi(t)\right\|q\le c_1\left\|\nabla u^\eta(t)-\nabla u^\xi(t)\right\|_2,\quad \forall c_1>0.$$

Et

$$\|u^\eta(t)\|_{n\gamma}^\gamma+\left\|u^\xi(t)\right\|_{n\gamma}^\gamma\le c_2\left(\|\nabla u^\eta(t)\|_2^\gamma+\left\|\nabla u^\xi(t)\right\|_2^\gamma\right),\ \forall c_2>0.$$

Donc

$$\left|\int_{\Omega}\left(f\left(u^{\eta}\right)-f\left(u^{\xi}\right)\right)w_t dx\right|\leq C_1\left\|\nabla u^{\eta}(t)-\nabla u^{\xi}(t)\right\|_2\left\|v_t^{\eta}(t)-v_t^{\xi}(t)\right\|_2\left(\left\|\nabla u^{\eta}(t)\right\|_2^{\gamma}+\left\|\nabla u^{\xi}(t)\right\|_2^{\gamma}\right), \tag{2.59}$$

où C_1 est une constante positive.

En intégrant (2.58) sur l'intervalle $]0,t[$ et substituant (2.59), il vient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\int_0^t(g\circ\nabla w)(t)-\frac{1}{2}(g'\circ\nabla w)(t)\\&+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2-\frac{1}{2}\left\|w_1\right\|_2^2-\frac{1}{2}\left\|\nabla w_0\right\|_2^2\\ \leq{}& C_1\int_0^t\left\|\nabla u^{\eta}(t)-\nabla u^{\xi}(t)\right\|_2\left\|v_t^{\eta}(t)-v_t^{\xi}(t)\right\|_2\left(\left\|\nabla u^{\eta}(t)\right\|_2^{\gamma}+\left\|\nabla u^{\xi}(t)\right\|_2^{\gamma}\right).\end{aligned} \tag{2.60}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{2}\int_0^t(g\circ\nabla w)(t)-\frac{1}{2}(g'\circ\nabla w)(t)+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2\geq 0. \tag{2.61}$$

Donc, (2.60) devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2 \quad\leq\quad & \frac{1}{2}\left\|w_1\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w_0\right\|_2^2\\ &+C_\alpha T\left\|w_t\right\|_2\left\|\nabla u^{\eta}-\nabla u^{\xi}\right\|_2,\end{aligned} \tag{2.62}$$

et comme

$$\int_0^t g(s)ds\leq\int_0^{\infty}g(s)ds,$$

l'inégalité (2.62), devient

$$\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|_2^2+l\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2\leq\frac{1}{2}\left\|w_1\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w_0\right\|_2^2+C_\alpha T\left\|w_t(t)\right\|_2\left\|\nabla u^{\eta}(t)-\nabla u^{\xi}(t)\right\|_2. \tag{2.63}$$

D'après l'inégalité de Cauchy avec ε, (2.63) devient

$$\frac{1}{2}\left\|w_t(t)\right\|_2^2+l\left\|\nabla w(t)\right\|_2^2\leq\frac{1}{2}\left\|w_1\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w_0\right\|_2^2+C_\alpha T\left\{\frac{\varepsilon}{2}\left\|w_t(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\nabla u^{\eta}(t)-\nabla u^{\xi}(t)\right\|_2^2\right\},$$

$$\left\|w(t)\right\|_{Y_T}^2\leq\frac{1}{2}\left\|w_1\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w_0\right\|_2^2+\zeta\left\|w(t)\right\|_{Y_T}^2,$$

où ζ est une constante positive.

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\left\|w(t)\right\|_{Y_T}^2\leq\frac{1}{2}\left\|w_1\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla w_0\right\|_2^2,$$

Finalement, on déduit que $\{v^{\mu}\}$ est une suite de Cauchy dans Y_T.
Comme $\{v^{\mu}\}$ est une suite de Cauchy, elle est converge vers la limite v dans Y_T , d'après le **lemme 2.3** cette limite est la solution faible.
Maintenant, nous démontrons l'existence locale du problème **(2.1).**
La preuve du théorème 2.1
Soit $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et

$$R^2 = \left(\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2\right).$$

Pour $T > 0$, nous considérons

$$M_T = \left\{u \in Y_T : u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1 \text{ et } \|u(t)\|_{Y_T} \leq R\right\}.$$

Soit

$$\phi : M_T \to M_T$$
$$u \longmapsto v = \phi(u).$$

Nous allons prouver :
(i) $\phi(M_T) \subseteq M_T$.
(ii) ϕ est un contraction en M_T.
La première assertion :
Par le **lemme 2.2**, pour tout $u \in M_T$ on peut définir $v = \phi(u)$, la solution unique du problème **(2.3)**. Pour $T > 0$, on démontre que ϕ est un contraction satisfaisant :

$$\phi(M_T) \subseteq M_T.$$

Soit $u \in M_T$, la solution $v = \phi(u)$ satisfait :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\{\|v'(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla v)(t)\right\} &= \frac{1}{2}\left[\|u_1\| + \|\bigtriangledown u_0\|_2^2\right] \\ &+ \int_0^t \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t) v'(t) dx ds.\end{aligned}$$

Ce qu' implique

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{Y_T}^2 \leq \frac{1}{2}\left[\|u_1\|_2^2 + \|\nabla v_0\|^2\right] + \int_0^t \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t) v'(t) dx ds. \tag{2.64}$$

De même en estimant le terme $\int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t) v'(t) dx$, comme la preuve du **lemme 2.2**, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons

$$\int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t) v'(t) dx \leq c\|u(t)\|_2^{\gamma+1}\|v'(t)\|_2, \tag{2.65}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy avec ε dans (2.65), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|u(t)|^{\gamma}u(t)v'(t)dx &\leq c\|u(t)\|_{2}^{\gamma+1}\|v'(t)\|_{2}, \\ &\leq c\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u(t)\|_{2}^{2(\gamma+1)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|v'(t)\|_{2}^{2}\right], \\ &\leq c_{\varepsilon}\left[\|u(t)\|_{Y_T}^{\gamma+1}+\|v(t)\|_{Y_T}^{2}\right], \end{aligned} \tag{2.66}$$

en remplaçant (2.66) dans (2.64), et comme $u \in M_T$ on obtient

$$\|v(t)\|_{Y_T}^{2} \leq \|u_1\|_2^2+\|\nabla u_0\|^2+c_{\varepsilon}R^{\gamma+1}\int_0^t ds+c_{\varepsilon}\int_0^t\|v(t)\|_{Y_T}^2 ds, \tag{2.67}$$

grâce à l'inégalité de Gronwall, (2.67) devient

$$\|v(t)\|_{Y_T} \leq \|u_1\|_2+\|\nabla u_0\|_2+c_{\varepsilon}R^{\gamma+1}T,$$

on choisit T suffisamment petit, cela donne

$$\|v(t)\|_{Y_T} \leq R, \quad \text{c'est-à-dire} \quad v \in M_T.$$

Identiquement

$$\phi(M_T) \subseteq M_T.$$

La deuxième assertion :

Maintenant, nous prouvons que ϕ est un contraction en M_T. Nous prenons w_1, w_2 dans M_T, et posons $v(t) = v_1(t) - v_2(t)$ et $u(t) = w_1(t) - w_2(t)$, tels que $v_1(t) = \phi(w_1(t))$ et $v_2(t) = \phi(w_2(t))$.
Il est facile que v satisfait

$$\int_{\Omega}v_{tt}(t)\eta dx+\int_{\Omega}\nabla v(t)\nabla\eta dx-\int_{\Omega}\int_0^t g(t-s)\nabla v(t)\nabla\eta(s)dsdx=\int_{\Omega}\left(|w_1(t)|^{\gamma}w_1(t)-|w_2(t)|^{\gamma}w_2(t)\right)\eta dx,$$

d'autre part, en posant $\eta = v_t(t)$ dans l'inégalité au-dessus et utilisant la même technique du **lemme 2.2**, on trouve

$$\|v(t)\|_{Y_T}^2 \leq \varsigma\int_0^t\left(\|w_1(t)\|_{Y_T}^{\gamma}+\|w_1(t)\|_{Y_T}^{\gamma}\right)\|w_1(t)-w_2(t)\|_{Y_T}\|v(s)\|_{Y_T}ds,$$

alors

$$\|v(t)\|_{Y_T}^2 = \|\phi(w_1)-\phi(w_2)\|_{Y_T}^2 \leq \sigma_*\|w_1-w_2\|_{Y_T}^2, \tag{2.68}$$

pour $0 < \sigma_* = 2\varsigma T R^{\gamma} < 1$ (si en choisissant T assez petit).
Finalement par le théorème de l'application **contractante** avec (2.68), on déduit qu' il existe une solution unique faible $u = \phi(u) \in Y_T$ du problème **(2.1)**.

2.3 Existence globale

Dans cette section, nous allons montrer l'existence globale du problème **(2.1).** Avant de prouver notre résultat, on introduit les fonctions

$$I(t) = I(u(t)) = \left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \tag{2.69}$$

et

$$J(t) = J(u(t)) = \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{\gamma+2} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.$$

Lemme 2.4 *L'énergie "modifiée" associée au problème* ***(2.1)*** *est donnée par :*

$$\begin{aligned} E(t) &= E(u(t), u_t(t)) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\ & \quad - \frac{1}{\gamma+2}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Preuve.

Soit

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, ds = |u|^\gamma u, \tag{2.71}$$

En multipliant et intégrant (2.71) sur Ω, on trouve

$$\int_\Omega u_{tt}(t)\, u_t(t)\, dx - \int_\Omega \Delta u(t)\, u_t(t)\, dx + \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, u_t(t)\, dx = \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\, u_t(t)\, dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t |u_t(t)|^2 + \int_\Omega \nabla u(t)\, \nabla u_t(t)\, dx - \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, \nabla u_t(t)\, dx = \frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx - \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, \nabla u_t(t)\, dx = \frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, \nabla u_t(t)\, dx = \frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.$$

En utilisant le **lemme 2.1**, on trouve

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} - \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s) ds \int_\Omega |\nabla u(s)|^2\, dx\right\} = 0, \end{gathered}$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla u)(t) \\ = \; & \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

donc, on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2-\frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t)\leq 0, \quad (2.72)$$

en intégrant (2.72) par rapport à t sur l'intervalle $]\tau,\tau+1[$

$$\frac{1}{2}\int_\tau^{\tau+1}\frac{d}{dt}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2 dt-\frac{1}{\gamma+2}\int_\tau^{\tau+1}\frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} dt+\frac{1}{2}\int_\tau^{\tau+1}\frac{d}{dt}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_\tau^{\tau+1}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t)dt\leq 0,$$

alors

$$\frac{1}{2}\left\|u_t\left(\tau+1\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla u\left(\tau+1\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(\tau)-\frac{1}{\gamma+2}\left\|u\left(\tau+1\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}$$
$$\leq\frac{1}{2}\left\|u_t\left(\tau\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla u\left(\tau\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(s)-\frac{1}{\gamma+2}\left\|u\left(\tau\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2},$$

donc

$$E\left(\tau+1\right)\leq E\left(\tau\right).$$

Par conséquent, l'énergie "modifiée" est

$$\begin{aligned}E\left(t\right) &= E\left(u\left(t\right),u_t\left(t\right)\right)=\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\\ &+\frac{1}{2}\left(g\circ\nabla u\right)\left(t\right)-\frac{1}{\gamma+2}\left\|u\left(t\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3 $E\left(t\right)=J\left(t\right)+\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_2^2.$

Lemme 2.5 *Supposons que **(G1)**, **(G2)** et (2.4) sont vérifiées et* $(u_0,u_1)\in H_0^1\left(\Omega\right)\times L^2\left(\Omega\right)$. *Si* u *est la solution de **(2.1)**, alors l'énergie "modifiée" satisfaite*

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\right)(t)-\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\leq\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\right)(t)\,,\ \textit{pour tout } t\in[0,T]\,. \quad (2.73)$$

Preuve. En dérivant $E(t)$ par rapport à t, il devient

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) \\
&\quad -\frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \\
E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{\gamma+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}, \\
E'(t) &= \int_\Omega u_{tt}(t)u_t(t)dx + \int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) - \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t).u_t(t)dx,
\end{aligned}$$

en utilisant **(2.1)**

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_\Omega u_t(t)\Delta u(t)dx - \int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)dsdx + \int_\Omega u_t(t)|u(t)|^\gamma u(t)dx \\
&\quad + \int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) \\
&\quad - \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)u_t(t)dx. \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

En intégrant par partie l'égalité (2.74) sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= E'(t) = \int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxds\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t), \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

grâce au **lemme 2.1**, l'inégalité (2.75) devient

$$E'(t) = \frac{1}{2}(g'\circ\nabla)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{2}(g'\circ\nabla)(t), \text{ pour tout } t\in[0,T].$$

■

Lemme 2.6 *Supposons que **(G1), (G2)** et (2.4) sont vérifiées et $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, tels que*

$$\beta_* = \frac{C_*^{\gamma+2}}{l}\left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l}E(u_0,u_1)\right)^{\gamma/2} < 1, \qquad (2.76)$$

$$I(u_0) > 0,$$

avec C_* est la constante de Poincaré.
Alors

$$I\left(u\left(t\right)\right)>0,\ \forall t>0.$$

Preuve.
Comme $I\left(u_0\right)>0$, alors il existe (par continuité) $T_m \ < T$ tel que

$$I\left(u\left(t\right)\right)\geq 0,\quad \forall t\in\left[0,T_m\right],$$

on a

$$J\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(g\circ\nabla u\right)\left(t\right)-\frac{1}{\gamma+2}\left\|u\left(t\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2},$$

alors

$$J\left(t\right)=\left(\frac{\gamma}{2\left(\gamma+2\right)}\right)\left\{\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left(g\circ\nabla u\right)\left(t\right)\right\}+\frac{1}{\gamma+2}I\left(t\right),$$

donc

$$J\left(t\right)\geq\left(\frac{\gamma}{2\left(\gamma+2\right)}\right)\left\{\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left(g\circ\nabla u\right)\left(t\right)\right\}. \tag{2.77}$$

Grâce aux **(G1)**, (2.69), (2.73) et (2.77), nous obtenons

$$l\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\leq\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\leq\left(\frac{2\left(\gamma+2\right)}{\gamma}\right)J\left(t\right),$$

$$l\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\leq\left(\frac{\gamma}{2\left(\gamma+2\right)}\right)E\left(t\right)\leq\left(\frac{\gamma}{2\left(\gamma+2\right)}\right)E\left(u_0,u_1\right),\forall t\in\left[0,T_m\right]. \tag{2.78}$$

Ensuite, à partir de **(G1)**, **lemme 1.10**, **lemme 1.11**, (2.76) et (2.78) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|u\left(t\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} &\leq C_*^{\gamma+2}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^{\gamma+2},\\
&\leq \frac{C_*^{\gamma+2}}{l}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^{\gamma}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\leq\beta_* l\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2,\\
&\leq \beta_*\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2,\\
&< \left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2,\quad\forall t\in\left[0,T_m\right].
\end{aligned}$$

Pour cela

$$I\left(t\right)=I\left(u(t)\right)=\left(1-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2+\left(g\circ\nabla u\right)\left(t\right)-\left\|u\left(t\right)\right\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}>0,$$

pour tout $t\in\left[0,T_m\right]$. En répétant cette procédure et utilisant

$$\lim_{t\to T_m}\beta_*=\frac{C_*^{\gamma+2}}{l}\left(\frac{2\left(\gamma+2\right)}{\gamma l}E\left(u_0,u_1\right)\right)^{\gamma/2}\leq\beta<1,$$

on obtient T_m s' étend à T. ■

Théorème 2.2 *Supposons que **(G1)**, **(G2)** et (2.4) sont vérifiées et si* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *satisfaits (2.76). Alors la solution est globale et bornée.*

Preuve.
Il suffit de montrer que

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2$$

est borné indépendant de t.
Pour déterminer ça, on utilise (2.69), (2.73) et (2.77)

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2, \\ &\geq \left(\frac{\gamma}{2(\gamma+2)}\right)\left[l\|\nabla u(t)\|_2^2 + (g\circ\nabla u)(t)\right] + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{\gamma+2}I(t), \end{aligned}$$

comme $I(t)$ et $(g\circ\nabla u)(t)$ sont positives, ce qu' implique

$$E(0) \geq \left(\frac{\gamma}{2(\gamma+2)}\right) l\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2.$$

Donc

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 \leq CE(0),$$

avec C est une constante positive, qu'est dépend de γ et l. ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique et Explosion de la solution.

Dans ce chapitre, nous allons développer les calculs pour montrer que **l'énergie** associée est **exponentiellement** ou **polynômialement** décroissante.
De plus, nous allons étudier l'explosion de la solution en temps fini.

3.1 Comportement asymptotique de la solution

3.1.1 Décroissance de l'énergie

Dans cette section, nous allons prouver la décroissance de l'énergie. Pour cet résultat, en utilisant la fonctionnelle

$$F(t) = E(t) + \varepsilon_1 \phi(t) + \varepsilon_2 \psi(t), \tag{3.1}$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux constantes positives et

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_\Omega u(t)\, u_t(t)\, dx, \\ \psi(t) &= -\int_\Omega u_t(t) \int_0^t g(t-s)\,(u(t)-u(s))\, ds dx. \end{aligned}$$

Remarque 3.1

Clairement que

$$\alpha_1 F(t) \le E(t) \le \alpha_2 F(t), \tag{3.2}$$

où α_1 et α_2 deux constantes positives.

Lemme 3.1 *Supposons que* ***(G1)***, ***(G2)*** *et (2.4) sont vérifiées, alors la fonction $\phi(t)$ vérifiée*

$$\phi'(t) \leq \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{l}\left[\int_\Omega g^{2-p}(s)\right](g^p \circ \nabla u)(t) + \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}. \tag{3.3}$$

Preuve. *En dérivant $\phi(t)$ par rapport à t, on obtient*

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega u(t)\, u_t(t)\, dx\right] = \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$+ \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, ds dx + \int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2} dx. \tag{3.4}$$

Nous estimons le troisième terme dans le membre de droit de l'égalité au-dessus, nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, ds dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(s)|\right)^2 dx,$$

$$\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, ds dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)|\right)^2 dx. \tag{3.5}$$

En appliquant l'inégalité de Young pour tout $\delta > 0$, nous obtenons

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)|\, ds\right)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,(|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|)\, ds\right)^2 dx,$$

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|\, ds\right)^2 dx \leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds\right)^2 dx$$

$$+ \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(t)|\, ds\right)^2 dx + 2\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds\right) \times$$
$$\left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(t)|\, ds\right) dx,$$

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|\, ds\right)^2 dx \leq (1+\delta)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(t)|\, ds\right)^2 dx$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds\right)^2 dx. \tag{3.6}$$

D'autre part on a

$$\left(\int_0^t g(t-s)\,(|\nabla u(s) - \nabla u(t)|)\, ds\right)^2 \leq \int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \int_0^t g^p(t-s)\,|\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 ds.$$

En utilisant $\int_0^t g(s)\,ds \le \int_0^\infty g(s)\,ds = 1-l$, *l'inégalité (3.6) devient*

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left[|\nabla u(s)-\nabla u(t)| + |\nabla u(t)|\right] ds\right)^2 dx \le (1+\delta)(1-l)^2 \int_0^t |\nabla u(t)|^2\, dx + \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\times$$
$$\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds \int_\Omega \int_0^t g^p(t-s)\,|\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2\, dsdx. \tag{3.7}$$

En remplaçant (3.7) dans (3.4), on trouve

$$\begin{aligned}\phi'(t) \;&\le\; \int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx + \int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}(1+\delta)(1-l)^2 \int_0^t |\nabla u(t)|^2\,dx \\ &+ \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds \int_\Omega\int_0^t g^p(t-s)\,|\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2\,dsdx,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\phi'(t) \;&\le\; \int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx + \int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\,dx + \frac{1}{2}\left[-1+(1+\delta)(1-l)^2\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx \\ &+ \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds \int_\Omega\int_0^t g^p(t-s)\,|\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2\,dsdx.\end{aligned} \tag{3.8}$$

En choisissant $\delta = \dfrac{l}{1-l}$, *l'inégalité (3.8) vient*

$$\phi'(t) \le \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{l}\left[\int_\Omega g^{2-p}(s)\,ds\right](g^p\circ\nabla u)(t) + \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.$$

■

Lemme 3.2 *Supposons que* ***(G1)***, ***(G2)*** *et (2.4) sont vérifiées, alors la fonction* $\psi(t)$ *vérifiée*

$$\psi'(t) \le \delta\left\{1+2(1-l)^2 + C_p^{2(\gamma+1)}\left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma^l}\right)^\gamma\right\}\|\nabla u(t)\|^2 + \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}(1+C_p)\right)\left[\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right]\times$$
$$(g^p\circ\nabla u)(t) + \frac{g(0)}{4\delta}C_p\left((-g'\circ\nabla u)(t)\right) + \left\{\delta - \int_0^t g(s)\,ds\right\}\|u_t(t)\|_2^2,\ \textit{pour tout } \delta>0. \tag{3.9}$$

Preuve. En dérivant $\psi(t)$ par rapport à t sur l'intervalle $]0,t[$

$$\begin{aligned}\psi'(t) \;&=\; -\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx - \int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx \\ &- \left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx,\end{aligned} \tag{3.10}$$

on a d'après le problème **(2.1)**

$$u_{tt} = \Delta u - \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds - |u|^\gamma u. \tag{3.11}$$

En substituant (3.11) dans (3.10) et appliquant l'intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \int_\Omega \nabla u(t)\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)dx - \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)\times \\ &\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds - \int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \\ &-\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Comme (3.4), on estime le premier terme dans l'égalité au-dessus

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(t)\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)dx \le \delta\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{1}{4\delta}\left[\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right]\times \\ \int_\Omega\int_0^t g^p(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Le deuxième terme

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds \\ \le\ & \frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right|^2 dx + \delta\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds\right|^2 dx, \\ \le\ & \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)\times\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)^2 dx + 2\delta(1-l)^2\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\right)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds \le \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)\left[\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right]\times \\ \int_\Omega\int_0^t g^p(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\,dsdx + 2\delta(1-l)^2\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Le troisième terme à partir de l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \ &\le\ \delta\int_\Omega |u(t)|^{2(\gamma+1)}\,dx \\ &+\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)\,ds)\right)^2 dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)dx \ &\le\ \delta\int_\Omega |u(t)|^{2(\gamma+1)}\,dx + \frac{1}{4\delta}\left[\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right]\times \\ &\int_\Omega\int_0^t g^p(t-s)(u(t)-u(s))^2\,dsdx.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} |u(t)|^{\gamma} u(t) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, ds \right) dx \leq \delta \int_{\Omega} |u(t)|^{2(\gamma+1)} dx$$
$$+ \frac{C_p}{4\delta} \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t). \tag{3.15}$$

Grâce à l'injection de Poincaré-Sobolev le premier terme de le membre de droit dans l'inégalité (3.15), devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(t)|^{2(\gamma+1)} dx &\leq C_p^{2(\gamma+1)} \|\nabla u(t)\|_2^{2(\gamma+1)}, \\ &\leq C_p^{2(\gamma+1)} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(0) \right)^{\gamma} \|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

En substituant (3.16) dans (3.15), nous obtenons

$$\int_{\Omega} |u(t)|^{\gamma} u(t) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, ds \right) dx \leq C_p^{2(\gamma+1)} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(0) \right)^{\gamma} \|\nabla u(t)\|_2^2$$
$$+ \frac{C_p}{4\delta} \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t). \tag{3.17}$$

En appliquant l'inégalité de Young, le quatrième terme vient

$$- \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\, ds dx \leq \delta \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx + \frac{g(0)}{4\delta} C_p \times$$
$$\left[\int_{\Omega} \int_0^t -g'(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds \right]. \tag{3.18}$$

En substituant (3.13), (3.14), (3.17) et (3.18) dans (3.12), on trouve

$$\psi'(t) \leq \delta \left\{ 1 + 2(1-l)^2 + C_p^{2(\gamma+1)} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma^l} \right)^{\gamma} \right\} \|\nabla u(t)\|^2 + \left\{ 2\delta + \frac{1}{4\delta}(1+C_p) \right\} \times$$
$$\left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t) + \frac{g(0)}{4\delta} C_p ((-g' \circ \nabla u)(t)) + \left\{ \delta - \int_0^t g(s)\, ds \right\} \|u_t(t)\|_2^2, \text{ pour tout } \delta > 0.$$

■

Théorème 3.1 *Soient* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, satisfaites (2.76). Supposons que (2.4) est vérifiée et* g *satisfaite* ***(G1)*** *et* ***(G2)*** *alors* $E(t)$ *décroit de façon exponentielle ou polynômiale vers zéros, c'est-à-dire il existe deux constantes positives* K*,* k *telles que :*

$$\begin{aligned} E(t) &\leq ke^{-kt}, \qquad p = 1, \\ E(t) &\leq K(1+t)^{-1/p-2}, \qquad p > 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Preuve. Comme g est continue et $g(0)>0$, alors pour tout $t_0>0$ on a

$$\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{t_0} g(s)ds = g_0 > 0,\ \forall t \geq t_0. \tag{3.20}$$

En dérivant (3.1), on obtient

$$F'(t) = E'(t) + \varepsilon_1 \phi'(t) + \varepsilon_2 \psi'(t).$$

En utilisant (2.72), (3.3), (3.9) et (3.20) , on obtient

$$\begin{aligned} F'(t) \leq\ & -\{\varepsilon_2 (g_0-\delta) - \varepsilon_1\} \|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon_1 \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\ & - \left[\frac{\varepsilon_1}{2} l - \varepsilon_2 \delta \left\{1 + 2(1-l)^2 + C_p^{2(\gamma+1)} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(0)\right)^{\gamma}\right\}\right] \|\nabla u(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_p\right) \times \\ & (g' \circ \nabla u)(t) + \left(\frac{\varepsilon_1}{l} + \varepsilon_2 \left\{2\delta + \frac{1}{4\delta}(1+C_p)\right\}\right) \times \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds\right] (g^p \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{3.21}$$

On choisis δ plus petit tel que

$$g_0 - \delta > \frac{1}{2} g_0,$$

et

$$\delta \frac{\left(1 + 2(1-l)^2 + C_p^{2(\gamma+2)} \left((2(\gamma+2) E(0)/\gamma l)^{\gamma}\right)\right)}{l} < \frac{1}{8} g_0.$$

Comme δ est fixé le choix de deux positives ε_1 et ε_2 satisfaites

$$\frac{1}{4} g_0 \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2} g_0 \varepsilon_2, \tag{3.22}$$

ce qu' implique

$$\begin{aligned} k_1 &= \varepsilon_2 (g_0 - \delta) - \varepsilon_1 > 0, \\ k_2 &= \varepsilon_1 \frac{l}{2} - \varepsilon_2 \delta \left\{1 + 2(1-l)^2 + C_p^{2(\gamma+1)} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(0)\right)^{\gamma}\right\} > 0. \end{aligned}$$

Alors, on choisis ε_1 et ε_2 plus petites pour (3.2) et (3.22) sont utiles et

$$k_3 = \frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_p - \frac{1}{\xi} \left(\frac{\varepsilon_1}{l} + \varepsilon_2 \left\{2\delta + \frac{1}{4\delta}(1+C_p)\right\}\right) \left[\int_0^{\infty} g^{2-p}(s)\, ds\right] > 0.$$

Donc (3.21) devient

$$F'(t) \leq -k_1 \|u_t(t)\|_2^2 - k_2 \|\nabla u(t)\|_2^2 - k_3 \xi (g^p \circ \nabla u)(t) + \varepsilon_1 \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2},\ \ \forall t \geq t_0. \tag{3.23}$$

Cas 1 : p = 1

D'après (3.2) et (3.23)

$$F'(t) \leq -\beta_1 E(t) \leq -\beta_1 \alpha_1 F(t),\quad \forall t \geq t_0, \tag{3.24}$$

pour $\beta_1 > 0$, et par intégration simple de (3.24) on trouve

$$F(t) \leq F(t_0) e^{-\beta_1 \alpha_1 t_0} e^{\beta_1 \alpha_1 t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

À partir de (3.2), on obtient

$$E(t) \leq \alpha_2 F(t_0) e^{-\beta_1 \alpha_1 t_0} e^{\beta_1 \alpha_1 t} = k e^{-kt}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Cas 2 : $\mathbf{p > 1}$

D'après **(G2)**, il est claire que

$$\int_0^\infty g^{1-\theta}(s)\, ds < \infty, \quad \forall \theta < 2 - p,$$

Donc (voir[11], lemme 3.3)

$$(g \circ \nabla u)(t) \leq C \left\{ \left(\int_0^\infty g^{1-\theta}(s)\, ds \right) E(0) \right\}^{(p-1)/(p-1+\theta)} \left\{ (g^p \circ \nabla u)(t) \right\}^{\theta/(p-1+\theta)}.$$

Pour ça, pour tout $\sigma > 1$, on a

$$E^\sigma(t) \leq C E^{\sigma-1}(0) \left\{ \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx - \int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2} dx + \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} + C \left\{ (g \circ \nabla u)(t) \right\}^\sigma$$

$$\begin{aligned} E^\sigma(t) \quad &\leq \quad C E^{\sigma-1}(0) \left\{ \|u_t(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + \|\nabla u(t)\|_2^2 \right\} \\ &\quad + C \left\{ \left(\int_0^\infty g^{1-\theta}(s)\, ds \right) E(0) \right\}^{\sigma(p-1)/(p-1+\theta)} \left\{ (g^p \circ \nabla u)(t) \right\}^{\sigma\theta/(p-1+\theta)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On choisit $\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sigma = 2p - 1$ (pour ça $\sigma\theta/(p - 1 + \theta) = 1$), l'inégalité (3.25) vient

$$E^\sigma(t) \leq C \left\{ \|u_t(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g^p \circ \nabla u)(t) \right\}. \tag{3.26}$$

Par (3.2), (3.23) et (3.26), on trouve

$$F'(t) \leq -\beta_2 E^\sigma(t) \leq -\beta_2 (\alpha_1)^\sigma F^\sigma(t), \ \forall t \geq t_0. \tag{3.27}$$

Pour tout $\beta_2 > 0$, par intégration simple de (3.27)

$$F(t) \leq C_1 (1+t)^{-1/(\sigma-1)}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{3.28}$$

Par conséquent de (3.28), on trouve

$$\int_0^\infty F(t)\, dt + \sup_{t \geq 0} t F(t) \leq \infty.$$

On a (voir [11], lemme 3.3) :

$$\begin{aligned} g\circ\nabla u &\leq C_2\left[\int_0^t \|u(s)\|_{H^1(0,1)}\,ds + t\,\|u(t)\|_{H^1(0,1)}\right]^{(p-1)/p}\left(g^p\circ\nabla u\right)^{1/p} \\ &\leq C_2\left[\int_0^t F(s)\,ds + tF(t)\right]^{(p-1)/p}\left(g^p\circ\nabla u\right)^{1/p}(t) \leq C_3\left(\left(g^p\circ\nabla u\right)(t)\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ce qu' implique

$$\left(g^p\circ\nabla u\right) \geq C_4\left(g\circ\nabla u\right)^p.$$

Par conséquent

$$F'(t) \leq -C_5\left[\|u_t(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + \left(g\circ\nabla u\right)^p(t) - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\right], \quad \forall t\geq t_0.$$

D'autre part on a semblable de (3.26)

$$E^p(t) \leq C_6\left\{\|u_t(t)\|_2^2 - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \left(g^p\circ\nabla u\right)(t)\right\}. \quad \forall t\geq t_{0.}$$

D'après deux dernières inégalités et (3.2), on obtient

$$F'(t) \leq -C_7 F^p(t), \quad \forall t\geq t_0. \tag{3.29}$$

Par intégration simple de (3.29), on trouve

$$F(t) \leq K(1+t)^{-1/(p-1)}, \quad \forall t\geq t_{0.}$$

■

3.2 Explosion en temps fini

Avant d'étudier l'explosion de solution en temps fini, on présente le lemme et le corollaire au-dessous :

Lemme 3.3 *Si γ satisfait (2.4) alors il existe une constante positive α telle que*

$$\|u(t)\|_{\gamma+2}^s \leq \epsilon_1\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\right), \quad 2\leq s\leq \gamma+2,$$

pour tout u solution du problème **(2.1)**.

Preuve.

1) Si $\|u\|_{\gamma+2} \leq 1$, alors

$$\|u(t)\|_{\gamma+2}^s \leq \|u(t)\|_{\gamma+2}^2 \leq c_*\|\nabla u(t)\|_2^2, \text{ d'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré.} \tag{3.30}$$

2) Si $\|u\|_{\gamma+2} > 1$, alors

$$\|u(t)\|_{\gamma+2}^{s} \leq \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \; 2 \leq s \leq \gamma+2, \tag{3.31}$$

en assemblant (3.30) et (3.31), nous obtenons

$$\|u(t)\|_{\gamma+2}^{s} \leq \epsilon_1 \left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\right), \quad 2 \leq s \leq \gamma+2.$$

■

Corollaire 3.1 *En résultant par le lemme président que*

$$\|u(t)\|_{\gamma+2}^{s} \leq C_\epsilon \left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + H(t) + \|u_t(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) +\right), \quad 2 \leq s \leq \gamma+2,$$

avec $\quad H(t) = -E(t)$.

Théorème 3.2 *On suppose que* ***(G1)*** *et* ***(G2)*** *sont vérifiées. Si $0 < \gamma < 2$ et*

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 - \frac{1}{\gamma+2}\|u_0\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} < 0,$$

alors la solution **explose** dans un temps fini.

Preuve. En multipliant **(2.1)** par $-u_t$ et intégrant sur Ω

$$-\int_\Omega u_{tt}(t)\,u_t(t)\,dx + \int_\Omega \Delta u(t)\,u_t(t)\,dx - \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)u_t(t)\,dsdx = -\int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\,u_t(t)\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx - \int_\Omega \nabla u(t)\,\nabla u_t(t)\,dx + \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\nabla u_t(t)\,dsdx = -\int_\Omega |u(t)|^\gamma u(t)\,u_t(t)\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx + \int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx = -\frac{1}{\gamma+2}\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\,dx.$$

En utilisant le **lemme 2.1** dans le troisième terme de l'égalité au-dessus, on trouve

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\int_\Omega |\nabla u(s)|^2\,dx\right) = -\frac{1}{\gamma+2}\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\,dx,$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{\gamma+2}\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\,dx\right] \\ = \; & -\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{\gamma+2}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\right] \\ = \; & -\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

D'après la définition de $H(t)$ et l'égalité (3.32), on déduit

$$H'(t) = \frac{d}{dt}H(t) = -\frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 \geq 0. \tag{3.33}$$

Par conséquent

$$0 < H(0) \leq H(t).$$

Grâce au (3.33) et la définition de l'énergie "modifiée", on introduit

$$L(t) = H^{2/\gamma+2}(t) + \epsilon \int_\Omega u(t)\, u_t(t)\, dx, \text{ pour } \epsilon \text{ assez petit.} \tag{3.34}$$

En dérivant (3.34) et utilisant **(2.1),** on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \frac{2}{\gamma+2}H^{2/\gamma+2-1}(t)\, H'(t) + \epsilon\int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx + \epsilon\int_\Omega u(t)\, u_{tt}(t)\, dx, \\
&= \frac{2}{\gamma+2}H^{2/\gamma+2-1}(t)\, H'(t) + \epsilon\int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx \\
&\quad +\epsilon\int_\Omega u(t)\left[\Delta u(t) - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u(t)|^\gamma u(t)\right]dx, \\
&\geq \epsilon\int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx + \epsilon\int_\Omega u(t)\,\Delta u(t)\, dx - \epsilon\int_\Omega u(t)\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)dsdx + \epsilon\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\, dx, \\
&= \epsilon\int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx - \epsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \epsilon\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx + \epsilon\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\, dx, \\
&= \epsilon\int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx - \epsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \epsilon\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla u(t)\left[\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\right]dsdx \\
&\quad +\epsilon\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\, dx, \\
&= \epsilon\int_\Omega |u_t(t)|^2\, dx - \epsilon\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx + \epsilon\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla u(t)\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]dsdx \\
&\quad +\epsilon\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\,|\nabla u(t)|^2\, dsdx + \epsilon\int_\Omega |u(t)|^{\gamma+2}\, dx, \\
&= \epsilon\|u_t(t)\|_2^2 - \epsilon\|\nabla u(t)\|_2^2 + \epsilon\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla u(t)\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]dsdx \\
&\quad +\epsilon\int_0^t g(t-s)ds\,\|\nabla u(t)\|_2^2 + \epsilon\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le troisième terme de (3.35), on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \epsilon\|u_t(t)\|_2^2 - \epsilon\|\nabla u(t)\|_2^2 - \epsilon\int_0^t g(t-s)ds\,\|\nabla u(t)\|_2\,\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|_2 \\
&\quad +\epsilon\int_0^t g(t-s)ds\,\|\nabla u(t)\|_2^2 + \epsilon\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young dans le troisième terme de l'inégalité au-dessus, il devient

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \epsilon \|u_t(t)\|_2^2 - \epsilon\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \epsilon\delta\int_0^t g(t-s)ds\,\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|_2^2 \\ &\quad -\frac{\epsilon}{4\delta}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \epsilon\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

on a d'après la définition de l'énergie "modifiée"

$$\begin{aligned} \|u((t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} &= (\gamma+2)H(t) + \frac{\gamma+2}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\gamma+2}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\gamma+2}{2}(g\circ\nabla u)(t), \end{aligned} \tag{3.37}$$

en substituant (3.37) dans (3.36), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \epsilon\|u_t(t)\|_2^2 - \epsilon\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad -\epsilon\delta(g\circ\nabla u)(t) - \frac{\epsilon}{4\delta}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad +\epsilon\left((\gamma+2)H(t) + \frac{\gamma+2}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\gamma+2}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\gamma+2}{2}(g\circ\nabla u)(t)\right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \epsilon\left(1 + \frac{\gamma+2}{2}\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \epsilon\left(\frac{\gamma+2}{2} - \delta\right)(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon(\gamma+2)H(t) \\ &\quad +\epsilon\left[\left(\frac{\gamma+2}{2} - 1\right) - \left(\frac{\gamma+2}{2} - 1 + \frac{1}{4\delta}\right)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\right]\|\nabla u(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

donc

$$L'(t) \geq \epsilon\left(1 + \frac{\gamma+2}{2}\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \epsilon(\gamma+2)H(t) + \epsilon a_1(g\circ\nabla u)(t) + \epsilon a_2\|\nabla u(t)\|_2^2, \tag{3.38}$$

avec $a_1 = \dfrac{\gamma+2}{2} - \delta > 0$; $a_2 = \left(\dfrac{\gamma+2}{2} - 1\right) - \left(\dfrac{\gamma+2}{2} - 1 + \dfrac{1}{4\delta}\right)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right) > 0.$

On a

$$H(t) \geq \frac{1}{\gamma+2}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} - \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2. \tag{3.39}$$

On pose $\gamma+2 = a_3 + ((\gamma+2) - a_3)$, où $a_3 < \min(a_1, a_2, \gamma+2)$, (3.38) devient

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \epsilon\left(2 + \frac{\gamma+2}{2} - \frac{a_3}{2}\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \epsilon\frac{a_3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \epsilon(\gamma+2-a_3)H(t) + \epsilon a_3 H(t) + \epsilon a_1(g\circ\nabla u)(t) \\ &\quad +\epsilon a_2\|\nabla u(t)\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.40}$$

en remplaçant (3.39) dans (3.40), on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq \epsilon\left(2+\frac{\gamma}{2}-\frac{a_3}{2}\right)\|u_t(t)\|_2^2+\epsilon(\gamma+2-a_3)H(t)+\epsilon(a_1-a_3)(g\circ\nabla u)(t)+\epsilon(a_2-a_3)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &+\epsilon\frac{a_3}{\gamma+2}\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \end{aligned}$$

donc

$$L'(t)\geq\rho\left[\|u_t(t)\|_2^2+H(t)+(g\circ\nabla u)(t)+\|\nabla u(t)\|_2^2+\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\right],\ \text{pour } \rho>0. \tag{3.41}$$

D'autre part d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right| &\leq \left(\int_\Omega|u(t)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|u_t(t)|^2dx\right)^{1/2}, \\ &= \|u(t)\|_2\|u_t(t)\|_2, \\ &\leq C_1\|u(t)\|_{\gamma+2}\|u_t(t)\|_2, \end{aligned}$$

alors

$$\left|\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right|^{\gamma+2/2}\leq C_2\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2/2}\|u_t(t)\|_2^{\gamma+2/2}. \tag{3.42}$$

En utilisant l'inégalité de Young en (3.42)

$$\left|\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right|^{\gamma+2/2}\leq C_3\left[\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\mu_1(\gamma+2)/2}+\|u_t(t)\|_2^{\theta_1(\gamma+2)/2}\right],\ \text{pour } \frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\theta_1}=1. \tag{3.43}$$

On pose $\theta_1=\dfrac{4}{\gamma+2}$ (respectivement $\mu_1=\dfrac{4}{2-\gamma}$), alors l'inégalité (3.43) devient

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right|^{\gamma+2/2} &\leq C_3\left[\|u(t)\|_{\gamma+2}^{2(\gamma+2)/(2-\gamma)}+\|u_t(t)\|_2^2\right], \\ \left|\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right|^{\gamma+2/2} &\leq C_3\left[\|u(t)\|_{\gamma+2}^{s}+\|u_t(t)\|_2^2\right], \end{aligned} \tag{3.44}$$

où $s=2(\gamma+2)/(2-\gamma)\leq\gamma+2$ et $0<\gamma<2$ (c'est-à-dire $s<4$).
D'après le corollaire, l'inégalité (3.44) devient

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right|^{\gamma+2/2} &\leq C_3\left[C\left(\|\nabla u(t)\|_2^2+H(t)+\|u_t(t)\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)+\right)+\|u_t(t)\|_2^2\right], \\ &\leq C_4\left[\left(\|\nabla u(t)\|_2^2+H(t)+\|u_t(t)\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

On a

$$\begin{aligned} L^{(\gamma+2)/2}(t) &= \left[H^{2/\gamma+2}(t)+\epsilon\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right]^{\gamma+2/2}, \\ &\leq H(t)+\left(\epsilon\int_\Omega u(t)\,u_t(t)\,dx\right)^{\gamma+2/2}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

En remplaçant (3.45) dans (3.46), on obtient

$$\begin{aligned} L^{(\gamma+2)/2}(t) &\leq H(t)+\varepsilon^{\gamma+2/2}C_4\left[\left(\|\nabla u(t)\|_2^2+H(t)+\|u_t(t)\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)\right)\right], \text{ pour } C_4>0, \\ L^{(\gamma+2)/2}(t) &\leq C_5\left[H(t)+\|\nabla u(t)\|_2^2+\|u_t(t)\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)\right], \text{ pour } C_5>0, \\ L^{(\gamma+2)/2}(t) &\leq C_5\left[H(t)+\|\nabla u(t)\|_2^2+\|u_t(t)\|_2^2+(g\circ\nabla u)(t)+\|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}\right]. \end{aligned} \tag{3.47}$$

En comparant (3.47) et (3.41), on trouve

$$L'(t)\geq\xi_1 L^{(\gamma+2)/2}(t), \quad \forall t\geq 0, \tag{3.48}$$

où ξ_1 est une constante positive.
En intégrant (3.48) sur l'intervalle $]0,t[$, il devient

$$L^{-\gamma/2}(t)\geq L^{-\gamma/2}(0)+(-\gamma/2)\lambda_1 t, \text{ pour } \lambda_1>0, \text{ est une constante positive.}$$

Alors

$$L(t)\geq\left[L^{-\gamma/2}(0)+(-\gamma/2)\lambda_1 t\right]^{-2/\gamma}, \text{ pour } \lambda_1>0,$$

Donc

$$L(t)\rightarrow\infty \text{ quand } t\rightarrow 2/\gamma\lambda_1 L^{\gamma/2}(0).$$

C'est-à-dire $L(t)$ explose en temps fini

$$T^*\leq\frac{2}{\gamma\lambda_1 L^{\gamma/2}(0)}.$$

■

Conclusion

Dans notre travail qui a pour objet l'étude d'un problème non linéaire de viscoélasticité de type hyperbolique [5], nous avons étudié :

L'existence locale, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et la méthode de point fixe.

L'existence globale et le comportement asymptotique de la solution (décroissance de façon exponentielle ou polynômiale).

D'autre part on a démontré l'explosion de la solution en temps fini.

Bibliographie

[1] M. Aassila, M.M. Cavalcanti, J.A. Soriano, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory instar-shaped domains, SIAM J. Control Optim. 38 (5) (2000) 1581–1602.

[2] J. Ball, Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolutions equations, Quart. J. Math. Oxford 28 (1977), 473 - 486.

[3] A. Benaissa, S.A. Messaoudi, Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation, No.D.E.A.,2005, in press.

[4] S. Berrimi, S.A. Messaoudi, Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping, Electron. J. Differentiel Equations 88 (2004) 1–10.

[5] S. Berrimi, S.A. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Analysis 64 (2006) 2314–2331.

[6] [4] H. Brézis, "Analyse Fonctionnelle- Théorie et applications," Dunod, Paris (1999).

[7] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping, Math. Methods Appl. Sci. 24 (2001) 1043–1053.

[8] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.S. Prates Filho, J.A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, Differential Integr. Equations 14 (1) (2001) 85–116.

[9] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and J. A. Soriano, Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Elect. J. Diff. Eqs. Vol. 2002 (2002) 44, 1 - 14.

[10] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.A. Soriano, Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Electron. J. Differential Equations 44 (2002) 1–14.

[11] M.M. Cavalcanti, H.P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, SIAM J. Control Optim. 42 (4) (2003) 1310–1324.

[12] T. Cazenave et A. Hareaux, Introduction aux Problèmes d'évolution semi-linéaires, El-lipses, socété de mathématiques appliquées et industrielles.

[13] W. Chen and Y. Xiong, Blow-up and general decay of soutions for a nonlinear viscoelastic equation 14, 2013.

[14] V. Georgiev, G. Todorova, Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Differential Equations 109 (1994) 295–308.

[15] S. Gerbi and B. Said-Houari, Exponential decay for solutions to semilinear wave equation, submitted.

[16] A. Haraux, E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems,Arch. Ration. Mech. Anal. 150 (1988) 191–206.

[17] R. Ikehata, Improved decay rates for solutions to one-dimensional linear and semilinear dissipative wave equations in all space, J. Math. Anal. Appl. 277 (2) (2003) 555–570.

[18] R. Ikehata, New decay estimates for linear damped wave equations and its application to nonlinear problem, Math. Methods Appl. Sci. 27 (8) (2004) 865–889.

[19] R. Ikehata, Local energy decay for linear wave equations with non-compactly supported initial data, Math.Methods Appl. Sci. 27 (16) (2004) 1881–1892.

[20] S. Kawashima, Global solutions to the equation of viscoelasticity with fading memory, J. Differential Equations 101 (2) (1993) 388–420.

[21] M. Kirane, N. Tatar, A memory type boundary stabilization of a mildly damped wave equation, Electron. J. Qual. Theory Differential Equations 6 (1999) 1–7.

[22] M. Kopackova, Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation, Comment. Math. Univ. Carolinae 30 (1989) 713–719.

[23] H. A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form Putt = Au+F(u), Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 1 - 21.

[24] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non-homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[25] J. L. Lions, "quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires,"Dunod, Gaulthier-Villars, Paris (1969).66

[26] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, Paris, 2002.

[27] S. A. Messaoudi, Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation, Mathematics Nachrichten (To appear).

[28] S.A. Messaoudi, Blow up in a nonlinearly damped wave equation, Math. Nachr. 231 (2001) 1–7.

[29] S.A. Messaoudi, Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation, Arab. J. Sci. Eng. 26 (2001) 63–68.

[30] S.A. Messaoudi, Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation, Math. Nachr. 260 (2003) 58–66.

[31] J.E. Munoz Rivera, R. Baretto, Decay rates for viscoelastic plates with memory, J. Elasticity 44 (1996) 61–87.

[32] M. Nakao, Decay of solutions of some nonlinear evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 60 (1977) 542–549.

[33] M. Nakao, Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations, Math Z. 206 (1991) 265–275.

[34] M. Nakao, K. Ono, Global existence to the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a nonlinear dissipation, Funkcial Ekvacioj 38 (1995) 417–431.

[35] K. Ono, On the global existence and decay of solutions for semilinear telegraph equations, Int. J. Appl. Math. 2 (9) (2000) 1121–1136.

[36] B. Said-Houari, "Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un problème hyperbolique," Mémoire de magister (2002), Université de Annaba.

[37] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Diferential.

[38] E. Vitillaro, Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, Arch. Rational Mech. Anal. 149 (1999), 155 - 182.

[39] W. Walter, "Ordinary Differential Equations," Springer-Verlage, New York, Inc, (1998).

[40] K. Zennir, Existence and asymptotic behavior of the solution for hyperbolic nonlinear viscoelastic equation. Master Thesies, University of Badji Mokhtar (2009).