Table des matières

Remerciements

Nous rendons grâce à Dieu qui nous a donné la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Pour commencer on tiens à remercier chaleureusement le docteur. Hadia Messaoudene, qui a encadré notre travail pour son suivi attentif et le soutient qu'elle nous a toujours témoigné.
Qu'elle trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous tenons particulièrement à remercier madame Zediri Sonya et monsieur Boukhalfa Alhafsi les honorables membres de ce jury.

Avant de terminer, nous tenons à dire merci à tous ceux qui ont participé à notre soutient moral à savoir chaque membre de nos familles, nos amies.
Et à l'ensemble des personnes présentes à cette soutenance.

Résumé

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension infinie séparable et $L\,(H)$ l'algèbre des operateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans H.
Pour un opérateur $A \in L(H)$, la dérivation intérieure induite par A noté δ_A est définie :

$$\begin{aligned} \delta_A : L(H) &\to L(H) \\ X &\mapsto AX - XA; A \in L(H). \end{aligned}$$

La dérivation généralisée induite par les opérateurs A, B noté $\delta_{A,B}$ est définie :

$$\begin{aligned} \delta_{A,B} : L(H) &\to L(H) \\ X &\mapsto AX - XB; A, B \in L(H). \end{aligned}$$

nous étudions la classe des opérateurs finis, pour lesquels la distance entre l'opérateur identité et l'image de $L(H)$ par l'opérateur de dérivation d'un opérateur A vaut l'unité, nous donnons quelques propriétés de cette classe et nous en étudions quelques uns.

L'objectif principal de ce travail est de donner les opérateurs vérifiant $\overline{R\,(\delta_A)} \cap \{A^*\}^{'} = \{0\}$; où $\overline{R\,(\delta_A)}$ est la fermeture de l'image de la dérivation δ_A ,$\{A^*\}^{'}$est l'ensemble des commutants de A^*.
Et pour quels opèrateurs A, B on a $\overline{R\,(\delta_{A,B})} \cap Ker\,(\delta_{A,B}) = \{0\}$, $\overline{R\,(\delta_{A,B})} \cap Ker\,(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$.

Abstract

Let $\mathcal{H}$ be a complex separable infinite dimensional Hilbert space, $L(H)$ the algebra of bounded linear operators on H.

For an operator $A \in L(H)$, the inner derivation induced by A noted δ_A is defined :

$$\begin{aligned}\delta_A : L(H) &\to L(H)\\ X &\mapsto AX - XA; A \in L(H).\end{aligned}$$

The generalized derivation induced by operators A, B noted $\delta_{A,B}$ is defined :

$$\begin{aligned}\delta_{A,B} : L(H) &\to L(H)\\ X &\mapsto AX - XB; A, B \in L(H).\end{aligned}$$

Our main objective is to give operators verifying $\overline{R(\delta_A)} \cap \{A^*\}' = \{0\}$; where $\overline{R(\delta_A)}$ is the closure of the range of the derivation δ_A ,$\{A^*\}'$ is the set of the commutants of A^*.
And for which operators A, B we have $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$, $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$.

Notations

Nous utilisera dans cette mémoire les notations et les définitions suivantes :

$\mathbf{H}$: Espace de Hilbert complexe.
$\mathcal{L}(\mathbf{H})$: L'agèbre des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert.
$\mathbf{R}(\mathbf{A})$: L'image d'un opérateur.
$\ker(\mathbf{A})$: Le noyau d'un opérateur.
$\mathbf{E}^{\circ}$: L'intérieur de E.
$\overline{\mathbf{E}}$: L'adhérence de E.
$\mathbf{E}^{\perp}$: L'orthogonale de E.
$\mathbf{A}_{|\overline{\mathbf{R}(\mathbf{T})}}$: La restriction de A sur $\overline{R(\delta_A)}$
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A})$: Spectre de A.
$\boldsymbol{\sigma}_p(\mathbf{A})$: Spectre ponctuelle de A.
$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A})$: La résolvanre de A.
$\mathbf{r}(\mathbf{A})$: Le rayon spectrale de A.
$\oplus$: Signe de somme directe.
$\otimes$: Signe de produit tensoriel.
$\mathbf{K}(\mathbf{H})$: Ensemble des applications compacts.
$\mathcal{A}$: Algèbre de Banach.
$\mathbf{tr}(\mathbf{A})$: Trace de A...
$\boldsymbol{\delta}_A$: Dérivation intérieure induite par A.
$\boldsymbol{\delta}_{A,B}$: Dérivation généralisée induite par A et B.
$\{\mathbf{A}\}'$: Commutant de A.
$\{\mathbf{A}\}''$: Bicommutant de A.

Introduction

Il est connu pour tout le monde que la théorie des opérateurs a joué un rôle fondamental dans les mathématiques pures et appliquées.
Dans ce modeste travail on va donner quelques caractérisations des dérivations et des dérivations généralisées dans un espace de Hilbert.
Soit H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, on note par $L(H)$ l'algébre des opérateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans H.
Pour A un élément de $L(H)$, on note par $R(A)$ l'image de A.
La dérivation intérieure induite par A est définie par :

$$\begin{aligned} \delta_A : L(H) &\rightarrow L(H) \\ X &\mapsto AX - XA; \text{ pour tout } X \in L(H). \end{aligned}$$

Nous définissons la dérivation généralisée sur $L(H)$, noté $\delta_{A,B}$, comme suit :

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB, \ \forall X \in L(H).$$

Durant les années précedentese les propriétés des dérivations ont été étudié par plusieurs chercheurs,

et notre but est de donner un petit aperçu sur les dérivations.
Le premier chapitre de ce travail est un chapitre introductif dans lequel nous avons rassemblés quelques définitions, propriétés et des théorèmes relatives à notre thématique, les propriètés fondamentales des opérateurs linéaires dans l'espace de Banach et de Hilbert, propriètés spectrale et les classes des opérateurs .
Le deuxième chapitre de ce travail consiste à donner une synthése bibliographique concernant les commutateurs, leurs propriétés.

On a également étudié la notion de dérivation interieure définie sur l'algébre des opérateurs bornés $L(H)$ et présenté ses propriétés les plus importantes ainsi que certains théorèmes à propos de cette notion importante.
On a également étudié la notion de dérivation interieure définie sur l'algébre des opérateurs bornés $L(H)$ et présenté ses propriétés les plus importantes ainsi que certains théorèmes à propos de cette notion importante.
Au troisième chapitre et dans sa premiére partie nous avons étudié les opérateurs vérifiant $\overline{R(\delta_A)} \cap \{A^*\}' = \{0\}$; où $\overline{R(\delta_A)}$ est la fermeture de l'image de la dérivation δ_A ,$\{A^*\}'$est l'ensemble des commutants de A^*.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons donné une serie d'opérateurs vérifiant $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$ et $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$.

La troisiéme partie de ce chapitre nous avons évoqué brièvement le théorème de Fuglede-Putnam et les différentes classe d'opérateurs qui le vérifient.

Chapitre 1

Notions preliminaires

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions de base utilisé dans ce travail et quelques définitions des espace (vectoriels ; normés ; topologiques ; Hilbert, Banach..)

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1

Soit E un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes, E est muni de deux lois, addition et multiplication par un scalaire , on dit que E est un espace vectoriel si :
$\forall (x, y) \in E^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}.$
i) $x + y \in E.$
ii) $\lambda x \in E.$

Définition 1.2

Soit E un espace vectoriel défini sur un corps $\mathbb{K}$, $\forall x, y \in E, \forall\lambda \in \mathbb{K}$
i) $-(-x) = x.$
ii) $0_{\mathbb{K}} x = 0.$
iii) $-(\lambda x) = (-\lambda x) = \lambda (-x)\,.$

1.1.2 Sous espace vectoriel

Définition 1.3

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, F est un sous ensemble de E.
On dit que $(F, +, .)$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ si et seulement si :
i) F est non vide .
ii) $\forall x, y \in F, x + y \in F.$
iii) $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda x \in F.$

1.1.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})\,.$ On appelle norme sur E toute application $\|.\|$ définie de E vers $\mathbb{R}^+\,(ie)$
$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}$

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
iii) $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|$.
$(E, \|.\|)$ est appellée espace vectoriel normé.

Définition 1.5

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfant : $\forall x, y, z \in E$
i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Exemple 1.1

Pour $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les normes
$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$,
$\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,
et $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$.

Proposition 1.1

Pour tout $(x, y) \in E^2$; on a :
i) $\|x\| \geq 0$.
ii) $\mid \|x\| - \|y\| \mid \leq \|x - y\|$.
iii) $\|x - y\| = \|y - x\|$.
Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes s'ils existent deux constantes α et β strictement positives telles que, Pour tout $x \in E, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Définition 1.6 (***Suite de Cauchy***)

Soit E un espace vectoriel, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si est seulement si :

$$\forall \varepsilon \succ 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n, m \succ N : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Remarque

Toute suite convergente est une suite de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
Soit E un espace vectoriel, on dit que E est complet si est seulement si toute suite de Cauchy est convergente.
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Définition 1.7

On appelle espace topologique un couple (E, θ) formé d'un ensemble E et d'une topologie θ sur E, c'est -à dire un ensemble de parties de E qu'on appelle les ouverts de E, satisfaisant les propriétès suivantes
i) E et ϕ appartient à θ.
ii) θ est stable par intersection finie.
iii) θ est stable par union quelconque.

Proposition 1.2

Un espace topologique (E, θ) est dit séparé si pour tout couple (x, y) de points distincts, il existe deux ouverts disjoints U et V contenant respectivement x et y.
Dans un espace topologique, une partie V est appellée voisinage d'un point x s'il existe un ouvert U contenant x et contenu dans V.
Une partie X de E est ouverte si et seulement si elle est un voisinage de chacun de ses points.
Soit X une partie de l'espace topologique E, on appelle intérieur de X, Le plus grand ouvert contenu dans X. Le plus petit fermé contenant X est dit l'adhérence de X.

1.2 Espace de Hilbert

1.2.1 Produit scalaire

Définition 1.8

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on appelle **produit scalaire** toute application :
$\langle ., . \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$; vèrifiant les propriètès suivantes :

1. $\forall x, y, z \in H$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

4. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y;z\rangle$
5. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda \langle x,y\rangle$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace **prèhilbertien** tel que :

$$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle .$$

(**Inègalitè de Cauchy-Schwartz**) :
Dans un espace prèhilbertien H, soit l'application $\langle .,.\rangle$ un produit scalaire sur H, on a l'inègalitè :

$$| \langle x,y\rangle |^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle ; \forall x,y \in H.$$

Dans un espace prèhilbertien $(H,\langle .,.\rangle)$, la quantitè $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ dèfinit une norme .

Théorème 1.1 (***Identitè de polarisation***)

Soit H un espace prèhilbertien , le produit scalaire de deux vecteurs x et y est donnè par :

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right], \forall x,y \in H$$

Théorème 1.2 (***Identitè de parallèlogramme***)

Soit H un espace prehilbertien, on a :
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right); \forall x,y \in H.$
Un espace prèhilbertien $(H,\langle .,.\rangle)$ est appelè **espace de Hilbert** s'il est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Définition 1.9 *Soit N un sous espace d'un espace de Hibert H, le complèmentaire orthogonal de N $\left(\text{notè } N^{\perp}\right)$ est dèfini par :*

$N^{\perp} = \{y \in H, \langle x,y\rangle = 0, \forall x \in N\}$. Tel que $N^{\perp}$ est un sous espace fermè de H.

Définition 1.10 *Soit F un ensemble non vide et N une partie de F, on dit que N est convexe si et seulement si,* $\forall x,y \in N, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in N.$

Définition 1.11 (***L'orthogonalitè***)

Soit H un espace prèhilbertien et x,y deux vecteurs de H, on dit que x est **orthogonal** à y si et seulement si $\langle x,y\rangle = 0$ et on ècrit $x \perp y$.

1.3 Algèbres

1.3.1 Algèbre de Banach

Une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{K}$, muni d'une loi interne notée multiplicativement, telle que quels que soient x, y, z éléments de $\mathcal{A}$ et α un élément de $\mathbb{K}$:

1. $(xy)z = x(yz)$ (associativité)
2. $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx, (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$ (bilinéarité)
3. $\|xy\| \leq \|x\| . \|y\|$ (sous-multiplicativité).

Involution Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, on appelle involution une application I de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ vérifiant :
i) $I^2(a) = a, \forall a \in \mathcal{A}$.
ii) $I(ab) = I(b) I(a), \forall a, b \in \mathcal{A}$.
iii) $I(\alpha a + b) = \overline{\alpha} I(a) + I(b), \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall a, b \in \mathcal{A}$.
iv) $I(a) = a^*$.

Définition 1.12 ($\mathbf{C}^*$*−Algèbre*)

1- Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire possédant une involution tel que
$\|a^*a\| = \|a\|^2, \forall a \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est une C^*-Algèbre.

2- Soit $\mathcal{A}$ une C^*-Algèbre. Si $a \in \mathcal{A}$, alors on a :
i) $\|a^*\| = \|a\|$.
ii) $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Idéaux Soit $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ un anneau. On appelle idéal à droite (respectivement à gauche) de l'anneau A, tout ensemble $I \subset \mathcal{A}$ tel que
1) I est un sous groupe de $(\mathcal{A}, +)$.
2) $\forall x \in \mathcal{A}$, $(\forall y \in I, x \bullet y \in I$ (respectivement $y \bullet x \in I$)).
Si I est un idéal à droite et à gauche de A, alors I est un idéal bilatère de A.

L'algèbre de Calkin Soit $K(H)$ l'idéal des opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(H), C(H)$ noté l'algèbre de Calkin tel que :
$C(H) = \mathcal{L}(H)/K(H) = \{[A], A \in \mathcal{L}(H)\}$, où
$[A] = \{A + K, K \in K(H)\}$.

Chapitre 2

Opérateurs, commutateurs et dérivation

Dans ce chapitre nous présentons quelques définitions et propriètés importantes consernant les opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert, ainssi que les commutateurs et quelques propriètés des dérivations.

2.1 Opérateur linéaire borné

2.1.1 Opérateur borné dans un espace de Banach

- On désigne par $(E, \|.\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Si $(F, \|.\|_F)$ est un espace vectoriel normè sur $\mathbb{K}$, on dèsigne par $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Si $F = E$, on note simplement $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ et $L(E) = L(E,E)$.

- On rappelle qu'une application linèaire A définie de E dans un espace vectoriel F est appelée un opérateur.
- De plus on dit que A est un **opérateur borné** si A est continu i,e : $A \in \mathcal{L}(E,F)$.

A est un opérateur linéaire de E dans F si :

$$\begin{cases} A(x+y) = A(x) + A(y), \forall x, y \in E \\ A(\lambda x) = \lambda A(x); \forall \lambda \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

- On note par :

$$\begin{aligned} R(A) &= \{Ax, x \in E\}; \text{ l'image de } A \\ Ker(A) &= \{x \in E, Ax = 0\}; \text{ le noyau de } A \end{aligned}$$

Rappelons que la norme de $A \in \mathcal{L}(E,F)$ est définie par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F$$

- Soient E et F deux espaces de Banach, A une application linèaire de E dans F.On dit que A est inversible, s'il existe un opérateur B de $\mathcal{L}(F,E)$, tel que

$$AB = BA = I$$

L'opérateur B est appellè l'opérateur inverse de A, notè A^{-1}.

- Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si $\|A\| < 1$, alors $(I - A)$ est inversible et son inverse est défini par :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

- Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$; A est dit borné s'il existe une constante $C > 0$; tel que

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in E$$

– Soient E et F deux espaces de Banach, A un opérateur borné de E dans F. L'adjoint de A noté A', est l'opérateur borné de F^* dans E^* vérifiant :
$\left(A'\ell\right)(x) = \ell\left(A(x)\right)$, pour tout $\ell \in F^*$ et $x \in E$.
On a les relations d'orthogonalité suivantes :

1. $\ker(A) = R\left(A'\right)^{\perp}$.
2. $\ker\left(A'\right) = R(A)^{\perp}$.
3. $\ker(A)^{\perp} \supseteq \overline{R(A')}$.
4. $\ker\left(A'\right)^{\perp} = \overline{R(A)}$.

2.1.2 Opèrateur bornè dans un espace de Hilbert

– Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'adjoint de A est l'unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ défini par ;

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \forall x, y \in H.$$

Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, on a :

1. $KerA = (R(A^*))^{\perp}$.
2. $\overline{R(A)} = (Ker(A^*))^{\perp}$.

Les propriétès de la proposition prècèdente peuvent ètre présentées comme suit :
$Ker(A^*) = (R(A))^{\perp}$ et $\overline{R(A^*)} = (Ker(A))^{\perp}$.

Un élément $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit :

1. **Hermitien** ou **auto-adjoint** si $A = A^*$.
2. **Positif,** s'il est hermitien et on a : $\langle Ax, x\rangle \geq 0; \forall x \in H$.
3. **Isométrique,** si $AA^* = A^*A = I$ i.e. $\|Ax\| = \|x\|$.
4. **Co-Isométrique,** si $AA^* = I$.
5. **Normal** si $AA^* = A^*A$.i-e($\|Ax\| = \|A^*x\|$)
6. **Unitaire,** si $AA^* = Id_F$ et $A^*A = Id_E$.i-e ($\|A^*x\| = \|Ax\| = \|x\|$)
7. **Hyponormal,** si $A^*A \geq AA^*$.
8. **P-hyponormal,** si $(A^*A)^P - (AA^*)^P \geq 0$, pour $0 < P \leq 1$.
9. **Log-hyponormal,** si A est inversible et vérifie $log(T^*T) \geq log(TT^*)$.
10. **Dominant,** si $R(A-\lambda) \subseteq R(A-\lambda)^*$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
11. **Quasi normal,** si $A(A^*A) = (A^*A)A$.
12. **Paranormal,** si $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \|x\|$; pour tout $x \in H$.

Spectre d'un opérateur

Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in \mathcal{L}(H)$.

– On définit le spectre de A par l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'opérateur $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, on le note par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}$$

Les èlèments de $\sigma(A)$ sont dits valeurs spectrales.
Le complèmentaire de $\sigma(A)$ est notè par $\rho(A)$, et appelè **ensembel rèsolvant** de A.

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I) \text{ est inversible}\}.$$

-Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opèrateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est notè $R_\lambda(A)$, et appele **rèsolvante** de A.
- Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur non nul $x \in H$ tel que $Ax = \lambda x$.
- Chaque vecteur non nul x qui satisfait $Ax = \lambda x$ s'appelle vecteur propre de A,associé à la valeur propre λ.
– L' ensemble des valeurs propres de A est appellée spectre ponctuel de A, noté
$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\}$
– Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, le rayon spectral de A est noté par $r(A)$ est définie par :
$r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.
– Si $\sigma(A) = \emptyset$, alors on a : $r(A) = 0$.
– Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si H est de dimension finie, alors $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Théorème 2.1
1. *$\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}$.*
2. *$r(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*
3. *$r(A) \leq \|A\|$.*
4. *$\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$.*

les opèrateurs compacts

Un opèrateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit compact s'il transforme toute partie bornèe en une partie relativement compacte (dont l'adhèrence est compact).
On note l'ensembel des opèrateurs compacts de $\mathcal{L}(H)$ par $K(H)$.

Applications linéaires compacts

Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$. On note par $B_H(0,r)$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r>0$ et $\overline{B}_H(0,r)$ est la fermeture de $B_H(0,r)$.

Définition 2.1

Soient E et F deux espaces de Banach, une application linéaire continue. $A\in\mathcal{L}(E,F)$ est dit compact si l'image $A(\overline{B}_E)$ est relativement compacte dans F.
On note par $K(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $K(E)=K(E,E)$.
Un opèrateur $A\in\mathcal{L}(H)$ est compact si et seulement si, pour chaque suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornèe de H , on peut extraire une sous-suite (x_{nk}) convergente.
La proposition suivante donne les propriétés fondamentales des opérateurs compacts.

Proposition 2.1 *Soit $A\in\mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est compact.
(ii) Pour toute partie B bornée de E, l'ensemble $A(\overline{B})$ est relativement compact dans F.
1. Soient E et F deux espaces de Banach, l'ensemble $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Pour E,F et G des espaces de Banach, $S\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A\in\mathcal{L}(F,G)$, si S ou A est compact, alors AS est compact.

2.2 Commutateurs

Un élément X de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit commutateur, s'ils existent $A,B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, tels que :
$X=AB-BA$, *on note* $AB-BA$ *par* $[A,B]$. Il est évident que le commutateur est nul si A et B commutent.
L'ensemble **des commutants** de l'opérateur A noté $\{A\}^{\Delta}$est :
$\{A\}'=\{B\in\mathcal{L}(\mathcal{H}):AB=BA\}$ et $\{A\}'$est une sous algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2.2.1 Propriétés des commutateurs

Un commutateur a les propriétés suivantes :

- $[A, A] = 0.$
- $[A, B] = -[B, A]$.(anti-commutativité).
- $[A,\ [B, C]] + [B,\ [C, A]] + [C,\ [A, B]] = 0$.(l'identité de Jacobi)
- $[A, BC] = [B, A] C + B\ \ [A, C]$.
- $[AB, C] = A [B, C] + [A, C] B.$
- $[ABC, D] = AB [C, D] + A [B, D] C + [A, D] BC.$
- $[AB, CD] = A [B, CD] + [A, CD] B = A [B, C] D + AC [B, D] + [A, C] DB + C [A, D] B.$
- $[[[A, B], C], D] + [[[B, C], D], A] + [[[C, D], A], B] + [[[D, A], B], C] = [[A, C], [B, D]]$.

Preuve. 1.On a $[A.A] = AA - AA = 0$

2. On a $[A.B] = AB - BA = -(-AB + BA) = -(BA - AB) = -[B.A]$

3.On a :

$$[A. [B.C]] = A [B.C] - [B.C] A$$

$$= A (BC - CB) - (BC - CB) A$$

$$= ABC - ACB - BCA - CBA....1$$

On a :

$$[B. [C.A]] = B [C.A] - [C.A] B$$

$$B (CA - AC) - (CA - AC) B$$

$$BCA - BAC - CAB + ACB....2$$

On a :

$$[C. [A.B]] = C [A.B] - [A.B] C$$

$$C (AB - BA) - (AB - BA) C$$

$$CAB - CBA - ABC + BAC....3$$

additionnant les équations 1et 2 et 3 on aura :

$$ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC = 0$$

da la même manière on peut prouver le reste des propriètés. ■

L'unique commutateur sous forme d'un scalaire dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'opérateur nul.

Notons que ce théorème a été prouvé de deux méthodes différentes par Wintner et Wielandt.

Théorème 2.2

La distance au sens de la norme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ entre l'opérateur identité et tout commutateur est au moins égale à 1.($\mathcal{H}$ est un espace de dimension finie)

Preuve. Soit X un commutateur de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d'après la proposition précédente
on a : $Tr(X) = 0$; où $Tr(X) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \langle Xe_i, e_i \rangle = 0$;
$\{e_i\}_{i \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$;
donc $\sum\limits_{1 \leq i \leq n} \langle (I - X)e_i, e_i \rangle = n.$
Ce qui impose qu'au moins l'un des termes $\langle (I - X)e_i, e_i \rangle$ doit être de module supérieur à 1.
Il en résulte que $\|I - X\| \geq |\langle (I - X)e_i, e_i \rangle| \geq 1.$
Ce qui signifie que la distance de l'identité au commutateur X est au moins égale à 1. ■

Soit E un espace vectoriel normé complexe.
Le bicommutant de l'opérateur $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}^{''} = \left\{C \in \mathcal{L}(E) : CB = BC; \forall B \in \{A\}^{'}\right\}.$$

L'ensemble des commutateurs verifie les propriétés suivantes :

1) $\{A\}^{'}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2) $\{A\}^{'}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
3) $\{A\}^{''} = \left\{\{A\}^{'}\right\}^{'}$.
4) Tout polynôme de A appartient à $\{A\}^{''}$.

2.3 Opérateur dérivation

Définition 2.2

Soit $\mathcal{L}(H)$ une algbère sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.
Une dérivation δ est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(H)$ satisfaisant la propriètè suivante

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y), \forall X, Y \in \mathcal{L}(H).$$

Définition 2.3

1. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, l'application de $\mathcal{L}(H)$ vers $\mathcal{L}(H)$ définie par $\delta_A(X) = AX - XA$, pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$, est une dérivation sur $\mathcal{L}(H)$ appellée dérivation intérieure induite par A.
2. Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, l'application de $\mathcal{L}(H)$ vers $\mathcal{L}(H)$ définie par $\delta_{A,B} = AX - XB$, pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$, est appellée dérivation généralisée induite par A et B.

1. $\forall A \in \mathcal{L}(H)$, δ_A est linéaire continue et $\|\delta_A(X)\| = 2\inf\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in \mathbb{C}\}$

2 Une dérivation interne δ_A est une dérivation au sens de la défiition précedente

3 L'opérateur identité I n'est pas un commutateur.

Preuve.

1. En effet , pour prouver que δ_A est linéaire

$\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathcal{L}(H) : \delta_A(X+Y) = \delta_A(X) + \delta_A(Y), \delta_A(\alpha X) =$

$\alpha \delta_A(X) / \alpha \in \mathbb{C}$.

On a : $\delta_A(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A =$

$AX + AY - XA - YA = \delta_A(X) + \delta_A(Y)$.

$\delta_A(\alpha X) = A(\alpha X) - (\alpha X)A = \alpha(AX - XA) =$

$\alpha \delta_A(X)$, d'où δ est linéaire.

On a : $\|\delta_A(X)\| = \|AX - XA\| \leq 2\|A\| . \|X\|$

Donc il existe $M = 2\|A\|$ telle que :

$\|\delta_A(X)\| \leq M\|A\|$, d'où δ_A est bornée donc continue pour la norme.

2. Prouvons que : $\delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$

$\delta_A(XY) = A(XY) - (XY)A =$
$AXY - XYA + XAY - XAY =$
$(AX - XA)Y + X(AY - YA =$
$\delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$.
Prouvons que $\delta_A = \delta_{A-\lambda}$
$\delta_{A-\lambda}(X) = (A-\lambda)X - X(A-\lambda) = AX - XA = \delta_A(X)$
$\|\delta_A(X)\| = \|\delta_{A-\lambda}(X)\| =$
$\|(A-\lambda I)X - X(A-\lambda I)\| \leq 2\|X\| . \|A - \lambda I\|$
$\|\delta_A(X)\| \leq 2\|X\| . \|A - \lambda I\|$
donc $\|\delta_A(X)\| \leq 2 \inf\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in \mathbb{C}\}$
3. On suppose que I est un commutateur, donc ils existent $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,
tels que : $I = AB - BA$.
Multiplions à gauche et à droite par A, alors :
$A = A^2B - ABA$, et $A = ABA - BA^2$.
En additionnant les deux relations on trouve :
$2A = A^2B - BA^2$, et par récurrence, pour un entier n on a :

$nA^{n-1} = A^nB - BA^n \ldots\ldots (1)$

Qu'on peut facilement prouver :

$A^{n+1}B - BA^{n+1} = A(A^nB - BA^n) + (AB - BA)A^n$

$= AnA^{n-1} + A^n = (n+1)\,A^n.$

à partir de la relation (1) on trouve que :

$$(n+1)\,\|A^n\| \leq 2\,\|B\|\,\|A^{n+1}\| \leq 2\,\|B\|\,\|A^n\|\,\|A\|$$

Pour $\|A^n\| \neq 0$; on aura :

$(n+1) \leq 2\,\|B\|\,\|A\|$

pour un entier n_1 où :

$(n_1+1) \succ 2\,\|B\|\,\|A\|$ on a $\|A^{n_1}\| = 0.$

Et par conséquent, pour $n_1 \succ 2\,\|B\|\,\|A\| - 1$, on a :

$\|A^{n_1+1}\| = \|A^{n_1}\| = \left\|A^{n_1-1}\right\| = \ldots\ldots = \|A\| = 0,$

donc $A = 0$; D'où $I = AB - BA = 0,$

qui est une contradiction. D'où I n'est pas un commutateur. ■

1- Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, si $\delta_A = \delta_B \Leftrightarrow B = A - \lambda 1, \forall\lambda \in \mathbb{C}.$

2- Soient A et B deux opérateurs bornés dans H, alors :

$$\begin{aligned} \delta_{A+B} &= \delta_A + \delta_B \\ \delta_{AB-BA} &= \delta_A\delta_B - \delta_B\delta_A. \end{aligned}$$

Donc la somme et le produit de deux dérivations intérieurs est une dérivation, mais pour le produit ce n'est pas évident.

Théorème 2.3 [13]

Soient $A, B \in \mathcal{L}(H), \delta_A\delta_B$ est une dérivation si et seulement si δ_A ou δ_B est un scalaire multiple pour l'opérateur identité.

Chapitre 3

Etude de l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dèrivation

Dans ce chapitre nous présentons quelques opérateurs vérifiants l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation intérieure, l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivations généralisées, aussi on va donner le théorème de Fuglede-Putnam qui joue un role très important dans la théorie des opérateurs, puis on expose quelques résultats sur l'orthogonalité de l'image et le noyau d'une dérivation dans $\mathcal{L}(H)$.

Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe et séparable de dimension infinie, $L(H)$ est l'algèbre des opèrateurs linèaires bornès sur H.

Pour $A, B \in L(H)$, Nous définissons l'opérateur $\delta_{A,B}(X)$ sur $L(H)$ comme suit :

$\delta_{A,B}(X) = AX - XB$, pour tout $X \in L(H)$.

$\delta_{A,B}$ est la **dérivation généralisée** induite par les opérateurs A et B.

Si $A = B$, $\delta_{A,B}(X) = \delta_A(X) = AX - XA$, qui est la **dèrivation intèrieure induite par** A .

Si A est un opèrateur normal, on dit que $\delta_A(X)$ est une dèrivation normale.

Soit $ker(A)$ le noyau de A et $R(A)$ l'image de A, ona :

1. $R(A) \perp \ker(A)$.
2. $\overline{R(A)} \oplus \ker(A) = H$; où $\overline{R(A)}$ est la fermeture de $R(A)$.

La question qui se pose est : pour quels opérateurs $\delta_A, \delta_{A,B}$ les propriétés 1 et 2 restent vraies ?

3.1 Notion de l'orthogonalité

Définition 3.1 1. *Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, X un espace vectoriel normè,*

on dit que x est **orthogonal** à y si :

$\|x - \lambda y\| \geq \|\lambda y\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in X$, l'horthogonalité ici est au sence de Birkhoff.

Définition 3.2 1. *Soient M, N des sous espaces de X, si :*

$\|m + n\| \geq \|n\|; \forall m \in M, \forall n \in N$; alors $M \perp N$ (notion non symètrique).

Définition 3.3 1. *Si M, N sont des sous espaces fermès, et $M \perp N$; alors $M \oplus N$ est fermè.*

3.1.1 Orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation interne

Lemme 3.1

Soit S un opèrateur isomètrique dans $L(H)$; alors $R(\delta_S) \perp Ker(\delta_S)$.

Preuve. D'aprés [11] on a :

$S^n X - XS^n = \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS) S^i; X \in L(H)$

Pour $T \in Ker(\delta_S)$, alors $TS = ST$;d'où :

$\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS - T) S^i =$

$\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS) S^i - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1}T$

$= S^nX - XS^n - nS^{n-1}T =$
$\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS - T) S^i$
D'où :
$nS^{n-1}T = S^nX - XS^n - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS - T) S^i$
Alors,
$\|nS^{n-1}T\| \leq \| S^nX - XS^n\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|S^{n-i-1}(SX - XS - T) S^i\|$ et $\|S(T)\| = \|T\|$
$\|nS^{n-1}T\| \leq \| S^nX - XS\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|SX - XS - T\|$
Donc $n\|T\| \leq \| S^nX - XS^n\| + n\|SX - XS - T\|$
D'où $\|T\| \leq \frac{1}{n}\| S^nX - XS^n\| + \|SX - XS - T\|$, pour $n \to +\infty$
$\|T\| \leq \|SX - XS - T\| = \|\delta_S(X) - T\|$.
Donc $R(\delta_S) \perp Ker(\delta_S)$. ■

Définition 3.4 *Soit A un opèrateur auto-adjoint de $L(H)$, alors $R(\delta_A) \perp Ker(\delta_A)$.*

Preuve. Soit A un opèrateur auto-adjoint de $L(H)$, l'opèrateur
$U = (A - i)(A + i)^{-1}$ est la transformation de Cayley de l'opèrateur A.
$U = (A - i)(A + i)^{-1}$; d'où $U^* = (A^* - i)(A^* + i)^{-1}$
$= (A - i)(A + i)^{-1}$ $/A$ est auto-adjoint
$U^{-1} = (A + i)(A - i)^{-1}$, donc $U^* = U^{-1}$ i-e U est unitaire.
Comme
$$U = (A - i)(A + i)^{-1} \Longrightarrow U(A + i) = (A - i) \tag{3.1}$$
D'où $A = i(I + U)(I + U)^{-1}$.
On a : $\delta_A(X) = \delta_{A-i}(X) =$
$(A - i)X - X(A - i)$, en appliquant (1) on obtient
$\delta_A(X) = U(A + i)X - XU(A + i)$
$\delta_A(X) = U[(A + i)X] - [(A + i)X]U + (A + i)(XU) - (XU)(A + i)$
$\delta_A(X) = \delta_U[(A + i)X] + \delta_{A+iI}(XU) =$
$\delta_U[(A + i)X] + \delta_A(XU)$
$\delta_A(X) = \delta_U(AX) + i\delta_U(X) + \delta_A(XU)$
$\delta_A(X) - \delta_A(XU) = \delta_U(AX) + i\delta_U(X)$
$\Longrightarrow \delta_A(X(I - U)) = \delta_U((A + i)X)$
D'où $R(\delta_A) = R(\delta_U)$
Pour $T \in Ker(\delta_A)$ i-e $TA = AT$.
D'où $UT = TU$, donc d'aprés le lemme précédent on a : $R(\delta_A) \perp Ker\delta_A$. ■

Lemme 3.2 *Soient $P_1, P_2P_3...P_n$ des idempotents orthogonaux i.e. ($P_iP_j = 0$ si $i \neq j, P_i^2 = P_i$) et $\{\lambda_i\}_{i=1}^{i=n}, \{\mu_i\}_{i=1}^{i=n}$ deux suites de nombres complexes differentes.*

Si $Q_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, Q_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i P_i$,alors : $R(\delta_{Q_1}) = R(\delta_{Q_2})$.

Preuve. On a : $\delta_{Q_1} = Q_1X - XQ_1$

1. Pour $n = 2, Q_1 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$

donc $\delta_{Q_1} = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) X - X (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$

un simple calcul donne que :

$P_1\delta_{Q_1}P_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) P_1XP_2.$

De la même maniére on aura :

$P_1\delta_{Q_2}P_2 = (\mu_1 - \mu_2) P_1XP_2.$

2. Pour n quelconque

$\delta_{Q_1} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) X - X \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)$

$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) X \left(\sum\limits_{j=1}^{n} P_j\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} P_i\right) X \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_j P_j\right) / \left(\sum\limits_{j=1}^{n} P_j = 1\right)$

$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i X\right) \left(\sum\limits_{j=1}^{n} P_j\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} P_i X\right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_j P_j\right)$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i P_i X P_j - \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_j P_i X P_j$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) P_i X P_j = \delta_{Q_1}.$

De la même façon on peut prouver que :

$\delta_{Q_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\mu_i - \mu_j) P_i X P_j.$

D'où $R(\delta_{Q_1}) = R(\delta_{Q_2})$. ■

Définition 3.5 *Soit N un opèrateur normal de $L(H)$, de mesure spéctrale $E(.)$; alors $R(\delta_N) \perp Ker(\delta_N)$.*

Preuve. Soit N un opèrateur normal de $L(H)$,

la décomposition spéctrale de N est l'opérateur $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i E(\sigma_i)$

telles que $\{\lambda_i\}_{i=1}^{i=n}$ sont des valeurs propres de N et $\lambda_i \neq \lambda_j \neq 0$.

E projection définie : $H \rightarrow \ker(N - \lambda_i)$.

σ_i des ensemble de Borel.

Soit $N \in \ker(\delta_N)$; on doit prouver que :

$\|A - (NX - XN)\| \geq^? \|A\|$

$\|A - (NX - XN)\| = \left\| A - \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i E(\sigma_i)\right) X - X \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i E(\sigma_i)\right)\right]\right\|$

Soient $Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i(\sigma), Q_2 = \sum_{i=1}^{n} i E_i(\sigma)$

Comme E est une projection donc Q_2 est auto-adjoint i.e. $Q_2 = Q_2^*$

Donc d'aprés le théorème (3.1) $R(\delta_{Q_2}) \perp \ker(\delta_{Q_2})$.

Et d'aprés le théorème (3.3) $R(\delta_{Q_1}) = R(\delta_{Q_2})$.

Comme $A \in \ker(\delta_N)$; alors $A \in \ker(\delta_{Q1})$ et $A \in \ker(\delta_{Q2})$

Et $R(\delta_{Q_2}) \perp \ker(\delta_{Q_2})$, alors $R(\delta_{Q_1}) \perp \ker(\delta_{Q_2})$

d'où $R(\delta_N) \perp \ker(\delta_N)$. ■

Corollaire 3.1 [1]

Soit N un opèrateur normal de $L(H)$, alors $\overline{R(\delta_N)} \oplus Ker(\delta_N) = L(H)$ si et seulement si le spectre de N à un nombre fini de point.

Donc si A est un opérateur normal, alors tout opérateur $T \in \overline{R(\delta_N)} \cap \{A\}'$ est nul.

Soit $P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ une projection de $H = H_1 \oplus H_2$.

On a $\delta_P(X) = PX - XP / X \in L(H)$ et $X = \begin{bmatrix} W & U \\ Y & Z \end{bmatrix}$

Un simple calcul donne que :

$\delta_P(X) = \begin{bmatrix} 0 & U \\ -Y & 0 \end{bmatrix}$

on a $\ker(\delta_P) = \left\{ \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} ; W \in L(H_1)\, et\, Z \in L(H_2) \right\}$

Prouvons que $R(\delta_P) \oplus Ker(\delta_P) = L(H)$.

$\forall X \in L(H) : \exists X_1 \in R(\delta_P), \exists X_2 \in \ker(\delta_P)$

i.e. $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & U \\ Y & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$

D'où $X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} W & U \\ Y & Z \end{bmatrix} = X.$

2. Prouvons que $R(\delta_P) \cap \ker(\delta_P) = \{0\}$

On suppose qu'il existe $A \in R(\delta_P) \cap \ker(\delta_P)$.

Pour $A \in R(\delta_P)$ i.e $A = \begin{bmatrix} 0 & U \\ Y & 0 \end{bmatrix}$,

pour $A \in \ker(\delta_P)$ i.e $A = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$

Donc $\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & U \\ Y & 0 \end{bmatrix}$

d'où : $W = Z = Y = U = 0.i.e\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Donc $R\left(\delta_P\right) \oplus Ker\left(\delta_P\right) = L\left(H\right).$

3.2 Annulation de l'intersection : image-noyau d'une dèrivation gènèralisèe

Introduction

On sait qu'en dimension finie, on a toujour $R(\delta_A) \cap \{A^*\}' = \{0\}$,
mais en dimension infinie l'intersection $R(\delta_A) \cap \{A^*\}' = \{0\}$,
si A est le shift unilatèral , et que $\overline{R(\delta_A)} \cap \{A^*\}' = \{0\}$ si A est isomètrique ou normal.
La question qui se pose est pour quels opèrateurs A, B on a :

$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$, $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$?
Le but de cette partie et de trouver ces opérateurs.

Lemme 3.3

Soient $A, X \in L(H)$ telle que $P \geq 0$ et $PX + XP = 0$;alors :

$$PX = XP = 0$$

Lemme 3.4

Soient $A, B \in L(H)$, tel que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$. Si A, B sont similaires à un opérateur normal, isometrique où sous normal, alors : $\overline{R(\delta_{A \oplus B})} \cap \{A \oplus B\}' = \{0\}$.

Théorème 3.1 ***de Fugled- Putnam***

Soient $A, B \in L(H)$, des opérateurs normaux, si $AX = XB$, pour tout $X \in L(H)$, alors on a : $A^*X = XB^*$, pour tout $X \in L(H)$.
On note cette propriété par $(FP)_{L(H)}$.

Proposition 3.1

Soient $A, B \in L(H)$, si $(P(A), P(B))$et $(P(B), P(A))$ ont la propriété $(FP)_{L(H)}$; alors :

$$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$$

Preuve. Par un simple calcul on peut prouver que pour tout $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

$$R\left(\delta_{aA+B,aB+b}\right) = \ R\left(\delta_{A,B}\right) \text{ et } Ker\left(\delta_{aA+b,aB+b}\right) = Ker\left(\delta_{A,B}\right)$$

Soit $T^* \in \overline{\ R\left(\delta_{A,B}\right)} \cap Ker\left(\delta_{A^*,B^*}\right)$.
Alors il existe une suite $(X_n)_n \in L(H)$ telle que :

$$AX_n - X_nB \to T^* \text{ et } TA^* = B^*T$$

On a : (A^2, B^2) et (B^2, A^2) vérifient la propriété $(FP)_{L(H)}$ donc :

$$A^2X_n - X_nB^2 \to AT^* \ + T^*\,B \text{ et } TA^2 = B^2T$$

Du momment que (B^2, A^2) vérifie la propriété $(FP)_{L(H)}$ il en résulte que

$$A^2T^* \ = T^*\,B^2$$

Donc

$$A^2(AT^* \ + T^*\,B) = (AT^* \ + T^*\,B)B^2$$

d'où

$$AT^* \ + T^*\,B \in \overline{R\left(\delta_{A^2,B^2}\right)} \cap Ker\left(\delta_{A^2,B^2}\right)$$

D'aprés le lemme (3.3) on a :

$$AT^* \ + T^*\,B = 0$$

multiplions à droite par T et on utilisant $BT = TA$ on obtient

$$AP + PA = 0 \text{ avec } P = T^*\,T$$

Donc d'aprés le lemme (3.2) :

$$AP = PA = 0$$

D'autre part on a :

$$A(X_nT) - (X_nT) \to T^*\,T = P$$

multiplions à gauche et à droite par P on aura :

$$P^3 = 0$$

Puise que P est auto adjoint, alors $P = 0$ ce qui implique que $T = 0$
D'où

$$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$$

■

Soit $A \in L(H)$, si $P(A)$ est un opérateur normal, P un polynôme quadratique, alors :

$$\overline{R(\delta_A)} \cap \{A^*\} = \{0\}$$

Corollaire 3.2 *1*

Soient $A, B \in L(H)$, si $P(A)$ et $P(B)$ sont des opérateurs normaux, alors :

$$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$$

Lemme 3.5

Soient ($A, B) \in L(H)$, telle que (B, A) a la propriété $(FP)_{L(H)}$, si $T \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*})$, alors :
$T^*T \in \overline{R(\delta_B)} \cap \{B\}$ et $TT^* \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}$.
Preuve. On suppose que $T \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*})$, alors il exsite une suite $(X_n)_n \in L(H)$, telle que :

$$AX_n - X_nB \to T \text{ et } BT^* = T^*A$$

multiplitions à gauche par T^* :

$$T^*(AX_n - X_nB) \to T^*T \text{ et } BT^* = T^*A$$

$$T^*AX_n - T^*X_nB = B(T^*X_n) - (T^*X_n)B \to T^*T$$

d'où

$$T^*T \in \overline{R(\delta_B)} \cap \{B\}$$

miltiplitions à droite par T^* on aura :

$$T^*T \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}$$

d'autre part on a $(B; A)$ vérifie la propriété $(FP)_{L(H)}$, donc :

$$TB = AT$$

multiplitions à gàuche par T^*

$$T^*TB = T^*AT$$

on aura :

$$T^*T \in \overline{R(\delta_B)} \cap \{B\} \text{ et } T^*T \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}$$

■

Proposition 3.2

Soient $(A, B) \in L(H)$, alors on a :

$$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$$

dans l'un cas suivant :

1. B un opérateur normal et A^*p-hyponormal ou log-hyonormal,$(0 < P < 1)$
2. A un opérateur normal et Bp-hyponormal ou log-hyonormal,$(0 < P < 1)$

Preuve. Soient B un opérateur normal et A^* un opérateur p-hyponormal ou log-hyponormal du moment que tout opérateur normal est p-hyponorma d'où B est p-hyponormal donc :
B est un opérateur p-hyponormal et A^* un opérateur p-hyponormal ou log-hyponormal
d'aprés le lemme (2.1)[10] on a (A, B) vérifie la propriété $(FP)_{L(H)}$, donc on obtient :

$$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$$

■

3.2.1 Opéraeurs qui vérifient $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$

Théorème 3.2

Soient $A, B \in L(H)$ tel que :

1. la paire (A, B) Vèrifie $(FP)_{L(H)}$

2. Tout opèrateur positif dans $\overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}^{'}$ est nul, alors on a :

$$\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}.$$

Preuve. Soit $T \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B})$ i-e il existe une suite $\{X_n\}$ de $L(H)$ telle que :

$$AX_n - X_n B \to T$$

et

$$AT = TB$$

comme (A, B) vèrifie $(FP)_{L(H)}$,On obtient :
$A^*T = TB^*$; d'où $T^*A = BT^*$, multiplions (1) par T^* on obtient : $A(X_nT^*) - (X_nB)T^* = A(X_nT^*) - (X_nT^*)A \to TT^*$,
d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_A)}$ et comme $AT = TB$,
alors $ATT^* = T(BT^*) = (TT^*)A$ i-e $TT^* \in \{A\}'$.
Donc $TT^* \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$, comme TT^* est un opèrateur positif de $\overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$, il s'ensuit que $TT^* = 0$, d'où $T = 0$. ■

Proposition 3.3

Soient $A; B$ des opèrateurs normaux de $L(H)$; alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$.

Preuve. Si $A; B$ sont des opèrateurs normaux de $L(H)$; alors (A, B) Vèrifie $(FP)_{L(H)}$, de plus puisque A est normal alors $\overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}' = \{0\}$. D'apres le thèorème prècédent $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$. ■

Lemme 3.6

Soient $A, B \in L(H)$, si A est opèrateur isomètrique de $L(H)$, et B un opérateur co-isomètrique, alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$.
Preuve. Soit $T \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B})$ i-e il existe une suite $\{X_n\}$ de $L(H)$ telle que :
$AX_n - X_nB \longrightarrow T$ et $AT = TB$.
$AT = TB$, multiplions par A^*à gauche et par B^* à droite on aura :
$(A^*A)TB^* = A^*T(BB^*) \Longrightarrow TB^* = A^*T$, d'où $T^*A = BT^*$:
$AX_n - X_nB \longrightarrow T$ alors $(AX_n)T^* - (X_nB)T^* \longrightarrow TT^*$,
d'où $A(X_nT^*) - (X_nT^*)A \longrightarrow TT^*$ i-e $TT^* \in \overline{R(\delta_A)}$.
$AT = TB$, alors $A(TT^*) = TBT^* = (TT^*)A$ i-e $TT^* \in \{A\}'$,
d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$, comme A est isomètrique, alors $TT^* = 0$ et$T = 0$. ■

Lemme 3.7

Soient $A, B \in L(H)$ si A est un opèrateur co-isomètrique de $L(H)$ et B isomètrique, alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$.

Preuve. Soit $T^* \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*})$ i-e il existe une suite $\{X_n\}$de $L(H)$ telle que :

$$AX_n - X_n B \longrightarrow T^* \tag{3.2}$$

et $A^*T = T^*B^*$, d'ou $TA = BT$ multiplion 6 à gauche par T on obtient :
$TAX_n - TX_nB \to TT^*$; alors $B(TX_n) - (TX_n)B \to TT^*$;
d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_B)}$.
on a : $A^*T^* = T^*B^* \Longrightarrow (AA^*)T^*B = AT^*(B^*B)$
$\Longrightarrow T^*B = AT^* \Longrightarrow (TT^*)B = TAT^* = B(TT^*)$;
d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_B)} \cap Ker(\delta_B)$, comme B est isomètrique, alors $TT^* = 0$, donc $T^* = 0$. ■

Lemme 3.8

Soient $A, B \in L(H)$;si A, B sont des opèrateurs unitaires de $L(H)$, alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$
Soient $A, B \in L(H)$, si A est opèrateur isomètrique de $L(H)$, et B un opérateur co-isomètrique, alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B}) = \{0\}$.
Preuve. Soit $T \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A,B})$ i-e il existe une suite $\{X_n\}$ de $L(H)$
telle que : $AX_n - X_nB \longrightarrow T$ et $AT = TB$.
$AT = TB$, multiplions par A^*à gauche et par B^* à droite on aura :
$(A^*A)TB^* = A^*T(BB^*) \Longrightarrow TB^* = A^*T$,
d'où $T^*A = BT^*$: $AX_n - X_nB \longrightarrow T$
alors $(AX_n)T^* - (X_nB)T^* \longrightarrow TT^*$,
d'où $A(X_nT^*) - (X_nT^*)A \longrightarrow TT^*$ i-e $TT^* \in \overline{R(\delta_A)}$.
$AT = TB$, alors $A(TT^*) = TBT^* = (TT^*)A$
i-e $TT^* \in \{A\}'$, d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$,
comme A est isomètrique, alors $TT^* = 0$ et$T = 0$. ■

Lemme 3.9

Soient $A, B \in L(H)$ si A est un opèrateur co-isomètrique de $L(H)$ et B isomètrique, alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$.
Preuve. Soit $T^* \in \overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*})$ i-e il existe une suite $\{X_n\}$de $L(H)$ telle que :

$$AX_n - X_nB \longrightarrow T^* \tag{3.3}$$

et $A^*T = T^*B^*$, d'ou $TA = BT$,
multiplion (3,3) à gauche par T on obtient :
$TAX_n - TX_nB \to TT^*$,
alors $B(TX_n) - (TX_n)B \to TT^*$; d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_B)}$.
on a : $A^*T^* = T^*B^* \Longrightarrow (AA^*)T^*B = AT^*(B^*B)$
$\Longrightarrow T^*B = AT^* \Longrightarrow (TT^*)B = TAT^* = B(TT^*)$
d'où $TT^* \in \overline{R(\delta_B)} \cap Ker(\delta_B)$.
Comme B est isomètrique, alors $TT^* = 0$, donc $T^* = 0$. ■

Lemme 3.10

Soient $A, B \in L(H)$; si A, B sont des opèrateurs unitaires de $L(H)$,
alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$.

Lemme 3.11

Soit $A \in L(H)$, si $P(A) = 0$, pour un polynome du second degrè P,
alors $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$, pour tout $B \in L(H)$.
Preuve. Il suffit de prouver que tout opèrateur positif de $\overline{R(\delta_A)}$ est nul.
Soit T un opèrateur positif de $\overline{R(\delta_A)}$ i-e il existe une suite $\{X_n\}$ de $L(H)$ telle que :
$AX_n - X_nA \to T$;multiplions à gauche et à droite par A, alors ;
$A^2X_n - AX_nA \to AT$ et $AX_nA - X_nA^2 \to TA$
additionnant les relations précédentes on trouve :

$$A^2X_n - X_nA^2 \to TA + AT \tag{3.4}$$

et $AX_n - X_nA \to T$;multiplions par 2α on trouve :

$$2\alpha AX_n - 2\alpha X_nA \to 2\alpha T;\ \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.5}$$

en additionnant (3,5) et (3,6) on aura :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^2 - 2\alpha A\right)X_n - X_n\left(A^2 - 2\alpha A\right) \to (AT + TA - 2\alpha T) \\ AT + TA - 2\alpha T &= 0 \text{ i-e } (A-\alpha)T + T(A-\alpha) = 0, \text{ tel que } T \text{ est positif} \end{aligned}$$

Alors $(A-\alpha)T = T(A-\alpha) = 0$;

d'où $AT = TA = 0$,
multiplion $AX_n - X_nA \to T$ à droite et à gauche par T on obtient :
$0 = (TA)X_nT - (TA)X_nT \to T^3$;
d'ou $T^3 = 0$, donc $\overline{R(\delta_{A,B})} \cap Ker(\delta_{A^*,B^*}) = \{0\}$. ■

Lemme 3.12

Soient a, b des èlèments d'une $\mathbb{C}^*$ algèbre $\mathcal{A}$ si :

1. la paire (a, b) Vèrifie $(FP)_{\mathcal{A}}$
2. Si tout opèrateur positif dans $\overline{R(\delta_a)} \cap \{a\}^{'}$ est nul, Alors on a :

$$\overline{R(\delta_{a,b})} \cap Ker(\delta_{a,b}) = \{0\}$$

Preuve. On sait qu'il existe un * isomorohisme isomètrique $\varphi : \mathcal{A} \to L(H)$.
Soit $d \in \overline{R(\delta_{a,b})} \cap Ker(\delta_{a,b})$
comme (a, b) vèrifie $(FP)_{\mathcal{A}}$, alors $(\varphi(a), \varphi(b))$ vèrifie $(FP)_{L(H)}$.
Pour c un positif de $\overline{R(\delta_a)} \cap \{a\}'$,
$\phi(c)$ est un positif de $\overline{R(\delta_{\phi(a)})} \cap \{\varphi(a)\}'$.
D'après le thèorème$(*)$:
$\varphi(d) \in \overline{R(\delta_{\phi(a)\phi(b)})} \cap Ker(\delta_{\varphi(a)\varphi(b)}) = \{0\}$; d'où $d = 0$. ■

Bibliographie

1. **J.H. Anderson**, On normal derivations, Proc. Amer. Math. Soc.38(1973), 135-140.
2. **J.H.Anderson**, Derivation range and identity, Bulletin of Amer.Math .Soc.vol 79 N4(1973), 705-708.
3. **G.Birkhoff**, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math.J,v1,(1935), 169-172.
4. **H.Brézis**, Analyse fonctionnelle, Dunod, 1999.
5. **J.Charles,** Opérateurs linéaires dérivations est dérivations généralisées, Univ Montpellier 2 (case 051), 1991.
6. **B.P.Duggal**, Range kernel orthogonality of derivations, Linear Algebra Appl. 304(2000), 103-108.
7. **B.P.Duggal**, Putnam-Fuglede Theorem and the range-kernel orthogonality of derivations, Inter. J. Math. Sc, 27(2001), 573-582
8. .**C.Chellali,** Sur le théorème de Fuglede-Putnam, thèse pour l'obtenation le magister en maths, Univ-Oran Es-senia, 2011
9. .**E.Fricain**, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs cours et exercices, 2009-2010.
10. **F. Kittaneh**, Operators that are orthogonal to the range of a derivation, J. Math. Anal. Appl. 203(1997), 868-873
11. **P.R.Halmos**, A Hilbert space problem book, Van Nostrand. Princeton, 1967
12. .**H.Klaja**, Autour des projections orthogonales image numérique, principe d'incertitude et problème du sous-espace invariant, Univ de Lille, 2014.
13. **H.Messaoudene ;** Etude de la classe de Joêl Anderson ; Thése de Magister. univ Annaba.
14. **S.Mecheri**, Commutants and derivation ranges, czechoslovak mathematical journal, vol.49, no.4, 1999.
15. **J.P.Williams**, On the range of a derivation, pacific journal of maths, vol.38, no.1, March 1971, 273-279
16. **Yong Ho**, Commutants and derivation ranges, Tohoku-math-jour 27(1975) 509-514.