Table des matières

Chapitre 4

Propriétés qualitatives des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion

Introduction

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'existence locale et l'existence globale des solutions des équations d'evolution fractionnelle de type paraboliques,et des systèmes. On étudie dans ce mémoire léquations de spatio-temporellement et un problème de Cauchy pour le système parabolique semi-linéaire avec une mémoire non linéaire , avec des dérivées fractionnaires.

Le mémoire se compose de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on introduit quelque notions et rappels de base, quelque espace fonctionnelle (l'espace de Sobolev,l'espace $L^p(\Omega)$), des théorèmes fondamentales (théorème de point fixe de Banach,le théorème de convergence dominé de Lebesgue,) et quelques définitions (système de réaction-diffusion,et dérivées fractionnaires, l'équation de spatio-temporellement).

Dans le deuxième chapitre, on définit quelques équations et systemes de réaction-diffusion et ses modilisations dans le cas classique et le cas fractionnaire

Tous ces problèmes s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \tag{1}$$

avec les conditions aux bords bien choisies.

Dans le troisième chapitre, nous analysons une equation spatio-temporellement non locale et non linéaire

de type parabolique.et ce problème est définit comme suit :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(s) ds \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

Tout d'abord, nous validons l'existence locale et l'unicité de solution douce au problème (1.1). Ensuite,nous montrons l'explosion de solution et on étudie leurs temps.d'explosion.

De plus, nous établissons les conditions nécessaires à l'existence locale ou globale.

Dans le dernier chapitre, nous étudions l'existence locale et l'explosion de solution en temps fini pour un système semi-linéaire parabolique définit comme suit :(avec une mémoire non linéaire).

$$\begin{matrix} u_t - \Delta u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |v|^{p-1} v(s) ds \ , x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v_t - \Delta v = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t (t-s)^{-\delta} |v|^{q-1} u(s) ds \ , x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \end{matrix} \tag{3}$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0; v(x,0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

De plus, nous donnons le taux d'explosion des solutions et les conditions nécessaires pour l'existence locale ou globale.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

On introduit dans ce chapitre des notions et définitions de base principales, des théorèmes fondamentaux (théorème de point fixe de Banach,...), quelques inégalités qui sont très utiles pour les autres chapitres.

1.2 Notations et notions générales

Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, ..., x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.

On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), ..., v_n(x))$.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, son gradient est le champ de vecteurs défini par

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right). \tag{1.1}$$

Pour un champ de vecteurs $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de u la fonction définie par

$$\operatorname{div} u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x). \tag{1.2}$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x). \tag{1.3}$$

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière.

On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $v(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \Omega$,$v(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.

On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.

On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par $\frac{\partial u}{\partial v}(x) = \nabla u(x) \cdot v(x)$ (produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $v(x)$).

Espaces fonctionnels

On dfinit l'espace $L^p(\Omega)$,par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable et } \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}. \tag{1.4}$$

Muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx,$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{mesurable } \exists C \text{ et } \ |u| \leq C \text{ p p sur } \Omega \}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |u(x)| = \inf \{C; |u| \leq C \text{ p p sur } \Omega\}.$$

On définit les espaces $L^p(0,T,X)$,$1 \leq p \leq \infty$ comme suit

$$L^p(0,T,X) = \left\{ u : [0,T] \to X : \text{ mesurable et } \|u\|_{L^p(0,T,X)} < \infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$\begin{cases} \|u\|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \|u\|_X^p \, dt \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup\limits_{t\in(0,T)} ess\, \|u\|_X \text{ si } p = \infty. \end{cases}.$$

On définit les espaces $L^p_{loc}(\Omega)$,$1 \leq p < \infty$ comme suit

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ mesurable ;} \exists k \text{ compacte telle que } \int\limits_k |u|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}.$$

Muni de la norm

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|k|} \int\limits_k |u|^p \, dx.$$

On définit les espaces $L^p_{loc}\,(Q, f(t,x), dtdx)$,$1 \leq p < \infty$ comme suit

$$L^p_{loc}\,(Q; f(t,x); dtdx) = \left\{ u : Q \to \mathbb{R} \int\limits_k |u|^p \, f dtdx < +\infty; \text{pour } k \subset Q \right\}.$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de **Sobolev** défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|^2 \, dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^* : |\alpha| \leq m \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^P(\Omega); \forall \alpha : |\alpha| \leq m \right\}.$$

Muni de la norme

$$\begin{cases} \| u \|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \ si\ 1 \leq p < \infty, \\ \max_{x\in\Omega} \|D^\alpha u\|_{L\infty(\Omega)} \ si\ p = \infty. \end{cases},$$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_m^{\alpha_m}}, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_m.$,est la dérivée au sens des distributions.$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)| .$$

$C^k(\Omega)$,$k \in \mathbb{N}$,désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega).$$

$C^{r,k}_{x,t}(\Omega)$,$k; r \in \mathbb{N}$,désigne l'espace des fonctions r fois continûment différentiable par rapport à x sur Ω et désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiable par rapport à t sur Ω. Naturellement on a $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ et $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

1.3 Théorèmes et formules fondamentaux

Nous rappelons ci-dessous quelques théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour l'étude des équations d'évolution.

Définition 1.1 *$(E, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach et F un fermé non vide de E.*
On dit qu'une application $f : F \to E$ est $\lambda-$contractante s'il existe une constante$\lambda \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall(x, y) \in F \times F, \| f(x) - f(y) \|\leq \lambda \| x - y \|$$

On dit aussi que f est $\lambda-$contractante.

Théorème 1.1 ***théorème de point fixe de banach***
Si $f : F \to F$ est une application $\lambda-$contractante avec $\lambda \in [0, 1[$, elle admet alors un unique point fixe α dans F

Preuve. Pour l'existence du point fixe, on montre que la suite $(x_n)_{n\in N}$ est suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$
Pour $q > p \geq 0$, on a :

$$\|x_q - x_p\| \leq \|x_q - x_{q-1}\| + \cdots \|x_{p+1} - x_p\|$$

avec pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| \\ &\leq \lambda \|x_k - x_{k-1}\| \leq \cdots \leq \lambda^k \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \|x_q - x_p\| &\leq \left(\sum_{k=p}^{q-1} \lambda^k \right) \|x_1 - x_0\| = \frac{\lambda^p (1 - \lambda^{q-p})}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\lambda^p}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \underset{p \to +\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

puisque $\lambda \in [0, 1]$.
La suite $(x_n)_{n \in N}$ est donc de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|)$ et en conséquence, elle converge vers un élément $\alpha \in F$ puisque E est complet et F fermé dans E. avec la continuité de f on déduit que $f(\alpha) = \alpha$, c'est-à-dire que α est un point fixe de f. ■

Théorème 1.2 ***(Le Théorème de la convergence dominée)***
Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, possédant chacune une intégrale de Riemann au sens généralisé sur $[a, b], a < b$. On suppose qu'il existe une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ possédant une intégrale de Riemann généralisée, ainsi qu'une partie $\chi \subset [a, b]$ vide, finie, ou infinie dénombrable, tels que :
1.pour tout $x \notin \chi$ la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est converge,
2.pour tout $x \notin \chi$, on a $\forall n \, |f(x)| \leq |g(x)|$.
Alors la limite

$$L = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

existe (et est finie).Si de plus on suppose qu'il existe $_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ possédant une intégrale de Riemann au sens généralisé et telle que $\lim f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \notin \chi$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Preuve. voir [...] ■

Semi-groupes de contractions

Définition 1.2 *Un semi-groupe $(S(t))_{t>0}$ fortement continu sur X est un semi-groupe de contractions si*

$$\|S(t)\| \leq 1$$

Théorème 1.3 *Un opérateur linéaire non borné $(A; D(A)$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*
(i) *A est fermé,*
(ii) *$D(A)$ est dense dans X,*
(iii) *pour tout $\lambda > 0$,$(\lambda I - A)$est une application bijective de $D(A)$sur X, et est $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Formule de Green

Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, alors la formule de Green s'écrit

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\, v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v. \tag{1.5}$$

Preuve. Voir H.Bresis[4] ∎

1.4 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

Théorème 1.4 *Soit $p \geq 1$ et q des nombres réels liés par la relation $p + \acute{p} = p\acute{p}$ alors $\forall u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)|\, dx \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(v)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.6}$$

Preuve. Voir Brezis[4] ∎

Inégalité de Young

Théorème 1.5 *Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, c]$ où $c > 0$ $f(0) = 0$, $a \in [0, c]$ et $b \in [0, f(c)]$, alors*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx, \tag{1.7}$$

où f^{-1} est la fonction inverse de f.

Preuve. (Voir Mitrinovic, Pecaric et Fink [18]). ■

La fonction $f(x) = x^{p-1}$avec $p > 1$ dans chaque intervalle $[0, c]$ satisfait les conditions précédentes. On applique (1.5) utilisant $p + \acute{p} = p\acute{p}$,on obtient

$$ab \leq \frac{a^{\acute{p}}}{\acute{p}} + \frac{b^p}{p}, \forall a; b \in \mathbb{R}^+.$$

Si on remplace la fonction $f(x)$ par εx^{p-1}dans (1.5) alors on obtient l'inégalité de **Young avec** ε

$$ab \leq \varepsilon X^p + C(\varepsilon) Y^{\acute{p}}, \forall X; Y \in \mathbb{R}^+$$

Inégalité de Gronwall

Théorème 1.6 *Soient ψ et y deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifant l'inégalité :*

$$\exists c \geq 0 \forall,\ t \in [a, b],\ y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s\ ) y(s) ds$$

alors

$$\forall t \in [a, b],\ \ y(t) \leq \varphi(t) + c \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds \right)$$

Preuve. voir [7] ■

L'inégalité de Ju

Pour tout fonction non négatif de Schwartz en la dimension $N \geq 1$ tel que $\delta \in [0, 2]$ et $q \geq 1$, (dans le cas général) on a :

$$(-\Delta)^{\delta/2} \Psi^q(x) \leq q \Psi^{q-1} (-\Delta)^{\delta/2} \Psi(x)\ \ , x \in \mathbb{R}^N$$

Preuve. voir [3] ■

1.5 Systémes de rèaction-diffusion

Dans un milieu continu, soient N espèces chimiques (où constituants fluides). On note $i = 1, 2, ..., N$ l'une de ces espèces, soient alors $u_i(x, t)$ sa concentration (où densité) au temps t et au point $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de R^n, et D_i son coeffecient de diffusion. Les concentrations $u_i(x; t)$ représentent les variable étudiée dans un modèle de réaction-diffusion dont l'évolution est régie par le système d'équation aux dérivées partielles suivantes, appelées équations de réaction diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta u = f(u), \tag{R-D}$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$ est l'inconnue

$$f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_m(x,t,u(x,t))),$$

est la réaction (généralement non linéaire) et $D(x,t,u(x,t))$ est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u.

En chimie u est un vecteur de concentrations chimiques et f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

En dynamiques des populations u représente le vecteur de densités des populations et f l'effet des relations prédateurs-proie, des relations compétitions où symbiose. Le terme $D\Delta u$ représente des mouvement aléatoire d'individus de la population étudiée (voir M. Kirane and S.Kouachi[24] , [20]et[21]).

En biologie par exemple, lors du transport sanguin du sucre $u = (u_1, u_2, u_3)$ désigne les concentrations respectives en sucre complexe (sucrose) et sucre simple (glucose et fructose)sucrose hydrolysis by acid

$$sucrose \underset{u_1 \to u_2 \oplus u_3}{\xrightarrow{hydrolysisbyasid}} glucose \oplus fructose$$

$f(u)$ représente les réactions chimiques sur les sucres et $D\Delta u$ désigne, comme toujours, le flux de ces sucres à travers la frontière de la surface où se produit cette réaction (voir Rothe[23] ,Morgan[24] , Feng[25]).

Définition 1.3 *Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations paraboliques non linéaires qui peuvent s'écrire sous la forme*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\triangle u = f(u),$$

où l'inconnue $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_m(x,t))^t$ *est un vecteur des variables dépendantes* $f(x,t,u) = (f_1(x,t,u), ..., f_m(x,t,u))^t$*est la réaction (généralement non linéaire) et* $D(x,t,u(x,t))$ *est une matrice carrée* $m * m$ *définie positive et diagonalisable appelée matrice de difusion*

Définition On dit qu'une fonction u de la variable réelle $t \geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (R-D), s'il existe u définie sur un intervalle maximale $[0, T^*)$ qui pour tout $t < T^*$ est l'unique solution de (R-D) dans $C^1([0, T^*), X)$.

En particulier, l'une des deux éventualités suivantes à lieu
i)$T^* = \infty$
ii)$T^* < \infty$ et $\lim\limits_{t \to T^*} \|u\| = \infty$
Remarque
-Si la propriété (i) est satisfaite, on dit que la solution u est globale.
-Si la propriété (ii) est satisfaite, on dit que la solution explose en temps fini.

1.6 Dérivation fractionnaire

Commençons d'abord par l'historique du concept ;nous connaissons que **Leibnitz** est l'inventeur De la notation $\frac{d^n y}{dx^n}$ mais en 1695 l'hôpital posa une question qui surprit leibnitz

La fonction Gamma

La fonction d'**Euler** est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes. Pour $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \tag{1.8}$$

la fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tout entier.
On a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et pour n entier on a $n! = \Gamma(n+1)$.

la fonction Béta

La fonction Béta est définie par
$\beta(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1} d\tau = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,avec $\mathrm{Re}(p) > 0$ et $\mathrm{Re}(q) > 0$.

Dérivation fractionnaire approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$,alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$\overset{Rp}{\underset{at}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.9}$$

La dérivée à droite, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par

$$\overset{Rp}{\underset{at}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.10}$$

La dérivée à gauche, de Riemann-Liouville, correspondante est définie par

$$\underset{tb}{\overset{Rp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \int\limits_{t}^{b} (\tau - t)^{n-p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.11}$$

Exemple 1.1 *La dérivée de* $\underset{t|T}{D^{\alpha}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l}$*au sens de Riemann-Liouville* $(0 \leq \alpha < 1)$

$$\underset{t|T}{D^{\alpha}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l} = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{1} \int\limits_{t}^{b} (\tau - t)^{-\alpha} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{l} d\tau.$$

On pose $\tau = \lambda T + (1-\lambda)\, t$ *,donc* $\tau = (T-t)\,\lambda + t$.

Donc

$$\begin{aligned}
\underset{t|T}{D^{\alpha}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l} &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} T^{-l} \frac{d}{dt} \int\limits_{0}^{1} \frac{(T-t)^{l+1} (1-\lambda)^{l}}{((T-t)\lambda)^{\alpha}} d\lambda, \\
&= -T^{-l} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} (T-t)^{l+1-\alpha} \int\limits_{0}^{1} (1-\lambda)^{l} \lambda^{-\alpha} d\lambda, \\
&= T^{-l} \frac{(l+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (T-t)^{l-\alpha} \int\limits_{0}^{1} (1-\lambda)^{l} \lambda^{-\alpha} d\lambda, \\
&= T^{-l} \frac{(l+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (T-t)^{l-\alpha} \beta(l+1, -\alpha+1), \\
&= T^{-l} (T-t)^{l-\alpha} \frac{\Gamma(l+1)}{(l+1-\alpha)\,\Gamma(l+1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Dérivation fractionnaire Approche de Caputo.

Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^{*}$) f est une fonction telle que $\frac{d^{n}}{dt^{n}} f \in L_{1}[a,b]$.
La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est défnie par

$$\underset{at}{\overset{Cp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int\limits_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.12}$$

La dérivée à droite, de Caputo, correspondante est définie par

$$\underset{at}{\overset{Cp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int\limits_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.13}$$

La dérivée à gauche, de Caputo, correspondante est définie par

$$\underset{tb}{\overset{Cp}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int\limits_{t}^{b} (\tau - t)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.14}$$

Propriétés

Relation entre dérivée de caputo avec la dérivée de Riemann Liouville

Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$)supposons que f est une fonction telle que $\overset{Cp}{\underset{at}{D}}$ et $\overset{Rp}{\underset{at}{D}}$ Existent alors

$$\overset{Cp}{\underset{at}{D}} f(t) = \overset{Rp}{D}_{at} \left[f(t) - f(0) \right]. \tag{1.15}$$

Chapitre 2

Modélisation des systèmes de réaction-diffusion

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier comment modéliser quelque phénomènes natureles biologiques , chimiques,population dynamique et pour la plus grande partie de ces phénomènes, on montre qu'on aboutit à des systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées classiques et dérivées fractionnaires

2.2 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion avec dérivées classiques

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (1), d'ailleurs qui est la même pour tous les phénomènes cités à l'introduction, puis nous donnons des exemples.
On considère une région bornée Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (qui peut être une surface géo-graphique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des rèactions se réalisent (ces réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire,d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).
Si on note par $u_i(x;t)$ la concentration de la i^{eme} espèce prenant part dans ces réactions, $f_i(x;t;u_1(x;t),...,u_m(x;t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t>0$ et soit J_i le fluux de ces espèces à travers la frontière $\partial\Omega$ de notre région Ω. Considérons un volume V ifiniment petit de la région de frontière $S=\partial V$. La vitesse de formation de la i^{eme} espèce dans le volume V est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface S, en termes d'équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{v} u_i(x;t)dx = \int\limits_{v} f_i(x;t;u_1(x;t),....,u_m(x;t))dx - \int\limits_{s} J_i d\sigma \tag{2.1}$$

après application directe du théorème de la divergence au terme désignant le flux on obtient

$$\int\limits_{v}(\frac{du_i}{\partial t} - f_i + \nabla.j_i)dx = 0 \tag{2.2}$$

puisque le volume V est ifiniment petit et arbitraire, on en déduit

$$\frac{du_i}{\partial t} + \nabla\cdot j_i = f_i \quad i=1,.....,m \tag{2.3}$$

Dans le cas d'une réaction chimique, le terme de réaction f_i vient de l'application (sur le plan microscopique) de la loi d'action des masses (ou loi de Gulberg et Waage).D'ailleurs dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable. Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick)

$$J_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\nabla u_j \tag{2.4}$$

où

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$$

est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion on obtient en substituant (2.4) dans (2.3), on obtient

$$\frac{du_i}{\partial t} + \nabla\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\nabla u_j\right) = f_i \tag{2.5}$$

normalement les a_{ij}sont constants, quoi qu'ils peuvent dependre de t, x et u; aussi on va considerer des termes de réactions dépendants seulement de u; dans ce cas on a

$$\frac{du}{\partial t} + A\Delta u = f(u) \tag{2.6}$$

où $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ est une matrice non diagonale, ses termes sont les coefficients de diffusion. a_{ij} caractérise la diffusion de u_i dans u_j Dans ce cas on a affaire à ce qu'on appelle croisement de diffusion entre les densités u_i (En anglais : cross diffusion).

Remarque 2.1 *Par un simple changement de variables linéaires, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale$D = diag(d_1, ..., d_m)$avec $d_i > 0; i = 1, ..., m$ le système (2.6) devient :*

$$\frac{du}{\partial t} + D\Delta v = g(v) \tag{2.7}$$

Remarque 2.2 *Remarquant que, pour établir (2.5), on a simplfié plusieurs termes, si non on aboutirait à des équations très compliquées et difficiles à étudier .*

2.3 Exemples

2.3.1 En chimie

Peut-être la plus grande source de problèmes intéressants dans ce domaine est la modélisation des réactions chimiques multispéciques.Nous considérons un mécanisme général de réaction de la forme

$$\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + .. + \mu_k R_K \leftrightarrows^{k_f}_{k_r} \upsilon_1 P_1 + \upsilon_2 P_2 + .. + \upsilon_t P_t \tag{2.8}$$

Ici, les R_i et P_i représentent les réactifs et les espèces produits respectivement,et μ_i ,$\upsilon_i \in N$ pour chaque i. Maintenant, si nous mettons $\mu_i = [R_i]$et $\upsilon_i = [P_i]$ nous faire (l'entier non négatif) avant et arrière des taux de réaction, respectivement, alors nous pouvons modéliser le processus par l'application de la loi de la conservation de la masse et de la seconde loi de Fick (débit) par le système deRéaction-Diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_j}{\partial t} - \nabla.\left(d_i \nabla U\right) = \mu_i \left(k_r \prod_{j=1}^{n} V_j^{\upsilon_j} - K_f \prod_{j=1}^{n} U_j^{\mu j}\right), i = 1..k \\ \frac{\partial V_j}{\partial t} - \nabla.\left(d_i \nabla V\right) = \mu_i \left(k_r \prod_{j=1}^{n} U_j^{\upsilon_j} - K_f \prod_{j=1}^{n} V_J^{\upsilon_J}\right), i = 1..l \end{cases} \tag{2.9}$$

Nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné Ω de frontière suffusamment régulière $\partial\Omega$

remarque La matrice diagonale D peut dépendre de t, x et u, comme il peutne pas être diagonale (c'est le cas lorsque la diffusion d'une espèce affecte le rythme deproduction des autres).

Par exemple, considérons la réaction réversible suivante apparemment simple,dontlaquelle le dioxyde de soufre réagit avec l'oxygène pour former le trioxyde de soufre :

$$2SO_2 + O_2 \leftrightarrows^{k_f}_{k_r} 2SO_3$$

Si nous fixons $u = [SO_2]$, $v = [O_2]$, et $w = [SO_2]$, puis cette réaction, dans l'hypothèse d'une action massive cinétique, peut être modélisée par le système deréaction-difusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla.\left(d_1 \nabla U\right) = 2\left(k_r w^2 - k_f u^2 v\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla.\left(d_2 \nabla v\right) = \left(k_r w^2 - k_f u^2 v\right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \nabla.\left(d_3 \nabla w\right) = 2\left(k_r u^2 v - k_f w^2\right) \end{cases} \tag{2.10}$$

Avec conditions initiales non négatives L^∞ et conditions aux bords homogènes de $Neumann$ .Ici, les d_i sont les coefficients positifs de diffusion et k_f, k_r sont respectivement les coefficients positifs avant et arrière de réaction et nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné Ω de frontière suffusamment régulière $(voir Hollis et Morgan\,[25])$

Pour la réaction de l'eau, par exemple, on prend dans (2.8)

$$p = 3; I = \{1, 2\}\,; J = \{3\}\,; n_1 = n_3 = 2 et n_2 = 1; R_1 = hydrogène, R_2 = oxygène et R_3 = l'eau,$$

on obtient la réaction classique

$$2H_2O + O_2 \underset{l}{\overset{h}{\leftrightarrows}} 2H_{2O}$$

Les équations décrivantes cette réaction s'écrivent alors

$$\begin{cases} \frac{\partial[H_2]}{\partial t} - \left(d_1\,[H_2]\right) = 2\left(-h\,[H_2]^2\,[O_2] + l\,[H_2O]^2\right) \\ \frac{\partial[O_2]}{\partial t} - \left(d_2\,[O_2]\right) = \left(-h\,[H_2]^2\,[O_2] + l\,[H_2O]^2\right) \quad x \in \Omega, t \geq 0 \\ \frac{\partial[H_2O]}{\partial t} - \left(d_1\,[H_2O]\right) = 2\left(h\,[H_2]^2\,[O_2] - l\,[H_2O]^2\right) \end{cases} \tag{2.11}$$

avec conditions aux bords appropriées(par exemple$\frac{\partial[H_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial[O_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial[H_2O]}{\partial \eta} = 0$, $t > 0, x \in (d\Omega)$et conditions initiales positives (i.e)

$$[H_2]_{t=0} = [H_2]_0 > 0, [O_2]_{t=0} = [O_2]_0 > 0, [O_2]_{t=0} > 0 \tag{2.12}$$

Les coefficients h et l sont supposés des constantes positives, quoi qu'ils peuvent dépendre de la température

$$h, l \approx cT^\beta \exp\left(\frac{E}{R}T\right), 1 \leq \beta \leq 2$$

voir Hollis $[27]$ et J.Morgan $[15]$avec différentes conditions aux bords.

2.3.2 En physique nucléaire

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le système de réaction diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(av - b) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + cv \end{cases} \quad sur \Omega \times (0, +\infty) \tag{2.13}$$

avec conditions aux bords homogènes de Newman et conditions initiales positives. On montre que (voir Pao [24]),pour $a > 0, b > 0 et \ \ c > 0,$la solution du système avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini (cesse d'exister). Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} - \sigma u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_{xx} - \sigma v \end{cases} \quad sur \ (0, 1) \times (0, +\infty) \tag{2.14}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \begin{cases} u_x\left(0, t\right) = \alpha g_1\left(v\left(0, t\right)\right) \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u_x\left(0, t\right) = 0 \\ u_x\left(1, t\right) = \alpha g_2\left(u\left(1, t\right)\right) \end{cases} \end{cases} \quad , \ t \geq 0 \tag{2.15}$$

et conditions initiales positives. Ce modèle a été étudié par $Pao[6]$, $Thomas\&Aronson[27]$ et $Turner\&Ames[6]$

2.4 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion avec dérivées fractionnaires

Dans certains fluides complexes, le mouvement Brownien peut être gêné à cause de la compositionmême du milieu.

On observe aussi que la moyenne carrée des déplacements de particules n'obéit pas toujours àla loi ci dessus dans des fluides homogènes ne présentant pas cette anomalie, comme l'eau parexemple, lorsqu'ils sont le siège d'un champ de vitesse non uniforme à l'échelle macroscopique.

Pensons à un écoulement poiseuille de vitesse moyenne V dans un tuyau cylindrique.Taylor $[15]$ a démontré que les déplacement effectués par un traceur sur de petits intervalles detemps t vérifient

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle = \alpha.t^{\frac{1}{2}}$$

pour des durées t appartenant à un intervalle fini, au du quel on obtient

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle = D.t$$

avec $D = D_m + K\left(\frac{vd}{D_m}\right)^2$ d étant le diamètre du tuyau
On voit que l'interaction entre la diffusion de soluté et un champ des vitesses non uniforme a uneffet non trivial en termes de transport.
Des expériences en milieux poreux ont suggéré que [18]

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = D_\alpha.t^\alpha, \alpha \neq 1$$

D_α est le coefficient de la diffusion géneralisée.
Lorsque $\alpha > 1$, on parle de super-diffusion ou diffusion renforcée, et pour $\alpha < 1$; on a ce qu'on appelle une sub-diffusion ou diffusion réduite. Ces processus sont souvent non Gaussiens.
Sous certaines conditions, on a suggéré que la diffusion simple (sans influence de l'environnement extérieur) anormale peut être décrite par une équation généralisée de la forme [16], [25]

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} p(x,t) = D_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}$$

où α et β sont des nombres réels,$D_{\alpha,\beta}$ est le coefficient de diffusion généralisé et les opérateurs différentielles dans les membres de gauche et de droite de l'équation sont les opérateurs dedérivation fractionnaire de Riemann-Liouville.

Chapitre 3

Propriétés qualitatives des solutions des équations différentielles fractionnaires

3.1 Introduction

On s'intéresse, dans ce chapitre, à l'étude de l'existence locale et l'existence globale des solutions et l'explosion des solutions pour une équation de spatio-temporellement, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(s)ds \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

et on établit des conditions nécessaires pour l'existence locale et l'existence globale des solutions

3.2 Existence locale

Cette section est consacrée à prouver l'existence locale et l'unicité de solution douce au problème (2). soit $T(t) := e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}}$.Comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint positif de $L^2(\mathbb{R}^N)$ $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ généré par la puissance fractionnaire $(-\Delta)^{\beta/2}$ $(voir Yosida[9])$: nous commençons par donner :

Définition 3.1 *(solution douce).Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \beta \leq 2$ et $T > 0$ nous dire que $u \in C([0,T], C_0))$ est une solution douce du problème (2) si u satisfait l'équation d'intégrale suivante :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) j_{0|s}^{\alpha} \left(|u|^{p-1} u \right) ds, \qquad t \in [0,T] \tag{3.1}$$

Théorème 3.1 *(Existence locale). Donné $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N$ et $p > 1$,il existe un temps maximal $T_{\max} > 0$ et une solution douce unique $u \in C([0, T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ au problème (2). De plus $T_{\max} = \infty$ ou sinon $T_{\max} < \infty$ et $\|u\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^N)} \to \infty$,comme $t \to T_{\max}$.,de plus si $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$, alors $u(t) > 0$ pour tout $0 < t < T_{\max}$.*
De plus , si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq r < \infty$, alors $u \in C([0, T_{\max}], L^r(\mathbb{R}^N))$

Preuve. Pour arbitrairement $T > 0$, on definit l'espace de Banach

$$E_T := \left\{ u \in L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N)); \|u\|_1 \leq 2\|u_0\|_{L^\infty} \right\},$$

ou $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^\infty((0,t)),C_0(\mathbb{R}^N))}$ .Ensuite, pour tout $u \in E_t$ on difinit

$$\Psi(u) := T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) j_{0|s}^{\alpha} \left(|u|^{p-1} u \right) ds$$

Nous prouvons l'existence locale par le théorème du point fixe de Banach

• $\mathbf{\Psi(u)} : \mathbf{E_T} \to \mathbf{E_T}$: soit $u \in E_T$,alors on obtient avec $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_1 &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{\| 1}{\Gamma(1-\gamma)} \; \| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_\infty^P \, d\sigma ds \; \|_{L^\infty(0,T)} \\
&= \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \; \| \int_0^t \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_\infty^P \, d\sigma ds \; \|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \frac{T^{2-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma)} \|u\|_1^p \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \frac{T^{2-\gamma} 2^p \|u_0\|_{L^\infty}^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} \|u_0\| .
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons T assez petit comme ça

$$\frac{T^{2-\gamma}2^p \left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}}{\Gamma(3-\gamma)} \leq 1 \tag{3.2}$$

Nous concluons que $\left\|\Psi(u)\right\|_1 \leq 2\left\|u_0\right\|_\infty$, Et ensuite $\Psi(u) \in E_T$.

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi(u)-\Psi(v)\right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \; \| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \; \| \, |u|^{p-1} u(\sigma) - |v|^{p-1} v(\sigma) \, \|_\infty \, d\sigma ds \, \|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \; \| \int_0^t \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma} \; \| \, |u|^{p-1} u(\sigma) - |v|^{p-1} v(\sigma) \, \|_\infty \, d\sigma ds \, \|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq \frac{T^{2-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \, \| \, |u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \, \|_1 \\
&\leq \frac{C(p)2^p \left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1} T^{2-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \, \| \, u-v \, \|_1 \\
&\leq \frac{1}{2} \, \| \, u-v \, \|_1,
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante :

$$| \, |u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v \, | \leq C(p) \mid u-v \mid (|u|^{p-1} - |v|^{p-1}) \tag{3.3}$$

on choisi T tel que

$$\frac{T^{2-\gamma}2^p \left\|u_0\right\|_\infty^{p-1} \max(2C(p),1)}{\Gamma(3-\gamma)} \leq 1. \tag{3.4}$$

Ensuite, par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution douce $u \in \Pi_T$, où $\Pi_T =:$ $L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$,au problème (2). ■

•Unicité :

Si u,v sont deux solutions douces dans E_T pour certains $T>0$ en utilisant (3.3),nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|u(t)-v(t)\right\|_\infty &\leq \frac{C(p)2^p \left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\|u(\sigma)-v(\sigma)\right\|_\infty d\sigma ds \\
&= \frac{C(p)2^p \left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left\|u(\sigma)-v(\sigma)\right\|_\infty d\sigma ds \\
&= \frac{C(p)2^p \left\|u_0\right\|_{L^\infty}^{p-1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (s-\sigma)^{1-\gamma} \left\|u(\sigma)-v(\sigma)\right\|_\infty d\sigma
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unicité découle de l'inégalité de Gronwall $(voir.[6])$.

Ensuite, en utilisant l'unicité des solutions, nous concluons l'existence d'une solution dans l' intervalle maximal $[0, T_{\max})$ où $T_{\max} := \sup\{t > 0;$ il existe une solution douce $u \in \Pi_T$ on $(1,1)\} \leq +\infty$ en utilisant la continuité du semi-groupe $T(t)$, On peut facilement conclure que :

$$u \in C([0.T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$$

de plus si, $0 \leq t \leq t + \tau < T_{\max}$ utilisant (3.1) , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u(t+\tau) &= T(\tau)u(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t T(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(t+\sigma) d\sigma ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t T(\tau-s) \int_0^t (t+s-\sigma)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour prouver que $\| \ u(t) \ \|_{L^\infty} \to \infty$ tel que $t \to T_{\max}$, quand $T_{\max} < \infty$,nous procédons par contradiction. supposons que u soit une solution de (3.1) sur un certain intervalle $[0, T)$ avec $\| \ u(t) \ \|_{L^\infty((0.T)\times\mathbb{R}^N)} \to \infty$ et $T_{\max} < \infty$ .on utilisant le dernier terme dans $(3,5)$ dépend uniquement des valeurs de u dans l'intervalle $(0, t)$ et on utilisant une autre fois un argument de point fixe , nous concluons que u peut être étendu à une solution sur un certain intervalle $[0, T')$ avec $T' > T$: si nous répétons cette itération, on obtient une contradiction avec le fait que le temps maximal $T_{\max}$ est borné.

Preuve. Positivité des solutions

si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \neq 0$, alors nous pouvons construire une solution non négative sur un certain intervalle $[0, T]$ en appliquant l'argument de point fixe dans l'ensemble $E_T^+ = \{u \in E_T; u \geq 0\}$,En particulier, il résulte de (3.1) que $u(t) \geq T(t)u_0 > 0$ dans $(0, T]$ Il n'est pas difficile par l'unicité d'en déduire que u reste positif dans $(0, T_{\max})$.

Régularité

Si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N) \cap C_0(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq r < \infty$, puis en répétant l'argument de point fixe dans l'espace $E_{T,r} := \left\{ u \in L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)); \|u\|_1 \leq 2\|u_0\|_{L^\infty}, \|u\|_{\infty,r} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty} \right\}$.
Au lieu de E_T ; où $\|\cdot\|_\infty := 2\|\cdot\|_{L^\infty((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))}$ et on estimant $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u^p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ dans l'argument de cartographie de contraction, on utilisant la formule suivante :

$$\|S_\beta(t) * v\|_q \leq Ct^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|v\|_r, \tag{3.6}$$

tel que $S_\beta(t)$ peut être représenté par la transformation de Fourier suivante :

$$S_\beta(t)(x) := S_\beta(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix.\xi - t|\xi| d\xi},$$

nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$; nous concluons que :

$$u \in C([0, T_{mx}), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)). \tag{3.7}$$

■

3.3 Explosion des solutions

Nous disons que u est une solution globale si $T_{\max} = \infty$; lorsque $T_{\max} < \infty$, on dit qu'il exploser dans un temps fini et dans ce cas, nous avons $\|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ tel que $t \to T_{\max}$.
Maintenant, nous voulons dériver un résultat explosif pour l'équation. (2). Notre argument utilise la solution faible .

Définition 3.2 *(solution faible). soit* $u_0 \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), 0 < \beta \leq 2$ *et* $T > 0$ *,on dit que* u *est une solution faible du problème* (2) *si* $u \in L^p((0,T), L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N))$ *vérifie l'équation :*

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t u_0(x)\varphi(x,0) + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} j^\alpha_{0|s}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)\varphi(x,t) \\ = \; &\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi(x,t) - \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_t(x,t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour tout support compact $\varphi \in C^1([0,T], H^\beta\mathbb{R}^N))$ *tel que* $\varphi(\cdot,T) = 0$ *, où* $\alpha := 1-\gamma \in (0,1)$

Lemme 3.1 *Considérons* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ *et soit* $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *est une solution douce de* (2) *; alors* u *est une solution faible de* (2)*, pour tout* $0 < \beta \leq 2$ *et pour tout* $T \geq 0$

Preuve. Soit $T > 0$, $0 < \beta \leq 2$, $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et soit $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution de (3.1). Donné $\varphi \in C^1([0,T], H^\beta\mathbb{R}^N)$ tel que $supp\, \varphi$ est compact avec $\varphi(\cdot,T) = 0$ puis multiplié (3.1) par φ et l'intégration sur $\mathbb{R}^N$,on a :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0\varphi(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^t (T(t-s)j^\alpha_{0|s}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)ds)\varphi(x,t),$$

nous différencions pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi(x,t) \;&=\; \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(T(t)u_0(x)\varphi(x,t)) \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}\int\limits_0^t T(t-s)j^\alpha_{0|s}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)ds\varphi(x,t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Maintenant, en utilisant la formule suivante :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^{\beta/2}v(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v(x)(-\Delta)^{\beta/2}u(x)dx, \tag{3.10}$$

et une propriété du semi-groupe ; on a :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}(T(t)u_0(x)\varphi(x,t)) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} A(T(t)u_0))\varphi(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)\varphi_t(x,t) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)A\varphi(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} T(t)u_0(x)\varphi(x,t),\end{aligned} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt}\int\limits_0^t T(t-s)f(x,s)ds\varphi(x,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\varphi(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^t A(T(t-s)f(x,s))ds\varphi(x,t) \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^t T(t-s)f(x,s))ds\varphi_t(x,t) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,s))ds\varphi(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^t T(t-s)f(x,s)dsA\varphi(x,t) \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_0^t T(t-s)f(x,s)ds\varphi_t(x,t),\end{aligned} \tag{3.12}$$

où $f := j^{\alpha}_{0|s}\left(|u|^{p-1}u\right) \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$.
Ainsi, on utilisant (3.1), (3.4) et (3.10), nous concluons que (3.11) implique que

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t u(x,t)\varphi(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)A\varphi(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\varphi(x,t).$$

Nous concluons on intégrant dans le temps $[0,T]$ et on utilisant le fait que $\varphi(\cdot,T)=0$. ■

Théorème 3.2 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tel que $u_0 \geq 0$ et $u_0 \neq 0$ si :*

$$p \leq 1 + \frac{\beta(2-\gamma)}{(N-\beta+\beta\gamma)_+} := p^* oup < \frac{1}{\gamma}, \tag{3.13}$$

Pour touts les $\beta \in (0,2]$, puis la solution douce de (2) explosion dans un temps fini.
Notant que dans le cas où $p = p^*$ et $\beta \in (0,2)$ on prend $p > \frac{N}{(N-\beta)}$ avec $N > \beta$.

Preuve. La preuve est par contradiction. supposons que u est une solution globale douce pour (2), alors u est une solution de (2) dans $C([0,T^\circ, C_0(\mathbb{R}^N))$ pour touts les $T >> 1$ tel que $u(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Puis, en utilisant Lemme (3.1), nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0) + \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^T j_{0|t}^{\alpha}\left(|u|^p\right)(x,t)\varphi(x,t) &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi(x,t) \\ &\quad -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t).\end{aligned}$$

Pour toutes les fonctions de test $\varphi \in C^1([0,T],H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$,tel que $supp\ \varphi$ est compact avec $\varphi(\cdot,T) = 0$, ou $\alpha := 1-\gamma \in (0,1)$.

Maintenant, nous prenons $\varphi(x,t) = D_{t|T}^{\alpha}(\widetilde{\varphi}) := D_{t|T}^{\alpha}\left((\varphi_1 \mid (x)^l\varphi_2(t)\right)$ avec $\varphi_1(x) := \Phi(|x|/T^{1/\beta}), \varphi_2(t) := (1-t/T)_+^{\eta}$ ou $l \geq p/(p-1)$, $\eta \geq \max\left\{(\alpha p+1)/(p-1); \alpha+1\right\}$ et Φ,une fonction non négative et non croissante tel que :

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & si\ r \geq 2, \end{cases}$$

$0 \leq \Phi \leq 1, |\Phi'| \leq C_1/r,$ pour tout $r > 0$,on utilisant la formule suivante :

$$\left(D_{0|t}^{\alpha}w_1\right)(T) = 0, \left(D_{0|t}^{\alpha}w_1\right)(0), \tag{3.14}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} u_0(x)D_{t|T}^{\alpha}\widetilde{\varphi}(x,0) + \int_{\Omega_T} j_{0|s}^{\alpha}u^p(x,t)D_{t|T}^{\alpha}\widetilde{\varphi}(x,t) \\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}D_{t|T}^{\alpha}\widetilde{\varphi}(x,t) - \int_{\Omega_T} u(x,t)DD_{t|T}^{\alpha}\widetilde{\varphi}(x,t)\end{aligned} \tag{3.15}$$

ou $\Omega_T := [0,T]$ pour $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 2T^{1/\beta}\right\}$, $\int_{\Omega} = \int_{\Omega} dx$ et $\int_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} dsdt.$

De plus, on utilisant (3.14) et la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^T \left(D_{t|t}^{\alpha}f\right)(t)g(t)dt = \int_0^T f(t)\left(D_{t|t}^{\alpha}g\right)(t)dt,$$

dans le côté gauche de (3.13) et dans le côté droit de :

$$-DD_{t|T}^{\alpha}f = D_{t|T}^{\alpha+1}\ , \tag{3.16}$$

, on obtient

$$\begin{aligned}&CT^{-\alpha}\int_{\Omega} u_0(x)\ \varphi_1^l(x) + \int_{\Omega} D_{t|T}^{\alpha}D_{t|T}^{\alpha}(u^p)(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\widetilde{\varphi}(x,t) + \int_{\Omega_T} u(x,t)D_{t|T}^{\alpha+1}\widetilde{\varphi}(x,t)\end{aligned} \tag{3.17}$$

De plus, on utilisant (2.13), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) + CT^{-\alpha}\int_{\Omega_T} u_0(x)\varphi_1^l(x) \\
= \ &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_1^l(x)D_{t|T}^{\alpha}\varphi_2(t) + \int_{\Omega_T} u(x,t)D_{t|T}^{\alpha+1}\widetilde{\varphi}(x,t).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité de ju $(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1^l) \leq l\varphi_1^{l-1}(\varphi_1)(-\Delta)^{\beta/2}(\varphi_1)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) + CT^{-\alpha}\int_{\Omega_T} u^p(x,t)\varphi_1^l(x,t) \\
\leq \ & C\int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_1^{l-1}(x)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_1(x)D_{t|T}^{\alpha}\varphi_2(t)\right. \\
&+\int_{\Omega_T} u(x,t)\varphi_1^l(x)\left|D_{t|T}^{\alpha+1}\varphi_2(t)\right| \\
= \ & C\int_{\Omega_T} u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}\widetilde{\varphi}_1^{l-1}(x)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_1(x)D_{t|T}^{\alpha}\varphi_2(t)\right| \\
&+\int_{\Omega_T} u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}\widetilde{\varphi}_1^{l}(x)\left|D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_2(t)\right|.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Par conséquent, on utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2p}a^p + \frac{2^{\widetilde{p}-1}}{\widetilde{p}}b^{\widetilde{p}} \quad \text{ou} \quad p\widetilde{p} = p + \widetilde{p}\ \ , a > 0, b > 0, p > 1, \widetilde{p} > 1 \tag{3.19}$$

avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}, \\ b = \widetilde{\varphi}^{1/p}\varphi_1^{l-1}(x)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_1(x)D_{t|T}^{\alpha}\varphi_2(t)\right| \end{cases}$$

dans l'intégrale première de la partie droite de (3.18), et avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}, \\ b = \widetilde{\varphi}^{-1/p}\varphi_1^{l}(x)\left|\ D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_2(t)\right| \end{cases}$$

dans la seconde intégrale du côté droit de (3.18), nous obtenons

$$(1-\frac{1}{p})\int\limits_{\Omega_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \tag{3.20}$$

$$\leq C\int\limits_{\Omega_T} (\varphi_1(t))^{l-\widetilde{p}}(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{p-1}}\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_1(x)D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}}$$

$$+C\int\limits_{\Omega_T} (\varphi_1(t))^{l}(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{p-1}}\left|D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}} \tag{3.21}$$

comme $u_{0\geq 0}$, nous présentons les variables :$\tau = T^{-1}t, \xi = T^{-1/\beta}x$ en utiliser les deux formules suivantes

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{t|T}w_1(t) &= \frac{(1-\alpha+\sigma)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\sigma)}T^{-\alpha}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\sigma-\alpha}_{+} \\ D^{1+\alpha}_{t|T}w_1(t) &= \frac{(1-\alpha+\sigma)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\sigma)}T^{-(\alpha+1)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\sigma-\alpha}_{+} \end{aligned}$$

tel que $w_1(t) = (1-t/T)^{\sigma}_{+}, t \geq 0, \sigma >> 1$;dans le côté droit de (3.24), pour obtenir :

$$\int\limits_{\Omega_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \leq CT^{-\delta} \tag{3.22}$$

ou $\delta := (1+\alpha)\widetilde{p}-1-(N/\beta), C = (|\Omega_1|, |\Omega_2|), (|\Omega_i|$ représente la mesure de Ω_i, pour $i = 1, 2$),avec

$$\Omega_1 := \left\{\xi \in \mathbb{R}^N; |\xi| \leq 2\right\}, \Omega_2 := \{\tau \geq 0; \tau \leq 1\}$$

Maintenant, en notant que :

$$p \leq p^* \text{ ou } p < \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \delta \geq 0 \text{ ou } p < \frac{1}{\gamma}, \tag{3.23}$$

Il faut distinguer trois cas :

• Le cas $p < p^*(\delta > 0)$: Nous passons à la limite dans (3.22), comme T passe à ∞ ; on a

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_{|x|\leq 2T^{1/\beta}} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t)dxdt = 0.$$

En utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, la continuité dans le temps et espace de u et le fait que $\widetilde{\varphi}(x,t) \to 1$ comme $T \rightharpoonup \infty$, nous déduisons que :

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^p(x,t)dxdt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0,$$

ce qui est une contradiction

• Le cas $p = p^*(\delta = 0)$: en utilisant l'inégalité(3.16) avec $T \rightharpoonup \infty$ et on prend le fait que $p = p^*$, on a d'une part

$$u \in L^p((0.\infty), L^p(\mathbb{R}^N)), \tag{3.24}$$

d'autre part, en répétant le même calcul que ci-dessus en prenant cette,fois-ci $\varphi_1(x) := \Phi(|x| / (B^{-1/\beta}T^{1/\beta}))$ où $1 \leq B \leq T$ est suffisamment important pour que lorsque $T \rightharpoonup \infty$ nous n'avons pas $B \rightharpoonup \infty$ en même temps, on a :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \leq CB^{-N/\beta} + CB^{-N/\beta+\widetilde{p}}, \tag{3.25}$$

grâce à la rescalant suivante : $\tau = T{-}1t, \xi = (T/B)^{-1/\beta}x$, ou $\Sigma_T := [0,T]\times\left\{x \in \mathbb{R}^N \; ; |x| \leq 2B^{-1/\beta}T^{1/\beta}\right\}$ et $\displaystyle\int_{\Sigma_T} = \int_{\Sigma_T} dxdt$.ainsi, en utilisant $p > N/(N-\beta)$ et de prendre les limites lorsque $T \rightharpoonup \infty$ et $B \rightharpoonup \infty$, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x,t)dxdt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0,$$

ce qui est une contradiction.

On notera que, dans le cas $\beta = 2$ ne soit pas nécessaire de prendre la condition $p > N/(N-\beta)$ avec $N > \beta$. En effet,à partir de (3.18) avec la nouvelle fonction φ_1 nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \qquad (3.26)\\
\leq \quad & C\int_{\Sigma_T} u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}\ \varphi_1(x))^l \left|D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right| \\
& +C\int_{\Delta_\beta} u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}(\ \varphi_1(x))^{l-1} \left|\Delta_x\varphi_1(x)\ D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|,
\end{aligned}$$

où

$$\Delta_\beta = [0,T] \times \left\{x \in \mathbb{R}^N \quad ; \quad B^{-1/2}T^{1/2} \leq |x| \leq 2B^{-1/2}T^{1/2}\right\} \subset \Sigma_T et \int_{\Delta_\beta} = \int_{\Delta_\beta} dxdt.$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2p}a^p + \frac{2}{\widetilde{p}}b^{\widetilde{p}} \quad \text{ou } p\widetilde{p} = p + \widetilde{p}, a > 0, p > 1, \widetilde{p} > 1, \tag{3.27}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{c} a = u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}, \\ b = \widetilde{\varphi}^{-1/p}(\varphi_1^l(x))^l \left| D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|, \end{array} \right. ,$$

dans la première intégrale du côté droit de (3.22), nous obtenons

$$\int_{\Delta_\beta} ab \leq \left(\int_{\Delta_\beta} a^p\right)^{1/p} \left(\int_{\Delta_\beta} b^{\widetilde{p}}\right)^{1/\widetilde{p}}, \quad \text{ou } p\widetilde{p} = p + \widetilde{p}, a > 0, b > 0, p > 1, \widetilde{p} > 1,$$

avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\widetilde{\varphi}^{1/p}, \\ b = \widetilde{\varphi}^{-1/p}(\varphi_1(x))^{l-1}\left|\Delta_x\varphi_1(x)D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|, \end{cases},$$

dans la seconde intégrale du côté droit de (3.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} &(1-\frac{1}{p})\int_{\Sigma_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \\ \leq\ & C\int_{\Sigma_T} (\varphi_1(x))^l(\varphi_2(x))^{-\frac{1}{p-1}}\left|D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}}, \end{aligned}$$

$$\left(\int_{\Delta_\beta} u^p\widetilde{\varphi}\right)^{1/p}\left(\int_{\Delta_\beta} (\varphi_1(x))^{l-\widetilde{p}}\left((\varphi_2(x))^{-\frac{1}{p-1}}\left|\Delta_x\varphi_1(x)D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}}\right)^{1/\widetilde{p}}, \tag{3.28}$$

à partir de $\tau = T^{-1}t, \xi = (T/B)^{-1/2}x$, et le fait que $\delta = 0$, nous obtenons

$$\int_{\Sigma_T} u^p(x,t)\widetilde{\varphi}(x,t) \leq CB^{-N/2} + CB^{-\frac{N}{2p}+1}\left(\int_{\Delta_\beta} u^p\widetilde{\varphi}\right)^{1/p}. \tag{3.29}$$

Maintenant, comme

$$\lim_{T\to\infty}\left(\int_{\Delta_\beta} u^p\widetilde{\varphi}\right)^{1/p} = 0\,(\text{de}(3.24)),$$

passant à la limite dans (3.29), comme $T \rightharpoonup \infty$, nous obtenons :

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u^p(x,t)dxdt \leq CB^{-N/2}.$$

Nous concluons que $u = 0$ on prenant la limite lorsque B va à l'infini :contradiction.

•Pour le cas $p < 1/\gamma$, on répète le même argument que dans le cas $p < p^*$ on choisissant cette fois, la fonction de test comme suit $\varphi(x.t) = D^{\alpha}_{t|T}\overline{\varphi}(x,t) := D^{\alpha}_{t|T}(\varphi_3^l(x)\varphi_4(t))$ où $\varphi_3(x) = \Phi(|x|/R)$,

$\varphi_4(x) = (1 - t/T)_+^\eta$ et $R \in (0.T)$ suffisamment important que lorsque $T \rightharpoonup \infty$ on a pas $R \rightharpoonup \infty$ en même temps ; la fonction Φ est la même que ci-dessus. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \int\limits_{C_T} u^p(x,t)\overline{\varphi}(x,t) + CT^{-\alpha}\int\limits_{C} (\varphi_3(x))u_0(x) \\ \leq\ & C\int\limits_{C_T} u(x,t)\overline{\varphi}^{1/p}\overline{\varphi}^{-1/p}(\varphi_3(x))^l \left| D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_4(t)\right| \\ & +C\int\limits_{C_T} u(x,t)\overline{\varphi}^{1/p}\overline{\varphi}^{-1/p}(\varphi_3(x))^{l-1}\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_3(x)D_{t|T}^{\alpha}\varphi_4(t)\right|, \end{aligned} \tag{3.30}$$

tel que $C_T := [0.T] \times C$ pour $C := \left\{x \in \mathbb{R}^N ; |x| \leq 2R\right\}$, $\int\limits_{C_T} = \int\limits_{C_T} dx$ et $\int\limits_{C_T} = \int\limits_{C_T} dxdt$. Maintenant, par l'inégalité de Young (3.17) avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\overline{\varphi}^{1/p}, \\ b = \overline{\varphi}^{-1/p}(\varphi_3(x))^l \left| D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_4(t)\right| \end{cases},$$

dans l'intégrale première de la partie droite de (3.30), et avec

$$\begin{cases} a = u(x,t)\overline{\varphi}^{1/p}, \\ b = \overline{\varphi}^{-1/p}(\varphi_3(x))^{l-1} \left| (-\Delta)^{\beta/2}\varphi_3(x)D_{t|T}^{1}\varphi_4(t)\right|, \end{cases},$$

dans la seconde intégrale du côté droit de $(4,24)$ et on utilisant la positivité de u_0, nous obtenons

$$\begin{aligned} (1-\frac{1}{p})\int\limits_{C_T} u^p(x,t)\overline{\varphi}(x,t) \ \leq\ & C\int\limits_{C_T} (\varphi_3(x))^l(\varphi_4(x))^{-\frac{1}{p-1}}\left|D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_4(t)\right|^{\widetilde{p}} \\ & +C\int\limits_{C_T} (\varphi_3(x))^{l-\widetilde{p}}(\varphi_4(x))^{-\frac{1}{p-1}}\left| (-\Delta_x)^{\beta/2}\varphi_3 D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_4(t)\right|^{\widetilde{p}}. \end{aligned}$$

Ensuite, les nouvelles variables $\xi = R^{-1}x, \tau = T^{-1}t$ nous permettent d'obtenir l'estimation :

$$\int\limits_{C_T} u^p(x,t)\overline{\varphi}(x,t)dxdt \leq CT^{1-(1+\alpha)\widetilde{p}}R^N + CT^{1-\alpha\widetilde{p}}R^{N-\beta\widetilde{p}}.$$

Prendre la limite comme $T \rightharpoonup \infty$,on déduit, comme $p < 1/\gamma \Longleftrightarrow 1 - \alpha\widetilde{p}$ que :

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,t)^p(\varphi_3(x))^l)dxdt = 0$$

Enfin, on prenant $R \rightharpoonup \infty$; nous obtenons une contradiction que $u(x,t) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$

Remarques.

(**1**) Nous pouvons étendre notre analyse à l'équation :

$$u_t = -(-\Delta)^{\beta/2}u + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t \frac{\Psi(x,s)\,|u(s)|}{(t-s)^\gamma}ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

ou $p > 1$,$\beta \in (0.2].0 < \gamma < 1$ et $\Psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times (0.\infty))$,$\Psi(\cdot,t) > 0$ pour tout $t > 0$

$$\begin{cases} \Psi(B^{-1/\beta}T^{1/\beta}\xi, Tr) \geq C > 0 \quad si \quad p \leq p^* \\ \Psi(R\xi, Tr) \geq C > 0 \quad si \quad p \leq 1/\gamma \end{cases},$$

pour tout $0 < R$;$B < T$; $\tau \in [0,1]$ et $\xi \in [0,2]$

(**2**) Dans le théorème 3.2, nous utilisons précisément la solution faible, mais dans ce cas, nous obtenons une non-existence des solutions globales faibles. par conséquent, pour obtenir des résultats d'explosion, nous utilisons la solution douce et l'alternatif si : $T_{\max} = 0$ ou bien $T_{\max} < \infty$ et $\|u\|_{L^\infty((0.t)\times\mathbb{R}^N)} \rightharpoonup \infty$ tel que $t \rightharpoonup T_{\max}$. ■

3.3.1 Taux d'explosion dans le cas $\beta = 2$

Dans cette section, nous présentons le taux d'explosion pour les solutions d'explosion au problème parabolique (2).nous prenons la solution de (2) avec une condition initiale satisfaisant :

$$u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N), u(\cdot,0) = u_0 \geq 0, u_0 \neq 0. \tag{3.31}$$

Le lemme suivant sera utilisé dans la démonstration du théorème 3.3 ci-dessous.

Lemme 3.2 *soit φ est une solution classique non négative de*

$$\varphi_t = \Delta\varphi + j^{1-\gamma}_{-\infty|t}(\varphi^p) \qquad \textit{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{3.32}$$

ou $\gamma \in (0,1),\ p > 1$ et

$$j^{1-\gamma}_{-\infty|t}(\varphi^p)(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_{-\infty}^t (t-s)^{-\gamma}\varphi^p(t)ds$$

Alors $\varphi = 0$ pour

$$p \leq p^* \quad ou \qquad p < \frac{1}{\gamma} \tag{3.33}$$

Preuve. Nous répétons les mêmes calculs que dans Theorem 3.2 avec $(1 - t^2/T^2)^\eta_+$ au lieu de$(1 - t/T^2)^\eta_+$ pour $\eta >> 1$ utiliser l'inégalité :

$$j^{1-\gamma}_{-\infty|t}(\varphi^p) \geq j^{1-\gamma}_{-T|t}(\varphi^p).$$

De plus, nous prenons $\varphi_1^{l/p}\varphi_1^{-l/p}$ au lieu de $\widetilde{\varphi}^{1/p}\widetilde{\varphi}^{-1/p}$ $(resp.\overline{\varphi}_1^{l/p}\overline{\varphi}_1^{-l/p})$ dans $(3.18), (3.26)(Resp.In(3.30))$ pour $l >> 1$ pour utiliser l'inégalité de Young and Hölder.notant que, ici, nous utilisons plutôt le $\varepsilon-$Young inégalité

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^p + C(\varepsilon)b^{\widetilde{p}}$$

pour $0 < \varepsilon < 1$ ■

Théorème 3.3 *soit* u_0 *satisfait* (3.27). *Pour* $p \leq p^*$ *ou* $p < (1/\gamma)$,*soit* $\alpha_1 := (2-\gamma)/(p-1)$ *et soit* u *est l'explosion de la solution douce de* (2) *dans un temps fini* $T_{\max} := T^*$,*alors , il existe deux constantes* $c, C > 0$ *telle que*

$$c(T^* - t)^{-\alpha_1} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u(\cdot, t) \leq C(T^* - t)^{-\alpha_1}, \qquad t \in (0.T). \tag{3.34}$$

Preuve. La preuve est en deux parties.soit

•*L'estimation du taux d'esplosiion supérieur*

Soit :

$$M(t) := \sup_{\mathbb{R}^N \times (0.t]} u, \qquad t \in (0.T^*).$$

Il est clair que M est positif, continue et non décroissante dans $(0, T^*)$. comme $\lim_{t\to T^*} M(t) = \infty$; alors pour tout $t \in (0, T^*)$, nous pouvons definire :

$$t_0^+ := t^+(t_0) := \max\{t \in (t_0, T^*) : M(t) = 2M(t_0)\}.$$

choisissant $A \geq 1$ et soit

$$\lambda(t_0) := \left(\frac{1}{2A}M(t_0)\right) \tag{3.35}$$

nous affirmons que

$$\lambda^{-2}(t_0)(t_0^+ - t_0) \leq D, \qquad t_0 \left(\frac{T^*}{2}, T^*\right), \tag{3.36}$$

où $D > 0$ est une constante positive qui ne dépend pas de t_0.

Nous procédons par contradiction. si (3.36) était faux, il existerait une séquence $t_n \to T^*$ tel que

$$\lambda_n^{-2}(t_n^+ - t_n) \to \infty,$$

où $\lambda_n = \lambda(t_n)$ et $t_n^+ := t^+(t_n)$ Pour chaque t_n choisit :

$$(\widehat{x}_n, \widehat{t}_n) \in \mathbb{R}^N \times (0, t_n] \quad \text{telque } u(\widehat{x}_n, \widehat{t}_n) \geq \frac{1}{2}M(t_n). \tag{3.37}$$

Evidemment $M(t_n) \to \infty$ par conséquent $\widehat{t}_n \to T$ Ensuite, redéfinissez la fonction φ comme

$$\varphi^{\lambda_n}(u, s) := \lambda_n^{2\alpha_1} u(\lambda_n y + \widehat{x}_n, \lambda_n^2 s + \widehat{t}_n), \quad (y, s) \in \mathbb{R}^N \times I_n(T^*), \tag{3.38}$$

où $I_n(t) := (-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, \lambda_n^{-2}(t-\widehat{t}_n))$ pour tout $t>0$.Ensuite φ^{λ_n} est une solution douce de

$$\varphi_s = \Delta_\varphi + j^{\alpha}_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n|s}(\varphi^p) \quad dans \quad \mathbb{R}^N \times I_n(T^*). \tag{3.39}$$

c'est-à-dire pour $G(t) := G(x,t) := (4\pi T)^{-N/2}e^{-|x|/4t}$, étant l'espace de convolution nous avons

$$\varphi^{\lambda_n}(s) = G(s+\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n) * \varphi^{\lambda_n}(-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n) + \int_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n}^{s} G(s-\sigma) * j^{\alpha}_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n|\sigma}((\varphi^{\lambda_n})^p)d\sigma, \tag{3.40}$$

dans $\mathbb{R}^N \times I_n(T^*)$, comme $\varphi^{\lambda_n}(0,0) \geq A$,

$$0 \leq \varphi^{\lambda_n} \leq \lambda_n^{2\alpha_1} M(t_n^+) = \lambda_n^{2\alpha_1} M(t_n) = 4A \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times I_n(t_n^+).$$

Grâce à (3.35) et à la définition de t_n^+

En outre, comme

$$\varphi^{\lambda_n} \in C([-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)) \text{ pour tout } T \in I_n(T^*).$$

ainsi, comme dans le Lemme 3.1, φ^{λ_n} est une solution faible de (3.18).

D'autre part, si nous écrivons φ^{λ_n} comme $\varphi^{\lambda_n}(s) = v(s) + w(s)$ pour touts les $s \in I_n(T^*)$ où

$$v(s) := G(s+\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n) * \varphi^{\lambda_n}(-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n) \text{ et } w(s) := \int_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n}^{s} G(s-\sigma) * j^{\alpha}_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n|\sigma}((\varphi^{\lambda_n})^p)d\sigma.$$

Nous avons, pour $T \in I_n(T^*)$(voir $[6, chapitre 3]$)

$$v \in ((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T); H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T); L^2(\mathbb{R}^N)) \subset L^2((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T); H^1(\mathbb{R}^N)),$$

et, on utilisant le fait que $f(s) := j^{\alpha}_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n|\sigma}((\varphi^{\lambda_n})^p) \in L^2((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T); H^1(\mathbb{R}^N))$ et la théorie de la régularité maximale, nous avons

$$w \in W^{1,2}((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n); L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T); H^2(\mathbb{R}^N)) \subset L^2((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T), H^1(\mathbb{R}^N)),$$

Il s'ensuit que

$$\varphi^{\lambda_n} \in C([-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T], L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2((-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n, T), W^{1,2}(\mathbb{R}^N)).$$

donc de la théorie de la régularité intérieure parabolique $(voir[10, Théorème 10.1 p.204])$ là-bas est $\mu \in (0,1)$ de sorte que la séquence φ^{λ_n} est délimitée dans le $C^{\mu,\mu/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$-norm par un constant indépendant de n, où $C^{\mu,\mu/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ est l'espace localement Hölder défini dans $[10]$. des estimations uniformes similaires pour $j^{\alpha}_{-\lambda_n^{-2}\widehat{t}_n|\sigma}(\varphi)^p$ suivre si μ est suffisamment petit.,l'intérieur parabolique des estimations de Schauder $(voir[13, Th. 8.11.1 p.130])$, en utilisant les théorèmes d'existence dans l'espace de Hölder, impliquent maintenant que le $C^{2+\mu,1+\mu/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})-$norme de φ^{λ_n} est uniformément délimitée.par conséquent, nous obtenons une sous-suite convergeant dans $C^{2+\mu,1+\mu/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ à une solution φ de

$$\varphi_s = \Delta_\varphi + j^{\alpha}_{-\infty|s}(\varphi^p) \quad \text{ dans } \mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty),$$

tel que $\varphi(0,0) \geq A$ et $0 < \varphi \leq 4A$ en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$; en utilisant Lemme 3.2, nous déduisons que $\varphi = 0$ dans $\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty)$ contradiction avec le fait que $\varphi(0,0) \geq A > 1$. Cela prouve (3.36).Ensuite, nous utilisons une idée de Hu [11]. Il résulte de (3.35) et (3.36) que

$$(t_0^+ - t_0) \leq D(2A)^{1/\alpha_1} M(t_0)^{-1/\alpha_1} \text{pour tout } t_0 \in \left(\frac{T^*}{2}, T^*\right).$$

Fixer $t_0 \in (T^*/2, T^*)$ et on note $t_1 = t_0^+, t_2 = t_1^+, t_3 = t_2^+, ...$ensuite

$$\begin{array}{rcl} (t_{j+1} - t_j) & \leq & D(2A)^{1/\alpha_1} M(t_j)^{-1/\alpha_1} \\ M(t_{j+1}) & = & 2M(t_j) \end{array}$$

$j = 0, 1, 2, ...$Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} T^* - t_0 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (t_{j+1} - t_j) \leq D(2A)^{1/\alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} M(t_j)^{-1/\alpha_1} \\ & = & D(2A)^{1/\alpha_1} M(t_0)^{-1/\alpha_1} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/\alpha_1} \right). \end{array}$$

Enfin, nous concluons que

$$u(x, t_0) \leq M(t_0) \leq C(T^* - t_0)^{-\alpha_1}, \qquad \forall t_0 \in (0, T),$$

où

$$C = 2A \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/\alpha_1} \right)^{\alpha_1};$$

alors

$$\sup_{\mathbb{R}^N} u(\cdot, t) \leq C(T^* - t)^{\alpha_1}, \qquad \forall t \in (0, T^*).$$

•L'estimation du taux d'explosion inferieur.

Si nous répétons la preuve de l'existence locale de Théorème 3.1, en prenant $\|u\|_1 \leq \Theta$ au lieu de $\|u\|_1 \leq 2\|u_0\|_\infty$ dans l'espace E_T pour tout constante positive$\Theta > 0$ et tout $0 < t < T$, alors la condition (3.2) de T sera :

$$\|u_0\|_\infty + CT^{2-\gamma}\theta^p \leq \theta, \tag{3.41}$$

et puis, comme auparavant, nous déduisons que $\|u(t)\|_\infty \leq \theta$ Pour (presque) tout $0 < t < T$, par conséquent,si $\|u_0\|_\infty \leq +Ct^{2-\gamma}\theta^p \leq \theta$ alors $\|u(t)\|_\infty \leq \theta$..Appliquer cela à tout.point dans la trajectoire, on voit que si $0 \leq s \leq t$ et

$$(t-s)^{2-\gamma} \leq \frac{\theta - \|u(s)\|_\infty}{C\theta^p}. \tag{3.42}$$

Alors $\|u(t)\|_\infty \leq \theta$ Pour tout $0 < t < T$.
De plus , si $0 \leq s < T^*$ et $\|u(s)\|_\infty < \theta$ puis :

$$(T^*-s)^{2-\gamma} > \frac{\theta - \|u(s)\|_\infty}{C\theta^p}. \tag{3.43}$$

En fait, en argumentant par contradiction et en supposant que pour certains $\theta > \|u(s)\|_\infty$ et tous $t \in (s, T^*)$ nous avons

$$(t-s)^{2-\gamma} \leq \frac{\theta - \|u(s)\|_\infty}{C\theta^p},$$

ensuite, en utilisant (3.16), on déduit que $\|u(s)\|_\infty < \theta$ pour tout $t \in (s, T^*)$ Cela contredit le fait que $\|u(t)\|_\infty \to \infty$ comme $t \to T^*$ ensuite, par exemple, en configurant $\theta = 2\|u(s)\|$ in (3.17), on voit que pour $0 < s < T^*$ nous avons :

$$(T^*-s)^{2-\gamma} > C' \|u(s)\|_\infty^{1-p},$$

et par la positivité et la continuité de u, nous obtenons:

$$c(T^*-s)^{-\alpha_1} < \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,s), \qquad \forall s \in (0, T^*). \tag{3.44}$$

■

3.4 Existence globale

Dans cette section, nous prouvons l'existence de solutions globales de (2) avec conditions initiales ,. Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $p_{sc} := N(p-1)/\beta(2-\gamma)$ .comme $p^* > 1+\beta(2-\gamma)/N$ on note que $p > p^* \Longrightarrow p_{sc} > 1$.

Théorème 3.4 *soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_{sc}}((\mathbb{R}^N))$ et $0 < \beta \leq 2$. si*

$$p > max\{\frac{1}{\gamma}; p^*\}, \tag{3.45}$$

et $\|u_0\|_{L^{p_{sc}}}$ est très petit, alors u existe globalement notons que nous pouvons prendre $|u_0(x)| \leq C|x|^{-\beta(2-\gamma)/(p-1)}$ au lieu de $u_0 \in L^{p_{sc}}((\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Comme $p > (1/\gamma)$, alors nous avons la possibilité de prendre une constante positive $q > 0$ pour que

$$\frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} < \frac{N}{\beta q} < \frac{1}{p-1}, \quad q \geq p, \tag{3.46}$$

en utilisant (3.45), on obtient :

$$q > \frac{N(p-1)}{\beta} > p_{sc} > 1 \tag{3.47}$$

Soit :

$$b := \frac{N}{\beta p_{sc}} - \frac{N}{\beta q} = \frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{N}{\beta q}. \tag{3.48}$$

Ensuite, en utilisant $(3.46) - (3.48)$, nous concluons que

$$b > \frac{1-\gamma}{p-1} > 0, \quad pb < 1, \ \frac{N(p-1)}{\beta q} + (p-1)b + \gamma = 2. \tag{3.49}$$

Comme„ nous obtenons, pour tout $t > 0$,

$$\sup_{t>0} t^b \left\| e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}} u_0 \right\|_{L^q} \leq \|u_0\|_{L^{p_{sc}}} = \eta < \infty. \tag{3.50}$$

Ensemble

$$\Xi := \left\{ u \in L^\infty((0,\infty)L^q(\mathbb{R}^N)); \sup_{t>0} t^b \|u(t)\|_{L^q} \leq \delta \right\}, \tag{3.51}$$

où $\delta > 0$ doit être choisi suffisamment petit.si nous définissons

$$d_\Xi(u,v) := \sup_{t>0} t^b \|u(t) - v(t)\|_{L^q} \, \forall u, v \in \Xi. \tag{3.52}$$

Alors $(\Xi; D)$ est un espace métrique complet. donné $u \in \Xi$,définissons :

$$\Phi(u)(t) := e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}} u_0 + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^s e^{-t(t-s)(-\Delta)^{\beta/2}} \int_0^s (s-\sigma) |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds. \tag{3.53}$$

Pour tout $t \geq 0$.on a :

$$\begin{aligned} t^b \|\Phi(u)(t)\|_{L^q} &\leq \eta + Ct^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{\beta}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u^p(\sigma)\|_{L^{\frac{q}{p}}} d\sigma ds \\ &\leq \eta + C\sigma^p t^b \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{\beta q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma ds. \end{aligned} \tag{3.54}$$

ensuite, en utilisant (3.46) et $pb < 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s \frac{(t-s)^{-\frac{N}{\beta q}(p-1)}}{(s-\sigma)^\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma ds &= \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma \right) \int_0^t \frac{(t-s)^{-\frac{N(p-1)}{\beta q}}}{s^{bp+\gamma-1}} ds \\ &= Ct^{-\frac{N(p-1)}{\beta q} - bp - \gamma + 2} = Ct^{-b}, \end{aligned} \tag{3.55}$$

Pour tout le $t \geq 0$, donc, nous en déduisons $(3.54) - (3.55)$ que

$$t^b \left\| \Phi(u)(t) \right\|_{L^q} \leq \eta + C\delta^p \tag{3.56}$$

Par conséquent, si η et δ sont choisis assez petit pour que $\eta + C\delta^p \leq \delta$,on voit ça $\Phi : \Xi \to \Xi$ .des calculs similaires montrent que (en supposant η et δ Assez petit)Φ est un contraction stricte, il a donc un point fixe unique $u \in \Xi$ qui est une solution de (2). maintenant, nous montrons que $u \in C([0.\infty), C_0(\mathbb{R}^N))$.tout d'abord, nous montrons que$u \in C([0.\infty), C_0(\mathbb{R}^N))$ si $T > 0$ est suffisamment petit..Effectivement,notez que l'argument ci-dessus montre l'unicité dans Ξ_T, Où, pour tout $T > 0$,

$$\Xi := \left\{ u \in L^\infty((0,\infty)L^q(\mathbb{R}^N));\ \sup_{0<t<T} t^b \left\| u(t) \right\|_{L^q} \leq \delta \right\},$$

soit $\widetilde{u}$ la solution locale de (2) construite dans théorem 3.1. Depuis $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_{sc}}((\mathbb{R}^N))$; ensuite, en utilisant le fait que $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et (6.3), nous avons $\widetilde{u} \in C([0.T_{\max}), L^q(\mathbb{R}^N))$par théorem 3.1. Il s'ensuit que $\sup_{0<t<T} t^b \left\| \widetilde{u} \right\|_{L^q} \leq \delta$ si $T > 0$ est suffisamment petit. Par conséquent, par unicité, $u = \widetilde{u}$ sur $[0, T]$, pour que $u \in C([0.T), C_0(\mathbb{R}^N))$.ensuite, nous montrons que $u \in C([T, \infty), C_0(\mathbb{R}^N))$.pour $t > T$, nous écrivons

$$\begin{aligned} u(t) - e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}} u_0 &= \int_0^t e^{-(t-s)(-\Delta)^{\beta/2}} \int_0^T (s-\sigma) \left| u \right|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-(t-s)(-\Delta)^{\beta/2}} \int_T^s (s-\sigma) \left| u \right|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds \\ &= I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Puisque $u \in C([0.T), C_0(\mathbb{R}^N))$, Il s'ensuit que $I_1 \in C([0.\infty), C_0(\mathbb{R}^N))$. En outre, par des calcules utilisés pour construire le point fixe, en utilisant le fait que $t^{-b} \leq T^{-b} < \infty$ et $pq > q$,$I_1 \in C([0.\infty), L^q(\mathbb{R}^N))$.ensuite, notez que $N(p/q - 1/q)/\beta$ par (3.47),par conséquent, il existe $r \in (q, \infty]$ tel que

$$\frac{N}{\beta}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{r}\right) < 1. \tag{3.57}$$

Soit $T < s < t$ (Le cas de $T < s < t$ est évident). Depuis$u \in L^\infty((0.\infty), L^q(\mathbb{R}^N))$ on a $\left| u \right|^{p-1} u \in L^\infty((T, s), L^{q/p}(\mathbb{R}^N))$ et il suit facilement, en utilisant (3.6)et (3.43),que $I_2 \in C([T.\infty), L^r(\mathbb{R}^N))$ comme $e^{-\cdot(-\Delta)^{\beta/2}} u_0$ et I_1 appartiennent tous deux à $C([T.\infty), C_0(\mathbb{R}^N)) \cap C([T.\infty), L^q(\mathbb{R}^N))$,On voit que $u \in C([T.\infty), L^r(\mathbb{R}^N))$, l'itération de cette procédure a nombre de fois, on déduit que $u \in C([T.\infty), C_0(\mathbb{R}^N))$ ceci complète le preuve ■

3.5 Conditions nécessaires pour l′existence locale ou globale

Dans cette section, nous établissons les conditions nécessaires à l'existence de solutions globales faibles au problème (2), ces conditions dépendent du comportement des données initiales pour un grand x.

Théorème 3.5 *(Conditions nécessaires à l'existence globale). soit* $u_0 \in L^{\infty}_{Loc}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0, 0 < \beta \leq 2$ *et* $p > 1$.*Si* u *est une solution globale faible au problème* (2)*, alors Il y a une constante positive* $C > 0$ *telle que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0(x)\,|x|^{\frac{\beta(2-\gamma)}{p-1}}) \geq C \tag{3.58}$$

Preuve. .soit u une solution globale faible pour (2), alors $u \in ((0, R^\beta), L^\infty(B_{2R}))$ pour tous $R > 0$; Où B_{2R} représente la boule fermée du centre 0 et le rayon $2R$. Donc, nous répétez le même calcul que dans la preuve du théorème 3.1 (ici dans le domaine délimité) en prenant $\varphi(x,t) := D^{\alpha}_{t|T}(\varphi_1(x/R)\varphi_2(t))$ au lieu de celui choisi dans Theorem 3.1, où $0 \leq \varphi_1 \in D(\Delta_D^{\beta/2})$ est la première fonction propre du fractionnaire opérateur Laplacien $\Delta_D^{\beta/2}$ en B_2 ; avec la condition limite homogène de Dirichlet , associé à la première valeur propre $\lambda := \lambda_1^{\beta/2}$ et $\varphi_2(t) := (1-t/R^\beta)_+^l$ pour $l >> 1$ assez grand.alors, quant à l'estimation (3.20), on obtient, avec $\Sigma := [0.R] \times B_{2R}$,

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Sigma} u^p \widetilde{\varphi} dxdt + CR^{-\alpha\beta} \int\limits_{|x|\leq 2R} u_0(x)\varphi_1(x/R)dx \\ \leq\ & C\int\limits_{\Sigma} \varphi_1(x/R)(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{1-p}} \left| D^{1+\alpha}_{t|R^\beta}(\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}} dxdt \\ &+ C\int\limits_{\Sigma} \varphi_1(x/R)^{-\frac{1}{1-p}}(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{1-p}} \left|\Delta_D^{\beta/2}\varphi_1(x/R) D^{1+\alpha}_{t|R^\beta}(\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}} dxdt, \end{aligned} \tag{3.59}$$

où $\alpha := 1-\gamma$ et $\widetilde{p} := p/(p-1)$, si nous prenons les variables mises à l'échelle $\tau := t/R^\beta$,$\xi = x/R$ et utiliser le fait que $\Delta_D^{\beta/2}\varphi_1(x/R) = R^{-\beta}\lambda\varphi_1(x/R)$ à droite côté de (3.59), prendre en compte la positivité de n,nous en déduisons que

$$\begin{aligned} & CR^{-\alpha\beta} \int\limits_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \\ \leq\ & C(R) \int\limits_{|\xi|\leq 2} \varphi_1(\xi)d\xi \\ =\ & C(R) \int\limits_{|\xi|\leq 2} |R\xi|^{\beta(1+\alpha)(\widetilde{p}-1)} |R\xi|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} \varphi_1(\xi)d\xi \\ \leq\ & C(R)(2R)^{\beta(1+\alpha)(\widetilde{p}-1)} \int\limits_{|\xi|\leq 2} |R\xi|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} \varphi_1(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

où $\overline{C}(R) = R^{\beta-(1+\alpha)\beta\widetilde{p}}(C + C\lambda)$, et donc

$$\int\limits_{|\xi|\leq 2} u_0 \left|R\xi\right| \varphi_1(\xi)d\xi \leq C \int\limits_{|\xi|\leq 2} \left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} \varphi_1(\xi)d\xi. \tag{3.60}$$

Utilisation de l'estimation

$$\begin{aligned}\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi)\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})}) \int\limits_{|\xi|\leq 2} \left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} \varphi_1(\xi)d\xi \; &\leq \int\limits_{|1<\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \\ &\leq \int\limits_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

dans le côté gauche de (3.8), nous concluons, après avoir divisé par $\int_{|\xi|\leq 2} \left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} \varphi_1(\xi)d\xi$ cette

$$\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi)\left|R\xi\right|^{\beta(1+\alpha)(1-\widetilde{p})}) \leq C. \tag{3.61}$$

Passant à la limite dans (3.61), comme $R \to \infty$ on obtient

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0(x)\left|x\right|^{\beta(1+\alpha)(\widetilde{p}-1)}) \geq C.$$

■

Corollaire 3.1 *(conditions suffisantes pour non existence de solutions globales)* *soit* $u_0 \in L^\infty_{Loc}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0, 0 < \beta \leq 2$ *et* $p > 1$ *si :*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0(x)\left|x\right|^{\frac{\beta(2-\gamma)}{p-1}}) = \infty$$

alors le problème (2) *ne peut pas accepter une solution globale faible.,ensuite, nous accordons une condition nécessaire à l'existence locale où nous obtenons un estimation de* T *trouvée dans la preuve du Théorème* 3.1*, comme* $|x|$ *va à l'infini.*

Théorème 3.6 *(Conditions nécessaires pour l'existence locale). soit* $u_0 \in L^\infty_{Loc}(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0, \beta \in (0.2]$ *et* $p > 1$*, Si* u *est une solution faible locale au problème* (2) *sur* $[0, T]$ *où* $0 < T < +\infty$ *; ensuite on a*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0\ ) \leq CT^{-\frac{2-\gamma}{p-1}}. \tag{3.62}$$

Pour une constante positive $C > 0$.

Notez que, si $A := \lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0\ )u_0(x)$ *, Alors nous obtenons une estimation similaire à celle trouvé dans* (3.4),

$$\frac{T^{2-\gamma}A^{p-1}}{C^{p-1}} \leq 1.$$

Preuve. Nous prenons ici, pour $R > 0$ suffisamment grand,
$\varphi(x,t) := D^{\alpha}_{t|T}\widetilde{\varphi}(x,t) := D^{\alpha}_{t|T}(\ \varphi_1(x/R)\ \varphi_2(t))$ où $\varphi_2(t) := (1-t/T)^{l}_{+}$ Au lieu de celui choisi dans le Théorème 3.5. Puis, comme (3.55), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma} u^p\widetilde{\varphi}dxdt + CT^{-\alpha}\int_{|x|\leq 2R} u_0(x)\varphi_1(x/R)dx \\
\leq\ & C\int_{\Sigma}\varphi_1(x/R)(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{1-p}}\left|D^{1+\alpha}_{t|T}(\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}}dxdt \\
&+C\int_{\Sigma}(\varphi_1(x/R))^{-\frac{2}{1-p}}(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{1-p}}\left|\Delta^{\beta/2}_{D}\varphi_1(x/R)D^{\alpha}_{t|T}(\varphi_2(t)\right|^{\widetilde{p}}dxdt,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

où $\Sigma_1 := [0,T]\times\{x\in\mathbb{R}^N; |x|\leq 2R\}, \alpha := 1-\gamma$ et $\widetilde{p} := p/(p-1)$ maintenant, dans le côté droit de (3.63), on prend les variables à l'échelle $\tau = T^{-1}t, \xi = R^{-1}x$ en utilisant le fait que $\Delta^{\beta/2}_{D}\varphi_1(x/R) = R^{-\beta}\lambda\varphi_1(x/R)$ Tandis que dans le côté gauche, nous utilisons la positivité de u; alors nous obtenons

$$CT^{-\alpha}\int_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \leq \left(CT^{\ 1-(1+\alpha)\widetilde{p}} + C\lambda T^{1-\alpha\widetilde{p}}\right)\int_{|\xi|\leq 2}\ \varphi_1(\xi)d\xi;$$

et donc

$$\int_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \leq C(R,T)\int_{|\xi|\leq 2}\ \varphi_1(\xi)d\xi \tag{3.64}$$

ou $C(R,T) = CT^{(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} + CT^{1+\alpha(1-\widetilde{p})}R^{-\beta\widetilde{p}}$.
Utilisation de l'estimation

$$\begin{aligned}
\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi))\int_{|\xi|\leq 2}\ \varphi_1(\xi)d\xi\ &\leq \int_{1<|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\leq 2} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Dans le côté gauche de (3.64), nous concluons, après avoir divisé par $\int_{|\xi|\leq 2}\varphi_1(\xi)d\xi$ cette

$$\inf_{|\xi|>1} u_0(R\xi) \leq CT^{(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} + CT^{1+\alpha(1-\widetilde{p})}R^{-\beta\widetilde{p}}. \tag{3.65}$$

Passant à la limite en (3.65), comme $R\to\infty$ on obtien

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf u_0(x) \leq CT^{(1+\alpha)(1-\widetilde{p})} = CT^{-\frac{2-\gamma}{p-1}}.$$

■

Chapitre 4

Propriétés qualitatives des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence locale et le temps fini des solutions pour un système parabolique semi-linéaire avec une mémoire non-linéaire et nous donnons le taux d'explosion des solutions et les conditions nécessaires pour l'existence locale ou globale des solutions.

4.2 Existence locale et unicité

Dans cette section, nous présentons quelques definitions et résultats concernant la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et des derivés fractionnaires necessaires dans la suite ,la solution fondamentale de l'equation de chaleur.

$$u_t - \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^N, t > 0$$

est donnée par

$$Gt(x) := G(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

est bien définie que cette fonction satisfait

$$Gt \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N), Gt(x) \geq 0et \int\limits_{\mathbb{R}^N} Gt(x)dx = 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$. c'est pour, on utilise l'inegalité de Young pour la convolution, l'inégalité suivante

$$\|G_t * v\|_r \leq \|v\|_r \tag{4.1}$$

vérifier pour tout $v \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N)$ et touts $1 \leq r \leq \infty,\ t > 0$.le semigroupe on $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ généralisé par le Laplacian est $e^{t\Delta}\ v := G_t * v$ pour tout $v \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$,$t > 0$,tel que $u * v$ pour la convolution.en l'espace de u et v. de plus, comme $(-\Delta)$ est un opérateur Auto-adjoint avec $D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)(-\Delta)v(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)(-\Delta)u(x)dx$$

pour tout $u, v \in H^2(\mathbb{R}^n)$.Ensuite, si $AC[0,T]$ est l'espace de toutes les fonctions ce sont absolument continues on $[0,T]$ avec $0 < T < \infty$, alors, pour $f \in AC[0,T]$, d'aprés la derivée fractionnaire de Riemann–Liouville$D^{\alpha}_{0|T}f(t)$et$D^{\alpha-1}_{t|T}f(t)\ (resp)\ \alpha \in (0,1)$ sont definies par

$$D^{\alpha}_{0|T}f(t) = DJ^{1-\alpha}_{0|T}f(t)(5)$$

$$D^{\alpha}_{t|T}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_t^T (s-t)^{-\alpha} f(s)ds$$

pour tout $t \in [0,T]$, where $D := \frac{d/}{(dt)}$est le derivé habituel, et définie en $[5]$,pour touts $g \in \mathcal{L}^q(0,T)(1 \leq q \leq \infty)$.

donc, pour chaque $f, g \in C([0,T])$,tel que$D^{\alpha}_{0|T}f(t), D^{\alpha}_{t|T}g(t)$ sont exist et sont continus,pour tout $t \in [0,T]$, $0 < \alpha < 1$, on a la formule d'integration par parties (voir(2.64) p. 46 en [7]).

$$\int\limits_0^T (D^{\alpha}_{0|T}f)(t)g(t)dt = \int\limits_0^T f(t)(D^{\alpha}_{t|T}g(t))dt$$

Notez également que pour tout $f \in AC2[0,T]$, on a(vu (2.1.35) en[5])

$$-DD^{\alpha}_{t|T} f = D^{1-\alpha}_{t|T} f$$

où

$$AC2[0,T] := \{f : [0,T] \to \mathbb{R}; f \in AC[0,T] \; et \; Df \in AC[0,T]\}.$$

on va utiliser les resultats suivantes :

si

$$w_1(t) = (1 - t/T)^{\sigma}+, \; t \geq 0, \; T > 0, \; \sigma >> 1$$

alors

$$D^{\alpha}_{t|T} w_1(t) = \frac{(1-\alpha+\sigma)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\sigma)} T^{-\alpha}(1-\frac{t}{T})^{\sigma-\alpha}_{+} \tag{4.2}$$

$$D^{\alpha+1}_{t|T} w_1(t) = \frac{(1-\alpha+\sigma)(-\alpha+\sigma)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(2-\alpha+\sigma)} T^{-(\alpha+1)}(1-\frac{t}{T})^{\sigma-\alpha-1}_{+} \tag{4.3}$$

Définition 4.1 *Considérons le probleme de Cauchy suivant pour le systeme parabolique semi-linéaire avec un memoire non linéaire* ***voir[4]***

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |v|^{p-1} v(s) ds \;, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v_t - \Delta v = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t (t-s)^{-\delta} |v|^{q-1} u(s) ds \;, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

on supplément avec des conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}^N \tag{4.5}$$

Sur l'observation que le système différentiel non linéaire (4.1) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = j^{\alpha}_{0|t}(|v|^{p-1} v), x \in \mathbb{R}^N \\ v_t - \Delta v = j^{\alpha}_{0|t}(|u|^{p-1} u), x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Définition 4.2 *(solution douce)*

soit $u_0, v0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *et* $T > 0$ *on dit que*$(u,v) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^n) \times C_0(\mathbb{R}^n))$ *est une solution douce de* $(4.4)-(4.5)$ *si*

$$\begin{cases} u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} J^{\alpha}_{0|s}(|v|^{p-1} v) ds, t \in [0,T] \\ v(t) = e^{t\Delta} v_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} J^{\beta}_{0|s}(|u|^{q-1} v) ds, t \in [0,T] \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 4.1 *(l'existence locale d'une solution unique) soit* u_0,$v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ *et* $p, q > 1$, *alors il existe un temps maximal* $T_{max} > 0$ *et une solution unique douce* $(u,v) \in C([0,T_{max}), C_0(\mathbb{R}^N) \times C_0(\mathbb{R}^N))$.*de système* $(4.4)-(4.5)$ *de plus ,on a l'alternative : soit* $T_{max} = \infty$ $((u,v)$ *est globale ou sinon* $T_{max} < \infty$ *et* $\|u(t)\|_{L\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v(t)\|_{L\infty(\mathbb{R})} \to \infty((u,v)$ *explosion au temps fini comme* $t \to T_{max}$ *,si* $u_0, v_0 \geq 0, u_0, v_0 \neq 0$*,alors* $u(t), v(t) > 0$ *,pour tout* $t \in (0, T_{max})$.*d'autre part si* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$,*pour* $1 \leq r < \infty$.*donc* $u, v \in C([0, Tmax), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N))$

Preuve. soit $T > 0$ un arbitraire,on define l'espace de Banach :

$$E_T = \{(u,v) \in \mathcal{L}^\infty((0,T), C0 \times C(\mathbb{R}^N)); |||(u,v)||| \leq 2(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)\}, \tag{4.7}$$

tel que $\|\cdot\|_{\infty} := \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ et $||| \cdot |||$est la norme de E_T défini par :

$$|||(u,v)||| := \|u\|_1 + \|v\|_1 := \|u\|_{\mathcal{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{\mathcal{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}$$

puis,pour tout $(u,v) \in E_T$,on présente Ψ défini on E_T par $\Psi(u,v) = (\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v))$, tel que

$$\Psi_1(u,v) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} J^\alpha_{0|s}(|v|^{p-1}v)ds, t \in [0,T]$$

$$\Psi_2 = e^{t\Delta}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} J^\beta_{0|s}(|u|^{q-1}v)ds,\ t \in [0,T]$$

Nous allons prouver l'existence locale par le Théorème du point fixe de Banach.

$\bullet \Psi; E_T \to E_T$: soit $(u,v) \in E_T$; on utilise l'inegalité de Young pour la convolution,on a :

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)||| &\leq \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|v(\sigma)\|^p_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\quad + \|v_0\|_\infty + C_2 \left\| \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma)\|^p_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&= \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma)\|^p_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\quad + \|v_0\|_\infty + C_2 \left\| \int_0^t \int_\sigma^s (s-\sigma)^{-\delta} \|u(\sigma)\|^p_\infty d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)}
\end{aligned}$$

tel que

$$C_1 := \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}; C_2 := \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $(u,v) \in E_T$, nous obtenons.

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)||| &\leq \|u_0\|_\infty + C_3 T^{2-\gamma} \|v\|^p_1 + \|v_0\|_\infty C_4 T^{2-\gamma} \|v\|^q_1 \\
&\leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) \max\{C_3 T^{2-\gamma} \|v\|^{p-1}_1 ; C_4 T^{2-\delta} \|u\|^{q-1}_1\}(\|v\|_1 + \|u\|_1) \\
&\leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + 2T(u_0,v_0)(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty),
\end{aligned}$$

tel que

$$C_3 := \frac{C_1}{(1-\gamma)(2-\gamma)} = \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)}; C_4 := \frac{C_2}{(1-\gamma)(2-\gamma)} = \frac{1}{\Gamma(3-\gamma)}$$

et

$$T(u_0,v_0)=\max\{C_3T^{2-\gamma}2^{p-1}(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty)^{p-1};C_4T^{2-\delta}2^{q-1}(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty)^{q-1}\}$$

Maintenant, si nous choisissons T tel que

$$2T(u_0,v_0)\leq 1$$

nous concluons que $\|\Psi(u,v)\|_1\leq 2(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty)$et par conséquent $\Psi(u,v),\in E_T$

•Ψest contraction :pour $(\widetilde{u},\widetilde{v})\in E_T$,on a l'estimation

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)-\Psi(\widetilde{u},\widetilde{v})||| &\leq C_1\left\|\int_0^t\int_0^s(s-\sigma)^{-\gamma}\right\| |v|^{p-1}v(\sigma)-|\widetilde{v}|^{p-1}\widetilde{v}(\sigma)\,\|d\sigma ds\|_{L^\infty(0,T)}\\
&\quad +C_2\left\|\int_0^t\int_0^s(s-\sigma)^{-\delta}\right\| |u|^{q-1}v(\sigma)-|\tilde{u}|^{q-1}\tilde{u}(\sigma)\,\|d\sigma ds\|_{L^\infty(0,T)}\\
&= C_1\left\|\int_0^t\int_\sigma^s(s-\sigma)^{-\gamma}\right\| |v|^{p-1}v(\sigma)-|\widetilde{v}|^{p-1}\widetilde{v}(\sigma)\,\|d\sigma ds\|_{L^\infty(0,T)}\\
&\quad +C_2\left\|\int_0^t\int_\sigma^s(s-\sigma)^{-\delta}\right\| |u|^{q-1}v(\sigma)-|\tilde{u}|^{q-1}\tilde{u}(\sigma)\,\|d\sigma ds\|_{L^\infty(0,T)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, par les mêmes calculs que ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)-\Psi(\widetilde{u},\widetilde{v})||| &\leq C_3T^{2-\gamma}\left\||v|^{p-1}v-|\widetilde{v}|^{p-1}\widetilde{v}\right\|_1+C_4T^{2-\delta}\left\||u|^{q-1}u-|\tilde{u}|^{q-1}\,\widetilde{u}\right\|_1\\
&\leq C(p)C_3T^{2-\gamma}(\|v\|_1^{p-1}+\|\widetilde{v}\|_1^{p-1})\,\|v-\tilde{v}\|_1+C(q)C_4T^{2-\delta}(\|u\|_1^{q-1}+\|\widetilde{u}\|_1^{p-1})\,\|u-v\|_1\\
&\leq 2C(p,q)T(u_0,v_0)|||(u,v)-(\widetilde{u},\widetilde{v})|||\leq\frac{1}{2}|||(u,v)-(\tilde{u},\widetilde{v})|||,
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité (3.3) et le choix de$T$:$\max\{2C(p,q),1\}T(u_0,v_0)\leq\frac{1}{2}$,d'aprés le Théoreme de point fixe de Banach,le systeme $(4.4)-(4.5)$ admet une solution douce $(u,v)\in E_T$

L'unicité de solution

soit $(u,v),(\tilde{u},\tilde{v}) \in E_T$ sont deux solutions douces en E_T , pour $T>0$.utiliser l'inegalité de Young pour la convolution et (3.3),on a pour $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_\infty + \|v(t)-\tilde{v}(t)\|_\infty &\leq C_1C(p)2^p \|v_0\|_\infty^{p-1} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)\|v(\sigma)-\tilde{v}(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\
&+C_2C(q)2^q \|u_0\|_\infty^{q-1} \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)\|u(\sigma)-\tilde{u}(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\
&= \frac{C_1C(p)2^p \|v_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma}\|v(\sigma)-\tilde{v}(\sigma)\|_\infty d\sigma \\
&+\frac{C_2C(q)2^q \|u_0\|_\infty^{q-1}}{\Gamma(2-\delta)} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma}\|u(\sigma)-\tilde{u}(\sigma)\|_\infty d\sigma
\end{aligned}$$

soit

$$C' = \max\left\{\frac{C_1C(p)2^p \|v_0\|_\infty^{p-1}}{\Gamma(2-\gamma)}, \frac{C_2C(q)2^q \|u_0\|_\infty^{q-1}}{\Gamma(2-\delta)}\right\}$$

alors

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_\infty + \|v(t)-\tilde{v}(t)\|_\infty \leq$$

$$C'\int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma}(\|u(\sigma)-\tilde{u}(\sigma)\|_\infty + \|v(\sigma)-\tilde{v}(\sigma)\|_\infty)d\sigma$$

D'aprés l'inégalité de Gronwall on obtient l'unicitée ,et d'autre part on peut déduire l'existence de temps maximal $[0,T_{\max})$ tel que :

$$T_{max} = \sup\{T(u_0,v_0)>0 : (u,v) est\ une\ solution\ douce\ pour\ (4.1)-(4.2)\ dans\ E_T\} \leq \infty.$$

Positivité des solutions

si $u_0,v_0 \geq 0$ et $u_0,v_0 \neq 0$, alors nous pouvons construire une solution non negative sur un certain intervalle $[0,T]$ en appliquant l'argument point fixe dans l'ensemble $E_T^+ = \{u \in E_T; u \geq 0\}$.En particulier, il résulte de (3.1) que $u(t) \geq e^{t\Delta}u_0 > 0$ et $v(t) \geq e^{t\Delta}v_0 > 0$ dans $(0,T]$ Il n'est pas difficile par l'unicité d'en déduire que u reste positif dans $(0;T_{\max})$

Régularité

Si $u_0,v_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)\cap C_0(\mathbb{R}^N)$; pour $1 \leq r < \infty$; puis en répétant l'argument de point fixe dans l'espace

$$\begin{aligned}
E_{T,r} \quad &: \quad = \left\{u \in L^\infty((0,T),(C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)\times(C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)); \right\} \\
|||(u,v)||| &\leq 2(\|u_0\|_{L^\infty} + \|v_0\|_{L^\infty}), |||(u,v)|||_r \leq 2(\|u_0\|_{L^r} + \|v_0\|_{L^r})
\end{aligned}$$

Au lieu de E_T ; où $|||(u,v)|||_r := \|u\|_{L^\infty((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))} + \|v\|_{L^\infty((0,T),L^r(\mathbb{R}^N))}$ et en estimant $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u^p\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ dans l'argument de cartographie de contraction, en utilisant (4.1) nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$; nous concluons que

$$(u,v) \in C([0,T_{mx}),(C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N) \times (C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)). \tag{4.8}$$

■

4.3 Explosion des solutions

Nous prouvons l'explosion des solutions de système (4.4) - (4.5) par Théorème 2.
D'abord, nous donnons la définition du solution faible :

Définition 4.3 *(solution faible). soit* $u_0, v_0 \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *,on dit que*

$$(u,v) \in L^q((0.T), L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)) \times L^p((0.T), L^r_{loc}(\mathbb{R}^N))$$

est une solution faible de problème $(4.4)-(4.5)$ *si :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(\cdot,0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} j^\alpha_{0|s}\left(|v|^{p-1}u\right)(x,t)\varphi(x,t) = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(\Delta)\varphi(x,t) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t), \tag{4.9}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\psi(\cdot,0) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} j^\beta_{0|s}\left(|u|^{p-1}u\right)(x,t)\psi(x,t) = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)(\Delta)\varphi(x,t) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\varphi_t(x,t), \tag{4.10}$$

Pour tout support compact $\varphi, \psi \in C^1([0,T], H^2\mathbb{R}^N))$ *tel que* $\psi(\cdot,T) = \varphi(\cdot,T) = 0$.

Lemme 4.1 *($Mild \to faible$)*

soit $T > 0$ et $u, v \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$. si (u,v) est un solution douce de $(4.4)-(4.5)$, alors (u,v) est un solution faible de $(4.4)-(4.5)$.

Théorème 4.2 *(explosion des solutions)*
soit $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ *tel que* $u_0, v_0 \leq 0$ *and* $u_0, v_0 \neq$*0. si*

$$\frac{N}{2} \leq \max\left\{\frac{(2-\gamma)p + (1-\gamma)pq + 1}{pq-1}; \frac{(2-\gamma)q + (1-\gamma)pq + 1}{pq-1}\right\}, \text{tel que} \quad q < \frac{1}{\gamma} \text{et } p < \frac{1}{\delta} \tag{4.11}$$

donc la solution douce (u,v) *de (4.1)–(4.2) explosion au temps fini*

Preuve. la preuve est basée sur l'idée of Mitidieri and Pohozaev [8] ;il est par une contradiction. Supposez que(u,v) est solution douce globale pour$(4.4)-(4.5)$,alors (u,v) est un solution de$(4.1)-(4.5)$ tel que $u,v\in C([0,T],C_0(\mathbb{R}^n))$, pour tout $T>>1$, tel que $u(t),v(t)>0$ pour tout $t\in[0,T]$. ainsi, en utilisant le Lemme 1 on peut déduire que u et v vérifie (4.9) et (4.10), respectivement,pour touts pris en charge de façon compacte , $\varphi,\psi\in C_1([0,T],H^2(\mathbb{R}^N))$ tel que $\psi(\cdot,T)=\varphi(\cdot,T)=0$

Maintenant, on prend $\varphi(x,t)=D^{\alpha}_{t|T}(\tilde{\varphi}(x,t)):=D^{\alpha}_{t|T}(\varphi_1(x)^l\varphi_2(t))$ et $\psi(x,t)=D^{\beta}_{t|T}(\tilde{\varphi}(x,t))$ pour $\alpha=1-\gamma$ and $\beta=1-\delta$, avec$\varphi_1(x)=(|x|/(T^{\frac{1}{2}}))$, $\varphi_1(x)=(1-t/T)^{\eta}_{+}$ tel que$l\geq pq/((p-1)(q-1)),\eta\geq 1$ et Φ est définie comme le suivant :

$$\Phi(r)\begin{cases}1,\text{si } 0\leq r\leq 1\\ 0 \text{ si } r\geq 2\end{cases}$$

$$0\leq\Phi\leq 1,|\Phi'(r)|\leq C_1/r, pourtoutr>0.$$

d'aprés l'inegalite

$$(D^{\alpha}_{t|T}w_1)(T)=0,(D^{\alpha}_{t|T}w_1)(0)=CT^{-\alpha}\tag{4.12}$$

où $C=(1-\alpha+\sigma)\Gamma(\sigma+1)/\Gamma(2-\alpha+\sigma)$,on obtien :

$$\int\limits_{\Omega}u_0D^{\alpha}_{t|T}(\tilde{\varphi}(\cdot,0))+\int\limits_{\Omega_T}J^{\alpha}_{t|T}(v^p)D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}=-\int\limits_{\Omega_T}u\Delta D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}-\int\limits_{\Omega_T}uDD^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}\tag{4.13}$$

et

$$\int\limits_{\Omega}v_0D^{\beta}_{t|T}(\tilde{\varphi}(\cdot,0))+\int\limits_{\Omega_T}J^{\beta}_{t|T}(v^q)D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}=-\int\limits_{\Omega_T}v\Delta D^{\beta}_{t|T}\tilde{\varphi}-\int\limits_{\Omega_T}vDD^{\beta}_{t|T}\tilde{\varphi}\tag{4.14}$$

où

$$\Omega_T=[0,T]\times\Omega \text{ pour } \Omega=\{x\in\mathbb{R}^N;|x|\leq 2T^{1/2}\},\int\limits_{\Omega_T}=\int\limits_{\Omega_T}dxdt\quad\text{et}\quad\int\limits_{\Omega}=\int\limits_{\Omega}dx$$

on peut déduire que :

$$CT^{-\alpha}\int\limits_{\Omega}u_0\varphi_1^l+\int\limits_{\Omega_T}D^{\alpha}_{t|T}J^{\alpha}_{t|T}(v^p)\tilde{\varphi}=-\int\limits_{\Omega_T}u\Delta D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}-\int\limits_{\Omega_T}uDD^{\alpha+1}_{t|T}\tilde{\varphi}$$

et

$$CT^{-\beta}\int\limits_{\Omega}v_0\varphi_1^l+\int\limits_{\Omega_T}D^{\beta}_{t|T}J^{\alpha}_{t|T}(u^q)\tilde{\varphi}=-\int\limits_{\Omega_T}v\Delta D^{\beta}_{t|T}\tilde{\varphi}-\int\limits_{\Omega_T}vDD^{\beta+1}_{t|T}\tilde{\varphi}$$

on peut écrire

$$\int\limits_{\Omega_T}v^p\tilde{\varphi}+CT^{-\alpha}\int\limits_{\Omega}u_0\varphi_1^l=-\int\limits_{\Omega_T}u\Delta D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}-\int\limits_{\Omega_T}uDD^{\alpha+1}_{t|T}\tilde{\varphi}$$

et

$$\int_{\Omega_T} u^q\tilde{\varphi} + CT^{-\beta} \int_{\Omega} v_0\varphi_1^l = -\int_{\Omega_T} v\Delta D^{\beta}_{t|T}\tilde{\varphi} - \int_{\Omega_T} vDD^{\beta+1}_{t|T}\tilde{\varphi}$$

Ensuite, l'inégalité $(-\Delta)(\varphi_1^l) \leq l\varphi_1^{l-1}(-\Delta)\varphi_1$ on peut prendre que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T} v^p\tilde{\varphi} + CT^{-\alpha}\int_{\Omega} u_0\varphi_1^l &\leq C\int_{\Omega_T} u\varphi_1^{l-1}\left|(-\Delta)D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2\right| + 4\int_{\Omega_T} u\varphi_1^l\left|D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2\right| \\ &= C\int_{\Omega_T} u\tilde{\varphi}_1^{1/q}\tilde{\varphi}^{-1/q}\varphi_1^{l-1}\left|(-\Delta)D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2\right| + C\int_{\Omega_T} u\tilde{\varphi}_1^{1/q}\tilde{\varphi}^{-1/q}\varphi_1^l\left|(-\Delta)D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2\right|\end{aligned} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T} u^q\tilde{\varphi} + CT^{-\beta}\int_{\Omega} v_0\varphi_1^l &\leq C\int_{\Omega_T} v\varphi_1^{l-1}\left|(-\Delta)D^{\beta}_{t|T}\tilde{\varphi}_2\right| + \int_{\Omega_T} v\varphi_1^{l-1}\left|D^{\beta+1}_{t|T}\varphi_2\right| \\ &= C\int_{\Omega_T} v\tilde{\varphi}_1^{1/q}\tilde{\varphi}^{-1/q}\varphi_1^{l-1}\left|(-\Delta)D^{\beta}_{t|T}\varphi_2\right| + C\int_{\Omega_T} u\tilde{\varphi}_1^{1/q}\tilde{\varphi}^{-1/q}\varphi_1^l\left|(-\Delta)D^{1+\alpha}_{t|T}\varphi_2\right|.\end{aligned} \tag{4.16}$$

on applique l 'inégalitée de Holder on obtient

$$\int_{\Omega_T} v^p(x,t)\tilde{\varphi}(x,t) \leq \left(\int_{\Omega_T} u^q(x,y)\tilde{\varphi}(x,t)\right)^{\frac{1}{q}}\mathcal{A} \quad \text{et} \int_{\Omega_T} u^q(x,t)\tilde{\varphi}(x,t) \leq \left(\int_{\Omega_T} v^p(x,y)\tilde{\varphi}(x,t)\right)^{\frac{1}{p}}\mathcal{B} \tag{4.17}$$

où on a

$$\mathcal{A} := C\Big(\int_{\Omega_T} \varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{q-1}}\left|D^{\alpha+1}_{t|T}\varphi_2\right|^{\tilde{q}}\Big)^{\frac{1}{\tilde{q}}} + C\Big(\int_{\Omega_T} \varphi_1^{l-\tilde{q}}\varphi_2^{\frac{-1}{q-1}}\left|\Delta_x\varphi_1 D^{\alpha}_{t|T}\varphi_2\right|^{\tilde{q}}\Big)^{\frac{1}{\tilde{q}}}$$

$$\mathcal{B} := C\Big(\int_{\Omega_T} \varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|D^{1+\beta}_{t|T}\varphi_2\right|^{\tilde{p}}\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}} + C\Big(\int_{\Omega_T} \varphi_1^{l-\tilde{p}}\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|\Delta_x\varphi_1 D^{\beta}_{t|T}\varphi_2\right|^{\tilde{p}}\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}}$$

avec $p := \frac{p}{(p-1)}$, $q := \frac{q}{(q-1)}$,maintenant, en combinant les termes dans (4.17), on obtient

$$\left(\int_{\Omega_T} v^p(x,t)\tilde{\varphi}(x,t)\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{B}^{\frac{1}{q}}\mathcal{A} \;\; \text{et} \;\; \left(\int_{\Omega_T} u^q(x,t)\tilde{\varphi}(x,t)\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathcal{A}^{\frac{1}{q}}\mathcal{B} \tag{4.18}$$

on peut introduire une valeure scalaire $\tau = T^{-1}t,\ \zeta = T^{\frac{-1}{2}}x$ en utilisant la formule (4.2) et (4.3) dans le côté droit des termes in (4.18), nous obtenons les estimations

$$\left(\int_{d\Omega} v^p(x,y)\tilde{\varphi}(x,y)\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq CT^{\theta_1} \;\text{et}\; \left(\int_{\Omega_T} u^q(x,y)\tilde{\varphi}(x,y)\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq CT^{\theta_2} \tag{4.19}$$

où

$$\theta_1 = \left(-(1+\alpha)\tilde{q} + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{\tilde{q}} + \left(-(1+\beta)\tilde{p} + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{q\tilde{p}}$$

$$\theta_2 = \left(-(1+\beta)\tilde{p} + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{\tilde{p}} + \left(-(1+\alpha)\tilde{q} + \left(1+\frac{N}{2}\right)\right)\frac{1}{\tilde{q}p}$$

l'inégalite (4.11) est équivalent a $\theta_1 \leq 0$ ou $\theta_2 \leq 0$,on a deux cas :

·la 1^{ere} cas $\theta_1 < 0$(resp $\theta_2 < 0$).on passe à la limite de la premiere inégalitée (resp la deuxiéme inégalitée),tel que T tend vers ∞,on a :

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^T \int_{|x|^{2T^{\frac{1}{2}}}} v^p(x,t)\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = 0 \left(resp \quad \lim_{t\to\infty}\int_0^T \int_{|x|^{2T^{\frac{1}{2}}}} u^q(x,t)\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = 0 \right)$$

on obtient

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v^p(x,t)dxdt = 0 \left(resp \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u^q(x,t) = 0 \right)$$

qui implique que $v \equiv 0 (resp.u \equiv 0)$

·la $2^{éme}$ cas $\theta_1 = 0$(resp $\theta_2 = 0$) dans ce cas , utilise (4.19) comme $T \to \infty$,on peut deduire que

$$v \in \mathcal{L}^p((0,\infty), \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N))(resp.u \in \mathcal{L}^q((0,\infty), \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^N)).$$

donc on prend

$$\varphi_1(x) = \Phi(|x|/(B^{-1/2}T^{1/2})$$

où $1 \leq B < T$ alors on répète les mémes calcules on obtient :

$$\int_{\Sigma_B} v^p\tilde{\varphi} \leq C\int_{\Sigma_B} u\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}\varphi_1^l \left|D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi_2\right| + C\int_{\Delta_B} u\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}}\varphi_1^{l-1}\left|(-\Delta_x)\varphi D_{t|T}^{\alpha}\varphi_2\right|, \tag{4.20}$$

et

$$\int_{\Sigma_B} u^q\tilde{\varphi} \leq C\int_{\Sigma_B} v\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\varphi_1^l \left|D_{t|T}^{1+\beta}\varphi_2\right| + C\int_{\Delta_B} v\varphi^{\frac{-1}{p}}\tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}}\varphi_1^{l-1}\left|(-\Delta_x)\varphi D_{t|T}^{\beta}\varphi_2\right|, \tag{4.21}$$

tel que

$$\Sigma_B = [0,T] \times \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq 2B^{-1/2}T^{-1/2}\}, \int_{\Sigma_B} = \int_{\Sigma_B} dxdt$$

et

$$\Delta_B := [0,T] \times \{x \in \mathbb{R}^N; B^{-1/2}T^{1/2} \leq |x| \leq 2B^{-1/2}T^{1/2}\}, \int_{\Delta_B} = \int_{\Delta_B} dxdt$$

comme (u, v) est une solution globale ,alors $u(resp.v)$ satisfait (4.9) (resp. (4.10)) localement et en particulier dans Δ_B :

$$\int_{\Delta_B} v^p \tilde{\varphi} \leq C \int_{\Delta_B} u \varphi^{\frac{-1}{q}} \tilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}} \varphi_1^l \left| D_{t|T}^{1+\beta} \varphi_2 \right| + C \int_{\Delta_B} u \varphi^{\frac{-1}{q}} \tilde{\varphi}^{\frac{-1}{q}} \varphi_1^{l-1} \left| (-\Delta x \varphi D_{t|T}^{1+\beta} \varphi_2 \right| \tag{4.22}$$

$$\int_{\Delta_B} u^q \tilde{\varphi} \leq C \int_{\Sigma_B} v \varphi^{\frac{-1}{p}} \tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}} \varphi_1^l \left| D_{t|T}^{1+\alpha} \varphi_2 \right| + C \int_{\Delta_B} v \varphi^{\frac{-1}{p}} \tilde{\varphi}^{\frac{-1}{p}} \varphi_1^{l-1} \left| (-\Delta x \varphi D_{t|T}^{1+\alpha} \varphi_2 \right| \tag{4.23}$$

on pose que :

$$\mathcal{U}_1 := \int_{\Sigma_B} u^q \tilde{\varphi} \quad , \quad \mathcal{U}_2 := \int_{\Delta_B} u^q \tilde{\varphi} \quad , \ \mathcal{V}_1 := \int_{\Sigma_B} v^q \tilde{\varphi} \quad , \quad \text{et } \ \mathcal{V}_2 := \int_{\Delta_B} v^q \tilde{\varphi}.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Holder dans (4.20) - (4.21) et (4.22) - (4.23), nous obtenons les inégalités

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 \leq \mathcal{U}_1^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}_1 + \mathcal{U}_2^{\frac{1}{q}} \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{U}_1 \leq \mathcal{V}_1^{\frac{1}{p}} \mathcal{B}_1 + \mathcal{V}_2^{\frac{1}{p}} \mathcal{Z}_2 \end{cases} et \begin{cases} \mathcal{V}_2 \leq \mathcal{U}_2^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}_1 + \mathcal{U}_2^{\frac{1}{q}} \mathcal{Z}_1, \\ \mathcal{U}_2 \leq \mathcal{V}_2^{\frac{1}{p}} \mathcal{B}_2 + \mathcal{V}_2^{\frac{1}{p}} \mathcal{Z}_2, \end{cases} \tag{4.24}$$

tel que

$$\mathcal{A}_1 := C \left(\int_{\Sigma_B} \varphi_1^l \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{1+\alpha} \varphi_2 \right|^{\tilde{q}} \right)^{1/\tilde{q}}, \mathcal{A}_2 := C \left(\int_{\Delta_B} \varphi_1^l \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{1+\alpha} \varphi_2 \right|^{\tilde{q}} \right)^{1/\tilde{q}} \leq \mathcal{A}_1,$$

$$\mathcal{B}_1 := C \left(\int_{\Sigma_B} \varphi_1^l \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{1+\beta} \varphi_2 \right|^{\tilde{p}} \right)^{1/\tilde{p}}, \mathcal{B}_2 := C \left(\int_{\Delta_B} \varphi_1^l \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| D_{t|T}^{1+\alpha} \varphi_2 \right|^{\tilde{p}} \right)^{1/\tilde{p}} \leq \mathcal{B}_1$$

et

$$\mathcal{Z}_1 := C \left(\int_{\Delta_B} \varphi_1^{l-\tilde{q}} \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} \left| \Delta \varphi_1 D_{t|T}^{\alpha} \varphi_2 \right|^{\tilde{q}} \right)^{1/\tilde{q}}, \mathcal{Z}_2 := C \left(\int_{\Delta_B} \varphi_1^{l-\tilde{p}} \varphi_2^{-\frac{1}{\tilde{p}-1}} \left| \Delta \varphi_1 D_{t|T}^{\beta} \varphi_2 \right|^{\tilde{p}} \right)^{1/\tilde{p}}.$$

En combinant les termes en (4.24), on obtient

$$\mathcal{V}_1 \leq \mathcal{V}_1^{1/pq} \mathcal{B}_1^{1/q} \mathcal{A}_1 + \mathcal{V}_2^{1/pq} \mathcal{Z}_2^{1/q} \mathcal{A}_1 + \mathcal{V}_2^{1/pq} \mathcal{B}_2^{1/q} \varphi_1 + \mathcal{V}_2^{1/pq} \mathcal{Z}_2^{1/q} \mathcal{Z}_1 \tag{4.25}$$

et

$$\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_1^{1/pq} \mathcal{A}_1^{1/q} \mathcal{B}_1 + \mathcal{U}_2^{1/pq} \mathcal{Z}_1^{1/q} \mathcal{B}_1 + \mathcal{U}_2^{1/pq} \mathcal{A}_2^{1/p} \mathcal{Z}_1 + \mathcal{U}_2^{1/pq} \mathcal{Z}_1^{1/q} \mathcal{Z}_2 \tag{4.26}$$

Pour estimer le premier terme dans le côté droit de (4.25) et (4.26), nous appliquons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{pq} a^{pq} + \frac{pq-1}{pq} b^{\frac{pq}{pq-1}}, p > 1, q > 1, a > 0, b > 0.$$

Cela produit

$$(1-\frac{1}{pq})\mathcal{V}_1 \leq \mathcal{B}_1^{\frac{p}{pq-1}}\mathcal{A}_1^{\frac{pq}{pq-1}}+\mathcal{V}_2^{1/pq}\left[\mathcal{Z}_1^{1/q}\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_2^{1/q}\mathcal{Z}_1+\mathcal{Z}_2^{1/q}\mathcal{Z}_1\right]$$

et

$$(1-\frac{1}{pq})\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{A}_{11}^{\frac{p}{pq-1}}\mathcal{B}_1^{\frac{pq}{pq-1}}+\mathcal{U}_2^{1/pq}\left[\mathcal{Z}_1^{1/p}\mathcal{B}_1+\mathcal{A}_2^{1/p}\mathcal{Z}_2+\mathcal{Z}_1^{1/p}\mathcal{Z}_2\right].$$

En utilisant la définition de φ et en appliquant le changement de variables suivant $\tau = T^{-1}t$, $\xi = T^{-1/2}B^{1/2}x$ dans les intégrales dans$\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$,et $\mathcal{Z}_i(i=1,2)$ nous obtenons :

$$\mathcal{V}_1 \leq CT^{\theta_1\frac{pq}{pq-1}}B^{\delta_1\frac{pq}{pq-1}}+\mathcal{V}_2^{1/pq}[CT^{\theta_1}+CT^{\theta_1}B^{\delta_3}+CT^{\theta_1}B^{\delta_4}]$$

et

$$\mathcal{U}_1 \leq CT^{\theta_2\frac{pq}{pq-1}}B^{\eta_1\frac{pq}{pq-1}}+\mathcal{U}_2^{1/pq}[CT^{\eta_2}+CT^{\theta_2}B^{\eta_3}+CT^{\theta_1}B^{\eta_4}],$$

tel que

$$\begin{cases} \delta_1 := -\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\tilde{p}q}+\frac{1}{\tilde{q}}\right), \delta_2 := \frac{1}{q}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\tilde{p}q}+\frac{1}{\tilde{q}}\right) \\ \delta_3 := 1--\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\tilde{p}q}+\frac{1}{\tilde{q}}\right), \delta_4 := 1+\frac{1}{q}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\tilde{p}q}+\frac{1}{\tilde{q}}\right) \end{cases}$$

et

$$\eta_1 := -\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p\tilde{q}}+\frac{1}{\tilde{p}}\right), \eta_2 := \frac{1}{p}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p\tilde{q}}+\frac{1}{\tilde{p}}\right)$$
$$\eta_3 := 1--\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p\tilde{q}}+\frac{1}{\tilde{p}}\right), \eta_4 := 1+\frac{1}{p}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p\tilde{q}}+\frac{1}{\tilde{p}}\right)$$

Rappelons-nous que$\theta_1=0$ (resp. $\theta_2=0$) implique que

$$\mathcal{V}_1 \leq CT^{\delta_1\frac{pq}{pq-1}}+\mathcal{V}_2^{1/pq}[CT^{\delta_1}+CB^{\delta_3}+CB^{\delta_4}] \;\; resp \;\; \mathcal{U}_1 \leq CT^{\eta_1\frac{pq}{pq-1}}+\mathcal{U}_2^{1/pq}[CT^{\eta_1}+CB^{\eta_3}+CB^{\eta_4}] \tag{4.27}$$

d'autre part ,on a :

$$\lim_{T\to\infty}\mathcal{V}_2 = 0 \quad (resp. \;\lim_{T\to\infty}\mathcal{U}_2 = 0)$$

Prenant la limite comme $T\to\infty$ dans (4.27) et en applique le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous concluons que

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v^p(x,t)dxdt \leq B^{\delta_1\frac{pq}{pq-1}}\left(resp \quad \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u^q(x,t)dxdt \leq B^{\eta_1\frac{pq}{pq-1}}\right) \tag{4.28}$$

Enfin, comme $\delta_1<0$ et $\eta_1<0$, en prenant la limite comme $B\to\infty$ dans (4.24), nous concluons que $v=0$ ou$u=0$et (4.20) implique que $u=v=0$, ce qui est une contradiction.

·Le cas $p<(1/\delta)etq<(1/\gamma)$: Nous répétons la même procédure que dans le cas ($\theta_1<0$ ou $\theta_2<0$) en choisissant cette fois la fonction de test suivante $\tilde{\varphi}(x,t)=(\varphi_1(x)^l\varphi_2(t))$ tel que $\varphi_1(x)=\Phi(|x|/R), \varphi_1(t)=(1-t/T)_+^r, r>>1$ and $R\in(0,T)$,nous obtenons.l'inégalité suivante **voir [4]**

$$\int_0^\infty\int_{|x|\leq R} v^p\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = 0\left(resp \quad \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u^q\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = 0\right)$$

Enfin, en laissant $R \to \infty$, nous avons une contradiction avec le fait que $u(x,t) > 0$ et $v(x,t) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ ■

4.4 Taux d'explosion

pour prouver le taux d'explosion en utilisant le lemme suivante :

Lemme 4.2 *soit (u,v) une solution classique non négative de*

$$u_t = \Delta u + j_{t|T}^{1-\gamma}(v^p), v_t = \Delta v + j_{t|T}^{1-\delta}(u^q) \quad \textit{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

tel que $\gamma, \delta \in [0,1], p, q > 1$ *et*

$$j_{-\infty|T}^{\mu} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\mu-1} f(s) ds, \quad \mu \in [0.1], \quad f \in L^r(\mathbb{R})(1 \leq r \leq \infty).$$

Alors si (p,q) *satisfait* .(4.11)*, nous avons* $u = v = 0$

Théorème 4.3 *(Taux d'explosion)*

soit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(2-\gamma)+(2-\delta)p}{pq-1}; \\ \alpha_2 &= \frac{(2-\gamma)+(2-\delta)q}{pq-1} \end{aligned}$$

si (p,q) satisfait (4.2) (u,v) est la solution d'explosion de$(4.4)(4.5)$ au temps fini $T_{max} := T^*$, alors pour constants c_i,$Ci > 0(i = 1,2)$ il existe

$$\begin{cases} c_1(T^*-t)^{-\alpha_1} \leq \sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t) \leq C_1(T^*-t)^{-\alpha_1}, \quad t \in [0,T^*], \\ c_2(T^*-t)^{-\alpha_2} \leq \sup\limits_{\mathbb{R}^n} v(\cdot,t) \leq C_2(T^*-t)^{-\alpha_2}, \quad t \in [0,T^*]. \end{cases}$$

Preuve. voir .[4] ■

4.5 Les conditions necessaires pour l'existence globale

Théorème 4.4 *(les conditions necessaire pour l' existence global) soit*$u_0, v_0 \in L^\infty_{Loc(\mathbb{R}^N)}, u_0, v_0 \geq 0$,*et* $p,q > 1$.*si* (u,v) *est une solution globale faible pour (4.4)–(4.5), donc il y a un constant positive* $C > 0$ *tel que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0(x)|x|^{2\alpha_1}) \leq C$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf(v_0(x)|x|^{2\alpha_2}) \leq C$$

Preuve. voir[4] ■

Corollaire 4.1 *(les conditionsSuffisant por la non existence de solution globale) soit*$u_0, v_0 \in L^{\infty}_{Loc(\mathbb{R}^N)}, u_0, v_0 \geq 0$,*et* $p, q > 1.si$

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to\infty} \inf(u_0(x)|x|^{2^{\alpha_1}}) &= +\infty \\ \lim_{|x|\to\infty} \inf(v_0(x)|x|^{2\alpha_2}) &= +\infty\end{aligned}$$

donc le systeme $(4.4) - (4.5)$ *ne peut pas admettre une solution globale faible*

Preuve. voir [4] ■

4.6 Les conditions necessaires pour l'existence locale

Théorème 4.5 *(les conditions necessaires pour l'existence locale)*

soit $u_0, v_0 \in L^{\infty}_{Loc(\mathbb{R}^n)}$, $u_0, v_0 \geq 0$, et $p, q > 1$.si (u, v) est une solution faiblement locale pour le systeme $(4.4) - (4.5)$ dans $[0, T]$ tel que $0 < T < \infty$, alors on a l'estimation

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) \leq CT^{-\alpha_1} \text{ et } \lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) \leq CT^{-\alpha_2}$$

pour n'importe qu'elle constant positif $C > 0$. Notez que,si

$$A := \lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x)$$

et

$$B := \lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x).$$

Alors nous obtenons une estimation ci-dessous,

$$\begin{cases} C^{-(pq-1)}T^{(2-\gamma)+(2-\delta)p}A^{pq-1} \leq 1 \\ C^{-(pq-1)}T^{(2-\delta)+(2-\gamma)q}B^{pq-1} \leq 1 \end{cases}$$

Conclusion

Nous avons étudié dans ce mémoire la modélisation de quelques problèmes d'évolution du type parabolique, représentés dans des systèmes de réaction-diffusion avec des dérivées classiques et fractionnaires.

De plus ,l'étude de l'existence locale et l'existence globale des solutions d'equation d'évolution avec dérivé fractionnaire ,et l'existence locale des solutions d'un système d'évolution .

Bibliographie

[1] S Abdelmalek A.Youkana Global existence of solutions for some coupled systems of reactiondiffusion arXiv :1009.5687v2 [math.AP] 29 Jan 2011

[2] M. J. Cloud and B. C. Drachman, Inequalities with Applications to Engineering,(1998) Springer-Verlag New York

[3] A. Fino, G. Karch, Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian, J.Monatsh. Math. (2010) 160 375-384

[4] A Fino, M Kirane. Qualitative Properties of Solutions to a Time-Space Fractional Evolution Equation. 2009. <hal-00398110v6>

[5] M.Kirane and S. Kouachi, Global Solutions to a System of Strongly Coupled Reaction-Diffusion Equations. Nonlinear Analysis Theory, Methods and applications. Vol 126, n8 ;(1996)USA

[6] M. Kirane et S. Kouachi, Global solutions to a system of strongly coupled reaction- diffusionequations. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. Volume 26, number 8 (1996)

[7] A Fino, Mokhtar Kirane Qualitative properties of solutions to a nonlocal evolution system Mathematical Methods in the Applied Sciences June 2011DOI :10.1002/mma.1428

[8] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for ut = u + u1+ , J. Fac. Sci. Univ.Tokyo Sect. I 13 (1966) 109–124

[9] F. R. Gantmacher, Théorie des matrices. tome1. Paris (1966)

[10] P. Grigolini, A. Rocco and B. J. West, Fractional calculus as a macroscopic manifestation of randomness, Phys. Rev. E 59, 2603 (1999)

[11] A. Haraux et A. Youkana, On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations. Tôhoku. Math. J. 40 (1988), pp. 159-163

[12] D. Henry, Geometric Theory of Semi-linear Parabolic Equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, 1984

[13] S. L. Hollis et J. J. Morgan, Partly dissipative reaction-diffusion systems and a model of phosphorus diffusion in silicon, Nonlinear Anal. T. M. A., 19 (1992), pp. 427-440

[14] Y. Li, G. Farrher and R. Kimmich, Sub-and Superdiffusive molecular displacement laws in desordered porous media probed by nuclear magnetic resonance. Physical revie E, 74 (2006)

[15] G. Karch, Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian, J.Monatsh. Math.(2010) 160 375-384

[16] O. A. Lady zenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968

[17] K. M. Kolwankar and Anil D. Gangal, Local Fractional Fokker-Planck Equation, Phys.Rev.Lett. 80, 214 (1998)

[18] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric et A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis.Mathematics and Its Applications, (1993) Kluwer Academic Publishers

[19] J. J. Morgan, Global Existence for Semilinear Parabolic Systems, SIAM J. Math.Anal. 20,1128-1144 (1989)

[20] B. Hu, Remarks on the blow-up estimate for solutions of the heat equation with a nonlinear boundary condition, Di erential Integral Equations 9 (1996), 891-901

[21] F. Rothe, "Globale solutions of reaction-diffusion systems", Lecture Notes in Mathematics 1072 Springer-Verlag, New York, 1984.

[22] A, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, vol. 204.2006

[23] Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers : London,1987.

[24] G. Taylor, The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. Proceedings of theRoyal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 223(1155) :446–468, 9 (1954)

[25] H. D. Thomas et D. G. Aronson, Oscillation in a Nonlinear Parabolic Model of SeparatedCooperatively Coupled Enzymes. Nonlinear Systems and Applics. Academi Press. New York(1977).

[26] T A. Twi-Sided Bounds for Linked Unknown Nonlinear Boundary Conditions ofReaction-Diffusion Systems. J. Math. Analysis and App.,71, (1979), 336-378.

[27] K. Yosida, Functional Analysis, sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,New York1980