



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique



كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والبيئة
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques
Filière : Mathématiques
Option : EDP

Thème

Introductionaux systèmes discrets fractionnaires

Présenté Par :
.Merah Randa.
.Mahdi Lina.

Devant le jury :

Mr. Zarai Abd ALrahman	MCB	Université Larbi Tébessi	Président
Mr. Gasri Ahlam	MC	Université Larbi Tébessi	Examineur
Mr. Oaunnas Adel	MCA	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2019

Résumé

Dans ce mémoire on a présenté une introduction aux systèmes discrets fractionnaires. Premièrement on a consacré aux notions de base sur le calcul fractionnaire. Deuxièmement, on a étudié la notion de stabilité et ses propriétés. Troisièmement, on a étudié différents types de synchronisation dans le cas des systèmes discrets fractionnaires.

Les mots clés : systèmes discrets fractionnaires, synchronisation, stabilité de Lyapunov, calcul fractionnaire

Abstract

In This thesis we have presented an introduction to fractional discrete Systems. Firstly, we have devoted to the basic notions of fractional calculus. Secondly, we have studied the notion of stability and its properties Thirdly, different types of synchronization have been studied in the case of fractional discrete systems.

Keywords: fractional discrete systems, synchronization, Lyapunov stability, fractional calculus

ملخص

في هذه المذكرة تم تقديم مدخل الى الانظمة المتقطعة الكسرية، اولاً قدمنا المفاهيم الأساسية لحساب الكسري المتقطع، ثانياً درسنا استقرار الانظمة الخطية والغير الخطية وخصائصه. ثالثاً ، تمت دراسة أنواع مختلفة من التزامن في حالة الأنظمة المنفصلة الكسرية.

الكلمات المفتاحية: الانظمة المتقطعة الكسرية،استقرار الانظمة الخطية والغير الخطية، التزامن ، استقرار لياينوف.

Remerciements

*D'abord nous remercions Allah de bien fait au terme de cette étude en
achevant notre travail.*

Nous voudrions exprimer notre sincère gratitude à notre

Encadreur :-Mr :Adel Ouannas .

Au jury : -Mr : Gasri Ahlam.

-Mr : Zarai Abd ALrahman

*D'ccepter dévaleur notre travail. A tout ceux gui ont aidés et
encouragé de prés ont aidés. Et encouragé de prés ou de loin*



Dédicace

ON DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL À:

Nos très chers parents, à qui on doit tout.

Nos sœurs et frères

Et tout les membres de nos familles

Nos enseignants

Nos amies.



Table des matières

1	Préliminaire sur le calcul discret fractionnaire	1
1.1	Notions de base	2
1.2	L'opérateur de somme fractionnaire	6
1.2.1	Définition	6
1.2.2	Propriétés.	6
1.3	L'opérateur de différence fractionnaire	9
1.3.1	Définition	9
1.3.2	Propriétés	9
1.4	La différence fractionnaire de Riemann et de Caputo	10
1.4.1	Définition	10
1.4.2	Propriétés	11
2	Stabilité des systèmes discrets fractionnaires	13
2.1	Stabilité	14
2.2	Rappelle sur la stabilité des systèmes discrets entiers	14
2.2.1	Stabilité des systèmes linéaires discrets	14
2.2.2	Stabilité des systèmes non-linéaires discrets	15
2.3	Stabilité des systèmes discrets fractionnaires	16
2.3.1	Stabilité des systèmes discret fractionnaires linéaires	16
2.3.2	Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires	17
3	Synchronisation des systèmes discrets fractionnaires	21
3.1	Introduction	22
3.2	Théorie de synchronisation	22
3.2.1	Système maître-esclave	22

3.2.2	Types de synchronisation	22
3.3	Méthode de synchronisation	24
3.4	Nouveau type de synchronisation pour des systèmes discrets fractionnaires	25
3.4.1	Coexistence de SP, FSHPS et SG	25
3.4.2	Coexistence de la synchronisation IFSHP et la synchronisation IG dans 2D	27
3.4.3	Applications numériques	29
3.5	Conclusion	33

Notation

Γ : Fonction gamma.

$t^{(\nu)}$: Chute factorielle

Δ^ν : Opérateur de différence fractionnaire.

$\Delta^{-\nu}$: Opérateur de somme fractionnaire.

V : Fonction de Lyapunov.

$\|e\|$: La norme de e

\mathbb{R}^n : L'ensemble des réels de dimensions n .

\lim : La limite.

x_f : point fixe.

λ_i : les valeurs propre.

Liste des Figures

P. 29	Figure 3.1	Espace de phase pour la carte partielle d'Hénon avec $(a_1, b_1) = (1.4, 0.3)$, $\nu = 0.984$, et $(x_1(0), x_2(0)) = (0.0)$.
P. 29	Figure 3.2	Espace de phase pour la carte partielle d'Hénon avec $(a_2, b_2) = (0.99, 0.2)$, $\nu = 0.984$ et $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (0.1, 0.2, 0.5)$.
p.30	Figure 3.3	L'évolution des erreurs (3.44).
p.32	Figure 3.4	L'évolution des erreurs (3.51).

Introduction générale

Bien que les mathématiciens ont étudié le calcul fractionnaire dès le XIXe siècle, ce n'est que récemment qu'il a gagné une grande popularité en sciences appliquées et en ingénierie. Pendant très longtemps, l'étude et l'application du calcul fractionnaire ont été limitées au temps continu. Cependant, plus récemment, les chercheurs ont détourné leur attention sur le cas du temps discret et ont tenté de mettre en place un cadre théorique complet pour le sujet. L'une des premières œuvres est peut-être celle de [1]. Parmi les travaux les plus intéressants et les plus pertinents sur le calcul discret fractionnaire au cours de la dernière décennie est celui de [2] où les auteurs introduisent un opérateur de différence fractionnaire arrière. Dans [3], l'auteur discute l'existence des opérateurs discrets de Riemann et de Caputo. On trouvera plus de détails sur la notation générale du calcul fractionnaire en temps discret dans [4]. De plus, les formules numériques correspondant à un système de différence fractionnaire peuvent être trouvées dans [5]. Des études récentes ont examiné les conditions de stabilité pour des systèmes fractionnaires à temps discrets, notamment [6, 7, 8]. Récemment, des progrès ont été réalisés en ce qui concerne les systèmes à temps discret fractionnaires chaotiques et leurs applications [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

La synchronisation dans sa forme la plus simple se réfère à la commande d'un système esclave pour forcer sa trajectoire vers celle d'un système maître. Dans ce cas, l'erreur définie comme étant la différence entre les états du deux système vers zéro est égale à $t \rightarrow +\infty$. De nombreux autres types de synchronisation ont été proposés dans la littérature [9]. Il n'y a pas encore longtemps, de nombreuses approches pour résoudre le problème de la coexistence de différents types de synchronisation ont été proposées [10].

Ce mémoire présente une introduction aux systèmes discrets fractionnaires. Aussi, a pour objet l'étude de la synchronisation dans les systèmes discrets fractionnaires. Ce travail est donc structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre : consacré aux notions de base sur le calcul fractionnaire discret tels que : la définition des opérateurs de somme fractionnaire, de différence fractionnaire et de Riemann et de Caputo.

Dans le deuxième chapitre : nous faisons un panorama sur la théorie de stabilité des systèmes discrets fractionnaires.

Le troisième chapitre : expose notre travail qui consiste en quelques résultats sur la synchronisation des systèmes discrets fractionnaires.

Chapitre 1

Préliminaire sur le calcul discret fractionnaire

-
- 1.1- Notions de base.
 - 1.2- L'opérateur de somme fractionnaire.
 - 1.3- L'opérateur de différence fractionnaire.
 - 1.4- L'opérateur fractionnaire de Riemann et de Caputo.
-

Le but de ce chapitre est de donner les notions de base concernant le calcul fractionnaire discret et leurs propriétés telles que l'opérateur de somme et de différence fractionnaire et de Riemann et de Caputo.

1.1 Notions de base

Supposons $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$. Tell que $\mathbb{N}_a = \mathbb{N}_0 + \{a\} = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$.

On définit Δ l'opérateur de différence fractionnaire par :

$$\Delta f(k) = f(k + 1) - f(k) \quad (1.1)$$

où $k \in \mathbb{N}_a^{b-1}$ On peut écrire aussi :

$$\Delta^2 f(k) = f(k + 2) - 2f(k + 1) + f(k)$$

.

.

$$\begin{aligned} \Delta^N f(k) &= \Delta(\Delta^{N-1} f(k)) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{N}{i} f(k + N - i), \quad n = \overline{1, N} \end{aligned}$$

et Δ^0 désigne l'opérateur identité, i.e. $\Delta^0 f(k) = f(k)$.

Théorème 1.1 [11] Soit $f, g: \mathbb{N}_a^b = \{a, a + 1, a + 2, \dots, b\} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}_a^{b-1}$

- i)- $\Delta \alpha = 0$
- ii)- $\Delta \alpha f(k) = \alpha \Delta f(k)$.
- iii)- $\Delta [f + g](k) = \Delta f(k) + \Delta g(k)$.
- iv)- $\Delta \alpha^{k+\beta} = (\alpha - 1) \alpha^{k+\beta}$.
- v)- $\Delta [fg](k) = f(k + 1) \Delta g(k) + \Delta f(k) g(k) = g(k + 1) \Delta f(k) + f(k) \Delta g(k)$.
- vi)- $\Delta \left(\frac{f}{g} \right) (k) = \frac{g(k) \Delta f(k) - f(k) \Delta g(k)}{g(k) g(k+1)}$, où $g(k) \neq 0, k \in \mathbb{N}_a^b$.

Preuve. Les preuves de (i), (ii) (iv) sont simples, Nous démontrons la propriété v et (vi), on a

$$\begin{aligned}
 \Delta\left(\frac{f}{g}\right)(k) &= \frac{f(k+1)}{g(k+1)} - \frac{f(k)}{g(k)} \\
 &= \frac{f(k+1)g(k) - f(k)g(k+1)}{g(k)g(k+1)} \\
 &= \frac{g(k)[f(k+1) - f(k)] - f(k)[g(k+1) - g(k)]}{g(k)g(k+1)} \\
 &= \frac{g(k)\Delta f(k) - f(k)\Delta g(k)}{g(k)g(k+1)}
 \end{aligned}$$

v) Soit f et g des fonctions réelles, on a

$$\Delta(f(k)g(k)) = f(k+1)\Delta g(k) + \Delta f(k)g(k) = g(k+1)\Delta f(k) + f(k)\Delta g(k).$$

Pour la première égalité, on a

$$\begin{aligned}
 \Delta(f(k)g(k)) &= f(k+1)g(k+1) - f(k)g(k) \\
 &= f(k+1)g(k+1) - f(k+1)g(k) + f(k+1)g(k) - f(k)g(k) \\
 &= f(k+1)(g(k+1) - g(k)) + g(k)(f(k+1) - f(k)) \\
 &= f(k+1)\Delta g(k) + g(k)\Delta f(k).
 \end{aligned}$$

Pour la seconde égalité, on a

$$\begin{aligned}
 \Delta(f(k)g(k)) &= f(k+1)g(k+1) - f(k)g(k) \\
 &= f(k+1)g(k+1) - g(k+1)f(k) + g(k+1)f(k) - f(k)g(k), \\
 &= g(k+1)(f(k+1) - f(k)) + f(k)(g(k+1) - g(k)), \\
 &= g(k+1)\Delta f(k) + f(k)\Delta g(k).
 \end{aligned}$$

Alors $\Delta(f(k)g(k)) = g(k)\Delta f(k) + f(k+1)\Delta g(k) = g(k+1)\Delta f(k) + f(k)\Delta g(k)$. ■

Définition 1.1 [12] La fonction gamma est une transcendantal spécial la fonction dénotée par $\Gamma(x)$, et pour $x > 0$, est défini par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (1.2)$$

Il suit que la fonction gamma $\Gamma(x)$ (ou l'intégrale d'Eulérien de la deuxième type) est bien définie et analytique pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\
 &= 1
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

et pour $x > 0$, intégration par parties rendements, on obtien

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\
 &= [-t^x e^{-t}]_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\
 &= x\Gamma(x)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

et la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et une équation fonctionnelle importante. Pour les valeurs entières, on a

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.5}$$

Chute Factorielle

Définition 1.2 [12] Chute factorielle (polynôme factoriel) $t^{(\nu)}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
 t^{(\nu)} &= \prod_{j=0}^{\nu-1} (t-j) \\
 &= t(t-1)(t-2)\dots(t-(\nu-1)) \\
 &= \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-(\nu-1))\Gamma(t-\nu+1)}{\Gamma(t-\nu+1)} \\
 t^{(\nu)} &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1)}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

d'ou $n \geq 0$ et Γ la fonction Gamma.

Théorème 1.2 [13] Les fonctions factorielles suivantes soient bien définies, on a

- i) $\Delta t^{(\nu)} = \nu t^{(\nu-1)}$,
- ii) $(t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.
- iii) $\mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$.
- iv) si $t \leq r$ donc $t^{(\nu)} \leq r^{(\nu)}$ pour tout $\nu > r$.
- v) si $0 < \nu < 1$, donc $t^{(\alpha\nu)} \geq (t^{(\alpha)})^\nu$.

$$vi) \quad t^{(\alpha+\beta)} = (t - \beta)^{(\alpha)} t^{(\beta)}.$$

Preuve. Les propriétés i, ii, iii, vi sont claires. et à partir de cela, nous démontrons la propriété iv, et v

la preuve de (iv) découle du produit infini d'Euler.

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^u}{\left(1 + \frac{u}{n}\right)},$$

la preuve de v découle de la propriété log-convexité de la fonction gamma.

$$\begin{aligned} t^{(\alpha\nu)} &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha\nu)} \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\nu(t+1-\alpha) + (1-\nu)(t+1))} \\ &\geq \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\nu(t+1-\alpha))^\nu (\Gamma(t+1))^{1-\nu}} \\ &= (t^{(\alpha)})^\nu. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.3 [11] *Les règles de puissance suivant (généralisé).*

$$\Delta(k + \nu)^{(r)} = r(k + \nu)^{(r-1)}, \quad (1.7)$$

et

$$\Delta(\nu - k)^{(r)} = -r(\nu - (k + 1))^{(r-1)}. \quad (1.8)$$

Tenir, chaque fois que les expressions dans ces deux formules sont bien définies.

Lemme 1.1 [14] *Soit $\nu \in \mathbb{R}$, et $k, s \in \mathbb{R}$, tell que $(k - s)^{(\nu)}$, alors*

$$\Delta_s(k - s)^{(\nu)} = -\nu(k - s - 1)^{(\nu-1)} \quad (1.9)$$

Preuve. [14] Utilisez la définition 1.4 et les propriétés fondamentales de la fonction gamma, on obtien

$$\begin{aligned} \Delta_s(k - s)^{(\nu)} &= (k - s - 1)^{(\nu)} - (k - s)^{(\nu)} \\ &= \frac{\Gamma(k - s)}{\Gamma(k - s - \nu)} - \frac{\Gamma(k - s + 1)}{\Gamma(k - s - \nu + 1)} \\ &= \frac{(k - s - \nu)\Gamma(k - s) - \Gamma(k - s + 1)}{\Gamma(k - s - \nu + 1)} \\ &= -\nu(k - s - 1)^{(\nu-1)} \end{aligned}$$

■

1.2 L'opérateur de somme fractionnaire

$\Delta_a^{-\nu}$ l'opérateur de somme fractionnaire du fonction f d'ordre arbitraire $\nu > 0$.

1.2.1 Définition

Définition 1.3 [12] L'opérateur de somme fractionnaire d'ordre ν de fonction f est définie par :

$$\Delta_a^{-\nu} f(k) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{k-\nu} (k - (s+1))^{(\nu-1)} f(s), \quad (1.10)$$

ici f est défini pour $s = a \pmod{1}$ et $\Delta_a^{-\alpha} f$ est défini pour $t = a + \alpha \pmod{1}$; en particulier, $\Delta_a^{-\alpha}$ a fonctions de cartes définies sur \mathbb{N}_a à fonctions définies sur $\mathbb{N}_{a+\alpha}$ ou $\mathbb{N}_t := \{t, t+1, \dots\}$

Remarque 1.1 [12] Pour $\nu = 1$ de définition 1.3, on déduire l'opérateur de somme discrète est

$$\Delta_a^{-1} f(k) = \sum_{s=a}^{k-1} f(s), \quad (1.11)$$

1.2.2 Propriétés.

Théorème 1.4 [13] Soit f une fonction de valeur réelle, on a

$$\begin{aligned} \Delta^{-\nu} [\Delta^{-\mu} f(k)] &= \Delta^{-(\mu+\nu)} f(k) \\ &= \Delta^{-\mu} [\Delta^{-\nu} f(k)] \end{aligned} \quad (1.12)$$

où $\mu, \nu > 0$, et pour tout k telle que $k = \mu + \nu \pmod{1}$

Preuve. [13] Par la définition 1.3, on a

$$\begin{aligned}
 \Delta^{-\mu} [\Delta^{-\nu} f(k)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \Delta^{-\mu} \sum_{r=0}^{k-\nu} (k - (r + 1))^{\nu-1} f(r) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \sum_{s=\nu}^{k-\mu} (k - (s + 1))^{\mu-1} \sum_{r=0}^{s-\nu} (s - (r + 1))^{\nu-1} f(r) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \sum_{s=\nu}^{k-\mu} \sum_{r=0}^{s-\nu} (k - (s + 1))^{\mu-1} (s - (r + 1))^{\nu-1} f(r) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \sum_{r=0}^{k-(\mu+\nu)} \sum_{s=r+\nu}^{k-\mu} (k - (s + 1))^{\mu-1} (s - (r + 1))^{\nu-1} f(r) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \sum_{r=0}^{k-(\mu+\nu)} \left(\sum_{x=\nu-1}^{k-(r+1)-\mu} (k - (r + 1) - (x + 1))^{\mu-1} x^{\nu-1} \right) f(r) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=0}^{k-(\mu+\nu)} (\Delta^{-\mu} (k - (r + 1))^{\nu-1}) f(r) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=0}^{k-(\mu+\nu)} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + \mu)} (k - (r + 1))^{\nu+\mu-1} \right) f(r) \\
 &= \Delta^{-(\mu+\nu)} f(k).
 \end{aligned}$$

■

Lemme 1.2

$$\Delta^{-\nu} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} t^{(\mu+\nu)} \quad (1.13)$$

Remarque 1.2 [12] Il est intéressant de noter que pour toute constante c , $\Delta^\nu c$ n'est pas nul. Pour voir cela, la différence fractionnaire de la constante c est

$$\Delta \Delta^{-(1-\nu)} c = \Delta \frac{c}{\Gamma(2-\nu)} t^{(1-\nu)} = \frac{c}{\Gamma(1-\nu)} t^{(-\nu)}$$

où $0 < \nu < 1$

Exemple 1.1 [12] Soit f et g définie sur l'ensemble des entiers, pour $\nu = 1/2$ au moyen de la règle de puissance, nous pouvons calculer et généraliser la somme d'ordre ν des polynômes factoriels comme :

$$\begin{aligned}
 \Delta^{-1/2} t^{(0)} &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} t^{(1/2)} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1/2)} \\
 \Delta^{-1/2} t^{(1)} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} t^{(3/2)} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-1/2)} \\
 \Delta^{-1/2} t^{(2)} &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} t^{(5/2)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-3/2)}
 \end{aligned}$$

donc $1/2$ d'ordre la somme $t^{(\nu)}$ est

$$\begin{aligned}\Delta^{-1/2}t^{(\nu)} &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}t^{(\nu+1/2)} \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-\nu+1/2)}.\end{aligned}$$

Théorème 1.5 [15] Pour tout $\nu > 0$, l'égalité suivante est vérifiée.

$$\Delta^{-\nu}\Delta f(k) = \Delta\Delta^{-\nu}f(k) - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}f(a), \quad (1.14)$$

où f est définie sur \mathbb{N}_a .

Remarque 1.3 Replacé ν par $\nu+1$ dans l'équation (1.14) avec le Théorème 1.4, on obtien

$$\Delta^{-\nu-1}\Delta f(k) = \Delta^{-\nu}f(k) - \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)}f(a), \quad (1.15)$$

cela implique

$$\Delta^{-\nu}f(k) = \Delta^{-\nu-1}\Delta f(k) + \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)}f(a) \quad (1.16)$$

Théorème 1.6 [15] Pour tout nombre réel ν , et tout entier positif p , l'égalité suivante est vraie :

$$\Delta^{-\nu}\Delta^p f(k) = \Delta^p\Delta^{-\nu}f(k) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(k-a)^{(\nu-p+j)}}{\Gamma(\nu+j-p+1)}\Delta^j f(a) \quad (1.17)$$

où f est défini sur \mathbb{N}_a .

Preuve. Nous remplaçons f par Δf dans (1.14).

$$\begin{aligned}\Delta^{-\nu}\Delta^2 f(k) &= \Delta\Delta^{-\nu}\Delta f(k) - \frac{(k-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}\Delta f(a) \\ &= \Delta \left[\Delta\Delta^{-\nu}f(k) - \frac{(k-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}f(a) \right] - \frac{(k-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}\Delta f(a) \\ &= \Delta^2\Delta^{-\nu}f(k) - \frac{(k-a)^{(\nu-2)}}{\Gamma(\nu)}f(a) - \frac{(k-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)}\Delta f(a) \\ &= \Delta^2\Delta^{-\nu}f(k) - \sum_{j=0}^1 \frac{(k-a)^{(\nu-2+j)}}{\Gamma(\nu+j-1)}\Delta^j f(a).\end{aligned}$$

Des itérations répétées donnent le résultat souhaité. ■

Remarque 1.4 [15] Replacé ν par $\nu+p$ dans (1.17) avec le Théorème 1.4, on obtien

$$\Delta^{-\nu}f(k) = \Delta^{-\nu-p}\Delta^p f(k) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(k-a)^{(\nu+j)}}{\Gamma(\nu+j+1)}\Delta^j f(a). \quad (1.18)$$

Théorème 1.7 [15] Soit $\nu > p$, et p un entier positive, on a.

$$\Delta^p [\Delta^{-\nu}f(k)] = \Delta^{-(\nu-p)}f(k). \quad (1.19)$$

1.3 L'opérateur de différence fractionnaire

1.3.1 Définition

$\Delta^\nu f(k)$ désignera la différence fractionnaire d'une fonction $f(k)$ d'un ordre arbitraire ν , et $\nu > 0$.

Définition 1.4 [12] La différence fractionnaire d'ordre ν de fonction f est définie par :

$$\Delta^\nu f(k) = \Delta^m \Delta^{-(m-\nu)} f(k) = \Delta^m \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \sum_{s=a}^{k-m+\nu} (k-(s+1))^{(m-\nu-1)} f(s). \quad (1.20)$$

où $m-1 < \nu < m$, et m est un entier

Définition 1.5 [16] Soit f une fonction réelle, et ν un nombre réel positif compris entre 0 et 1, l'opérateur de différence fractionnaire discrète définie comme suite :

$${}_k \Delta_a^\nu f(k) = \Delta_k \Delta_a^{-(1-\nu)} f(k) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \Delta \sum_{s=a}^{k-1+\nu} (k-(s+1))^{(-\nu)} f(s) \quad (1.21)$$

$k \equiv a+1-\nu \pmod{1}$.

$${}_b \Delta_k^\nu f(k) = -\Delta_b \Delta_k^{-(1-\nu)} f(k) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} (-\Delta) \sum_{s=k+1-\nu}^b (s-(k+1))^{(-\nu)} f(s) \quad (1.22)$$

tell que $k \equiv b+\nu-1 \pmod{1}$, nous allons utiliser le symbole, Δ^ν pour ${}_t \Delta_a^\nu$ sauf indication contraire.

1.3.2 Propriétés

Remarque 1.5 [12] Soit f une vraie fonction de valeur définie sur l'ensemble des entiers, en calcul discret, on à

$$\Delta \Delta^{-1} f = f.$$

pour tout nombre réel positif ν , cette égalité est également valable pour le calcul fractionnaire discret, par définition de différence fractionnaire discret, alors

$$\Delta^\nu \Delta^{-\nu} f(k) = \Delta \Delta^{-(1-\nu)} \Delta^{-\nu} f(k) \quad (1.23)$$

où $0 < \nu < 1$,

en utilisant la loi des exposants (Théorème 3.3)

$$= \Delta \Delta^{-\nu} \Delta^{-(1-\nu)} f(k) \quad (1.24)$$

$$= \Delta \Delta^{-1} f(k)$$

$$= f(k) \quad (1.25)$$

Théorème 1.8 [15] Soit $p - 1 < \nu < p$, et p est un entier positif, le Théorème 1.5. implique que.

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta^\nu f(k) &= \Delta \Delta^p [\Delta^{-(p-\nu)} f(k)] = \Delta^{p+1} [\Delta^{-(p-\nu)} f(k)] \\
 &= \Delta^p [\Delta \Delta^{-(p-\nu)} f(k)] = \Delta^p \left[\Delta^{-(p-\nu)} \Delta f(k) + \frac{(k-a)^{(p-\nu-1)}}{\Gamma(p-\nu)} f(a) \right] \\
 &= \Delta^p \Delta^{-(p-\nu)} \Delta f(k) + \Delta^p \frac{(k-a)^{(p-\nu-1)}}{\Gamma(p-\nu)} f(a) \\
 &= \Delta^\nu \Delta f(k) + \frac{(k-a)^{(-\nu-1)}}{\Gamma(-\nu)} f(a).
 \end{aligned}$$

Donc nous concluons que (3.5) est valable pour tout nombre réel ν .

1.4 La différence fractionnaire de Riemann et de Caputo

1.4.1 Définition

Définition 1.6 [15] La différence de Riemann de class μ est définie par

$$\Delta^\mu f(k) = \Delta^{m-\nu} f(k) = \Delta^m \Delta^{-\nu} f(k), \quad (1.26)$$

où $\mu > 0$, et $m - 1 < \mu < m$, et $\nu = m - \mu > 0$

Définition 1.7 [17] Pour $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{N}$, et $u(k)$ définie sur \mathbb{N}_a , la différence de Caputo est définie par

$${}^c_a \Delta_t^\nu u(k) = \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \sum_{s=a}^{k-(m-\nu)} (k-(s+1))^{(m-\nu-1)} \Delta^m u(s), \quad k \in N_{a+m-\nu}, \quad m = [\nu] + 1, \quad (1.27)$$

où ν est l'ordre de différence.

Pour $0 < \nu \leq 1$, cette différence partielle est donnée par

$$\begin{aligned}
 {}^c_a \Delta_t^\nu u(k) &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=a}^{k-(1-\nu)} (k-(s+1))^{(-\nu)} \Delta u(s) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=a}^{k-(1-\nu)} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(k-s+\nu)} (u(s+1) - u(s))
 \end{aligned} \quad (1.28)$$

si $k = a + 1 - \nu + n$, $a = 0$ et $n = 0, 1, 2, \dots$, on peut avoir,

$${}^c_a \Delta_t^\nu u(k) = \frac{1}{\nu(1-\nu)} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(k-j+1-\nu)}{\Gamma(n-j+1)} \Delta u(j), \quad 0 < \nu \leq 1.$$

Théorème 1.9 [18] Pour l'équation aux différences fractionnaires on a

$$\begin{aligned} {}_c\Delta_a^\nu u(k) &= f(k + \nu - 1, u(k + \nu - 1)) \\ \Delta^j u(a) &= u_j, \quad n = [\nu] + 1, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \end{aligned} \quad (1.29)$$

L'équation intégrale discrète équivalente peut être obtenue comme.

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{j=0}^n (t - (s + 1))^{\nu-1} f(s + \nu - 1, u(s + \nu - 1))$$

et condition initial

$$u(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-a)^j}{\Gamma(n-j+1)} \Delta^j u(a).$$

L'équation de différence complexe avec la mémoire à long terme est obtenue ici. Il peut réduire au classique lorsque l'ordre de différence $\nu = 1$

Définition 1.8 [3] Soit $\nu > 0$ et $\nu \notin \mathbb{N}$, les différences fractionnaires d'une fonction f définie sur \mathbb{N}_a et ${}_b\mathbb{N}$, respectivement, sont définies par :

$$\Delta_c^\nu f(k) = \Delta^{-(n-\nu)} \Delta^n f(k) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \sum_{s=a}^{k-(n-\nu)} (t - (s + 1))^{(n-\nu)-1} \Delta_s^n f(s) \quad (1.30)$$

où $n = [\nu] + 1$, si $\nu = n \in \mathbb{N}$, alors $\Delta_c^\nu f(k) = \Delta^n f(k)$

1.4.2 Propriétés

Théorème 1.10 [3] Pour tout $\nu > 0$, on a

$$\Delta_c^\nu f(k) = \Delta^\nu f(k) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(t-a)^{(j-\nu)}}{\Gamma(j-\nu+1)} \Delta^j f(a) \quad (1.31)$$

si $0 < \nu \leq 1$, on a

$$\Delta_c^\nu f(k) = \Delta^\nu f(k) - \frac{(k-a)^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} f(a) \quad (1.32)$$

On peut noter que les différences fractionnaires de Riemann et Caputo, pour $0 < \nu < 1$, coïncident lorsque f disparaît aux points de fin.

Proposition 1.1 [3] Soit $\nu > 0$ et f est défini sur \mathbb{N}_a et ${}_b\mathbb{N}$, alors

$$\Delta_{a+(n-\nu)}^{-\nu} \Delta_c^\nu f(k) = f(k) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(k-a)^{(j)}}{j!} \Delta^j f(a), \quad (1.33)$$

si $0 < \nu \leq 1$, on a

$$\Delta_{a+(n-\nu)}^{-\nu} \Delta_c^\nu f(k) = f(k) - f(a) \quad (1.34)$$

Dans ce chapitre, nous avons présenter un rappelle sur le calcul discret fractionnaire

Chapitre 2

Stabilité des systèmes discrets fractionnaires

2.1- Stabilité

2.2- Rappel sur la stabilité des systèmes discrets entiers

2.3- Stabilité des systèmes discrets fractionnaires

Le but de ce chapitre est de donner les théorèmes de base concernant la stabilité des systèmes discrets fractionnaires. Nous faisons un rappèle sur les définitions du stabilité et les résultats classiques dans le cas entier, ensuite nous passons à la stabilité dans le cas fractionnaire.

2.1 Stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes. Soit le système dynamique

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

où $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))^T$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit x_f un point fixe du système, on a :

$$x_f = F(x_f). \quad (2.2)$$

Définition 2.1 Le système est dit **stable au sens de Lyapunov** par rapport au point fixe x_f si pour des conditions initiales $x(k_0)$ suffisamment proches du point fixe soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \|x(k_0) - x_f\| < \delta \Rightarrow \|x(k, k_0, x(k_0)) - x_f\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0 \quad (2.3)$$

Définition 2.2 Le point fixe x_f est **attractif** lorsqu'il y a convergence de l'état x vers l'état x_f au bout d'un temps infini, les conditions initiales $x(k_0)$ étant bornées, soit :

$$\forall k_0 \in \mathbb{N}; \exists \delta_0(k_0), \text{ tel que : } \|x(k_0) - x_f\| < \delta_0(k_0) \Rightarrow \lim x(k, k_0, x(k_0)) = x_f, \quad (2.4)$$

lorsque $\delta_0(k_0) = +\infty$, on dit que le point fixe x_f est globalement attractif.

Définition 2.3 Le point fixe x_f est dit **asymptotiquement** (respectivement globalement asymptotiquement) stable lorsqu'il est à la fois stable au sens de Lyapunov et attractif (respectivement globalement asymptotiquement).

2.2 Rappelle sur la stabilité des systèmes discrets entiers

2.2.1 Stabilité des systèmes linéaires discrets

On considère le système linéaire suivant

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

où $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))^T$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Théorème 2.1 1- Si toutes les valeurs propres de A sont des modules strictement inférieurs à l'unité, alors le point fixe x_f du système (2.5) est asymptotiquement stable.

2- Si la matrice A admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité, alors le point fixe x_f est instable.

Exemple 2.1 Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k), \end{cases} \quad (2.6)$$

il est évident que l'origine est un point fixe pour le système. Dans ce cas la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

Simplement, les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Alors, le point $(0,0)$ du système (2.5) est asymptotiquement stable.

Remarque 2.1 Si certaines valeurs propres de la matrice A sont sur le cercle du rayon de l'unité et les autres à l'intérieur, on ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe x_f .

2.2.2 Stabilité des systèmes non-linéaires discrets

Soit le système non-linéaire suivant

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (2.8)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.2 S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, dite de Lyapunov, vérifiant :

(i) $V(0) = 0$,

(ii) $V(x(k)) > 0, \forall x(k) \neq 0$,

(iii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$.

Alors le système (2.8) est asymptotiquement stable à l'origine.

Remarque 2.2 La deuxième méthode de Lyapunov permet l'analyse de la stabilité directement à partir des équations qui décrivent le système et ne nécessitent pas la détermination explicite de leurs solutions.

Exemple 2.2 *Considérons le système non-linéaire*

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= \frac{x_1(n)}{1+x_2^2(n)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Considérez la stabilité du **point fixe** $(0, 0)$. Notre premier choix d'une **fonction de Lyapunov** sera $V(x_1(k), x_2(k)) = x_1^2(k) + x_2^2(k)$. C'est clairement continu et positif bien déterminé sur \mathbb{R}^2 , et on a

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k)) = x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - x_1^2(k) - x_2^2(k).$$

Ainsi,

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k)) = \left[\frac{1}{(1+x_2^2(k))^2} - 1 \right] x_1^2(k) < 0.$$

D'après le théorème 2.2, l'origine est stable.

2.3 Stabilité des systèmes discrets fractionnaires

2.3.1 Stabilité des systèmes discret fractionnaires linéaires

Soit le système discret fractionnaire linéaire :

$${}^C \Delta_a^\nu x(t) = Ax(t + \nu - 1), \quad t \in \mathbb{N}_{\nu+a}, \quad (2.10)$$

d'où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \nu \leq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Théorème 2.3 [6] *Le système linéaire (2.10) est asymptotiquement stable si et seulement si les zéros isolés, de l'axe réel non négatif, de $\det(I - z^{-1}(1 - z^{-1})^{-\nu}A)$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité.*

Remarque 2.3 *La condition énoncée dans le Théorème 2.3 semble être plus difficile de pratique. Maintenant, on donne un résultat plus pratique.*

Théorème 2.4 [7] *L'équilibre zéro du système linéaire fractionnaire (2.10) est asymptotiquement stable, si et seulement si toutes les valeurs propres λ de la matrice A appartient à l'ensemble*

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \left(2 \cos \frac{|\arg z| - \pi}{2 - \nu} \right)^\nu \text{ et } |\arg z| > \frac{\nu\pi}{2} \right\}. \quad (2.11)$$

Exemple 2.3 *Soit le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^\nu x_1(t) = -\frac{1}{2}x_1(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu x_2(t) = x_1(t + \nu - 1) - \frac{1}{3}x_2(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu x_3(t) = x_1(t + \nu - 1) + x_2(t + \nu - 1) - \frac{1}{4}x_3(t + \nu - 1). \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système (2.12), peut être décrit comme suit

$${}^C \Delta_a^\nu (x_1, x_2, x_3)^T (t) = A \times (x_1, x_2, x_3)^T (t + \nu - 1), \quad (2.13)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Simplement, les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$. Il est évident que

$$|\arg \lambda_1| = |\arg \lambda_2| = |\arg \lambda_3| = \pi > \frac{\nu\pi}{2} \quad (2.15)$$

et

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| < 1 < \left(2 \cos \frac{|\arg \lambda_i| - \pi}{2 - \nu}\right)^\nu, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Alors, le point $(0,0)$ du système (2.12) est asymptotiquement stable.

2.3.2 Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires

Maintenant, considérons un système fractionnaire non linéaire donné par

$${}^C \Delta_a^\nu x(t) = f(x(t + (\nu - 1)h)), \quad t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}, \quad (2.17)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \nu \leq 1$, et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.5 [8] Soit $x = 0$ un point fixe de l'équation (2.17). S'il existe une fonction scalaire définie positive et décroissante $V(t, x(t))$, et des fonctions discrètes γ_1 , γ_2 et γ_3 de classe K , telle que

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq \gamma_2(\|x(t)\|), \quad t \in (h\mathbb{N})_a \quad (2.18)$$

et

$${}^c \Delta_a^\nu V(t, x(t)) \leq -\gamma_3(\|x(t + \nu h)\|), \quad t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}. \quad (2.19)$$

alors le point fixe est asymptotiquement stable.

Remarque 2.4 Dans la cas pratique, il n'est pas facile de construire directement les fonctions γ_i . Dans cette section, nous présentons un autre lemme avec la condition suffisante. Nous supposons le point initial $a = 0$ pour simplifier. Nous introduisons d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.1 [8] (Principe de comparaison discrète) Pour $0 < \nu \leq 1$, si

$${}^c_h \Delta_a^\nu x(t) \geq {}^c_h \Delta_a^\nu y(t), \quad \forall t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h} \quad (2.20)$$

et $x(a) = y(a)$, alors

$$x(t + \nu h) \geq y(t + \nu h).$$

Preuve. Soit $F(t) = x(t) - y(t)$, en raison de ${}^c_h \Delta_a^\nu x \geq {}^c_h \Delta_a^\nu y$, on a ${}^c_h \Delta_a^\nu F(t) \geq 0$, qui peut être écrit explicitement,

$$\frac{h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} (t - (sh+1))_h^{(-\nu)} \Delta_s F(sh) \geq 0, \quad \forall t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}.$$

Utilisation de la sommation par parties, soit $g(sh) = \frac{(t-sh)_h^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)}$ et $f(sh) = F(sh)$. par la dérivation.

$$\frac{(t-sh)_h^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} F(sh) \Big|_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu} - \frac{h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} (t - (sh+1))_h^{(-\nu-1)} F(sh) \geq 0$$

Considérons $F(sh)|_{s=\frac{a}{h}} = x(a) - y(a) = 0$ et $\frac{(t-sh)_h^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} \Big|_{s=\frac{t}{h}+\nu} = h^{-\nu}$, on obtien.

$$F(t + \nu h) \geq \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} \frac{\Gamma(\frac{t}{h} - s)}{\Gamma(\frac{t}{h} - s + \nu + 1)} F(sh).$$

Pour $t = a + (1-\nu)h$, on a $F(t + \nu h) = F(a + h) \geq \frac{F(a)}{\Gamma(2)} = 0$, danc :

$$\frac{\Gamma(\frac{t}{h} - s)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\frac{t}{h} - s + \nu + 1)} > 0, \quad t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h},$$

on deduire que :

$$x(t + \nu h) - y(t + \nu h) = F(t + \nu h) \geq \frac{h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} \frac{\Gamma(\frac{t}{h} - s)}{\Gamma(\frac{t}{h} - s + \nu + 1)} F(sh) \geq 0$$

et ceci complète la preuve. ■

Lemme 2.2 [8] Pour toute $t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}$, l'inégalité suivante est vérifiée.

$${}_h^c \Delta_a^\nu x^2(t) \leq 2x(t + \nu h) {}_h^c \Delta_a^\nu x(t), \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (2.21)$$

Preuve. [8] Nous devons prouver de manière équivalente

$${}_h^c \Delta_a^\nu x^2(t) - 2x(t + \nu h) {}_h^c \Delta_a^\nu x(t) \leq 0,$$

peut être réécrit explicitement comme

$$\frac{h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} (t - (sh+1))_h^{(-\nu)} \Delta_s(x^2(s) - 2x(t + \nu h)x(sh)). \quad (2.22)$$

Considérons $\Delta_s x^2(t + \nu h) = 0$, nous ajoutons dans (2.22) telle que.

$${}_h^c \Delta_a^\nu x^2(t) - 2x(t + \nu h) {}_h^c \Delta_a^\nu x(t) = \frac{h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} (t - (sh+1))_h^{(-\nu)} \Delta_s(x(sh) - x(t + \nu h))^2$$

En utilisant à nouveau la somme par parties, soit $g(sh) = (t-sh)_h^{(-\nu)}$ et $f(sh) = (x(sh) - x(t + \nu h))^2$.

On obtient

$$\begin{aligned} {}_h^c \Delta_a^\nu x^2(t) - 2x(t + \nu h) {}_h^c \Delta_a^\nu x(t) &= \frac{-h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} (x(sh) - x(t + \nu h))^2 \Delta_s (t - sh)_h^{(-\nu)} \\ &\quad + \frac{(t - sh)_h^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} (x(sh) - x(t + \nu h))^2 \Big|_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu} \\ &= \frac{-\nu h}{\Gamma(1-\nu)} \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{t}{h}+\nu-1} (x(sh) - x(t + \nu h))^2 (t - (sh+1))_h^{(-\nu-1)} \\ &\quad - \frac{(t-a)_h^{(-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} (x(a) - x(t + \nu h))^2 \leq 0 \end{aligned}$$

■

Remarque 2.5 Pour $x = (x_1(t), \dots, X_m(t))^T$, $t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}$ le lemme 2.2 est toujours valable.

Par exemple, nous pouvons avoir :

$${}_h^c \Delta_a^\nu (x^T(t)x(t)) \leq 2x^T(t + \nu h) {}_h^c \Delta_a^\nu x(t), \quad t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h} \quad (2.23)$$

Exemple 2.4 Considérons le système discret fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}_h^c \Delta_a^\nu x_1(t) = -x_1(t + \nu h) + x_2^3(t + \nu h), & 0 < \nu \leq 1 \\ {}_h^c \Delta_a^\nu x_2(t) = -x_1(t + \nu h) - x_2(t + \nu h), & t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Nous utilisons la fonction de Lyapunov suivante : $V = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t)$, et selon le lemme 2.2, on a

$$\begin{aligned} {}_h^c\Delta_a^\nu V &\leq x_1(t + \nu h) {}_h^c\Delta_a^\nu x_1(t) + \frac{1}{2}x_1^2(t + \nu) {}_h^c\Delta_a^\nu x_2^2(t) \\ &\leq x_1(t + \nu h) {}_h^c\Delta_a^\nu x_1(t) + x_2^3(t + \nu) {}_h^c\Delta_a^\nu x_2(t) \\ &= -x_1(t + \nu h) - x_2^4(t + \nu h) < 0. \end{aligned}$$

En conséquence, le système (2.24) est asymptotiquement stable à partir du théorème 2.5.

Théorème 2.6 [8] Si $x(t + \nu h) f(t + \nu h, x(t + \nu h)) < 0, \forall t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}$, alors le point fixe de l'équation (2.19) est asymptotiquement stable

Preuve. Utilisez la fonction candidate discrète de Lyapunov

$$V(t, x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t),$$

si $x(t + \nu h) f(t + \nu h, x(t + \nu h)) < 0$, alors on a

$${}_h^c\Delta_a^\nu V \leq x(t + \nu h) {}_h^c\Delta_a^\nu x(t) = x(t + \nu h) f(t + \nu h, x(t + \nu h)) < 0.$$

ce qui signifie que la différence fractionnaire de $V(t, x(t))$ est défini négatif. ■

Exemple 2.5 Considérons l'équation fractionnaire discrète suivante :

$${}_h^c\Delta_a^\nu x(t) = -x(t + \nu h), \quad 0 < \nu \leq 1, t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}.$$

Nous vérifions que

$$x(t + \nu h) f(t + \nu h, x(t + \nu h)) = -x^2(t + \nu h) < 0, \quad t \in (h\mathbb{N})_{a+(1-\nu)h}.$$

Par conséquent, le point fixe $x = 0$ est asymptotiquement stable selon le Théorème 2.9.

Dans ce chapitre, après une série de définitions sur la notion de stabilité dans les systèmes discrets, nous avons présenté des différents résultats dans le cas de systèmes discrets d'ordre fractionnaires.

Chapitre 3

Synchronisation des systèmes discrets fractionnaires

3.1- Introduction

3.2- Théorie de synchronisation

3.3- Méthode de synchronisation

3.4- Nouveau type de synchronisation pour des systèmes discrets fractionnaires

3.5- Conclusion

3.1 Introduction

Jusqu'à présent, des différentes techniques de contrôle ont été introduites pour synchroniser des systèmes discrets d'ordre entier [9]. En outre, de nombreux types de synchronisation ont été proposés pour étudier le problème de la synchronisation discrète [19, 20, 21, 22, 23]. Récemment, l'étude de la coexistence de plusieurs types de synchronisation commence à attirer l'attention [24, 25]. La coexistence de différents types de synchronisation peut être très utile dans la communication sécurisée et les systèmes de cryptage chaotique. Cependant, à notre connaissance, peu d'études ont été réalisées sur les systèmes à temps discrets d'ordre fractionnaire.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter, les différents types de synchronisation et la méthode de synchronisation la plus performante. La dernière section de ce chapitre est consacrée à l'étude de la coexistence de différents types de synchronisation dans le cas des systèmes discrets fractionnaires.

3.2 Théorie de synchronisation

3.2.1 Système maître-esclave

On considère un système maître représenté par

$${}^C\Delta_a^\nu X(t) = F(X(t + \nu - 1)), \quad t \in \mathbb{N}_{a+1-\nu}, \quad (3.1)$$

d'où $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ est l'état du système (3.1) et $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Et un système esclave donné par

$${}^C\Delta_a^\nu Y(t) = G(Y(t + \nu - 1)) + U, \quad t \in \mathbb{N}_{a+1-\nu}, \quad (3.2)$$

d'où $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ est l'état du système (3.2), $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de contrôle à déterminer.

3.2.2 Types de synchronisation

Synchronisation complète (S.C) [36]

Définition 3.1 *Le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0. \quad (3.3)$$

d'où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Remarque 3.1 Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Remarque 3.2 Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

Anti-Synchronisation (A.S)

Définition 3.2 Le problème d'anti-synchronisation est de trouver U de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0. \quad (3.4)$$

Synchronisation projective (S.P)

Définition 3.3 On dit qu'on a une **synchronisation projective** entre les systèmes (3.1) et (3.2), s'il existe une matrice diagonale $H = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$, tels que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - H \times X(t)\| = 0. \quad (3.5)$$

Remarque 3.3 Le cas où tous les h_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.

Remarque 3.4 Le cas où tous les h_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation.

Synchronisation FSHP (S.FSHP)

Définition 3.4 On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (en anglais full state hybrid projective synchronization) entre le système maître (3.1) et le système esclave (3.2), s'il existe des contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq n$, et des constantes $(\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tels que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t) \right| = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Synchronisation inverse FSHP (S.IFSHP)

Définition 3.5 On dit qu'on a une **synchronisation IFSHP** entre le système maître (3.1) et le système esclave (3.2), s'il existe des contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq n$, et des constantes $(\beta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| x_i(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_j(t) \right| = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Synchronisation généralisée (S.G)

Définition 3.6 S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0, \quad (3.8)$$

alors, les systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ .

Remarque 3.5 La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective.

Remarque 3.6 Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(t)) = \Lambda X(t)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{n \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective**.

Synchronisation inverse généralisée (S.I.G)

Définition 3.7 S'il existe un contrôleur U et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \varphi(Y(t))\| = 0, \quad (3.9)$$

alors, les systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent au sens inverse généralisé par rapport à la fonction φ .

Remarque 3.7 Si la fonction φ est définie par $\varphi(Y(t)) = \theta Y(t)$ tel que $\theta = (\theta_{ij})_{n \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **inverse full-state hybrid projective**.

Synchronisation Q-S

Définition 3.8 Nous disons que les systèmes (3.1) et (3.2) sont en synchronisation $Q - S$ dans la dimension d , s'il existe un contrôleur U et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q(X(t)) - S(Y(t))\| = 0. \quad (3.10)$$

Remarque 3.8 La synchronisation $Q-S$ est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

3.3 Méthode de synchronisation

Pour que les deux systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.11)$$

alors,

$$\begin{aligned} {}^C\Delta_a^\nu e(t) &= {}^C\Delta_a^\nu Y(t) - {}^C\Delta_a^\nu X(t) \\ &= G(Y(t + \nu - 1)) - F(X(t + \nu - 1)) + U. \end{aligned}$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante :

$$G(Y(t + \nu - 1)) - F(X(t + \nu - 1)) = Ae(t + \nu - 1) + N(X, Y), \quad (3.12)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$${}^C\Delta_a^\nu e(t) = Ae(t + \nu - 1) + N(X, Y) + U, \quad (3.13)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = \mathbf{L} - N(X, Y), \quad (3.14)$$

d'où \mathbf{L} est le **contrôleur actif**, défini par :

$$\mathbf{L} = -Ce(t + \nu - 1), \quad (3.15)$$

d'où C est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$${}^C\Delta_a^\nu e(t) = (A - C)e(t + \nu - 1). \quad (3.16)$$

Théorème 3.1 *Le système maître (3.1) et le système esclave (3.2) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôle (3.14) si et seulement si la matrice de contrôle C est choisie telles que toutes les valeurs propres de $A - C$ vérifient :*

- (i) $|\arg z| > \frac{\nu\pi}{2}$.
- (ii) $|z| < \left(2 \cos \frac{|\arg z| - \pi}{2 - \nu}\right)^\nu$.

3.4 Nouveau type de synchronisation pour des systèmes discrets fractionnaires

3.4.1 Coexistence de SP, FSHPS et SG

Considérons le système à deux dimensions maître et un système à trois dimensions esclave donnés, respectivement par

$${}^C\Delta_a^\nu x_i(t) = f_i(X(t + \nu - 1)), \quad i = 1, 2, \quad (3.17)$$

et

$${}^C \Delta_a^\nu y_i(t) = \sum_{j=1}^3 b_{ij} y_j(t + \nu - 1) + g_i(Y(t + \nu - 1)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

où $t \in \mathbb{N}_{a+1-\nu}$, $0 < \nu \leq 1$, $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2$, $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est la partie linéaire du système (3.18), $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, sont des fonctions non linéaires, et u_i , $i = 1, 2, 3$, sont les contrôleurs à concevoir.

On peut définir la coexistence de **SP**, **SFSHP** et **SG** pour les systèmes couplés (3.17) et (3.18) comme suit.

Définition 3.9 Nous disons que la **synchronisation projective (SP)**, la **synchronisation FSHP** et la **synchronisation généralisée (SG)** coexistent entre les systèmes (3.17) et (3.18), s'il existe des contrôleurs u_i ($i = 1, 2, 3$), une constante $\gamma \in \mathbb{R}^*$, une matrice constante $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \times 2}$ et fonction non linéaire $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que les erreurs de synchronisation.

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1(t) - \gamma x_1(t), \\ e_2(t) = y_2(t) - \Phi \times (x_1(t), x_2(t))^T, \\ e_3(t) = y_3(t) - \phi(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (3.19)$$

satisfont :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e_i(t)| = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

Remarque 3.9 Du système d'erreur (3.19), il est évident que l'état y_1 et x_1 soient synchronisation projective, y_2 est en **SFSHP** avec x_1 et x_2 , et y_3 est généralisé synchronisé avec x_1 et x_2 .

Ensuite, nous proposons des lois de contrôle qui respectent la règle de coexistence (3.19). Définissons la matrice $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$.

Théorème 3.2 **SP**, **SFSHP** et **SG** coexistent pour la paire (3.17)–(3.18) sous la loi de contrôle suivante :

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{j=1}^3 (c_{1j} - b_{1j}) e_j(t) - \sum_{j=1}^3 b_{1j} y_j(t) - g_1(Y(t + \nu - 1)) + \gamma f_1(X(t + \nu - 1)), \\ u_2 = \sum_{j=1}^3 (c_{2j} - b_{2j}) e_j(t) - \sum_{j=1}^3 b_{2j} y_j(t) - g_2(Y(t + \nu - 1)) + \Phi_1 f_1(X(t + \nu - 1)) \\ \quad + \Phi_1 f_2(X(t + \nu - 1)), \\ u_3 = \sum_{j=1}^3 (c_{3j} - b_{3j}) e_j(t) - \sum_{j=1}^3 b_{3j} y_j(t) - g_3(Y(t + \nu - 1)) + {}^C \Delta^\beta \phi(x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \quad (3.21)$$

où $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ est une matrice constante choisie tels que tous $i = \overline{1, 3}$ les valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de $B - C$ satisfont

$$-2^\nu < \lambda_i < 0, \quad (3.22)$$

Preuve. Les équations de différence correspondant au système d'erreur (3.19) sont données par.

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^\nu e_1(t) = {}^C\Delta_a^\nu y_1(t) - \gamma {}^C\Delta_a^\nu x_1(t), \\ {}^C\Delta_a^\nu e_2(t) = {}^C\Delta_a^\nu y_2(t) - \Phi {}^C\Delta_a^\nu (x_1(t), x_2(t))^T, \\ {}^C\Delta_a^\nu e_3(t) = {}^C\Delta_a^\nu y_3(t) - {}^C\Delta_a^\nu \phi(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad (3.23)$$

En substituant les non-linéarités du système, on obtient

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^\nu e_1(t) = \sum_{j=1}^3 b_{1j} y_j(t + \nu - 1) + g_1(Y(t + \nu - 1)) + u_1 - \gamma f_1(X(t + \nu - 1)), \\ {}^C\Delta_a^\nu e_2(t) = \sum_{j=1}^3 b_{2j} y_j(t + \nu - 1) + g_2(Y(t + \nu - 1)) + u_2 - \Phi_1 f_1(X(t + \nu - 1)) \\ \quad - \Phi_1 f_2(X(t + \nu - 1)), \\ {}^C\Delta_a^\nu e_3(t) = \sum_{j=1}^3 b_{3j} y_j(t + \nu - 1) + g_3(Y(t + \nu - 1)) + u_3 - {}^C\Delta_a^\nu \phi(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad (3.24)$$

En substituant la loi de commande proposée (3.21) dans (3.24) on obtient.

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^\nu e_1(t) = \sum_{j=1}^3 (b_{1j} - c_{1j}) e_j(t + \nu - 1), \\ {}^C\Delta_a^\nu e_2(t) = \sum_{j=1}^3 (b_{2j} - c_{2j}) e_j(t + \nu - 1), \\ {}^C\Delta_a^\nu e_3(t) = \sum_{j=1}^3 (b_{3j} - c_{3j}) e_j(t + \nu - 1). \end{cases} \quad (3.25)$$

Afin de prouver que la solution zéro de (3.25) est globalement asymptotiquement stable, nous employons résultat de stabilité comme décrit dans le théorème (3.1). Le système d'erreur (3.25) peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$${}^C\Delta_a^\nu e(t) = (B - C) e(t + \nu - 1). \quad (3.26)$$

où $e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))^T$. Selon la condition (3.22), il est facile de voir que toutes les valeurs propres de la matrice $B - C$ satisfont le $|\arg \lambda_i| = \pi > \frac{\nu\pi}{2}$ et $|\lambda_i| < (2 \cos \frac{|\arg \lambda_i| - \pi}{2 - \nu})^\nu$, pour $i = 1, 2, 3$, immédiatement du théorème (3.1) la solution zéro de (3.26) est globalement asymptotiquement stable et par conséquent, systèmes (3.1) et (3.2) sont synchronisés dans 3D selon la définition (3.9). ■

3.4.2 Coexistence de la synchronisation IFSHP et la synchronisation IG dans 2D

Maintenant, les systèmes maître et esclave sont considérés sous les formes suivantes

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^\nu x_i(t) = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j(t + \nu - 1) + f_i(X(t + \nu - 1)), & i = 1, 2, \\ {}^C\Delta_a^\nu y_i(t) = g_i(Y(t + \nu - 1)) + u_i, & i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.27)$$

où $t \in \mathbb{N}_{a+1-\nu}$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2$, sont des fonctions non linéaires, et $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$.

Nous pouvons maintenant énoncer ce qui est signifié par la coexistence de IFSHPS et de IGS pour (3.27).

Définition 3.10 Nous disons que la synchronisation IFSHP et la synchronisation inverse généralisée (SIG) coexiste entre la paire (3.27), s'il existe des contrôleurs u_i , $i = 1, 2, 3$, une matrice constante $\Theta = (\Theta_{ij})_{1 \times 3}$, et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que les erreurs de synchron

Définition 3.11 isation

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - \Theta \times (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T, \\ e_2(t) = x_2(t) - \varphi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \end{cases} \quad (3.28)$$

satisfont

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.29)$$

Remarque 3.10 Du système (3.28), il est évident que x_1 est en SIFSHP avec $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$, et que $x_2(t)$ est SIG avec $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$.

Supposons que la fonction φ peut être factorisée sous la forme :

$$\varphi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = \sum_{j=1}^3 \theta_j y_j(t) + \psi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \quad (3.30)$$

où θ_j , $j = 1, 2, 3$, sont des nombres réels et $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire. La dynamique des erreurs (3.28) est donnée par :

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^\nu e_1(t) = {}^C \Delta_a^\nu x_1(t) - \Theta_1 {}^C \Delta_a^\nu y_1(t) - \Theta_2 {}^C \Delta_a^\nu y_2(t) \\ \quad - \Theta_3 {}^C \Delta_a^\nu y_3(t), \\ {}^C \Delta_a^\nu e_2(t) = {}^C \Delta_a^\nu x_2(t) - \theta_1 {}^C \Delta_a^\nu y_1(t) - \theta_2 {}^C \Delta_a^\nu y_2(t) \\ \quad - \theta_3 {}^C \Delta_a^\nu y_3(t) - {}^C \Delta_a^\nu \psi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)). \end{cases} \quad (3.31)$$

Pour simplifier les équations, on peut définir les quantités suivantes :

$$R_1 = \sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j(t) + f_1(X(t)) - \sum_{j=1}^3 \Theta_j g_j(Y(t)), \quad (3.32)$$

et

$$R_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j(t + \nu - 1) + f_2(X(t)) - \sum_{j=1}^3 \theta_j g_j(Y(t)) - {}^C \Delta_a^\nu \psi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)). \quad (3.33)$$

Utilisant (3.32) et (3.33), le système (3.31) peut être écrit sous la forme réduite.

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^\nu e_1(t) = R_1 - \sum_{j=1}^3 \Theta_j u_j, \\ {}^C \Delta_a^\nu e_2(t) = R_2 - \sum_{j=1}^3 \theta_j u_j, \end{cases} \quad (3.34)$$

ou dans la forme compacte suivante

$${}^C \Delta_a^\nu e(t) = R - M \times (u_1, u_2)^T - (\Theta_3 u_3, \theta_3 u_3)^T, \quad (3.35)$$

où $R = (R_1, R_2)^T$ et

$$M = \begin{pmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Pour établir la coexistence de S.IFSHP et SIG, nous supposons que M est inversible et notons son inverse par M^{-1} . Dans ce cas, la loi de contrôle, est donnée par

$$(u_1, u_2)^T = M^{-1} \times [(L - A) e(t) + R] \quad \text{et } u_3 = 0, \quad (3.37)$$

où $L \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une matrice de contrôle à déterminer. Substituant (3.37) dans l'équation.(3.35), nous obtenons.

$${}^C \Delta_a^\nu e(t) = (A - L) e(t + \nu - 1). \quad (3.38)$$

Le résultat suivant suit de manière similaire à Théorème (3.2). La preuve a été omise car il peut être déduit directement de celle du Théorème de (3.2).

Théorème 3.3 *Si la matrice de contrôle L est choisie tel que toutes les valeurs propres de $A - L$ vérifie que $-2^\nu < \lambda_i < 0$, $i = 1, 2$, alors SIFSHP et SIG coexistent pour (3.27) tel que décrit en (3.28) sous la loi de contrôle (3.37).*

3.4.3 Applications numériques

Nous considérons le système 2D d'Hénon fractionnaire proposé dans [26] comme un système maître, et le système 3D d'Hénon fractionnaire généralisé proposé [27] comme un système esclave. Donc La paire est décrite comme suit :

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^\nu x_1(t) = x_2(t + \nu - 1) - x_1(t + \nu - 1) + 1 - a_1 x_1^2(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu x_2(t) = b_1 x_1(t + \nu - 1) - x_2(t + \nu - 1), \end{cases} \quad (3.39)$$

et

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^\nu y_1(t) = -y_1(t + \nu - 1) - b_2 y_3(t + \nu - 1) + u_1(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu y_2(t) = b_2 y_3(t + \nu - 1) + y_1(t + \nu - 1) - y_2(t + \nu - 1) + u_2(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu y_3(t) = 1 + y_2(t + \nu - 1) - a_2 y_3^2(t + \nu - 1) - y_3(t + \nu - 1) + u_3(t + \nu - 1). \end{cases} \quad (3.40)$$

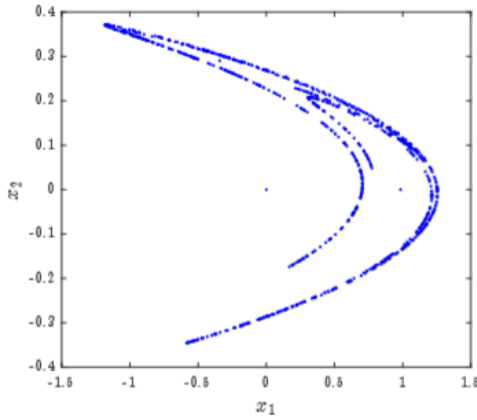


FIG. 3.1 – Espace de phase du système (3.39) avec $(a_1, b_1) = (1.4, 0.3)$, $\nu = 0.984$, et $(x_1(0), x_2(0)) = (0.0)$.

Les parties linéaires et non linéaires du système maître (3.39) et le système esclave (3.40) sont donnés par, respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_1 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -a_1 x_1^2(t) + 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -b_2 \\ 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - a_2 y_3^2(t) \end{pmatrix}.$$

Les figures 3.1 et 3.2 affiche les trajectoires des systèmes maître (3.39) est esclave (3.40), respectivement.

Exemple 3.1 Selon la définition 3.9, le schéma de synchronisation entre les systèmes maître (3.39) est esclave (3.39) est donné par

$$\gamma = 3, \quad \Phi = (1, 3) \text{ et } \phi(x_1(t), x_2(t)) = (x_1(t)x_2(t)). \quad (3.41)$$

Le Théorème (3.2) nécessite la sélection d'une matrice de contrôle C telle que toutes les valeurs propres de $B - C$ satisfont la condition (3.22). Par exemple, la matrice de contrôle C peut être choisie comme

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

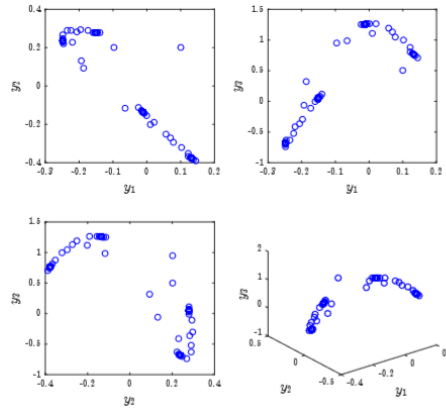


FIG. 3.2 – Espace de phase du système (3.40) avec $(a_2, b_2) = (0.99, 0.2)$, $\nu = 0.984$, et $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (0.1, 0.2, 0.5)$.

Simplement, nous les valeurs propres de $B - C$ sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ et à cet effet la condition du Théorème (3.2). Nous pouvons utiliser la matrice C pour construire les contrôleurs suivants

$$\begin{cases} u_1 = -e_1(t) - b_2 e_3(t) + y_1(t) + b_2 y_3(t) + 3x_2(t) \\ \quad - 3x_1(t) + 3 - 3a_1 x_1^2(t), \\ u_2 = -e_2(t) + b_2 e_3(t) - b_2 y_3(t) - y_1(t) + y_2(t) - 2x_2(t) \\ \quad + (3b_1 - 1)x_1(t) + 1 - a_1 x_1^2(t) \\ u_3 = -e_3(t) - 1 - y_2(t) + a_2 y_3^2(t) + y_3(t) \\ \quad + {}^C \Delta_a^\nu x_1(t) x_2(t). \end{cases} \quad (3.43)$$

Ces contrôleurs conduits au système erreur simplifié.

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^\nu e_1(t) = -e_1(t + \nu - 1) - b_2 e_3(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu e_2(t) = -e_2(t + \nu - 1) + b_2 e_3(t + \nu - 1), \\ {}^C \Delta_a^\nu e_3(t) = -e_3(t + \nu - 1). \end{cases} \quad (3.44)$$

Figure 3.3 montre les erreurs en fonction du temps pour les valeurs initiales $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (0.1, 0.2, 0.5)$. Il est clair que les erreurs convergent vers la solution zéro.

Exemple 3.2 Le deuxième cas concerne la coexistence de SIFSHP et SIG en 2D. Le système d'erreur est défini selon la définition (3.10) où

$$\Theta = (1, 0, 3) \text{ et } \varphi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = y_1(t) + y_2(t) + y_3^2(t). \quad (3.45)$$

Suite à l'approche du Théorème 3.3, nous commençons par une factorisation de φ comme

$$\varphi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = \sum_{j=1}^3 \theta_j y_j(t) + \psi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)). \quad (3.46)$$

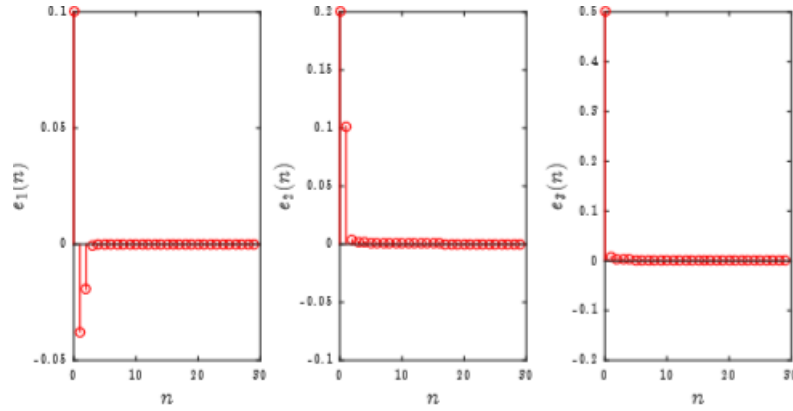


FIG. 3.3 – Évolution des erreurs (3.44)

Il peut être facilement voir que.

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (1, 2, 0) \text{ et } \psi(y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = y_3^2(t), \quad (3.47)$$

Le schéma de synchronisation proposé réorganise Θ et $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ dans la matrice M comme suit.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

qui est inversible avec

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Le Théorème (3.3) nécessite le choix d'une matrice L . Ceci peut être réalisé avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{4} \\ b_1 - 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Les contrôleurs peuvent donc être construits selon (3.37) sur la base de R_1 et R_2 définie dans (3.32) et (3.33), respectivement, comme suivant

$$\begin{cases} u_1(t) = -2e_1 - \frac{9}{4}e_2 + x_2(t) - x_1(t) - a_1x_1^2(t) + y_1(t) \\ \quad + (b_2 + 3)y_3(t) - 2 - 3y_2(t) + 3a_2y_3^2(t), \\ u_2(t) = \frac{3}{2}e_1 + \frac{13}{8}e_2 - y_1(t) + \frac{5}{2}y_2(t) - \left(\frac{3}{2} + b_2\right)y_3(t) \\ \quad - x_2(t) + \frac{(b_1+1)}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}a_1x_1^2(t) \\ \quad - \frac{3a_2}{2}y_3^2(t) - \frac{1}{2}{}^C\Delta^\beta y_3^2(t) + 1, \\ u_3(t) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

et on a

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^\nu e_1(t) = -2e_1(t + \nu - 1) - \frac{9}{4}e_2(t + \nu - 1), \\ {}^C\Delta_a^\nu e_2(t) = e_1(t + \nu - 1) + e_2(t + \nu - 1). \end{cases} \quad (3.52)$$

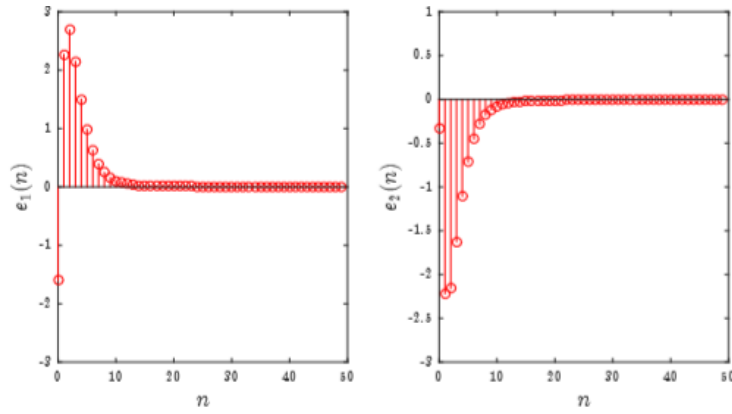


FIG. 3.4 – Évolution des erreurs (3.51).

Il est facile à partir de la figure 3.4, de voir que les erreurs convergent vers zéro en un temps suffisant, ce qui prouve que les contrôleurs (3.51) en fait réaliser la coexistence de SIFSHPS et SIG pour la paire (3.39).

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que différents types de synchronisation peuvent coexister pour des systèmes discret fractionnaires. Premièrement, nous avons présenté un schéma de contrôle non linéaire dans lequel SP, FSHPS et GS sont obtenus simultanément. La stabilité de la convergence de l'erreur de synchronisation ont été établies à l'aide de la méthode de Linéarization. Le deuxième résultat principal concerne la coexistence de IFSHPS et de IGS pour le même couple. Les résultats numériques ont confirmé les résultats de l'étude.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons commencé par présenter un chapitre préliminaire sur le calcul discret fractionnaire, puis nous sommes passés à la stabilité des systèmes discrets d'ordre fractionnaire, et enfin la théorie de synchronisation en évoquant les types de synchronisation, la méthode du contrôleur actif et quelques résultats sur la coexistence de différents types de synchronisation des systèmes discrets fractionnaires.

D'après la présentation de nos résultats, nous sommes parvenus à :

- 1- Nous pouvons trouver d'autres critères de synchronisation
- 2- Il est possible d'observer et de développer de nouveaux types de synchronisation généralisée.
- 3- La complexité des schémas proposés dans ce mémoire, peut être utilisée dans la sécurité des communications et la cryptographie.

Nos futurs travaux seront concentrés sur la recherche de nouveaux critères de synchronisation, qui sont moins coûteux et très compliqués.

Bibliographie

- [1] Diaz, J.B. ; Olser, T.J. Differences of fractional order. *Math. Comput.* 1974, 28, 185–202.
- [2] Atici, F.M. ; Eloe, P.W. Discrete fractional calculus with the nabla operator. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. Spec. Ed. I* 2009, 3, 1–12.
- [3] Abdeljawad, T. On Riemann and Caputo fractional differences. *Comput. Math. Appl.* 2011, 62, 1602–1611.
- [4] Abdeljawad, T. ; Baleanu, D. ; Jarad, F. ; Agarwal, R.P. Fractional sums and differences with binomial coefficients. *Discret. Dyn. Nat. Soc.* 2013, 2013, 104173
- [5] Anastassiou, G.A. Principles of delta fractional calculus on time scales and inequalities. *Math. Comput. Model.* 2010, 52, 556–566.
- [6] Raghieb Abu-Saris , Qasem Al-Mdallal , on the asymptotic stability of linear system of fractional -order difference equations, Vol, 18 3(2015)
- [7] J. Cermak, I. Gyori, L. Nechvatal, On explicit stability condition for a linear fractional difference system, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18 (2015) 651–672.
- [8] D. Baleanu, G. Wu, Y. Bai, F. Chen, Stability analysis of Caputo–Like discrete fractional systems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Vol. 48 (2017), pp. 520–530.
- [9] Adel Ouannas, Synchronisation des systèmes chaotiques discrets. These de doctorat. 2015.
- [10] The Co-existence of Different Synchronization Types in Fractional-order Discrete-time Chaotic Systems with Non–identical Dimensions and Orders. S Bendoukha, A Ouannas, X Wang , AA Khennaoui , Viet-Thanh Pham, Giuseppe Grassi and Van Van Huynh 2018(20),710, pp 1-13
- [11] C. Goodrich, A.C. Peterson, *Discrete Fractional Calculus*, Springer, (2015).
- [12] Sevgi Sengul , *Discrete Fractional Calculus and Its Applications to Tumor Growth*, 2010

-
- [13] Ferhan M. Atici, Paul W. Eloe, A Transform Method in Discrete Fractional Calculus, ISSN 0973-6069 Volume 2 Number 2 (2007), pp. 165–176
- [14] Christopher Goodrich, Continuity of solutions to discrete fractional initial value problems, *Computers and Mathematics with Applications* 59(2010)3489–3499
- [15] Ferhan M. Atici and Paul W. Eloe, initial value problems in discrete fractional calculus Volume 137, Number 3, March 2009, Pages 981–989
- [16] Ferhan M. Atici, Sevgi Sengül Modeling with fractional difference equations, *J. Math. Anal. Appl.* 369 (2010) 1–9
- [17] Guo-Cheng Wu, Dumitru Baleanu, Sheng-Da Zeng, Several Fractional Differences and Their Applications to Discrete Maps, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics* 4(4) (2015) 339–348
- [18] Tongchun Hu, Discrete Chaos in Fractional Hénon Map, *Applied Mathematics*, 2014, 5, 2243-2248
- [19] A. Ouannas, On full state hybrid projective synchronization of general discrete chaotic systems. *Journal of Nonlinear Dynamic*, Vol. 2014 (2014), Article ID 983293, pp. 1–6.
- [20] **Ouannas, A.** (2015), “A new synchronization scheme for general 3D quadratic chaotic systems in discrete-time,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 15 (2), pp. 163–170.
- [21] **Ouannas, A., Odibat, Z.** (2015), “Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time,” *Nonlinear Dyn.* DOI 10.1007/s11071-015-2026-0.
- [22] **Ouannas, A.** (2015), “A new generalized-type of synchronization for discrete-time chaotic dynamical Systems,” *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, Vol. 10(6), pp. 061019-8.
- [23] **Ouannas, A.** (2014), “A new chaos synchronization criterion for discrete dynamical systems,” *Appl. Math. Sci.*, Vol. 8 (41), pp. 2025-2034.
- [24] A. Ouannas, Co-existence of various synchronization-types in hyperchaotic maps, *Nonlinear Dyn. Syst. The.*, Vol. 16(3) (2016), pp. 312–321.
- [25] A. Ouannas, G. Grassi, A new approach to study co-existence of some synchronization types between chaotic maps with different dimensions, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 86(2) (2016), pp. 1319–1328
- [26] T. Hu, Discrete Chaos in Fractional Hénon Map, *Appl. Math.*, Vol. 5 (2014), pp. 2243–2248.
- [27] M.K. Shukla, B.B. Sharma, Investigation of chaos in fractional order generalized hyperchaotic Hénon map, *Int. J. Elec. Comm.*, Vol. 78 (2017), pp. 265–273.

- [28] The fractional form of a new three-dimensional generalized Hénon map. L Jouini, A Ouannas, AA Khennaoui, X Wang, G Grassi, VT Pham *Advances in Difference Equations* 2019 (1), 122 , pp. 1-22.
- [29] On the dynamics, control and synchronization of fractional-order Ikeda map A Ouannas, AA Khennaoui, Z Odibat, VT Pham, G Grassi *Chaos, Solitons & Fractals* 123, pp. 108-115
- [30] On chaos in the fractional-order Grassi–Miller map and its control A Ouannas, AA Khennaoui, G Grassi, S Bendoukha *Journal of Computational and Applied Mathematics*
- [31] Chaotic Map with No Fixed Points : Entropy, Implementation and Control VV Huynh, A Ouannas, X Wang, VT Pham, XQ Nguyen, FE Alsaadi *Entropy* 21 (3), 279, pp. 1-10
- [32] On fractional-order discrete-time systems : Chaos, stabilization and synchronization AA Khennaoui, A Ouannas, S Bendoukha, G Grassi, RP Lozi, VT Pham *Chaos, Solitons & Fractals* 119, pp 150-162
- [33] The fractional form of the Tinkerbell map is chaotic A Ouannas, AA Khennaoui, S Bendoukha, T Vo, VT Pham, V Huynh *Applied Sciences* 8 (12), 2640
- [34] Fractional form of a chaotic map without fixed points : Chaos, entropy and control A Ouannas, X Wang, AA Khennaoui, S Bendoukha, VT Pham, F Alsaadi *Entropy* 20 (10), 720 , 4, pp 1-14.
- [35] 3- Synchronisation of integer-order and fractional-order discrete-time chaotic systems A Ouannas, AA Khennaoui, O Zehrou, S Bendoukha, G Grassi, VT Pham *Pramana* 92 (4), 52, pp. 1-9.
- [36] Generalized and inverse generalized synchronization of fractional-order discrete-time chaotic systems with non-identical dimensions AA Khennaoui, A Ouannas, S Bendoukha, G Grassi, X Wang, VT Pham *Advances in Difference Equations* 2018 (1), 303, pp 2-14
- [37] 09- On the Q–S Chaos Synchronization of Fractional-Order Discrete-Time Systems : General Method and Examples A Ouannas, AA Khennaoui, G Grassi, S Bendoukha *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2018