République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Edp et applications

Thème

Autour les opérateurs de dérivation généralisée

Présenté Par :
Latreche Bouthaina
Achi Rahma

Devant le jury :

Mr Bouznada Smail	MCA	Univérsité Larbi Tébessa	Président
Mme Mesouden Hadia	MCA	Univérsité Larbi Tébessa	Examinateur
Mr Toualbia Abdelatif	MCB	Univérsité Larbi Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2019

Résumé

Une synthèse bibliographique concernant les théorèmes et les définitions que nous allons utiliser dans les autre chapitres fait l'objet du premier chapitre.
Au second chapitre on a donné la forme de Jordan pour l'opérateur de dérivation généralisée $\delta_{A,B}(X)=AX - XB$, On a obtenu une condition suffisante pour que $\delta_{A,B}$ a la forme de Jordan
Au troisième chapitre, on étudie l'image numérique d'un opérateur linéaire borné et on donne quelques propriétés de l'image numérique d'une dérivation.
Au dernier chapitre on a initie l'étude sur l'orthogonalité de l'image au noyau de la dérivation et l'étude des opérateurs finis

Les mots clés : dérivation généralisée, image numérique, orthogonalité de l'image au noyau, opérateur fini

Abstract

A short summary of the theorems and definitions that we will use in other chapters is the subject of the first chapter.
In the second chapter, we study the numerical range of a bounded linear operator and we present some properties of the numerical range of a derivation
In the third chapter, we give the Jordan form for the generalized derivation $\delta_{A,B}(X)=AX-XB$
In the last chapter, we initiated the study on the orthogonality of the image to the kernel of the derivation and the study of finite operators.
Keywords: generalized derivation, numerical range, orthogonality of the image to the kernel, finite operator

ملخص

موضوع الفصل الأول هو ملخص قصير لبعض التعاريف والنظريات التي سوف يتم استعمالها في الفصول الاخرى

في الفصل الثاني سنقدم شكل جوردن للمشتقة المعممة $\delta_{A,B}(X)=AX-XB$

في الفصل الثالث سوف ندرس الصورة العددية للمؤثرات الخطية المحدودة مع تقديم بعض خصائص الصورة العددية للمشتقة

في الفصل الأخيرسنقوم بدراسة تعامدية صورة النواة للمشتقة, مع دراسة المؤثرات المنتهية.

<u>الكلمات المفتاحية:</u> المشتقة المعممة, الصورة العددية, تعامدية صورة نواة, المؤثرات المنتهية.

Remerciments

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et misécordieux , qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je pense le second lieu à Mr Toualbia Abdelatif , que nous remercions énormément pour avoir encadré ce travail, nous tenons surtout le remercier pour leur conseils judicieux et avisés, leur disponibilité et leur rigueur scientifique qui nous permis d'avancer et de progresser considérablement dans nos traveaux .

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury , je remercie Mr Bouznada Smail pour avoir accepté de présider notre jury , nous remercions aussi Mme Mesouden Hadia pour avoir accepté d'examiner notre travail

Nos remerciements vont bien entendu à tout les personnes qui nous aident durant tous les années d'études.

Ces remerciements ne seront pas complets si nous ne mentionnons pas nos parents, nos frères , nos sœurs et nos amis , nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dedicace

A nos parents,

A nos frères,

A nos sœurs,

A nos familles,

A nos amies,

A nos honest professeurs.

Nous dédions ce modeste travail.

Table des matières

0.1 Introduction générale

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie et soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. Pour A et $B \in \mathcal{L}(H)$, nous définissons la dérivation δ_A, la dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_A(X) &= AX - XA, \\ \delta_{A,B}(X) &= AX - XB, \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$. Ces opérateurs ont plusieurs applications dans la théorie des opérateurs, ils sont utilisés en mécanique quantique pour représenter des grandeurs physiques, les observables,... ; par exemple si l'opérateur commutateur $AB - BA = \bar{+}ih$ on dit que les grandeurs physiques sont complémentaires, comme cela est exprimé dans le principe d'incertitude d'Heisenberg. Les propriétés de ces opérateurs, leur spectre, normes et image ont été examinés minutieusement ces dernières années, et plusieurs problèmes restent encore sans réponses.

Ce travail est consacré à donner quelques propriétées des opérateurs de dérivations $\delta_A, \delta_{A,B}$, notre étude principale dans cette mémoire consiste **premièrement** : en la construction de la forme de Jordan d'une dérivation $\delta_{A,B}$, **deuxièment** : de l'étude de dérivation et l'image numérique et **troisièment :** de caractériser les opérateurs finis puis d'étudier l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation.

Au premier chapitre (**Rappels et Préliminaires**) : nous exposons les notions fondamentales en vues de les utiliser dans les chapitres suivants. On insistra, en particulier, sur quelques définitions et propriétés d'analyse fonctionnelle, sur l'espace $\mathcal{L}\ (E, F)$ et les propriétés associés et on terminera par quelques rappels sur la forme de Jordan.

Au chapitre 2(Forme de Jordan d'une dérivation généralisée $\delta_{A,B}$) : nous abordons en détail la forme de Jordan pour l'opérateur de dérivation $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$, nous y établisons quelques lemmes et propriétés fondamentaux.

Au chapitre 3 (Dérivations et Image Numérique) : Nous donnons dans ce chapitre les propriétés de l'image numérique que nous l'avons rencontré dans une thèse de Smail Bouznada - **Etude**

des opérateurs finis et leurs caractérisations- Doctorat maths -Univerisité Annaba 2008).

Au chapitre 4 :(Les opérateurs finis, orthogonalité de l'image au noyau) Considérons H un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaire bornés sur H, nous définissons la dérivation intérieure induite par A comme suit $\delta_A(X) = AX - XA$, $X \in \mathcal{L}(H)$. Ce chapitre s'occupe principalement du problèmes de

1.Les opérateurs finis
2.L'orthogonalité de $\mathrm{Im}(\delta_A)$ au $\ker(\delta_A)$,
nous sommes intéressés dans ce chapitre à savoir pour quels A les propriétés 1 et 2 restent vraies. Après avoir donné une courte définitions del'image numérique, les opérateurs finis et l'orthogonalité de l'image au noyau, on donne une classification des classes des opérateurs finis, aussi nous montrerons que si A un opérateur auto -adjoint, isométrique, normal, paranormal, p-hyponormal , log- hyponormal, alors $\mathrm{Im}(\delta_A)$ est orthogonale à $\ker(\delta_A)$.

On doit signaler que dans l'étude des opérateurs finis et L'orthogonalité de $\mathrm{Im}(\delta_A)$ au $\ker(\delta_A)$ on ne s'intéressera qu'à des opérateurs de dérivation . L'étude des opérateurs finis et l'orthogonalité de $\mathrm{Im}(\delta_A)$ au $\ker(\delta_A)$,dans le cas des opérateurs de dérivation généralisées, est bien plus compliquée. Des résultats assez généraux ont été obtenus dans cette voie par S. Bouznada , S.Mecheri.

0.2 Notations et défintions

H	:	Espace de Hilbert complexe.
$\mathcal{L}(H)$	:	Espace des opérateurs linéaire bornés sur H.
A^*	:	Adjoint Hilbertien de A.
$\|A\|$	:	Norme de A.
$E_1 \oplus E_2$	:	Somme directe de E_1 et E_2.
$\sigma(A)$	:	Spectre de A.
$r(A)$	:	Rayon spectrale de A.
$\sigma_a(A)$	:	Spectre approximatif de A.
$\sigma_{ar}(A)$	:	Spectre approximatif réduisant de A.
E'	:	Espace dual de E.
δ_A	:	Dérivation intérieure induite par A.
$\delta_{A,B}$	:	Dérivation généralisée induite par A, B.
$\otimes$	:	Signe de produit tensoriel
$\mathrm{Im}(A)$	:	Image de A.
$\ker(A)$	:	Noyau de A.
$Vect\{e_1, \ldots, e_m\}$	:	Sous espace vectorielle engendré par $\{e_1, \ldots, e_m\}$.
$\delta_{A,B} \mid_{G_q}$	:	restriction de $\delta_{A,B}$ sur G_q.
$W(A)$	:	Image numérique de A
$\partial W(A)$	:	La frontière de $W(A)$.
$\{A\}'$	:	Commutant de A.
$co\sigma(A)$	:	Enveloppe convexe de $\sigma(A)$

$\mathcal{A}$	:	L'algèbre de Banach
$\mathcal{P}$	:	L'ensemble d'états
$\mathbf{K}(\mathbf{H})$	:	L'ensemble des applications compacts.
$\mathcal{F}(\mathbf{H})$	:	L'ensemble des opérateurs finis
A est Unitaire	:	si $A^*A = AA^*$
A est Auto-adjoint	:	si $A = A^*$
A est Isométrie	:	si $A^*A = I$.
A est Normlaid	:	si $r(A) = \|A\|$
A est Normal	:	si $A^*A - AA^* = 0$.
A est Hyponormal	:	si $A^*A - AA^* \geq 0$
A est nilpotent d'ordere n	:	si $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0, n > 1$
A est Paranormal	:	si $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \|x\|$ pour tout $x \in H$
A est P-hyponormal	:	si $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$
A est Compact	:	si $(Ax_n, x_n) \to 0$, pour toute suite orthonormée (x_n) de H.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Le premier chapitre de cette thése est consacré à des sujet qui sont supposés etre connus. Nous donnons un court résumé des théorèmes et définitions que nous allons utiliser dans les autre chapitre.

Dans le premier paragraphe, nous parlons d'espace de Hilbert (définitions, dualité, bases orthonormales). Dans le deuxième paragraphe, nous donnons quelques propriétés de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$, la forme de Jordan d'une matrice est traités dans le paragraphe 3. La connaisance de la construction de la forme de Jordan est indispensable et nous suggération au lecteur qui n'est pas familier avec ce point de bien lire ce paragraphe.

1.1 Définitions, propriétés générales

Définition 1.1 *Soit E espace linéaire sur le corps $\Bbbk$. Un* ***produit scalaire*** *sur E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \Bbbk$* **.** *telle que pour tous vecteurs x_1, x_2, y de E et $\lambda \in \Bbbk$, on a :*

1. $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

3. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$

4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$.

Pour désigner un produit scalaire on rencontre d'habitude les notations (x, y), $(x\,|y)$, $\langle x, y\rangle$. Nous utiliserons la notation (x, y).
Un espace linéaire muni d'un produit scalaire est appelé un **espace préhilbertien.**

Remarque 1.1 *a) Les propriétés suivantes d'un produit scalaire se vérifient aisément par les axiomes 1) à 4) :*

i) $(0, x) = (x, 0) = 0$, pour tout $x \in E$

ii) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (x_i, y_j)$,

pour tout $x_i, y_j \in E$, λ_i, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, m$.
b) Si $\Bbbk = \mathbb{R}$, alors la propriété 2 de définition 1.1 revient à $(x, y) = (y, x)$ pour tout $x, y \in E$. C'est une propriété de symétrie.

Théorème 1.1 *Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|\|: E \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par*

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}, \textit{ pour tout } x \in E,$$

est une norme pour E.

Preuve. Nous avons $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. De plus

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= (\lambda x, \lambda x)^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2 (x, x))^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 (x, x)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda|\,(x, x)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,\|x\|\,. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\ &= \|x\|^2+(x,y)+\overline{(x,y)}+\|y\|^2\\ &= \|x\|^2+2\,\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|.$$

La norme $\|\|$ ainsi définie s'appelle la *norme induite par le produit scalaire.* ■

Définition 1.2 *Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est appelé* ***espace vectoriel normé complet*** *ou* ***espace de Banach.***

Définition 1.3 *Un* ***espace de Hilbert*** *est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autre mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Définition 1.4 *L'espace des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$, $\pounds(E,\mathbb{R}) = E'$ est appelé le dual topologique de E.*

Définition 1.5 *On appelle* ***famille orthogonale*** *dans un espaces de Hilbert E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E vérifiant $(e_i,e_j)=0$ pour tout $i\neq j$.*

On appelle ***famille orthonormale*** *une famille orthogonale tel que pour tout i, $\|e_i\| = 1$. D'autre façon, une famille $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ est dite orthonormale si*

$$(e_j,e_k)=\delta_{jk}=\begin{cases}1 & (j=k),\\ 0 & (j\neq k).\end{cases}$$

Proposition 1.1 *Toute famille orthogonale est libre.*

Preuve. Soit J un sous-ensemble fini de I. Si $\sum\limits_{i\in J}\lambda_i a_i = 0$ alors :

$$0=\left(\sum_{i\in J}\lambda_i a_i, a_k\right) \qquad \text{pour tout } k\in I.$$

Comme $(a_i,a_k)=0$ sauf pour $k=i$ l'égalité précédente entraine $\lambda_k=0$ ■

Définition 1.6 *On appelle base orthonormale dans un espace de Hilbert $H \neq \{0\}$, un système orthonormale maximale, i.e. on ne peut plus ajouter un vecteur non nul qui est orthogonal à une base orthonormale.*
Autrement dit, un système orthonormal $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ d'un espace de Hilbert est une base orthonormale si et seulement si on a $\{(x, e_i) = 0$ pout tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}\} \Longrightarrow x = 0$

Définition 1.7 *Soit (a_i) une famille orthonormale de E espaces préhilbertiens et soit x un élément de E. Alors (a_i, x) est appelé le* ***n**^{ième} **coefficient*** *de x par rapport à la famille (a_i)*

Si E est de dimension finie et si les a_i forment une base, les coefficients $c_i = (a_i, x)$ sont les composantes de x dans cette base

Définition 1.8 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces de Banach et u une applications linéaire de E dans F. On dit que u est* ***inversible,*** *si elle est* ***bijective*** *et son inverse est* ***continue****.*

Définition 1.9 *Soit E un espace de Hilbert et soit$A$ un opérateur de $\pounds(E)$, alors il existe un et un seul opérateur de $\pounds(E)$ noté A^* tel que :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (Ax, y) = (x, A^* y).$$

Preuve. Voir [12] ■

Proposition 1.2 *Soit E un espace de Hilbert. Pour tout A, B de $\mathcal{L}(E)$ et tout λ de $\mathbb{k}$, on a*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$
2. $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$
3. $(AB)^* = B^* A^*$
4. $A^{**} = A$
5. $\|A^*\| = \|A\|$.

Preuve. Voir[12] ■

Définition 1.10 *soit A un opérateur linéaire continu sur un espace de Hilbert, on appelle spectre de A et on note $S_p A$ l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'opérateur $A - \lambda I$ n'est pas inversible.*

Le complement de $S_p A$ est noté $\Omega(A)$ et s'appelle l'ensemble résolvant de A.

L'application de $\Omega(A)$ dans $\pounds(E)$ qui à λ associe $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ s'appelle la résolvante.

Le réel positif $\rho(A) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in S_p A\}$ s'appelle le rayon spectral de l'opérateur A

1.2 $\mathcal{L}$(E,F), base privilégiée.

Définition 1.11 *Soit E un espaces vectoriels sur K. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans K. $\mathcal{L}(E,K)$ s'appelle le dual de E et se note E'.*

Notation 1.1 *Soient $f \in E'$ et $x \in E$, le scalaire $f(x)$ est noté aussi $\langle f, x \rangle$.*

Définition 1.12 *E, F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soient $\{e_i,\ i = 1, ..., n\}$ une base de E , $\{f_j,\ j = 1, ..., p\}$, une base de F.*
On utilise la base $\{e^i,\ i = 1, ..., n\}$ de E' , dual de E , définit par :

$$\left\langle e^j, e_k \right\rangle = \delta_{jk}\,(\delta_{jk} \text{ est égal à } 1 \text{ lorsque } j = k, \text{à } 0 \text{ lorsque } j \neq k)\,,$$

c'est la base duale de la base $\{e_i\}$.

Définition 1.13 *Si y' est un vecteur donné de E' et x un vecteur donné de F, le **produit tensoriel** $x \otimes y'$ est l'élément de $\mathcal{L}(E,F)$ donné par*

$$\left(x \otimes y'\right)(z) = \left\langle y', z \right\rangle x\ , \forall z \in E.$$

Théorème 1.2 *Soient E et F deux k-espace vectoriels de dimension fini. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi de dimension finie et on a*

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E\ .\ \dim F$$

Preuve. *voir [12]* ■

Lemme 1.1 *$\mathcal{L}(E,F)$ admet pour base $\{f_i \otimes e^j\ ,\ j = 1, ..., n; i = 1, .., p\}$*

Preuve. *$f_i \otimes e^j$ est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ puisque e^j agit linéairement sur E.*
Soit (a_{ij}) un système de pn nombre complexes, $i = 1, ..., p$; $j = 1, ..., n$.Pour ℓ fixé, $\ell \in \{1, ..., n\}$:

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} f_i \otimes e^j\right) e_\ell = \sum_{i,j} a_{ij} f_i.$$

Notons $A = \sum_{i,j} a_{ij} f_i \otimes e^j$; nous venons d'écrire l'expression de Ae_ℓ par ses composantes sur la base $\{f_i\}$ de F. C'est la donnée usuelle d'un élément A de $\mathcal{L}(E,F)$. En particulier $[A = 0] \Leftrightarrow [\forall i, \ell; a_{i\ell} = 0]$, ce qui controle l'indépendance des $.f_i \otimes e^j$, donc leur role de base dans $\mathcal{L}(E,F)$ de dimension pn. On a $a_{i\ell} = \langle f^i, Ae_\ell \rangle$ ■

Remarque 1.2 *Dans l'écriture habituelle de la matrice* (A)*de* A *relativement aux bases* $\{e_i\}$ *de* E *et* $\{f_j\}$ *de* F *, le terme* a_{ij} *,* i^e *ligne,* j^e *colonne, est le coefficient de* $(f_i \otimes e^j)$ *donc on a l'écriture de* (A) *relativement à cette base* $(f_i \otimes e^j)$ *avec la place indiquée ci-dessus pour les indice.*

1. $(f_i \otimes e^j)^* = e^j \otimes f_i$
2. $\forall\ A \in \mathcal{L}(F,G), \forall\ B \in \mathcal{L}(H,E),$

$$A\left(f_i \otimes e^j\right) B = (Af_i) \otimes \left(B^* e^j\right) \quad \text{où} \quad B^* \quad \text{est l'adjoint de } B.$$

3. Si $E = F,\ \ (e_i \otimes e^j)\left(e_k \otimes e^l\right) = \delta_{jk} e_i \otimes e^l\ ;\ \ (e_i \otimes e^i)^2 = (e_i \otimes e^i)$

Preuve. *Calcul direct de l'action sur un vecteur arbitraire*

1. $\left\langle y', (f_i \otimes e^j)\, x\right\rangle = \langle e^j, x\rangle \left\langle y', f_i\right\rangle = \left\langle \left\langle y', f_i\right\rangle e^j, x\right\rangle = \left\langle (e^j \otimes f_i)\, y', x\right\rangle.$

2. $A\,(f_i \otimes e^j)\, Bx = \langle e^j, Bx\rangle\, Af_i = \left\langle B' e^j, x\right\rangle Af_i$

3. $(e_i \otimes e^j)\left(e_k \otimes e^l\right) = e_i \otimes \left\{\left(e^l \otimes e_k\right) e^j\right\} =_{jk} e_i \otimes e^l$

■

1.3 Réduction de Jordan.

1.3.1 Introduction

- Une matrice carrée à coefficients complexes n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ quand il existe au moins une valeur propre λ pour laquelle la dimension du sous-espace propre associé est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité (en tant que racine du polynome caractéristique) de cette valeur propre .
- Il y a deux raisons potentielles pour qu'une matrice carrée réelle ne soit pas diagonalisable sur R :
- Le polynôme caractéristique de A admet des racines complexes.
- Toutes les racines du polynome caractéristique sont réelles, mais il existe une valeur propre pour laquelle la dimension du sous-espace propre associé est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité (que racine du polynome caractéristique) de cette valeur propre .
- Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E sur $\Bbbk$ est trigonalisable quand il existe une base de E sur laquelle la matrice de f est triangulaire (supérieure ou inférieure)

Pour que l'endomorphisme f *du* $\Bbbk$*-espace vectoriel* E *soit trigonalisable, il faut et il suffit que le polynome caractéristique de* f *ait toutes ses racines dans* $\Bbbk$.

1.3.2 Réduction des endomorphismes nilpotents

Soit φ un endomorphisme nilpotent d'un k espace vectoriel E de dimension n. Désignons par n l'indice de nilpotence de φ c'est-à-dire l'entier naturel caractérisé par $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.

Théorème 1.3 *Soit φ un endomorphisme nilpotent d'un k espace vectoriel E de dimension n .Il existe une base $\{\varphi^{n-1}(x), ..., \varphi(x), x\}$ de E pour laquelle la matrice de φ dans cette base s'écrit sous la forme*

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice J_n est dite bloc de Jordan d'ordre n

Preuve. Les n vecteurs $\varphi^{n-1}(x), ..., \varphi(x), x$ sont linéairement indépendants. En effet, supposons qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ non tous nuls tels que

$$a_0 x + a_1\varphi(x) + a_2\varphi^2(x) + ...a_{n-1}\varphi^{n-1}(x) = 0$$

Si par exemple a_i est le premier coefficient non nul, en prenant l'image de $\varphi^i(x)$ par $\varphi^{n-i-1}(x)$, on obtient

$$a_i\varphi^{n-i-1}\varphi^i(x) = a_i\varphi^{n-1}(x) = 0.$$

Or $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, alors $a_i = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Il en resulte que $\{\varphi^{n-1}(x), ..., \varphi(x), x\}$ est une base de E dans laquelle la matrice de φ a la forme J_n ci-dessus. ■

Théorème 1.4 *Soit φ un endomorphisme d'un k espace vectoriel E de dimension n. Il existe des entiers $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_s$ de somme n et une base de E pour laquelle où la matrice M de φ s'écrit sous la forme*

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} [J_1] & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [J_S] \end{bmatrix}$$

Chaque bloc J_i est un bloc de Jordan d'ordre β_i

Preuve. Voir [13] ■

1.3.3 Réduction de Jordan d'une matrice

Définition 1.14 *On appelle matrice de Jordan (supérieur) toute matrice carrée J de la forme*

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exemple 1.1 $(\lambda)\,, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Théorème 1.5 *Soit φ un endomorphisme d'un k espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{C}$ dont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ sont de multiplicité $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s$. Il existe une base de E où la matrice M de φ a la forme diagonale par bloc suivante*

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} [T_1] & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2] & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [T_S] \end{bmatrix}$$

Chaque bloc T_k est de la forme

$$T_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \; k = 1, ..., s.$$

Dans cette écriture, le nombre de blocs est égal au nombre de valeurs propres distinctes. Chaque blocs T_k est une matrice carrée d'ordre la multiplicité μ_k de la valeur propre λ_k.

Preuve. *On a la décomposition de E en somme directe*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_s.$$

Chaque E_k est stable par φ. La restriction φ_k de φ à E_k est telle que l'endomorphisme $\varphi_k - \lambda_k Id_{E_k}$ soit nilpotent. Il suffit alors d'appliquer les résultats des théorèmes précédents à chaque endomorphisme $\varphi_k - \lambda_k Id_{E_k}$ pour obtenir le théorème. ■

La forme obtenue dans ce théorème s'appelle réduite de Jordan de l'endomorphisme.

Chapitre 2

Forme de Jordan d'une dérivation généralisée $\delta_{A,B}$

Considèrons E et F deux espaces vectoriels, A un élément de $\mathcal{L}(F), B$ un élément de $\mathcal{L}(E)$. Ce chapitre s'occupe principalement du problème de la construction de la forme de Jordan de l'opérateur

$$\begin{aligned} \delta_{A,B} : \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ X &\longrightarrow AX - XB \end{aligned}$$

Nous donnons d'abord dans le paragraphe 1 les définitions et les propriétés d'une dérivation et dérivation généralisée. Dans le paragraphe 2 nous sommes intéressés à donner et prouver une lemme centrale. Celle-ci est la base de ce chapitre et nous amène à la forme de Jordan de l'opèrateur $\delta_{A,B}$ qu'on rencontre souvent dans la mécanique quantique et que nous allons étudier aux paragraphe 3. Nous terminons le chapitre par un algorithme de calcul et exemple
Signalons que dans de nombreux problèmes , en mathématiques, en physique et en mecanique,..., il est particulièrement intéressant (parfois nécessaire) de travailler sur les formes de Jordan.

2.1 Dérivations et dérivations généralisées

Définition 2.1 *Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés*
1. une ***dérivation*** *δ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui satisfait :*

$$\forall X, Y \in \mathcal{L}(E),\ \delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y)$$

2. la ***dérivation interne*** *δ_A associée à l'élément A de $\mathcal{L}(E)$ est définie par :*

$$\forall X \in \mathcal{L}(E), \delta_A(X) = AX - XA$$

3. C est ***un commutateur*** *s'il existe $X, Y \in \mathcal{L}(E)$ tels que*

$$C = XY - YX$$

4. Le commutant de $A \in \mathcal{L}(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}' = \{B \in \mathcal{L}(E), AB = BA\}$$

Lemme 2.1 *Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés, δ_A est la dérivation interne de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$*
1.δ_A est linéaire, continue pour la norme.
2.$\forall X, Y \in \mathcal{L}(E), \delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$.
3.δ_A est linéaire, continue et $\|\delta_A(X)\| = 2\inf\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in C\}$
4.I n'est pas un commutateur.

Preuve. 1.On a

$$\begin{aligned}\forall X, Y \in \mathcal{L}(E), \delta_A(X+Y) &= A(X+Y) - (X+Y)A \\ &= AX + AY - XA - YA \\ &= AX - XA + AY - YA \\ &= \delta_A(X) + \delta_A(Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathcal{L}(E), \forall \alpha \in K, \delta_A(\alpha X) &= A\alpha X - \alpha XA \\ &= \alpha\delta_A(X)\end{aligned}$$

d'où δ_A est linéaire.

1. On a

$$\|\delta_A(X)\| = \|AX - XA\| \leq 2\|A\|\|X\|,$$

Donc il existe $M = 2\|A\|$ telle que $\|\delta_A(X)\| \leq M\|X\|$,d'où δ_A est bornée donc continue pour la norme

2. Prouvons que $\delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$.

$$\begin{aligned}
\delta_A(XY) &= AXY - XYA \\
&= AXY - XYA + XAY - XAY \\
&= (AX - XA)Y + X(AY - YA) \\
&= \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)
\end{aligned}$$

3. Prouvons que $\delta_A = \delta_{A-\lambda I}$

$$\begin{aligned}
\delta_{A-\lambda I}(X) &= (A-\lambda I)X - X(A-\lambda I) \\
&= AX - XA \\
&= \delta_A(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\delta_A(X)\| &= \|\delta_{A-\lambda I}(X)\| \\
&= \|(A-\lambda I)X - X(A-\lambda I)\| \\
&\leq 2\|X\|\|(A-\lambda I)\|
\end{aligned}$$

donc

$$\|\delta_A\| \leq 2\inf\|(A-\lambda I) : \lambda \in C\|$$

4. Supposons que I est un commutateur , alors $\exists X, Y \in \mathcal{L}(E) : \quad I = XY - YX$.

$$I = XY - YX \tag{1}$$

multiplions (1) par X à droite et à gauche

$$\begin{aligned}
X &= X^2Y - XYX \\
X &= XYX - YX^2
\end{aligned}$$

en additionnant les relations précédentes on trouve :

$$2X = X^2Y - YX^2$$

Et en suivant la meme méthode on trouvera :

$$nX^{n-1} = X^nY - YX^n \tag{2}$$

Supposons que (2) est vraie pour $k \in N$ et prouvons la pour $k+1$, on a

$$\begin{aligned} X^{k+1}Y - YX^{k+1} &= X\left(X^kY - YX^k\right) + (XY - YX)X^k \quad \text{, tel que } I = XY - YX \\ &= X\left(X^kY - YX^k\right) + X^k \\ &= (k+1)X^k \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in N : nX^{n-1} = X^nY - YX^n$$

$$\begin{aligned} \left\|nX^{n-1}\right\| &= \|X^nY - YX^n\| \\ &\leq 2\|Y\|\|X^n\| \end{aligned}$$

$$n \leq 2\|Y\|\|X\| \quad \text{ce qui est absurbe, d'où } I \text{ n'est pas un commutateur}$$

■

Définition 2.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels, A un élément de $\mathcal{L}(F)$, B un élément de $\mathcal{L}(E)$, on leur associe **la dérivtion généralisée** $\delta_{A,B}$:*

$$\delta_{A,B} : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \text{ telle que } X \longrightarrow AX - XB$$

Remarque 2.1 *$\delta_{A,B}$ est linéaire , mais d'après définition 2.1 , elle ne peut etre une dérivation que si $A = B$. On note alors $\delta_{A,B} = \delta_A$.*

Lemme 2.2 *A des décompositions de A et B en somme directes*

$$\begin{cases} A = A_1 \oplus A_2, B = B_1 \oplus B_2, \\ F = F_1 \oplus F_2, E = E_1 \oplus E_2 \end{cases}$$

est associée une décomposition de $\delta_{A,B}$ en somme directe : (i,j=1,2)

$$\begin{cases} \delta_{A,B} = \underset{i,j}{\oplus}\delta_{A_i,B_j} \\ \mathcal{L}(E,F) = \underset{i,j}{\oplus}\mathcal{L}(E_i,F_j) \end{cases}$$

Preuve. $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix}$ où $X_{ij} \in \mathcal{L}(E_i, F_j)$.

On identifie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_{12} & 0 \end{pmatrix}$ avec X_{12}, idem pour tous (i,j), alors $\mathcal{L}(E,F) = \underset{i,j}{\oplus}\mathcal{L}(E_i, F_j)$.

$\delta_{A,B}(X) = \begin{pmatrix} \delta_{A_1,B_1}X_{11} & \delta_{A_1,B_2}(X_{21}) \\ \delta_{A_2,B_1}X_{12} & \delta_{A_2,B_2}X_{11} \end{pmatrix}$ ■

2.2 Lemme fondamental

Lemme 2.3 *[26] Soient $A \in \mathcal{L}(F), B \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\{f_\alpha,\ \alpha = 1, ..., p\}, \{e^i,\ i = 1, ..., n\}$ des bases de F, E' respéctivement telles que $Af_\alpha = \varepsilon_\alpha f_{\alpha-1}$; $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_\alpha = 1$ si $\alpha \neq 1$; $B'e^i = \eta^i e^{i-1}$, où $\eta^1 = 0$, $\eta^i = 1$ si $i \neq 1$. Soit*

$$G_q = vect\left\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}; \forall q = 2, ..., n+p, r = \min(n,p), s = \max(n,p)$$

1. $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$

2. $\delta_{A,B}\mid_{G_q} \subset G_{q-1}$.

3. $Ker\delta_{A,B} = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} Ker(\delta_{A,B}\mid_{G_q}) = \overset{r+1}{\underset{q=2}{\oplus}} vect\left\{\sum f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q\right\}$.

Preuve.

1. $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$.

On sait que $\dim \mathcal{L}(E,F) = n.p$, et $\{f_\alpha \otimes e^i,\ i = 1, ..., n\ \ \alpha = 1, ..., p\}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$, les vecteurs qui engendre G_q , $q = 2, ..., n+p$ forme une partition de la base de $\mathcal{L}(E,F)$, donc $\mathcal{L}(E,F) = \overset{n+p}{\underset{q=2}{\oplus}} G_q$

2. $\delta_{A,B}\mid_{G_q} \subset G_{q-1}$.

$\delta_{A,B}\mid_{G_q}$: signifie la restriction de $\delta_{A,B}$ sur G_q,

$G_{q-1} = vect\left\{f_\alpha \otimes e^i,\ \alpha + i = q-1\right\}$.

Soit $f_\alpha \otimes e^i \in G_q$, alors

$$\begin{aligned} \delta_{A,B}(f_\alpha \otimes e^i) &= A(f_\alpha \otimes e^i) - (f_\alpha \otimes e^i)B \\ &= (Af_\alpha) \otimes e^i - f_\alpha \otimes \left(B^* e^i\right) \\ &= f_{\alpha-1} \otimes b_i e^i - C_\alpha f_\alpha \otimes e^{i-1} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 1.2, on obtient :

$$\begin{aligned}\delta_{A,B}(f_\alpha \otimes e^i) &= (Af_\alpha) \otimes e^i - f_\alpha \otimes \left(B^* e^i\right) \\ &= \varepsilon_\alpha f_{\alpha-1} \otimes e^i - \eta^i f_\alpha \otimes e^{i-1},\end{aligned}$$

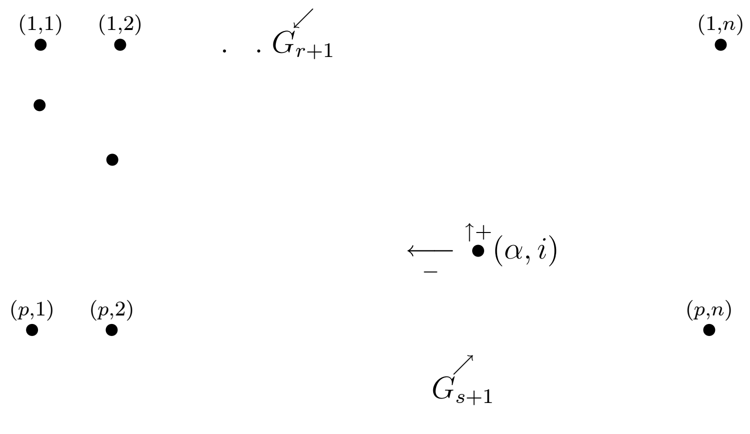
d'où

$$\delta_{A,B}(f_\alpha \otimes e^i) \in G_{q-1},$$

alors

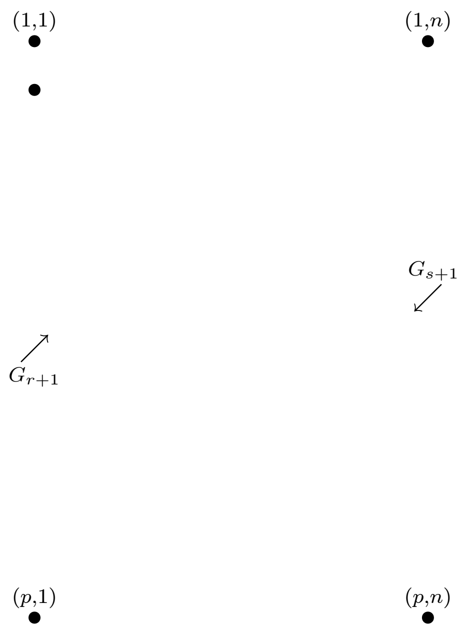
$$\delta_{A,B}\,|_{G_q} \subset G_{q-1}$$

3. Schématisons $\{f_\alpha \otimes e^i\}$ par les points(α, i) dans R^2. G_q est alors une diagonale droite à l'interieur du rectangle limité par les valeurs maximale de α et i



$$p \leq n \qquad (p = 4, n = 7)$$

Schéma$(1)_1$



$$p \geq n(p = 7, n = 4)$$

<u>Schéma (1)</u>$_2$

Sur le schéma(1) nous notons $\delta_{A,B}\,(f_\alpha \otimes e^i)$: c'est la somme des éléments x avec les coefficients $+$ et $-$ marqués au dessus des flèches. Un des termes n'existe pas , si (α, i) est sur l'un des deux bords du rectangle issus de $(1,1)$.

En utilisant la décomposition de X en somme directe , $X = \sum X_q$, $X_q \in \; G_q$, on obtient : $[\delta_{A,B}X = 0] \Longleftrightarrow [\forall q,\ \delta_{A,B}X_q = 0]$.

Sur le **schema**(**2**) on représente un élément de G_q par ses coefficients : $a_1, ..., a_m$ dans la base $\{f_\alpha \otimes e^i\}$; son image par $\delta_{A,B}$ a les coefficients notés sur G_{q-1}.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & G_{q-1} \swarrow \\
 & & & & & & & & \boxed{a_m = a_4} & G_q \swarrow \\
 & & & & & & & & \uparrow & \\
 & & & & & & a_{m-1} - a_4 & \longleftarrow & a_4 = a_m & \\
 & & & & & & \uparrow & & & \\
 & & & & a_2 - a_3 & \longleftarrow & a_3 & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & & \\
 & & a_1 - a_2 & \longleftarrow & a_2 & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & & \\
\boxed{-a_1} & \longleftarrow & a_1 & & & & & & &
\end{array}$$

<u>*Schema* (2)</u>

Les termes encadrés peuvent ne pas exister.

* **Si** $\boxed{q > r+1}$, l'un des termes au moins existe, il en résulte que

$$[\delta_{A,B}(a_1, ..., a_m) = 0] \Longleftrightarrow [a_j = 0 \quad \text{pour tout } \ j]$$

(dans l'écriture, le vecteur de G_q est identifié à ses composantes, donc $\delta_{A,B} \mid G_q$ est injectif.

* **Si** $\boxed{q \leq r+1}$, les relations sont $-a_{j-1} + a_j = 0, \ j = 2, ..., m$, donc tous les a_j sont égaux, $\delta_{A,B} \mid G_q$ a un noyau de dimension 1 qui est $Vect(\sum \{f_\alpha \otimes e^i \ , \ \alpha + i = q\}$.

$Ker \ \delta_{A,B}$ a alors la forme annoncée.

■

2.3 Application du lemme fondamental : forme de Jordan

A partir de les conclusions précédentes nous allons construire la forme de Jordan de $\delta_{A,B}$ par le procédé classique.
On note , pour eclairir l'écriture $D = \delta_{A,B}$ dans ce qui suit.
On dispose d'une base du noyau. Pour chaque vecteur X_q de cette base on cherche l'exposant K le plus grand, soit $K(q)$, tel qu'il existe Y_q dans $G_{q+K(q)}$ satisfaisant à $D^{K(q)}Y_q = X_q$.
$Vect\left\{D^{K(q)}Y_q, D^{K(q)-1}Y_q, ..., Y_q\right\}$ est invariant par D et les D^iY_q sont indépendants car une relation linéaire non triviale entre les D^iY_q donnerait en multipliant par une puissance convenable de D une relation non triviale entre les Y_q ; la matrice de D dans ce sous espace muni de cette base est un bloc de Jordan.

Commençons par un résultat qui est véritablement la clé du problème de la jordanisation :

Lemme 2.4 *[26] Soit* $X_q = \sum\{f_\alpha \otimes e^i\ ,\ \alpha + i = q\}$, $2 \leq q \leq r+1$; *alors il existe* Y_q , $Y_q \in G_{n+p+2-q}$, *tel que* $D^{n+p+2-2q}Y_q = X_q$.
Preuve. *Les flèches sur le schéma* (3) *correspondent au schéma* $(1)_2$ *(image par* $\delta_{A,B}$).
Sur le schéma (3) *on représente un élément de* G_{q-1} *par ses coefficients* $b_1, ..., b_m$ *dans la base* $\{f_\alpha \otimes e^i\}$; *les coefficients d'un élément de* G_q *dont il est l'image par* D *sont notés sur* G_q.
Les termes entourés peuvent ne pas exister dans G_{q-1} .

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & G_{q-1}\swarrow \\
 & & & & & \boxed{b_1} & G_q\swarrow \\
 & & & & & \uparrow & \\
 & & & b_2 & & \xleftarrow{-}\ b_1 & \\
 & & & \uparrow + & & & \\
 & & b_3 & \longleftarrow\ b_1+b_2 & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & b_4 \ \longleftarrow & b_1+b_2+b_3 & & & & \\
 & \uparrow + & & & & & \\
\boxed{b_5} & \xleftarrow{-}\ b_1+b_2+b_3+b_4 & & & & &
\end{array}
$$

$$Schéma(3)$$

(i) Si $q \leq r+1$, les deux termes n'existent pas, dim$(G_q) = q-1$ et ker$\left(\delta_{A,B}\ |_{G_q}\right) = Vect\left\{x_q\right\} \neq 0$;.
(ii) Si $q \in \{r+1, ..., s\}$, seulement un des termes encadrés du schéma (3) existe, alors D de G_{q+1} dans G_q est bijective . Il existe un unique vecteur de G_{q+1} dont l'image par D est un vecteur donnée de G_q. On obtient alors , pour le vecteur entre $\{\ \ \}$ dans [*] , une écriture unique sous la forme

$$D^{s-r}\left\{x_q^{(x+1-q)} + ...\right\},\ \text{soit}$$

$$x_q = D^{(s+1-q)}\left\{x_q^{(s+1-q)} + \lambda_1 x_q^{(s-q)} + ... + \lambda_{r-q+1} x_{r+1}^{(s-r)}\right\} \qquad (**)$$

Les nouveaux $x_0^{(.)}$ sont déterminés de manière unique selon le schéma ci-dessous ; un vecteur de G_{q-1} de composantes b_i a pour préimage par D le vecteur de composantes c_j

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & G_{q-1} \\
 & & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & b_1 & G_q \\
 & & & & & & \uparrow + & \swarrow \\
 & & & & b_2 & \underset{-}{\longleftarrow} & c_1 & \\
 & & & & \uparrow & & & \\
 & & b_3 & \longleftarrow & c_2 & & & \\
 & & \uparrow & & & & & \\
b_4 & \longleftarrow & c_3 & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & \\
c_4 \doteq c_m & & & & & & &
\end{array}$$

$$(5)_1\ \ (p > n)$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & G_{q-1} \\
 & & & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & & & & G_q \\
 & & & & & & & & \swarrow \\
 & & & & & b_1 & \underset{-}{\longleftarrow} & c_1 & \\
 & & & & & \uparrow + & & & \\
 & & & b_2 & \longleftarrow & c_2 & & & \\
 & & & \uparrow & & & & & \\
 & b_3 & \longleftarrow & c_3 & & & & & \\
 & \uparrow & & & & & & & \\
b_4 & \longleftarrow & c_4 \doteq c_m & & & & & &
\end{array}
$$

$(5)_2 \ (p < n)$

.

Si $p > n$ *(schéma* $(5)_1$*),* $c_j = b_j + ... + b_1$, $j = 1, ..., m$.

Si $p < n$ *(schéma* $(5)_2$*),* $c_j = -b_m - ... - b_j$, $j = 1, ..., m$.

(iii) Si $q > s+1$*, les termes entourés existent,* $\delta_{A,B} \mid_{G_{q+1}}$ *ne recouvre pas* G_q *, on a vu , lemme 2.1 , que les éléments de* $\mathrm{Im}\left(\delta_{A,B} \mid_{G_{q+1}}\right)$ *on la somme de leurs coefficients nuls.*

Le vecteur entre $\{\}$ *dans [**] est dans* G_{s+1}*; pour qu'il soit l'image par* D *d'un vecteur de* G_{s+2} *(celui-ci est alors unique) il convient d'exprimer sa condition d'appartenance à* $\mathrm{Im}\left(\delta_{A,B} \mid_{G_{s+2}}\right)$ *; c'est une relation linéaire entre* $\lambda_1, ..., \lambda_{r-q+1}$ *(somme des composantes nulles du vecteur* $\{\}$ *sur la base mise en évidence pour* G_{s+1} *).*

Ceci peut etre itéré tant qu'il reste des λ *arbitraires, donc ceci est possible* $(r - q + 1)$ *fois ; on a alors atteint* $G_{s+1+r-q+1} = G_{s+r+2-q}$*. On obtient ainsi :*

$$x_q = D^{s+1-q+(r-q+1)} y_{r+s+2-q}$$

donc

$$x_q = D^{n+p+2-2q} y_{n+p+2-2q}$$

(iv) On a atteint l'écriture annoncée dans le lemme 2.2 ; il reste à s'assurer que l'on a obtenu une base de Jordan . Comptons les termes obtenus : notons $N = n + p + 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{r+1}(N-2q+1) &= \sum_{r+1}^{q=2}[(N-1)-2(q-1)] = r(N-1) - 2\frac{r(r+1)}{2} \\ &= r(r+s+1) - r(r+1) = rs.\end{aligned}$$

On a $rs = np$ *termes. Ceci est la dimension de* $\pounds(E,F)$ ■

Lemme 2.5 *Pour* (A, B) *satisfaisant à les données précisées au début du paragraphe précedent (Lemme 2.3),* $\delta_{A,B}$ *est nilpotent d'ordre* $(n+p-1)$ *; sa forme de Jordan est constituée de* r *blocs de Jordan d'ordres* $n+p+1-2j$, $j = 1, ..., r$.

Preuve. Elle résulte des lemmes précédents : le plus grand bloc de Jordan provient de x_2 qui est l'image de $f_p \otimes e^n$ par D^{n+p-1}.
Les blocs de Jordan sont des blocs nilpotents ■

Lemme 2.6 *(forme de Jordan)*
i)Le spectre de $\delta_{A,B}$ *est*

$$\sigma(\delta_{A,B}) = \sigma(A) - \sigma(B) = \{\lambda - \mu, \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$$

Si $Af = Xf$ *et* $B'e' = \mu e'$ *alors*

$$\delta_{A,B}(f \otimes e') = (\lambda\mu) f \otimes e'.$$

ii)Si $A = \bigoplus_{k=1}^{h_1} A_K$, *où* $\sigma(A_k) = \lambda_k$ *, et où* $(A_k - \lambda_k)$ *est d'ordre* p_k *et* $B = \bigoplus_{\varrho}^{\varrho_1} B_\varrho$ *où* $\sigma(B_\varrho) = \mu_\varrho$ *, et où* $(B_\varrho - \mu_\varrho)$ *est d'ordre* n_ϱ, *alors* $\delta_{A,B} = \bigoplus_{\ell,k} \delta_{A_k,B_k}$.

La forme de Jordan de $\delta_{A,B}$ est obtenue en considérant tous les blocs associés à une valeur propre $\nu = \lambda_k - \mu_k$ intervenant dans les $\delta_{A,B}$ concernés.
Preuve. C'est le Lemme 1.2 .
Il suffit en effet de remarquer que $\delta_{A_k,B_l} = (\lambda_k - \mu_k) + \delta_{A_k-\lambda_k, B_l-\mu_l}$;
on est alors ramené à la propriété 3 ■

Chapitre 3

dérivations et image numérique

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire borné sur H. L'image numérique de A est l'ensemble défini par

$$W(A) = \{(Ax, x); \|x\| = 1; x \in H\}$$

L'étude de dérivation et l'image numérique donne des applications dans plusieurs branches des sciences pures et appliquées comme dans la théorie des opérateurs et l'analyse fonctionnelle , analyse numérique, physique quantique, ...ect

Dans ce chapitre nous présentons les quelques propriétés de l'image numérique d'une dérivation. (La notion de l'image numérique a été introduite par Otto Toeplitz en 1918 pour les matrice complexe)

3.1 Image numérique dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.

Définition 3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$*

1. L'image numérique de A est définie par :

$$W(A) = \{(Ax, x); \|x\| = 1; x \in H\}$$

2. Le rayon numérique de A est défini par :

$$\omega(A) = sup\{|z|; z \in W(A)\}$$

Proposition 3.1 *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, tout opérateur unitaire U de $\mathcal{L}(H)$, tout sous-espace F de H et tous $\alpha, \beta \in C$ on a :*

i $W(U^*AU) = W(A)$.

ii $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.

iii $W(A\mid_F) \subset W(A)$; où $A\mid_F$est la restriction de A sur F .

iv $W(A^*) = \{\bar{z}; z \in W(A)\}$.

Preuve. (i), (ii) et (iv) sont évidentes.
(iii) Pour un sous-espace F de H, on appelle restriction de Asur F l'élément $A\mid_F$de $\mathcal{L}(F)$ défini par :

$$A\mid_F : F \to F, x \longmapsto PAx$$

où P est la projection orthogonale sur$F$.
Si $x \in F$, alors$(PAx, x) = (Ax, P^*x) = (Ax, Px) = (Ax, x) \in W(A)$. ■

Théorème 3.1 *Pour tout $A \in L(H)$, on a :*

i $\frac{1}{2}\|A\| \leq \omega(A) \leq \|A\|$.

ii $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$

Preuve. (i) On a pour tout $x \in H$

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 ,$$

d'où

$$\omega(A) \leq \|A\|$$

Aussi, pour tous $x; y \in H$ on sait que

$$4(Ax; y) = \sum \{\alpha(A(x+y), x+y), \alpha \in \{1, -1, i, -i\}\}$$

Donc

$$\begin{aligned} 4\left|(Ax, y)\right| &= \left|\sum \left\{\alpha(A(\frac{Z}{\|Z\|}), \frac{Z}{\|Z\|}) \|Z\|^2, \alpha \in \{1, -1, i, -i\}\ et\ z = x + \alpha y \neq 0\right\}\right| \\ &\leq \omega\left(A\right) \sum \left\{\|Z\|^2, \alpha \in \{1, -1, i, -i\}\ et\ z = x + \alpha y\right\} \\ &= 4\omega(A)\left\{\|x\|^2 + \|y\|^2\right\} \end{aligned}$$

Comme

$$\|A\| = \sup\left\{\left|(Ax, y)\right|; \|x\| = 1, \|y\| = 1\right\},$$

d'où

$$\|A\| \leq 2\omega(A)$$

(ii) Car le spectre et l'image numérique se transforment proprement sous des applications affines d'opérateurs il suffit de montrer que si $0 \in \sigma(A)$ alors $0 \in \overline{W(A)}$.

■

Rappelons que :

1. Un opérateur$T$ sur un espace de Hilbert H est borné inférieurement s'ilexiste $\varepsilon > 0$ tel que $\|Tx\| \geq \varepsilon \|x\|$ pour tout $x \in H$.
2. Si T est un opérateur sur un espace de Hilbert H, alors T est inversible si et seulement si T est borné inférieurement et admet une image dense.
3. Si T est borné inférieurement, alors l'image de T est fermé.

Supposons que $0 \in \sigma(A)$ i.e A n'est pas inversible. Ici on a deux possibilité : A n'est pas borné inférieurement, ou A est borné inférieurement et non surjectif.

a Si A n'est pas borné inférieurement, alors il existe une suite des vecteurs unités (x_n) de H telle que$(Ax_n, x_n) \to 0$, d'où $0 \in \overline{W(A)}$.

b Si A est borné inférieurement mais non surjectif, alors $\{0\} \neq R(A)^{\perp} = kerA^{*}$, d'où$0 \in W(A^{*})$, par conséquent $0 \in W(A)$.

Théorème 3.2 *i)Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, $W(A)$ est un ensemble convexe de C.*
ii)Si $A = A_1 \oplus A_2$ sur $H = H_1 \oplus H_2$, alors $W(A) = co(W(A_1) \cup W(A_2))$, où $co(W(A_1) \cup W(A_2))$ est l'enveloppe convexe de $(W(A_1) \cup W(A_2))$

Preuve. (i) Soient(Ax, x) et (Ay, y) deux points distincts de $W(A)$, avec $\|x\| = \|y\| = 1$.
Les vecteurs x, y ne sont pas colinéaires. Notons $F = Vect\{x, y\}$, par application
de la proposition 3.1 (iii) on obtient $W(A\backslash F) \subset W(A)$. Comme $W(A\backslash F)$ est une surface elliptique, elle contient le segment joignant (Ax, x) et (Ay, y). D'où $W(A)$est convexe.
$(ii)[\supset]$ Soient $x \in H_1$,$y \in H_2$tels que $\|x\| = \|y\| = 1$: Montrons que le segment joignant les deux points $(A_1x, x) \in W(A_1), (A_2y, y) \in W(A_2)$est dans $W(A)$ .Soient $t, s \in [0, 1]$ tels que $t^2 + s^2 = 1$.
On a
$t^2(A_1x, x) + s^2(A_2y; y) = (A(tx + sy), tx + sy) \in W(A)$.
$[\subset]$Soit $z \in H$, alors $z = x + y$ où $x \in H_1$, $y \in H_2$et $\|z\| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$. Le point (Az, z) appartient à $co(W(A_1) \cup W(A_2))$: En effet,
$(Az, z) = (A_1x, x) + (A_2y, y) = \|x\|^2 \left(A_1 \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) + \|y\|^2 \left(A_2 \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$. ■

Théorème 3.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$co\sigma(A) = \cap \left\{\overline{W(SAS^{-1})}; S\ inversible\ de\ L(H)\right\}.$$

Preuve. On a besoin d'utiliser le théorème suivant :

Théorème 3.4 ***Théorème** : Pour tout opérateur A de$\mathcal{L}(H)$*

$$r(A) = \inf\left\{\left\|SAS^{-1}\right\|, S\ inversible\ de\ \mathcal{L}(H)\right\}$$

$[\subset]$On a $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, alors $co\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, d'où $co\sigma(SAS^{-1}) \subset \overline{W(SAS^{-1})}$ pour tout S inversible de$\mathcal{L}(H)$, et comme le spectre est invariant par similitude on obtient coσ (A) $\subset \cap \left\{\overline{W(SAS^{-1})}, S\ inversible\ de\ \mathcal{L}(H)\right\}$.
$[\supset]$Soit $\lambda \notin co\sigma(A)$, montrons que$\lambda \notin \cap\{W(SAS^{-1}), S\ inversible\ de\ \mathcal{L}(H)\}$
i.e il existe un opérateur inversible T de $\mathcal{L}(H)$ tel que$\lambda \notin \overline{W(TAT^{-1})}$. Comme $co\sigma(A)$ est compacte, il existe un disque ouvert Δcontient $co\sigma(A)$, mais son adhérance ne contient pas λ. On peut supposer sans perdre les généralités, que est le disque unité ouvert, ainsi en particulier
$r(T) < 1$. D'après le théorème de Rota il existe opérateur inversible T de $\mathcal{L}(H)$ tel que

$\|TAT^{-1}\| \leq (1+r(T))/2 < 1$, d'où
$\overline{W(TAT^{-1})} \subset \Delta$ et par conséquent $\lambda \notin \overline{W(TAT^{-1})}$. ■

Proposition 3.2 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$*, alors*

$$W(A) = co\sigma(A) \Leftrightarrow \forall\lambda \notin co\sigma(A); \left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq [dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1}.$$

Preuve. $[\Rightarrow]$. Soit$\lambda \notin co\sigma(A)$. Par la transformation $A \mapsto \alpha A+\beta$; $\alpha \in C^*$; $\beta \in C$ on peut supposer que le couple (λ, A) satisfait :

$$[\lambda < 0, 0 \in co\sigma(A) et co\sigma(A) \subset \{z \in C : Re(z) \geq 0\}],$$

Alors pour tout $x \in H$

$$\|(A-\lambda)x\|^2 = \|Ax\|^2 - \lambda[(Ax, x) + (x, Ax)] + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2$$

Comme $(A-\lambda)$ est inversible, alors pour tout $x \in H$

$$\|x\|^2 \geq \lambda^2 \left\|(A-\lambda)^{-1}x\right\|^2$$

D'où

$$[dist(\lambda, co\sigma(A))]^{-1} = |\lambda|^{-1} \geq \left\|(A-\lambda)^{-1}\right\|.$$

$[\Leftarrow]$ Comme on a $co\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ on montre que si$\lambda \notin co\sigma(A)$ alors$\lambda \notin \overline{W(A)}$.
Par application de la transformation $A \mapsto \alpha A + \beta$ on peut supposer que

$$[\lambda < 0, 0 \in co\sigma(A) et co\sigma(A) \subset \{z \in C : Re(z) \geq 0\}],$$

alors

$$\lambda \notin co\sigma(A) et dist(\lambda, co\sigma(A)) = |\lambda|$$

c.à.d

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq |\lambda|^{-1}$$

d'où

$$\lambda^2 \|x\|^2 \leq \|(A-\lambda)x\|^2,$$

pour tout $x \in H$ Par passage au limite quand λ tend vers$(-\infty)$ on obtient que pour tout $x \in H$

$$(Ax, x) + (x, Ax) = 2Re(Ax, x) \geq 0$$

D'où

$$\overline{W(A)} \subset \{z \in C; Re(z) \geq 0\},$$

donc

$$\lambda \notin \overline{W(A)}.$$

■

3.2 Image numérique d'un élément d'une algèbre de Banach

Soit A une C^*-algèbre avec identitée.

Définition 3.2 *Une fonctionnelle linéaire φ sur A est dite positive si $\varphi\ (a^*a) \geq 0, \forall a \in A$ (on note $\varphi \geq 0$), est dite état si $\varphi \geq 0$ et $\|\varphi\| = 1$, on note l'ensemble d'états de A par : $\mathcal{P}(A)$ ou $\mathcal{P}$.*

Remarque 3.1 *$\mathcal{P}$ est non vide, convexe et compact.*

Définition 3.3 *L'image numérique d'un élément a de A est définie par :*

$$W_0(a) = \{f(a); f \in \mathcal{P}\}.$$

Théorème 3.5 *Pour $a \in A$, $W_0(a)$ est non vide, convexe et compact.*

Preuve. Comme $\mathcal{P}$ est non vide, alors $W_0(a)$ est non vide. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$, $r \in]0,1[$ et $f = rf_1 + (1-r)f_2$. Comme $\mathcal{P}$ est convexe alors
$f \in \mathcal{P}, f(a) = rf_1(a) + (1-r)f_2(a) \in W_0(a)$.
D'où la convexité de $W_0(a)$: Comme l'application
$\Psi_a : (P, w - top) \to C, f \mapsto f(a)$
est continue et $\mathcal{P}$ compact alors $W_0(a) = \Psi_a(\mathcal{P})$ est compact. ■

Théorème 3.6 *Pour tout $a \in A, \sigma(a) \subset W_0(a)$.*

Preuve. Si $(a-\lambda)$ n'est pas inversible à gauche, alors $e \notin A(a-\lambda)$. On a pour tout $x \in A$, $x(a-\lambda)$ n'est pas inversible à gauche. Si $y \in A$ tel que $\|e-y\| < 1$, alors y est inversible (série de Neumann $(e-(e-y)^{-1})$. D'où pour tout $x \in A$,
$\|e - x(a-\lambda)\| \geq 1$. On construit $f \in P$ tel que $\lambda = f(a)$. D'après le théorème de Hahn-Banach on peut choisir $f \in \acute{A}$ tel que

$$\forall x \in A; f(x(a-\lambda)) = 0, f(e) = 1et\, \|f\| = \|f \setminus Vect(A(a-\lambda) \cup \{e\})\|$$

Pour $y = x(a-\lambda) + \alpha$; $x \in A$, $\alpha \in C$: $f(y) = f(\alpha e) = \alpha$. Si $\alpha \neq 0$, alors

$$|\alpha| \left\|\alpha^{-1}x(a-\lambda) + e\right\| \geq |\alpha|,$$

d'où $|f(y)| \leq \|y\|$ pour tout $y \in Vect(A(a-\lambda) \cup \{e\})$: De plus $\|f\| = 1$ et $f \in \mathcal{P}$.
Posons $x = e$, on obtient

$$f(a-\lambda) = f(a) - \lambda = 0,$$

d'où

$$\lambda = f(a) \in W_0(a)$$

■

Remarque 3.2 $W_0(\alpha a + \beta) = \alpha W_0(a) + \beta, \forall \alpha \in C^*, \forall \beta \in C.$

Théorème 3.7 *Pour tout $a \in A$, on a :*
i) $0 \in W_0(a) \Leftrightarrow \forall \lambda \in C; |\lambda| \leq \|a-\lambda\|$.
ii)$W_0(a) = \cap \left\{\overline{D}(\lambda; \|a-\lambda\|), \lambda \in C\right\}$*, où* $\overline{D}\ (\lambda, \|a-\lambda\|)$ *est le disque fermé de centre* λ *et de rayon* $\|a-\lambda\|$

Preuve. (i) Supposons que $0 \in W_0(a)$ et soit $f_0 \in \mathcal{P}$, $f_0(a) = 0$ Alors

$$\forall \lambda \in C; f_0(a-\lambda) = -\lambda,$$

d'où

$$\forall \lambda \in C; |\lambda| \leq \|f_0\| \, \|a-\lambda\| = \|a-\lambda\|$$

Réciproquement, si $|\lambda| \leq \|a-\lambda\|, \forall \lambda \in C$, alors a n'est pas un opérateur scalaire.
Par application du théorème de Hahn-Banach, on peut choisir $f \in \acute{A}$ tel que

$$f(a) = 0, f(e) = 1 et \, \|f\| = \|f \backslash Vect\,(a,e)\|\,.$$

Pour deux scalaires non nuls α, βon a :

$$f(\alpha a + \beta) = \beta, \|\alpha a + \beta\| = |\alpha| \left\|a - \left(-\alpha^{-1}\beta\right)\right\| \geq |\alpha| \left|-\alpha^{-1}\beta\right| = |\beta|$$

D'où

$$\|f\| = 1 = f(e)$$

i.e. $f \in Pet0 = f(a) \in W_0(a)$.
(ii) Soit $\mu \in C$, comme $W_0(a-\mu) = W_0(a) - \mu$, par application de (i) on obtient

$$\mu \in W_0(a) \Leftrightarrow \left|\acute{\lambda}\right| \leq \left\|a - \mu - \acute{\lambda}\right\|, \forall \acute{\lambda} \in C.$$

Posons $\mu + \acute{\lambda} = \lambda$. Alors

$$\mu \in W_0(a) \Leftrightarrow |\mu - \lambda| \leq \|a - \lambda\|, \forall \in C$$

D'où

$$W_0(a) = \cap \left\{ \overline{D}(\lambda, \|a - \lambda\|,)\lambda \in C \right\}$$

■

Lemme 3.1 *Pour $a \in A$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. $0 \in W_0(ax - xa)$; pour tout $x \in A$.
2. $\|ax - xa - e\| \geq 1$, pour tout $x \in A$.
3.il existe un état f tel que $f(ax) = f(xa)$; pour tout $x \in A$.

Proposition 3.3 *Soit $a \in A$ tel que$\forall \in C, \|a - \lambda\| = r(a - \lambda)$, alors*

$$W_0(a) = co\sigma(a).$$

Preuve. $[\supset]$ Comme $W_0(a)$ est convexs et contient $\sigma(a)$, alors $W_0(a) \supset co\sigma(a)$.
$[\subset]$Soit D le disque fermé de centreλ et de rayon r contenant $\sigma(a)$. Comme $\|a - \lambda\| = r(a - \lambda)$ et $\sigma(a) \subset D$, alors on en déduit que $\|a - \lambda\| \leq r$. Si $f \in \mathcal{P}$, alors on a

$$|f(a) - \lambda| = |f(a - \lambda)| \leq \|f\| \|a - \lambda\| \leq r$$

i.e. $f(a) \in D$. Ceci montre que $W_0(a) \subset D$ pour tout disque fermé contenant $\sigma(a)$.
Comme $co\sigma(a) = \cap \{D; \sigma(a) \subset D\}$, alors il síensuit que $W_0(a) \subset co\sigma(a)$, en conséquence on obtient $W_0(a) = co\sigma(a)$. ■

3.3 Image numérique d'une dérivation généralisée

Soient A une C^*-algèbre avec identité, H un espace de Hilbert de dimension infinie, $A \in A$ et L_A, R_Ales applications définies respectivement par $X \mapsto AX, X \mapsto XA$.
D'après **J.H.Anderson** et **C.Foias** on a

$$W_0(A) = W_0(L_A) = W_0(R_A)$$

.
Et si $A = \mathcal{L}(H)$, alors $W_0(A) = \overline{W(A)}$.

Lemme 3.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $W_0(A) = co\sigma(A)$ si et seulement si*

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq [dist(\lambda; co\sigma(A))]^{-1}$$

pour tout $\lambda \notin co\sigma(A)$.

Preuve. Est une simple conséquence de la proposition 2.2. ■

Corollaire 3.1 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tels que*

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq [dist(\lambda; co\sigma(A))]^{-1}$$

pour tout$\lambda \notin co\sigma(A)$ et

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\| \leq [dist(\mu; co\sigma(B))]^{-1}$$

pour tout $\mu \notin co\sigma(B)$. Alors

$$W_0(\delta_{A,B}) = co\sigma(\delta_{A,B}).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} W_0(\delta_{A,B}) &= \{f(\delta_{A,B});\ f \in \mathcal{P}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)))\} \\ &= \{f(L_A - R_B);\ f \in \mathcal{P}(\mathcal{L}\ (\mathcal{L}\ (H)))\} \\ &= \{f(L_A) - f(R_B);\ f \in \mathcal{P}(\mathcal{L}\ (\mathcal{L}\ (H)))\} \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} W_0(\delta_{A,B}) &\subseteq [\{f(L_A); f \in \mathcal{P}(\mathcal{L}\ (\mathcal{L}\ (H)))\} - \{g(R_B); g \in \mathcal{P}(\mathcal{L}\ (\mathcal{L}\ (H)))\}] \\ &= W_0(L_A) - W_0(R_B) \end{aligned}$$

Comme

$$W_0(L_A) = W_0(A) et W_0(R_B) = W_0(B)$$

et par application du lemme précédent on obtient

$$\begin{aligned} W_0(\delta_{A,B}) &\subseteq W_0(A) - W_0(B) = co\sigma(A) - co\sigma(B) \\ &= co(\sigma(A) - \sigma(B)) = co\sigma(\delta_{A,B}) \end{aligned}$$

Comme

$$\sigma(\delta_{A,B}) \subset W_0(\delta_{A,B}),$$

alors on en déduit que

$$co\sigma(\delta_{A,B}) \subset W_0(\delta_{A,B})$$

En conséquence on obtient

$$W_0(\delta_{A,B}) = co\sigma(\delta_{A,B})$$

■

Lemme 3.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur hyponormal, alors*

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leq [dist(\lambda; co\sigma(A))]^{-1}$$

pour tout $\lambda \notin co\sigma(A)$.

Preuve. En effet :

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| = \max_{\mu\in\sigma(A-\lambda)^{-1}} |\mu| = \frac{1}{\min_{\mu\in\sigma(A-\lambda)} |\mu|} = \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))} \leq \frac{1}{dist(\lambda, co\sigma(A))}$$

■

Corollaire 3.2 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs hyponormaux, alors*

$$W_0(\delta_{A,B}) = co\sigma(\delta_{A,B}).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme et le corollaire précédents. ■

Chapitre 4

Les opérateurs finis, l'orthogonalité de l'image au noyau

Soit $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaire bornés sur un espace de Hilbert H. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est appelé fini si $\|I - (AX - XA)\| \geq 1$ pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$ i.e $\mathrm{Im}(\delta_A)$ est orthogonale à l'opérateur identité I au sens de Birkhof, si $\|T - AX - XA\| \geq \|T\|$ pour $T \in \ker(\delta_A)$, on dit que $\ker(\delta_A)$ est orthogonale à $\mathrm{Im}(\delta_A)$. Après avoir donné une courte définitions del'image numérique, les opérateurs finis et l'orthogonalité de l'image au noyau, on donne une classification des classes des opérateurs finis, aussi nous montrerons que si A un opérateur auto -adjoint, isométrique, normal, paranormal, p-hyponormal , log- hyponormal, alors $\mathrm{Im}(\delta_A)$ est orthogonale à $\ker(\delta_A)$.

4.1 Classes des opérateurs finis

4.1.1 préliminaires

Définition 4.1 *La Classe des opérateurs finis est définie par*

$$F(\mathrm{H}) = \{A \in \mathcal{L}(H); \|I - (AX - XA)\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{L}(H)\}$$

Remarque 4.1 *La classe des opérateurs fini est obtenue par l'orthogonalité de l'image d'une dérivation et l'opérateur identité*

Définition 4.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$*
1. L'image numérique de A est définie par

$$W(A) = \{(Ax, x); \|x\| = 1, x \in H\}$$

2. Le rayon numérique de A est défini par :

$$\omega(A) = \sup\{|z|; z \in W(A)\}$$

Définition 4.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle spectre approché réduisante de A et on note par $\sigma_{ar}(A)$ l'ensemble des complexes λ tel qu'il existe une suite $(x_n) : \|x_n\| = 1$ pour laquelle $\lim\limits_{n} (A - \lambda)\, x_n = 0$ et $\lim\limits_{n} (A - \lambda)^*\, x_n = 0$*

Définition 4.4 $\overline{R} = \{A \in \mathcal{L}(H); \sigma_{ar}(A) \neq \varnothing\}$

Lemme 4.1 *[8] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors*

$$\{\lambda \in \sigma_a(A); \mathrm{Re}(A - \lambda) \geq 0\} \subset \sigma_{ar}(A)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_a(A)$, alors il existe une suite orthonormale $(x_n)_{n \in N^*}$ dans H telle que $\lim\limits_{n}(A - \lambda)x_n = 0$. Alors l'opérateur

$$B = \mathrm{Re}(A - \lambda) = \frac{1}{2}\left[(A - \lambda) + (A - \lambda)^*\right]$$

satisfait

$$\lim_{n}(Bx_n, x_n) = 0.$$

Comme $B \geq 0$, alors $\lim\limits_{n} Bx_n = 0$, i.e

$$\lim_{n}\left(\frac{1}{2}\left[(A - \lambda)x_n + (A - \lambda)^* x_n\right]\right) = 0$$

et comme

$$\lim_n (A - \lambda)x_n = 0,$$

alors

$$\lim_n (A - \lambda)^* x_n = 0.$$

D'où

$$\lambda \in \sigma_{ar}(A)$$

■

Lemme 4.2 *[21] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $\partial W \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A)$*

Preuve. Par la transformation $A \to \alpha A + \beta, (\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C})$ l'hypothèse $\lambda \in \partial W \cap \sigma(A)$ peut etre remplacée par $0 \in \partial W \cap \sigma(A)$ avec $\mathrm{Re}(A) \geq 0$.
Comme

$$0 \in \partial W \cap \sigma(A)$$

il en résulte d'après le lemme précédent que

$$0 \in \sigma_{ar}(A),$$

donc

$$\partial W \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A)$$

Et comme

$$\partial W \cap \sigma(A) \neq \varnothing$$

alors

$$\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$$

■

4.1.2 Représentation de classes d'opérateurs finis

Lemme 4.3 *[7] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si $\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$, alors A est fini*

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale telle que

$$\lim (A - \lambda)x_n = 0 \text{ et } \lim (A - \lambda)^* x_n = 0$$

Si $X \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$\begin{aligned} \|AX - XA - I\| &= \|(A - \lambda I)X - X(A - \lambda I) - I\| \\ &\geq |\langle (A - \lambda I)Xx_n, x_n\rangle - \langle X(A - \lambda I)x_n, x_n\rangle - 1| \end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\|AX - XA - I\| \geq 1$$

■

Théorème 4.1 *[8]la classe $\mathcal{F}$(H) contient les opérateurs suivants*
i)$A \in \mathcal{L}(H)$; tel que $\partial W \cap \sigma(A) \neq \varnothing$
ii) les opérateurs dominant

Preuve. i) D'après Lemme on a

$$\partial W \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A),$$

alors

$$\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing,$$

donc A est fini.
ii) Si A un opérateurs dominant,alors $\sigma_{ar}(A) = \sigma_a(A)$ .En effet :on a

$$\sigma_{ar}(A) \subset \sigma_a(A)$$

donc il suffit de montrer que

$$\sigma_a(A) \subset \sigma_{ar}(A)$$

Soit $\lambda \in \sigma_a(A)$, alors il existe une suite orthonormale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_n (A - \lambda)x_n = 0$$

Comme A est dominant alors il existe un nombre $M_\lambda \geq 1$ tel que, pour tout $x \in H$,

$$\|(A - \lambda)^* x\| \leq M_\lambda \|(A - \lambda)x\|$$

D'où

$$\lim_n (A - \lambda)^* x = 0$$

donc

$$\lambda \in \sigma_{ar}(A)$$

c'ést à dire que

$$\sigma_a(A) \subset \sigma_{ar}(A)$$

d'où le résultat.
Comme $\sigma_a(A) \neq \varnothing$ ($\partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A)$) ;alors

$$\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$$

Dans les deux cas on a par application du définition (4.4), $A \in R_1$ et donc A est fini. ■

Lemme 4.4 . *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $r(A-\lambda) = \|A-\lambda\|$, alors $A \in \mathcal{F}(\mathrm{H})$*

Preuve. Il suffit de considérer le cas ou $r(A) = \|A\|$. Alors il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| = \|A\|$. Comme $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ alors $\lambda \in \overline{W(A)}$. On a

$$\partial W(A) = \overline{W(A)} \cap \overline{\complement W(A)}$$

et

$$W(A) \subset \overline{D}(0, \|A\|)$$

où $\overline{D}(0, \|A\|)$ est le disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $\|A\|$, d'où

$$\overline{\complement \overline{D}(0, \|A\|)} \subset \overline{\complement W(A)}$$

On a

$$\overline{\complement \overline{D}(0, \|A\|)} = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \geq \|A\|\}$$

donc

$$\lambda \in \overline{\complement \overline{D}(0, \|A\|)} \subset \overline{\complement W(A)}$$

d'où

$$\lambda \in \partial W(A) \cap \sigma(A)$$

par application du théoréme 4.1, il en résulte que $A \in \mathcal{F}(\mathrm{H})$ ■

Corollaire 4.1 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, quasinormal, sous-normal, hyponrmal, semi-normal ou paranormal, alors A est fini.*

Preuve. Dans ces six cas A est normaloide ($r(A) = \|A\|$), alors d'aprés le lemme précédent $A \in \mathcal{F}(\mathrm{H})$ ■

Remarque 4.2 *Le théorème 4.1 généralise le résultat obtenu par J.G. Stanpfli qui affirme que si $r(A-\lambda) = \|A-\lambda\|$ alors $A \in \overline{R_1}$*

Théorème 4.2 *[8] Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, si A est racine d'un polynôme quadratique, alars A est fini.*

Preuve. supposons que A n'est pas fini. Par conséquent, il existe $X_0 \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$0 \notin \overline{W(AX_0 - X_0A)}$$

comme l'image numérique est un ensemble convexe et

$$W(e^{i\theta}(AX_0 - X_0A) = e^{i\theta}W((AX_0 - X_0A)$$

pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, alors par rotation d'un image convenable, on peut supposer que

$$\overline{W(AX_0 - X_0A)} \subset \mathbb{R}_2^+ = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

soit

$$J : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H), \quad B \to (AX_0 - X_0A)B + B(AX_0 - X_0A)$$

L'opérateur J est inversible car $\sigma(J) \subset \sigma((AX_0 - X_0A) + \sigma(AX_0 - X_0A) \subset \mathbb{R}_2^+$. si $A^2 + \alpha A + \beta = 0$ pour certains α, β de $\mathbb{C}$, alors un simple calcul montre que $J(A + \dfrac{\alpha}{2}) = 0$.Ce qui contredit que J est inversible ■

Théorème 4.3 *[7]Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur convexoide , alors A est fini*

Preuve. Si A est convexoide.alors $\overline{W(A)} = co\sigma(A)$. D'où

$$\partial W(A) \cap \sigma(A) \neq \varnothing$$

En appliquant le théorème 4.1 il en résulte que $A \in \mathcal{F}$(H) ■

Théorème 4.4 *[7]Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur spectraloid, alors A est fini*

Preuve. On a $\omega(A) = r(A)$, alors il existe $\lambda \in \sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ tel que $|\lambda| = \omega(A)$, d'où $\lambda \in \partial W(A)$,

i.e $\partial W \cap \sigma(A) \neq \varnothing$, en appliquant le lemme, il en resulte que A est fini ■

Remarque 4.3 *comme tout opérateur convexoide est un opérateur spectraloide, alors le théoréme précedent généralise le théorème 4.3*

4.2 Orthogonalité de l'image au noyau

4.2.1 préliminaires

Définition 4.5 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé*

1. Hermitien ou auto-adjoint si $A = A^*$.

2. Normal si $AA^* = A^*A$:

3.Paranormal, si $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\| \, \|x\|$

4. Positif si A est auto-adjoint et si $\forall x \in E, (Ax, x) \geq 0$

Définition 4.6 *Un élément $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé*

1. Isométrie si $AA^* = A^*A = I$ ou $\|Ax\| = \|x\|$

2. Unitaire si $AA^* = Id_F$ *et* $A^*A = Id_E$
3. Hyponormal si $AA^* - A^*A \geq 0$
4. .Quasi-hyponormal si $A^*(AA^* - A^*A)A \geq 0$
5. Dominant, si $R(A - \lambda) \subseteq R(A - \lambda)^*$ *; pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$

Théorème 4.5 *Soit* $A \in \mathcal{L}(E)$*,si* A *est un opérateur normal, alors*
1. $A - \lambda$ *est normal*
2. $\|A\| = r(A)$

Preuve.

1.

2. On a

$$\begin{aligned}(A-\lambda)^*(A-\lambda)-(A-\lambda)(A-\lambda)^* &= (A^*-\lambda)(A-\lambda)-(A-\lambda)(A^*-\lambda) \\ &= A^*A - AA^*\end{aligned}$$

Comme A est normal, il en resulte que

$$(A-\lambda)^*(A-\lambda)-(A-\lambda)(A-\lambda)^* = 0,$$

donc $A - \lambda$ est normal

2. A normal$\Longrightarrow \|A\| = r(A)$

On a $r(A) = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, alors pour prouver que $\|A\| = r(A)$ on doit prouver que pour tout n on a $\|A^n\| = \|A\|^n$
pour $n = 2$: montrons que $\|A^2\| = \|A\|^2$
comme $\|AA^*\| = \|A\|^2$, alors

$$\begin{aligned}\|A^2\|^2 &= \|(A^2)^*(A^2)\| \\ &= \|A^*(A^*A)A\| \\ &= \|A^*A(A^*A)\| \\ &= \|A^*AAA^*\| \\ &= \|(AA^*)^*(AA^*)\| = \|AA^*\|^2 = \left(\|A\|^2\right)^2\end{aligned}$$

donc

$$\|A^2\| = \|A\|^2$$

prouvons maintenant que $\|A^n\| = \|A\|^n$

comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, il suffit de prouver que $\|A^n\| \geq \|A\|^n$
on a

$$\begin{aligned} \|A^k x\|^2 &= \langle A^k x, A^k x\rangle \\ &= \langle A^* A^k x, A^{k-1} x\rangle , \end{aligned}$$

d'où

$$\|A^k x\|^2 \leq \|A^{k+1} x\| \, \|A^{k-1} x\|$$

donc

$$\|A^k\|^2 \leq \|A^{k+1}\| \, \|A^{k-1}\| \leq \|A^{k+1}\| \, \|A\|^{k-1}$$

supposons que $\|A^n\| \geq \|A\|^n$ est vraie pour $n \leq k$, alors

$$\|A^k\|^2 \geq \|A\|^{2k}$$

et puisque

$$\|A^{k+1}\| \, \|A\|^{k-1} \geq \|A^k\|^2 \geq \|A\|^{2k} ,$$

d'où

$$\|A\|^{k+1} \leq \|A^{k+1}\|$$

donc pour $n = k+1 > k$ la relation est vraie.
D'où

$$\|A^n\| = \|A\|^n , \forall n \in \mathbb{N}$$

■

Théorème 4.6 ***(Fugled -Putnam)*** *Soient A, B deux opérateurs normaux. Si $AX = XB$ alors $A^* X = X B^*$*

Preuve. On sait que

$$e^{iS} \text{ est un opérateur unitaire,}$$

et comme

$$AX = XB \Longrightarrow A^n X = X B^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

il en resulte que

$$e^{i\bar{\lambda} A} X = X e^{i\bar{\lambda} B} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}$$

Définissons

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*}$$

On peut écrire cette fonction sous la forme

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*} \\ &= e^{i\lambda A^*} e^{-i\bar{\lambda} A} X e^{i\bar{\lambda} B} e^{-i\lambda B^*} \end{aligned}$$

car

$$X = e^{-i\bar{\lambda} A} X e^{i\bar{\lambda} B}$$

donc

$$f(\lambda) = \left[e^{i(\lambda A^* - \bar{\lambda} A)} X \right] \left[e^{i\bar{\lambda} B - i\lambda B^*)} \right]$$

notons :

$$U(\lambda) = e^{i(\lambda A^* - \bar{\lambda} A)},$$

et

$$V(\lambda) = e^{i(\bar{\lambda} B - \lambda B^*)}$$

et puisque $(\lambda A^* + \bar{\lambda} A)$ et $-i(\bar{\lambda} B + \lambda B^*)$ sont deux opérateurs auto-adjoint, et $e^{i(\lambda A^* + \bar{\lambda} A)}$, $e^{-i(\bar{\lambda} B + \lambda B^*)}$ deux opérateurs unitaires, donc

$$\|f(\lambda)\| \leq \|X\| \qquad \forall \lambda$$

alors $f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*}$ est une fonction analytique, bornée pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, donc constante sur tout $\mathbb{C}$ et sa dérivée égale à $f'(\lambda) = 0$

$$f'(\lambda) = A^* e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*} + e^{i\lambda A^*} X(-B^*) e^{-i\lambda B^*}$$

pour $\lambda = 0$, $f'(0) = 0$,donc

$$A^* X = X B^*$$

■

Définition 4.7 *Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$, on dit que la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$ (condition du Fugled -Putnam) si $AX = XB$ implique $A^*X = XB^*$, pour $X \in \mathcal{L}(H)$.*

Théorème 4.7 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$.*
Les assertions suivantes sont equivalentes :
1. T est isométrique.
2. $T^*T = Id_E$.
Les assertions suivantes sont equivalents :
1. T est unitaire.
2. T est surjective et $T^*T = Id_E$..
3. T est une isométrie surjective.

Preuve. Montrons la première équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_E$ revient à montrer que pour tous $x; y \in E$, on a

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Rappelons l'identité de polarisation, à savoir,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + i\langle u+iv, u+iv\rangle - i\langle u-iv, u-iv\rangle),$$

pour un Hilbert complexe et

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle)$$

pour un Hilbert réel. En utilisant l'une ou l'autre de ces identités et le fait que $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit :

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_E$. Ceci implique que pour tout $x \in E$, $\langle T^*T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle$.
On en déduit immédiatement pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

ce qui prouve que T est bien isométrique.
Pour la preuve des trois autres équivalences, les implications 1 : implique 2 : et 2 :implique 3 : sont evidentes. Pour montrer que 3 : implique 1 :, on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothèses de 3 : impliquent que T^{-1} existe. De plus, T étant une isométrie, on a $T^*T = Id_E$. En composant à droite par T^{-1}, on obtient $T^* = T^{-1}$. ∎

Théorème 4.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un operateur normal. Alors $kerT = kerT^*$.*

Preuve. Soit $x \in kerT$. Alors $\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) = (x, T^*Tx) = 0$, en utilisant pour la troisième egalitée le fait que T est normal donc $TT^* = T^*T$. Ceci prouve donc que $kerT \subset kerT^*$. Maintenant remarquons que si T est normal,alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer a T ,on obtient$kerT^* \subset kerT^{**} = kerT$, car$T^{**} = T$. Finalement $kerT^* = kerT$. ∎

4.2.2 Orthogonalité de l'image au noyau

Définition 4.8 *1. Soit E un espace de Banach et $(a, b) \in E^2$. Nous dirons que a est orthogonale à b au sens de Birkhof si.*

$$\|a + \lambda b\| \geq \|a\| , \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Définition 4.9 *si* $\|T - AX - XA\| \geq \|T\|$ *pour* $T \in \ker(\delta_A)$, *on dit que* $\ker(\delta_A)$ *est orthogonale à* $\mathrm{Im}(\delta_A)$

Remarque 4.4 *si* $\ker(\delta_A)$ *est orthogonale à* $\mathrm{Im}(\delta_A)$ *alors* A *est fini (car* $I \in \ker(\delta_A)$*)*

Théorème 4.9 *Soit* S *un opérateur isométrique dans* $\mathcal{L}(H)$, *alors* $\mathrm{Im}(\delta_S) \perp \ker(\delta_S)$

Preuve. D'après [13], on a

$$S^n X - XS^n = \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS)S^i \quad , X \in \mathcal{L}(H)$$

Pour $T \in \ker(\delta_S)$, on a $TS = ST$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS - T)S^i &= \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS)S^i - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1}T \\ &= S^n X - XS^n - nS^{n-1}T = \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS - T)S^i \end{aligned}$$

d'où $nS^{n-1}T = S^nX - XS^n - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-i-1}(SX - XS - T)S^i$,

alors

$$n \left\|S^{n-1}T\right\| \leq \|S^nX - XS^n\| + \sum_{i=0}^{n-1} \left\|S^{n-i-1}(SX - XS - T)S^i\right\|, \quad \|S(T)\| = \|T\|$$

$$n \left\|S^{n-1}T\right\| \leq \|S^nX - XS^n\| + \sum_{i=0}^{n-1} \|(SX - XS - T)\|$$

donc

$$n\|T\| \leq \|S^nX - XS^n\| + n\|(SX - XS - T)\|$$

d'où

$$\|T\| \leq \frac{1}{n}\|S^nX - XS^n\| + \|(SX - XS - T)\|,$$

pour $n \to \infty$, $\|T\| \leq \|(SX - XS - T)\| = \|\delta_S - T\|$, donc $\mathrm{Im}(\delta_S) \perp \ker(\delta_S)$. ■

Théorème 4.10 *Soit* A *un opérateur auto-adjoint de* $\mathcal{L}(H)$, *alors* $\mathrm{Im}(\delta_A) \perp \ker(\delta_A)$

Preuve. Soit A un opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}(H)$, l'opérateur $U = (A - i)(A + i)^{-1}$ est la transformation de Cayley de l'opérateur A

$$U = (A - i)^{-1}(A + i) \Rightarrow U^* = (A^* - i)^{-1}(A^* + i)$$

$$U^{-1} = (A+i)\,(A-i)^{-1}$$

donc $U^* = U^{-1}$ (i.e) U est unitaire

commme

$$U = (A-i)\,(A+i)^{-1} \Rightarrow U\,(A+i) = (A-i) \tag{1}$$

d'où

$$A = i(I+U)\,(I-U)$$

$$\delta_A(X) = \delta_{A-i}(X) = (A-i)\,X - X\,(A-i)$$

en appliquant (1), on obtient

$$\begin{aligned}
\delta_A(X) &= U(A+i)X - XU(A+i)\\
&= U\,[(A+i)X] - [(A+i)X]\,U + (A+i)(XU) - (XU)(A+i)\\
&= \delta_U([(A+i)X]) + \delta_{A+I}(XU)\\
&= \delta_U([(A+i)X]) + \delta_A(XU)\\
&= \delta_U(AX) + i\delta_U(X) + \delta_A(XU)
\end{aligned}$$

$$\delta_A(X) - \delta_A(XU) = \delta_U(AX) + i\delta_U(X),$$

donc

$$\delta_A(X(I-U)) = \delta_U([(A+i)X])$$

d'où

$$\mathrm{Im}(\delta_A) \perp \mathrm{Im}(\delta_U)$$

pour $T \in \ker(\delta_A)$ i.e $TA = AT$; d'où $TU = UT$, donc d'après $\mathrm{Im}(\delta_A) \perp \ker(\delta_A)$ ■

Théorème 4.11 *Soit N un opérateur normal dans $\mathcal{L}(H)$, alors* $\mathrm{Im}(\delta_N) \perp \ker(\delta_N)$

Preuve. voir[22] ■

Lemme 4.5 *[21]Soient $A, T \in \mathcal{L}(H)$, si A est paranormal et T normal tel que $AT = TA$, alors pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)$*

$$\|T - (AX - XA)\| \geq |\lambda|, \textit{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$ et M_λ l'espace propre à λ. Comme $AT = TA$, on a d'après le théorème de Fugled-Putnam $AT^* = T^*A$. D'où M_λ soit réduisant pour A et pour T. Selon la décomposition $H = M_\lambda \oplus M_\lambda^\perp$ on peut écrire A, T et X comme suit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix},$$

comme la restriction d'un opérateur paranormal sur un sous espase invariant est paranormal on a

$$\begin{aligned}\|T-(AX-XA)\| &= \left\| \begin{bmatrix} \lambda-(A_1X_1-X_1A_1) & * \\ * & * \end{bmatrix} \right\| \\ &\geq \|\lambda-(A_1X_1-X_1A_1)\| \\ &\geq |\lambda| \left\| I-\left(A_1\left(\frac{X_1}{\lambda}\right)-\left(\frac{X_1}{\lambda}\right)A_1\right) \right\| \\ &\geq |\lambda|\end{aligned}$$

■

Proposition 4.1 *[Technique de Berberian]. Soit H un espace de Hilbert complexe, alors il existe un espace de Hilbert $\widetilde{H} \supset H$ et un isomorphisme *-isométrique $\varphi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)(A \to \widetilde{A}$ tel que : pour tout $A, B \in \mathcal{L}(H)$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*

1. $\widetilde{A^*} = \left(\widetilde{A}\right)^*$,
2. $\widetilde{I}$ *est l'identité de* $\widetilde{H}$,
3. $\alpha\widetilde{A+\beta}B = \alpha\widetilde{A} + \beta\widetilde{B}$,
4. $\widetilde{AB} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$,
5. $\left\|\widetilde{A}\right\| = \|A\|$
6. $\sigma(A) = \sigma(\widetilde{A})$, $\sigma_a(A) = \sigma_a(\widetilde{A}) = \sigma_p(\widetilde{A})$ *où* $\sigma_a(A), \sigma_p(A)$ *sont respectivement le spectre approché et le spectre ponctuel de* A

Théorème 4.12 *[21] Soit A un opérateur paranormal, alors pour tout opérateur normal T tel que $AT = TA$, on a*

$$\|T-(AX-XA)\| \geq \|T\|, \text{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma(T) = \sigma_a(T)$ [13], alors d'après la proposition précédente $\widetilde{T}$ est normal, $\widetilde{A}$ est paranormal, $\widetilde{T}\widetilde{A} = \widetilde{A}\widetilde{T}$ et $\lambda \in \sigma_p(\widetilde{T})$. Par application du lemme 4.5 on obtient

$$|\lambda| \leq \left\|\widetilde{T}-(\widetilde{AX}-\widetilde{XA})\right\| = \|T-(AX-XA)\|.$$

Comme $\|T\| = \sup|\lambda|$ (voir Théorème 4.5) ; alors

$$\|T\| = \left\|\widetilde{T}\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma_p(\widetilde{T})}|\lambda| \leq \|T-(AX-XA)\|, \text{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H)$$

■

Théorème 4.13 *Soient A, B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ tels que la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$, si pour tout opérateur positif N dans $\{A\}^{'}$*

$$\|N + AX - XB\| \geqslant \|N\|,$$

alors

$$es\,\|C + AX - XB\| \geqslant \|C\|,$$

pour tous opérateur $C \in \ker(\delta_{A,B})$, et pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$.

Preuve. Comme (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$ i.e

$$\begin{aligned} AC &= CB \Longrightarrow A^*C = CB^* \\ &\Longrightarrow C^*A = BC^* \\ &\Longrightarrow CC^*A = (CB)\,C^* = ACC^*, \end{aligned}$$

d'où

$$CC^* \in \{A\}^{'}$$

Comme CC^* est un opérateur positif, alors

$$\|CC^* + AX_n - X_nA\| \geqslant \|CC^*\|,$$

pour $X_n = Y_nC^*$:

$$\|CC^* + AY_nC^* - Y_nC^*A\| \geqslant \|CC^*\|,$$

$$\|CC^* + AY_nC^* - Y_nC^*A\| = \|C + AY_n - Y_nB\|\,\|C^*\| \geqslant \|CC^*\| = \|C\|^2$$

d'où

$$\|C + AY_n - Y_nB\| \geqslant \|C\|$$

■

Corollaire 4.2 *Soient A, B deux opérateurs normaux, $C \in \ker(\delta_{A,B})$, alors*

$$\|C + AX - XB\| \geqslant \|C\|,$$

Preuve. On sait que si A, B des opérateurs normaux, alors la paire (A, B) vérifie la condition $(FP)_{\mathcal{L}(H)}$, pour A, B deux opérateur normaux on a

$$\|T + AX - XB\| \geqslant \|T\|,\ \forall T \in \{A\}^{'}$$

il suffit d'appliquer le théorème précédent ■

Théorème 4.14 *Soient $A; B \in \mathcal{L}(H)$; si A est p-hyponormal (resp. log- hyponormal)et si B est p-hyponormal(resp. log- hyponormal) alors*

$$\|T - (AX - XB)\| \geq \|T\|, \text{ pour tout } X \in \mathcal{L}(H) \text{ et tout } T \in \ker(\delta_{A,B})$$

Preuve. soit $T \in \ker(\delta_{A,B})$; alors $T \in \ker(\delta_{A^*,B^*})$ par conséquent $ATT^* = TBT^* = TT^*A$, comme tout opérateur p-hyponormal ou log- hyponormal est fini, le théorème précédent implique que

$$\|TT^*\| = \|T\|^2 \leq \|TT^* - (AXT^* - XBT^*)\|$$

$$\leq \|T^*\| \, \|T - (AX - XB)\|$$

Ainsi

$$\|T\| \leq \|T - (AX - XB)\|$$

■

Bibliographie

[1] J. H. Anderson, J. W. Bunce, J. A. Deddens and J. P. Williams , C*-algebras and derivation ranges, Acta Sci. Math. (Szeged), 40(1978), 211-227.

[2] C. Apostol and L. Fialkov, Structural properties of elementary operators, Canadian Journal of Mathematics, 38 (1986), 1485-524.

[3] A. Bachir, Generalized Derivation, SUT Journal of Mathematics, Vol. 40, No. 2 (2004), 111-116.

[4] S. Bouali, et J. Charles, Extension de la notion d'opérateurs d-symétriques I, Acta Sci. Math. (Szeged), 58(1993), 517-525.

[5] S. Bouali, et J. Charles , Extension de la notion d'opérateurs D-symétriques II, Linear Algebra And Its Applications, 225(1995), 175-185.

[6] S. Bouali, M. Ech-chad, Generalized D-Symmetric Operators I, Serdica Math. J. 34 (2008), 557-562

[7] S.Bouznada, Generalized finite operators and orthogonality, SUT Journal of Mathematics Vol.47,No. (2011),15-23

[8] S.Bouznada, Etude des opérateurs finis et leurs caractérisations- thése Doctorat maths - Univerisité Annaba 2008).

[9] F. Chatelin, Th. Braconnier, About the qualitative computation of Jordan forms. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik,v74,n2,1994, p105-113. http

[10] Y. Y. Chen, A Motivation for the Jordan canonical form, Chinese Journal of physics-Taipei-, 2003, p 253-285, Ingenta.

[11] B. P. Duggal, A remark on generalised Putnam-Fuglede theorems, Proc. Amer. Math. Soc, 129 (2000), 83-87.

[12] L. A. Fialkow And R. Lobel, Elementary mapping into ideals operators, Illinois J. Math.,28 (1984).

[13] P.Halmos, A Hilbert space probleme book, van Nostrand prinston n 5 probleme 185

[14] M. Hazy, Introduction aux espaces normé, O.P.U . 1994.

[15] A. Hitta, cours d'algèbre

[16] S. Mecheri, Generalized derivation and C -Algebras, An. St. Univ. Ovidus Constanta, vol.17 (2), 2009,123-130.

[17] S. Mecheri, Non-normal derivation and orthogonality , Proc.Amer . Math.Soc, 133 (2005), 759-762.

[18] S. Mecheri Finite operators, Demonstratio Math, 35 (2002),355-366.

[19] S. Mecheri Finite operators and orthogonality, Nihonkai Math. J, 19 (2008),53-60.

[20] S. Mecheri, Fuglede Putnam theorem for a class A operators, colloquium Math, 138(2015) 183-191

[21] S. Mecheri, A. Toualbia, Range Kernel Orthogonality and Finite Operators, KYUNGPOOK Math. J. 55(2015), 63-71

[22] S. Mecheri, S.Bouznada, Similarity orbits and finite operators, Jour.Pure. Math, Vol22,2005,pp.67-73.

[23] E. J. Putzer, Avoiding the Jordan Canoical Form in the discusion of linear Systems with constant coe cients Maa Notes, 2002, no.59, pp. 243-248.

[24] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Leçons d'analyse Fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1972.

[25] A. Seddik et J. Charles, Sur I'lmage et le Noyau d'une Dérivation Généralisée, Linear Algebra And Its Applications 274 :77-83(1998).

[26] J. G. Stampfli, The norm of a derivation, Paci c J. Math., 33 (1970), 737-47.

[27] A.Toualbia, Jordan Form of a Generalized Derivation and Elementary Operators, International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 9, 2015, no. 12, 553-560.

[28] A. Uchiyama and K. Tanahashi, Fuglede-Putnam's theorem for p-hyponormal or log-hyponormal operators, Glasgow Math. J. 44 (2002), 397-410.

[29] J. P. Wiliams, Derivation ranges : open problems, Topics in modern operator theory, Birkhauser-Verlag, 1981, 319-28.

[30] J. P. Wiliams, Finite operators, Proc.Amer.Math.Soc,26(1970),129-135.

[31] T.Yamazaki, M.Yanagida, A further generalization of paranormal operators, Sci. Math, 2000 ;3 : 23-31.