République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université L'arbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et Applications

Thème

Existence de solution faible postive pour des systemes elliptiques de type Kirrchoff

Présenté Par :
Mecheri Amel
Fareh Souraya

Devant le jury :

Mr Bouali Tahar	MCA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Président
Mr Boughrara Liazid	MAA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Examinateur
Mr Guefaifia Rafik	MCA	Université L'arbi Tébessi – Tébessa	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2019

Table des matières

Abstract

Using the method of sub-supersolution we study the existence of weak positive solution of elliptic systems with Dirichlet-boundary condition.

Résumé

En utilisant la méthode de sous et sur solution pour montrer l'existence de solution faible positive des systèmes elliptiques avec condition de type **Dirichlet** au bord.

Introduction Générale

L'analyse fonctionnelle c'est développée pour résoudre divers problèmes, le plus souvent représentée par des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Plusieurs techniques ont été développées dans ce sens. Dans ce travail, on s'intéresse en particulier à la méthode de sous et sur solution. Cette dernière est utilisée pour la résolution des EDO et EDP. Le principe de la méthode consiste à chercher une solution qui se situe entre la sous et la sur solution sous certaines conditions.

Dans les dernières années, beaucoup d'attention a été accordée aux problèmes non locaux puisqu'ils apparaissent dans des phénomènes physiques comme la théorie de l'élasticité non linéaire, la biologie, la diffusion de la chaleur,... . Parmi ce genre de problèmes, on trouve les problèmes de type **Kirchhoff** , qui se connaissent par la présence du terme : $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)$.

En effet, l'opérateur de **Kirchhoff** $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) \triangle u$ apparaît aussi dans l'équation des vibrations non linéaires, à savoir,

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right) \triangle u = f(x,u) & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x)\,, u_t(x,0) = u_1(x)\,. \end{cases}$$

cette équation initialement étudiée par **Kirchhoff** en 1883 (voir [2]), représentant une extension de l'équation de **D'Alembert** des ondes.

Dans ce travail nous étudions deux systèmes elliptique non linéaire- de type **Kirchhoff**- avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord, et notre approche est basée sur la méthode des sous-sur solutions combiné avec le principe de comparaison.

Le premier système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} -A\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{2}dx\right)\Delta u=\lambda_1 f(v)+\mu_1 h(u) \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ -B\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^{2}dx\right)\Delta v=\lambda_2 g(u)+\mu_2 \tau(v) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ u=v=0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega\subset\mathbb{R}^{N}\,(N\geq 3)$ etant un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ régulière, et $A,B\colon\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ sont des fonctions continue et décroissante ; $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1$ et μ_2 sont des paramètres positifs, et quand les non-linéarités sont "sous-linéaire" à l'infini, (voir les conditios $(H3)$ et $(H4))$.

Ce système a été étudié par **Salah Boulaaras** et **Rafik Guefaifia** en **2018** (voir[17]), Ce dernier est une extension des travaux de **Hai-shivaji** en **2007** (voir[14]) et **Alves** et **Correa** en **2001** (voir[12]).

Le deuxième système est de la forme suivante :

$$\begin{cases} -M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx\right)\Delta_p u=\alpha_1 a(x)\,f_1(v)+\beta_1 b(x)\,g_1(u)\,,\ x\in\Omega, \\ \\ -M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{q}dx\right)\Delta_q v=\alpha_2 C(x)\,f_2(u)+\beta_2 d(x)\,g_2(v)\,,\ x\in\Omega, \\ \\ u=v=0,\ x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

Où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^{N}$ de frontiére $\partial\Omega, 1<p,q<N,\ M_i:\mathbb{R}_0^{+}\longrightarrow\mathbb{R}, i=1,2,$ sont des fonctions cotinues et croissantes sur $\mathbb{R}^{+}$, où $a,b,c,d\in C\left(\bar{\Omega}\right)$, et $\alpha_i,\beta_i, i=1,2,$ sont des paramètres positifs, $\Delta_s\ (s>1)$, est l'opérateur $s-$**Laplace** définie par **:**

$$\Delta_s u(x)=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{s-2}\nabla u\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{s-2}.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

$f_i, g_i \in C^1(0,\infty) \cap C\,[0,\infty),\ i=1,2$ sont des fonctions monotone telles que

$$\lim_{t\to\infty} f_1(L\,[f_2\,(t)]^{\frac{1}{q-1}})/t^{p-1} = 0 \text{ pour chaque } L > 0,$$

Ce système a été étudié par **G. Afrouzi** en **2015** (voir[18]).

Dans les deux système la première valeur propre et la première fonction propre de l'opérateur **Laplace** ou $p-$**Laplace** joue un rôle très importante dans l'existence d' une solution positive sous les conditions $\lambda_1 + \mu_1$, $\lambda_2 + \mu_2$, $a_0\alpha_1 + b_0\beta_1$, et $c_0\alpha_2 + d_0\beta_2$ sont large.

Ce mémoire il se présente sous forme de trois chapitres.

Le premier chapitre un rappel qui comporte des définitions, des théorèmes, des propositions et des lemmes sur les espaces de **Sobolev** indispensables pour le reste de la mémoire.

Le deuxième chapitre contient des résultats d'existence de solutions faibles positives de certaines classes de systèmes elliptiques de type **Kirchhoff** avec l'opérateur **Laplace**, dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^N$, avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord, et en utilisant la méthode de sous-sur solution combiné avec le principe de comparaison.

Le troisième chapitre contient des résultats d'existence de solutions faibles positives de certaines classes de systèmes elliptiques de type **Kirchhoff** avec l'opérateur de (p,q) **Laplace,** dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^N$, avec des conditions de **Dirichlet** homogène sur le bord, et en utilisant la méme méthode.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle, qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces L^p, les espaces des fonctions continues, les espaces de **Hilbert**, et de **Sobolev** ainsi qu' une partie de définitions sur le probléme de valeurs propres. Enfin on va considérer quelques concepts de principe de maximum et du lemme de comparaison qu'ils sont nécessaire de connaitre pour aborder la suite de ce mémoire.

1- Espaces des fonctions continues.
2- Espace hölderienne.
3- Espaces L^p.
4- Espaces de Sobolev.
5- Principe du maximum.
6- Problème de valeurs propres.

1.1 Espaces des fonctions continues

On donne ici quelques notations et conventions utilisées dans la suite.

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport à $x_i \, (1 \leq i \leq n)$ .Définissons aussi le gradient et le $p-$**Laplacien** de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^{\ T} \quad \text{et} \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$

de plus

$$\triangle u = \operatorname{div}(\nabla u)(x) \ \text{ et } \Delta_p u(x) = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right)(x), p > 1$$

$C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $\mathfrak{D}(\Omega)$, est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions tests.

1.2 Espace hölderienne

1.2.1 Les espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$:

Définition 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$, $C^{0,\alpha}$ est l'espaces vectoriel des fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$f \in L^\infty(\Omega) \ \textit{i.e} \ \ f \ \textit{est mesurable bornée sur } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\exists C > 0 \ : \forall x, y \in \Omega \ , \ |f(x) - f(y)| \leq C \, |x - y|^\alpha . \tag{1.2}$$

On muni $C^{0,\alpha}(\Omega)$ de la norme :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1 *Tout élément f de $C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$ se prolonge en une fonction $\tilde{f} : \bar{\Omega} \longrightarrow$*

$\mathbb{C}$ *qui est borné et vérifie* (1.2) *pour* x, y *dans* $\bar{\Omega}$. *En particulier* $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0}(\bar{\Omega})$ *muni de la norme* (1.3), $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *est un espace de* ***Banach*** .

i) Si $\alpha \geq \alpha'$ on a $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue .

ii) Si Ω est un ouvert borné et $\alpha > \alpha'$, l'inclusion $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ est compacte .

1.2.2 Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Définition et propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$. On peut définir les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ par récurrence sur k, en posant pour $k \geq 1$:

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \ \Leftrightarrow \ f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1,\alpha}(\Omega) \ , i = 1..n \ .$$

Il est équivalent de dire :

$$f \in C^{k,\alpha}(\Omega) \ \Leftrightarrow \ f \in C_b^k(\Omega) \text{ et } \partial^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega), \forall \left|\beta\right| \leq k \ ,$$

on a noté ici

$$\partial^\beta = (\frac{\partial}{\partial x})^\beta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^\beta, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})^\beta, \ \left|\beta\right| = \beta_1 + ... + \beta_n.$$

On muni $C^{k,\alpha}(\Omega)$ de la norme :

$$\left\|f\right\|_{k,\alpha} = \sum_{\left|\beta\right| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_\alpha ,$$

où $\left\|.\right\|_\alpha$ est la norme $C^{0,\alpha}$ définie en (1.3), cette norme est équivalente à la norme :

$$\left\|f\right\|'_{k,\alpha} = \sum_{\left|\beta\right| \leq k} \left\|\partial^\beta f\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{\left|\beta\right| = k} \sup_{x \neq y} \frac{\left|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)\right|}{\left|x - y\right|^\alpha}.$$

On résume les principales propriétés des espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ comme suite :

a- Si $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, les dérivées d'ordre au plus k se prolongent en des fonctions continues bornées sur $\bar{\Omega}$ qui vérifient des conditions de **Hölder** d'exposant α sur $\bar{\Omega}$.

b- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un espace de **Banach**.

c- Si $k+\alpha \geq k'+\alpha'$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est contenu dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$ et l'inclusion est continue.

d- Si Ω est un ouvert borné et si $k+\alpha > k'+\alpha'$ l'injection de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ dans $C^{k',\alpha'}(\Omega)$ est compacte.

e- Si Ω est un ouvert borné et si $k+\alpha > k'+\alpha'$, $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\|f\|_{k',\alpha'} \leq \varepsilon \|f\|_{k,\alpha} + C(\varepsilon) \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \ \forall f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$$

f- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est une algébre multiplicative .Si $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ alors $uv \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ et $\|uv\|_{k,\alpha} \leq C \|u\|_{k,\alpha} \|v\|_{k,\alpha}$.

1.3 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de **Lebesgue** dx. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u(x)|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On définit aussi l'espace $L^{\infty}(\Omega)$

$$L^{\infty}(\Omega)=\{u:\Omega\rightarrow\mathbb{R},\ u \text{ mesurable},\ \exists c>0,\ \text{ tel que } \ |u(x)|\leq c\ p.p \text{ sur } \Omega\}$$

Il sera muni de la norme du sup-essentie

$$\|u\|_{L^{\infty}}=ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|=\inf\{c;\ \ |u(x)|\leq c\quad p.p \text{ sur } \Omega\}$$

On dit qu'une fonction $f:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ appartient à $L_{loc}^{p}(\Omega)$ si $f\mathbf{1}_K\in L^{p}(\Omega)$ pour tout compact $K\subset\Omega$.

1.4 Espaces de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $1\leq i\leq n$. une fonction $u\in L_{loc}^{1}(\Omega)$ a une i-ème dérivée faible dans $L_{loc}^{1}(\Omega)$ s'il existe $f_i\in L_{loc}^{1}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ on ait*

$$\int_{\Omega}u(x)\,\partial_i\varphi(x)\,dx=-\int_{\Omega}f_i(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sens des distributions de u appartient à $L_{loc}^{1}(\Omega)$,on posera

$$\partial_i u=\frac{\partial u}{\partial x_i}=f_i$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non de $\mathbb{R}^n$, et $p\in\mathbb{R}$, $1\leq p\leq+\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega)=\{u\in L^{p}(\Omega);\ \text{tel que } \partial_i u\in L^{p}(\Omega),1\leq i\leq n\}$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible d'une fonction $u\in L_{loc}^{1}(\Omega)$.

Théorème 1.1 [10] *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte continument dans* $L^{\infty}(\Omega)$ *(*$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$*) pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$, *i.e qu'il existe un constant* C *(dépendant seulement de* Ω *) tel que*

$$\|u\|_{L^{\infty}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

De plus, si Ω *est borné on a*

$$\begin{aligned} &W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega) \ \text{ avec injection compacte, } 1 < p \leq +\infty, \\ &W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) \ \text{ avec injection compacte, } 1 \leq q < +\infty. \end{aligned}$$

Corollaire 1.1 *Supposons que* Ω *un ouvert non borné de* $\mathbb{R}^n$, *et soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Alors*

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in \Omega}} u(x) = 0$$

Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^{p}(\Omega) \ \text{ tel que } \partial_i^{\alpha} u \in L^{p}(\Omega), \ \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ la langueur de α et $\partial_i^{\alpha} u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible d'une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la définition (1.1).

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum\nolimits_{0 < |\alpha| \leq m} \|\partial_i^{\alpha} u\|_{L^p}$$

Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.3 *Pour* $1 \leq p < +\infty$ *on définit l'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *comme étant la fermeture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *,et on écrit*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}}$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui est équivalent à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.4.1 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Young

Définition 1.4 *On dit que* $p, q \in [1; +\infty[$ *sont deux exposants conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Proposition 1.2 *(Inégalité de* ***Young****) Soient* $1 < p, q < \infty$ *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

Inégalité de Hölder

Proposition 1.3 *(Inégalité de* ***Hölder****) Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *supposons que* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, *alors* $fg \in L^1$ *et*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Inégalité de Poincarée

Proposition 1.4 (*Inégalité de* ***Poincarée***) *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *alors il existe une constante* C (*dépendant de* Ω *et* p) *telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad 1 \leq p < \infty$$

En particuliere l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ *est un norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalent à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Corollaire 1.2 (*Injection de* ***Sobolev***) *Il existe une constante* C *dépandant de* $|\Omega| < \infty$ *tel que :*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \qquad \forall \ 1 \leq p \leq \infty$$

1.5 Principe du maximum

Théorème 1.2 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine borné de classe* C^1 *et* $u \in H^1(\Omega)$ *telle que :*

$$\begin{cases} -\triangle u \geq 0 \ \textit{dans} \ \Omega, \\ u \geq 0 \ \textit{sur} \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u \geq 0$ *dans* $\overline{\Omega}$, *et s'il existe* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $u(x_0) > 0$ *alors* $u > 0$ *dans* Ω.

1.6 Problème de valeurs propres

1.6.1 Valeurs propres et fonctions propres du Laplace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

- Les valeurs propres de $(-\triangle, H_0^1(\Omega))$ sont réelles.

• Ces valeurs propres constitue une suite croissante,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,$$

et

$$\lambda_k \to \infty, \; k \to +\infty.$$

• Il existe une base orthonormale $\{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ de $L^2(\Omega)$, avec $\psi_k \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre associée à λ_k i.e

$$-\triangle\psi_k = \lambda\psi_k \text{ dans } \Omega.$$

1.6.2 Valeurs propres et fonctions propres du p-Laplace

Définition 1.5 *On dit que $u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0$, est une fonction propres de l'opérateur $-\triangle_p u$ si :*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla\varphi dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u.\varphi dx \tag{1.5}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Le nombre réel λ correspondant est appelé valeur propre. Soit λ_1 définie par

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega), u\neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} \tag{1.6}$$

équivalant à

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx; \int_\Omega |u|^p dx = 1, u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0\right\}$$

*λ_1 est le premièr valeur propre de l'opérateur $p-$**Laplace** avec conditions de Dirichlet nulles au bord.*

Lemme 1.1 [16] *λ_1 est isolée, alors il existe $\delta > 0$ tel que dans un intervale $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, il n'existe pas un autre valeurs propres de (1.5).*

Lemme 1.2 [16] *a) Soit $p \geq 2$, alors pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$*

$$|\xi_2|^p \geq |\xi_1|^p + p\,|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle + C(p)\,|\xi_1 - \xi_2|^p,$$

b)Soit $p < 2$, alors pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi_2|^p \geq |\xi_1|^p + p\,|\xi_1|^{p-2}\langle \xi_1, \xi_2 - \xi_1\rangle + C(p)\,\frac{|\xi_1 - \xi_2|^p}{(|\xi_2| + |\xi_1|)^{2-p}},$$

où $C(p)$ est une canstante dépendant uniquement de p.

Lemme 1.3 [16] *La premiére valeur propre λ_1 est simple. ,i.e si $u.v$ sont deux fonctions propres associées à λ_1,alors, il existe k tel que : $u = kv$.*

Preuve on peut supposser que u, v sont positives sur Ω,et en prenant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(u^p - v^p)}{u^{p-1}}, \\ \varphi_2 &= \frac{(v^p - u^p)}{v^{p-1}}, \end{aligned}$$

deux fonctions test dans la formulation faible (1.5), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}}\right)dx &= \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}}\right)dx \\ \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}}\right)dx &= \lambda \int_\Omega |v|^{p-2} v \left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}}\right)dx \end{aligned} \tag{1.7}$$

L'addition de ces des deux formules donnent

$$0 = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\left(\frac{u^p - v^p}{u^{p-1}}\right)dx + \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\left(\frac{v^p - u^p}{v^{p-1}}\right)dx \tag{1.8}$$

Et en utilisant les identités :

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right) &= \nabla u-p\frac{v^{p-1}}{u^{p-1}}\nabla v+(p-1)\frac{v^p}{u^p}\nabla u, \\
\nabla\left(\frac{v^p-u^p}{v^{p-1}}\right) &= \nabla v-p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u+(p-1)\frac{u^p}{v^p}\nabla v,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

on obtient le premier terme de (1.8)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\left(\frac{u^p-v^p}{u^{p-1}}\right)dx &= \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx-p\int_\Omega\frac{v^{p-1}}{u^{p-1}}|\nabla u|^{p-2}\nabla v\nabla u dx \\
&\quad+\int_\Omega (p-1)\frac{v^p}{u^p}|\nabla u|^p\,dx \\
&= \int_\Omega |\nabla\ln u|^p\,u^p dx-p\int_\Omega v^p|\nabla\ln u|^{p-2}\langle\nabla\ln u,\nabla\ln v\rangle dx \\
&\quad+\int_\Omega (p-1)|\nabla\ln u|^p\,v^p dx
\end{aligned} \tag{1.10}$$

On a une expression analogue pour le second terme de (1.8) .La formule (1.8) devient alors

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (u^p-v^p)\left(|\nabla\ln u|^p-|\nabla\ln v|^p\right)dx \\
&\quad -p\int_\Omega v^p\left(|\nabla\ln u|^{p-2}\langle\nabla\ln u,\nabla\ln v-\nabla\ln u\rangle\right)dx \\
&\quad -p\int_\Omega u^p\left(|\nabla\ln v|^{p-2}\langle\nabla\ln v,\nabla\ln u-\nabla\ln v\rangle\right)dx
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Choisissans $\xi_1=\nabla\ln u$ et $\xi_2=\nabla\ln v$ et on utilisons le lemme (1.2) on aura, pour $p\geq 2$

$$0\geq\int_\Omega C(p)\,|\nabla\ln u-\nabla\ln v|\,(u^p+v^p)\,dx \tag{1.12}$$

ou bien

$$0 = |\nabla \ln u - \nabla \ln v| \tag{1.13}$$

alors $u = kv$.

Pour $p < 2$,on utilise la seconde partie du lemme (1.3) comme précédement. ■

Chapitre 2

Existence de solution faible positive pour une classe de système elleptique de type Kirrchhoff à multiple paramètres avec Laplace operateur

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, On va étudier l'existence de solutions faibles positives pour des systèmes elliptiques de type **Kirrchoff** suivant :

$$\begin{cases} -A\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \lambda_1 f(v) + \mu_1 h(u) \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ -B\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx\right) \Delta v = \lambda_2 g(u) + \mu_2 \tau(v) \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ etant un domaine borné avec une frontière $\partial\Omega$ régulière, et $A, B \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions continue ; $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ et μ_2 sont des paramètres positifs. On utilise la méthode de sous et sur solution.

2.2 Définitions et notations

Commencons par introduire la définition d'une solution faible, sous et sur-solution faible du probléme (2.1)

Définition 2.1 *Soit* $(u,v) \in \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right), (u,v)$ *est dit une solution faible de* (2.1) *si elle satisfait :*

$$\begin{aligned} A\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx &= \lambda_1 \int\limits_{\Omega} f(v)\, \phi dx + \mu_1 \int\limits_{\Omega} h(u)\, \phi dx \ \ \textit{dans } \Omega, \\ B\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 dx\right) \int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla \psi dx &= \lambda_2 \int\limits_{\Omega} g(u)\, \psi dx + \mu_2 \int\limits_{\Omega} \tau(v)\, \psi dx \ \ \textit{dans } \Omega, \end{aligned}$$

pour tous $(\phi, \psi) \in \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right).$

Définition 2.2 *Une paire de fonctions non négatives* $(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v})$ *dans* $\left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$ *sont appelées sous-solutions faibles et sur solutions de* (2.1) *si elles satisfont* $(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v}) = (0,0)$ *sur* $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}
A\left(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx &\leq \lambda_1 \int_\Omega f(\underline{v}) \phi dx + \mu_1 \int_\Omega h(\underline{u}) \phi dx \ \textit{dans } \Omega, \\
B\left(\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla \underline{v} \nabla \psi dx &\leq \lambda_2 \int_\Omega g(\underline{u}) \psi dx + \mu_2 \int_\Omega \tau(\underline{v}) \psi dx \ \textit{dans } \Omega, \\
A\left(\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla \bar{u} \nabla \phi dx &\geq \lambda_1 \int_\Omega f(\bar{v}) \phi dx + \mu_1 \int_\Omega h(\bar{u}) \phi dx \ \textit{dans } \Omega \\
B\left(\int_\Omega |\nabla \bar{v}|^2 dx\right) \int_\Omega \nabla \bar{v} \nabla \psi dx &\geq \lambda_2 \int_\Omega g(\bar{u}) \psi dx + \mu_2 \int_\Omega \tau(\bar{v}) \psi dx \ \textit{dans } \Omega,
\end{aligned}$$

pour tout $(\phi, \psi) \in \left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$.

Lemme 2.1 [12] *Supposons que* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue et non croissante satisfaisant*

$$\lim_{t \to 0^+} M(t) = m_0, \tag{2.2}$$

Où m_0 *est une constante positive, et nous noterons par* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction continue donnée par*

$$H(t) = tM\left(t^2\right), \forall t \in \mathbb{R}$$

Alors la fonction H *est croissante sur* $\mathbb{R}$. *Supposons que* u, v *sont deux fonctions non négatives telle que*

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u \geq -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \Delta v \ \textit{dans } \Omega, \\ u = v = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors $u \geq v$ *p.p dans* Ω.

Preuve On reprend l'idée de [12] Multiplions les deux membres de l'inégalité par u et v et intégrons, on obtient

$$\frac{M\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2}{M\left(\|v\|^2\right)} \geq (u,v) \geq \frac{M\left(\|v\|^2\right)\|v\|^2}{M\left(\|u\|^2\right)}$$

d'ou

$$M\left(\|u\|^2\right)\|u\| \geq M\left(\|v\|^2\right)\|v\|$$

la fonction $H(t) = tM(t^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}$,i.e.

$$H(\|u\|) \geq H(\|v\|).$$

Puisque la fonction H est croissante on obtient

$$\|u\| \geq \|v\|.$$

et donc

$$M\left(\|u\|^2\right) \geq M\left(\|v\|^2\right), \tag{2.4}$$

car la fonction M est non croissante. D'autre part, par application du principe du maximum au problème (2.3) nous obtenons

$$M\left(\|u\|^2\right)u \geq M\left(\|v\|^2\right)v.$$

Ceci avec (2.4) implique que $u \geq v$ dans Ω Le lemme est démontré. ■

Nous énoncerons le résultat principal de ce chapitre. Supposons les hypothèses suivantes :

$(H1)$ Supposons que $A, B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues et croissantes et qu'il existe $a_i, b_i > 0, i = 1, 2$, tel que

$$a_1 \leq A(t) \leq a_2, \quad b_1 \leq B(t) \leq b_2 \text{ pour tous } t \in \mathbb{R}^+;$$

$(H2)$ f, g, h et τ sont des fonctions continus sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $(0, +\infty)$, et croissantes telles que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty, \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty, \lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty;$$

$(H3)$ Supposons que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(K(g(t)))}{t} = 0, \text{ pour tous } K > 0;$$

$(H4)$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\tau(t)}{t} = 0.$$

2.3 Résultats principales

Théorème 2.1 [17] *Supposons que les conditions* $(H1)$ *et* $(H4)$ *soient verifiées et que* M *soit une fonction décroissante satisfaisant* (2.2) *alors pour* $\lambda_1 + \mu_1$ *et* $\lambda_2 + \mu_2$ *sont larges, et alors le problème* (2.1) *admet une solution faible positive dans* $\left(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right)$.

Preuve Soit σ la premiére valeur propre de $-\Delta$ avec les conditions aux limites de **Dirichlet** et ϕ_1 la fonction propre positive correspondante avec $\|\phi_1\| = 1$. Soit $k_0, m_0, \delta > 0$ tel que $f(t), g(t), h(t), \tau(t) \geq -k_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$et $|\nabla\phi_1|^2 - \sigma\phi_1^2 \geq m_0$ à $\bar{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$.

Pour chaque $\lambda_1 + \mu_1 > 0$ et $\lambda_2 + \mu_2 > 0$, définissons

$$\underline{u} = \left(\frac{(\lambda_1 + \mu_1) k_0}{2m_0 a_1}\right) \phi_1^2,$$

et

$$\underline{v} = \left(\frac{(\lambda_2 + \mu_2) k_0}{2m_0 b_1}\right) \phi_1^2,$$

où a_1, b_1 sont données par la condition $(H1)$.

Nous vérifierons que $(\underline{u}, \underline{v})$ est une sous-solution du probléme (2.1) pour $\lambda_1 + \mu_1$ et $\lambda_2 + \mu_2$ suffisamment larges.

En effet, pour $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$ dans Ω. par $(H1)$ et $(H2)$, un calcul simple montre que

$$\begin{aligned}
A\left(\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \int_{\bar{\Omega}_\delta} \nabla \underline{u} \nabla \phi dx &= A\left(\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \frac{(\lambda_1 + \mu_1) k_0}{m_0 a_1} \int_{\bar{\Omega}_\delta} \phi_1 \nabla \phi_1 . \nabla \phi dx \\
&= \frac{(\lambda_1 + \mu_1) k_0}{m_0 a_1} A\left(\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \\
&\quad \times \left\{\int_{\bar{\Omega}_\delta} \nabla \phi_1 \nabla (\phi_1 . \phi) dx - \int_{\bar{\Omega}_\delta} |\nabla \phi_1|^2 \phi dx\right\} \\
&= \frac{(\lambda_1 + \mu_1) k_0}{m_0 a_1} A\left(\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \int_{\bar{\Omega}_\delta} \left(\sigma \phi_1^2 - |\nabla \phi_1|^2\right) \phi dx.
\end{aligned}$$

Sur $\bar{\Omega}_\delta$, nous avons $|\nabla \phi_1|^2 - \sigma \phi_1^2 \geq m_0$, puis par $(H2)$:

$$f(\underline{v}), h(\underline{u}), g(\underline{u}), \tau(\underline{v}) \geq \frac{k_0}{m_0},$$

cette

$$\begin{aligned}
A\left(\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\nabla \underline{u}|^2 dx\right) \int_{\bar{\Omega}_\delta} \nabla \underline{u} \nabla \phi dx &\leq \frac{(\lambda_1 + \mu_1) k_0}{m_0} \int_{\bar{\Omega}_\delta} \left(\sigma \phi_1^2 - |\nabla \phi_1|^2\right) \phi dx \\
&\leq \lambda_1 \int_{\bar{\Omega}_\delta} f(\underline{v}) \phi dx + \mu_1 \int_\Omega h(\underline{u}) \phi dx. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Ensuit, sur $\Omega \setminus \bar{\Omega}_\delta$, nous avons $\phi_1 \geq r$ pour certains $r > 0$. et donc par les conditions $(H1)$,$(H2)$, et la définition de $\underline{v}$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta} f\left(\underline{v}\right)\phi dx+\mu_1 \int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta} h\left(\underline{u}\right)\phi dx &\geq \left(\lambda_1+\mu_1\right)\frac{k_0 a_2}{m_0 a_1}\sigma\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\phi dx \\
&\geq \left(\lambda_1+\mu_1\right)\frac{k_0}{m_0 a_1}A\left(\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\left|\nabla\underline{u}\right|^2 dx\right).\sigma\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}\phi dx \\
&\geq \left(\lambda_1+\mu_1\right)\frac{k_0}{m_0 a_1}A\left(\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\left|\nabla\underline{u}\right|^2 dx\right) \\
&\quad\times\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\left(\sigma\phi_1^2-\left|\nabla\phi_1\right|^2\right)\phi dx \qquad (2.6) \\
&= A\left(\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\left|\nabla\underline{u}\right|^2 dx\right)\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_\delta}\nabla\underline{u}\nabla\phi dx
\end{aligned}
$$

pour $\lambda_1+\mu_1>0$.

Les relations (2.5) et (2.6) impliquent que

$$A\left(\int_{\Omega}\left|\nabla\underline{u}\right|^2 dx\right)\int_{\Omega}\nabla\underline{u}\nabla\phi dx\leq\lambda_1\int_{\Omega}f\left(\underline{v}\right)\phi dx+\mu_1\int_{\Omega}h\left(\underline{u}\right)\phi dx \text{ dans } \Omega. \qquad (2.7)$$

pour $\lambda_1+\mu_1>0$ et tout $\phi\in H_0^1\left(\Omega\right)$ avec $\phi\geq 0$ dans Ω.

de méme

$$B\left(\int_{\Omega}\left|\nabla\underline{v}\right|^2 dx\right)\int_{\Omega}\nabla\underline{v}\nabla\psi dx\leq\lambda_2\int_{\Omega}g\left(\underline{u}\right)\psi dx+\mu_2\int_{\Omega}\tau\left(\underline{v}\right)\psi dx \text{ dans } \Omega. \qquad (2.8)$$

pour $\lambda_2+\mu_2>0$ et tout $\psi\in H_0^1\left(\Omega\right)$ avec $\psi\geq 0$ dans Ω.

D'après (2.7) et (2.8) , $\left(\underline{u},\underline{v}\right)$ est une sous-solution du probléme $\left(2.1\right)$. De plus nous avons $\underline{u}>0$ et $\underline{v}>0$ dans Ω, telle que $\underline{u}\to+\infty$ et $\underline{v}\to+\infty$ quand $\lambda_1+\mu_1\to+\infty$, $\lambda_2+\mu_2\to+\infty$.

Ensuit nous allons construire une sur solution du probléme $\left(2.1\right)$. Soit ω la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\omega = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \\ \omega = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Soit

$$\begin{aligned} \bar{u} &= C\omega, \\ \bar{v} &= \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{b_1}\right)\left[g\left(c\left\|\omega\right\|_\infty\right)\right]\omega, \end{aligned}$$

où ω est donnée par (2.9) et $C > 0$.

Nous vérifierons que $(\bar{u}, \bar{v})$ est une sur solution du (2.1).

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$ dans Ω. Alors nous obtenons de (2.9) et la condition $(H1)$ que

$$\begin{aligned} A\left(\int_\Omega \left|\nabla\bar{u}\right|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\bar{u}.\nabla\phi dx &= A\left(\int_\Omega \left|\nabla\bar{u}\right|^2 dx\right)C\int_\Omega \nabla\omega.\nabla\phi dx \\ &= A\left(\int_\Omega \left|\nabla\bar{u}\right|^2 dx\right)C\int_\Omega \phi dx \\ &\geq a_1 C\int_\Omega \phi dx. \end{aligned}$$

par $(H3)$ et $(H4)$, nous pouvons choisir C grand pour que

$$a_1 C \geq \lambda_1 f\left(\left[\frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{b_1}\right]g\left(C\left\|\omega\right\|_\infty\right)\left\|\omega\right\|_\infty\right) + \mu_1 h\left(C\left\|\omega\right\|_\infty\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
A\left(\int_{\Omega}|\nabla\bar{u}|^2 dx\right)\int_{\Omega}\nabla\bar{u}.\nabla\varphi dx &\geq \left[\lambda_1 f\left(\left[\frac{(\lambda_1+\mu_1)}{b_1}\right]g\left(C\|\omega\|_\infty\right)\|\omega\|_\infty\right)+\mu_1 h\left(C\|\omega\|_\infty\right)\right]\int_{\Omega}\phi dx \\
&\geq \lambda_1\int_{\Omega} f\left(\left[\frac{(\lambda_1+\mu_1)}{b_1}\right]g\left(C\|\omega\|_\infty\right)\|\omega\|_\infty\right)\phi dx \qquad (2.10)\\
&\quad +\mu_1\int_{\Omega} h\left(C\|\omega\|_\infty\right)\phi dx \\
&\geq \lambda_1\int_{\Omega} f(\bar{v})\,\phi dx+\mu_1\int_{\Omega} h(\bar{u})\,\phi dx.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
B\left(\int_{\Omega}|\nabla\bar{v}|^2 dx\right)\int_{\Omega}\nabla\bar{v}\nabla\psi dx &\geq (\lambda_2+\mu_2)\int_{\Omega} g\left(C\|\omega\|_\infty\right)\psi dx \\
&= \lambda_2\int_{\Omega} g(\bar{u})\,\psi dx+\mu_2\int_{\Omega} g\left(C\|\omega\|_\infty\right)\psi dx. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Encore par $(H3)$ et $(H4)$ pour $C>0$ nous avons

$$g\left(C\|\omega\|_\infty\right)\geq\tau\left[\frac{(\lambda_2+\mu_2)}{b_1}g\left(C\|\omega\|_\infty\right)\|\omega\|_\infty\right]\geq\tau(\bar{v}). \qquad (2.12)$$

D'après (2.11) et (2.12) ,Nous obtenons

$$B\left(\int_{\Omega}|\nabla\bar{v}|^2 dx\right)\int_{\Omega}\nabla\bar{v}\nabla\psi dx\geq\lambda_2\int_{\Omega} g(\bar{u})\,\psi dx+\mu_2\int_{\Omega}\tau(\bar{v})\,\psi dx. \qquad (2.13)$$

D'après (2.10) et (2.13) , nous avons $(\bar{u},\bar{v})$, est une sur-solution du probléme (2.1) avec $\underline{u}\leq\bar{u}$ et $\underline{v}\leq\bar{v}$ pour $C>0$.

Pour obtenir une solution faible du probléme (2.1) nous allons utiliser les arguments de **Azzouz** et **Bensedik** (notons que f,g ne dépend pas de x). Dans ce but, nous définissons une séquence $\{(u_n,v_n)\}\subset\left(H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\right)$ comme suit : $u_0:=\bar{u}, v_0=\bar{v}$, et (u_n,v_n) est la solution unique du systéme

$$\begin{cases} -A\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx\right) \Delta u_n = \lambda_1 f\left(v_{n-1}\right) + \mu_1 h\left(u_{n-1}\right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ -B\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx\right) \Delta v_n = \lambda_2 g\left(u_{n-1}\right) + \mu_2 \tau\left(v_{n-1}\right) \text{ dans } \Omega, \\ \\ u_n = v_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Le probléme (2.14) est dite (A, B)-linéaire dans le sens où, si $(u_{n-1}, v_{n-1}) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ est une données, le coté droit de (2.14) est indépendant de u_n, v_n.Définissez $A(t) = tA(t^2), B(t) = tB(t^2)$. Puis, parce que $A(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(v_{n-1}), h(u_{n-1}), g(u_{n-1})$, et $\tau(v_{n-1}) \in L^2(\Omega)$ (dans x), nous déduisons d'un résultat dans **Alves** et **Correa** que le système (2.14) a une solution unique $(u_n, v_n) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$.

En utilisant (2.14) et le fait que (u_0, v_0) est une sur solution de (2.1), nous avons

$$\begin{cases} -A\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_0|^2 \, dx\right) \Delta u_0 \geq \lambda_1 f(v_0) + \mu_1 h(u_0) = -A\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_1|^2 \, dx\right) \Delta u_1, \\ \\ -B\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_0|^2 \, dx\right) \Delta v_0 \geq \lambda_2 g(u_0) + \mu_2 \tau(v_0) = -B\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_1|^2 \, dx\right) \Delta v_1, \end{cases}$$

et par le lemme 2.1, $u_0 \geq u_1$ et $v_0 \geq v_1$. Aussi, parce que $u_0 \geq \underline{u}, v_0 \geq \underline{v}$ et la monotonie de f, h, g, et τ on a

$$\begin{aligned} -A\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_1|^2 \, dx\right) \Delta u_1 &= \lambda_1 f(v_0) + \mu_1 h(u_0) \geq \lambda_1 f(\underline{v}) + \mu_1 h(\underline{u}) \geq -A\left(\int\limits_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 \, dx\right) \Delta \underline{u}, \\ -B\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_1|^2 \, dx\right) \Delta v_1 &= \lambda_2 g(u_0) + \mu_2 \tau(v_0) \geq \lambda_2 g(\underline{u}) + \mu_2 \tau(\underline{v}) \geq -B\left(\int\limits_\Omega |\nabla \underline{v}|^2 \, dx\right) \Delta \underline{v}, \end{aligned}$$

à partir du lemme 2.1, $u_1 \geq \underline{u}, v_1 \geq \underline{v}$. pour u_2, v_2 on ecrit

$$-A\left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx\right)\Delta u_1 = \lambda_1 f(v_0) + \mu_1 h(u_0) \geq \lambda_1 f(v_1) + \mu_1 h(u_1) = -A\left(\int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx\right)\Delta u_2,$$

$$-B\left(\int_\Omega |\nabla v_1|^2 dx\right)\Delta v_1 = \lambda_2 g(u_0) + \mu_2 \tau(v_0) \geq \lambda_1 g(u_1) + \mu_2 \tau(v_1) \geq -B\left(\int_\Omega |\nabla v_2|^2 dx\right)\Delta v_2,$$

et puis $u_1 \geq u_2, v_1 \geq v_2$. De même, $u_2 \geq \underline{u}$ et $v_2 \geq \underline{v}$ parce que

$$-A\left(\int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx\right)\Delta u_2 = \lambda f(v_1) \geq \lambda f(\underline{v}) \geq -A\left(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dx\right)\Delta \underline{u},$$

$$-B\left(\int_\Omega |\nabla v_2|^2 dx\right)\Delta v_2 = \lambda g(u_1) \geq \lambda g(\underline{u}) \geq -B\left(\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^2 dx\right)\Delta \underline{v},$$

En répétant cet argument, nous obtenons une séquence monotone borné $\{(u_n, v_n)\} \subset (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ satisfaisante

$$\bar{u} = u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n \geq ... \geq \underline{u} > 0, \tag{2.15}$$

$$\bar{v} = v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq ... \geq v_n \geq ... \geq \underline{v} > 0, \tag{2.16}$$

En utilisant la continuité des fonctions f, h, g et τ et la définition des séquences $\{u_n\}, \{v_n\}$, il existe des constantes $C_i > 0, i = 1, ..., 4$ indépendantes de n telles que

$$|f(v_{n-1})| \leq C_1, \quad |h(u_{n-1})| \leq C_2, \quad |g(u_{n-1})| \leq C_3 \tag{2.17}$$

et

$$|\tau(u_{n-1})| \leq C_4 \text{ pour tous } n$$

À partir de (2.17), en mutipliant la premiére équation de (2.14) par u_n, en intégrant, en utilisant l'inégalité de **Hölder** et l'inclusion de **Sobolev**, nous pouvons montrons que

$$\begin{aligned} a_1 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx &\leq A\left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx\right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} f(v_{n-1}) u_n dx + \mu_1 \int_{\Omega} h(u_{n-1}) u_n dx \\ &\leq \lambda_1 \int_{\Omega} |f(v_{n-1})| |u_n| dx + \mu_1 \int_{\Omega} |h(u_{n-1})| |u_n| dx \\ &\leq C_1 \lambda_1 \int_{\Omega} |u_n| dx + C_2 \mu_1 \int_{\Omega} |u_n| dx \\ &\leq C_3 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_5, \quad \forall n, \tag{2.18}$$

où $C_5 > 0$ est une constante indépendante de n tel que

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_6, \quad \forall n, \tag{2.19}$$

De (2.18) et (2.19), nous déduisons que $\{(u_n, v_n)\}$ a une sous séquence qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ vers une limite (u, v) avec les propriétés $u \geq \underline{u} \geq 0$ et $v \geq \underline{v} \geq 0$. Étant monotone et utilisant également un argument de régularité standard $\left((u_n, v_n) \subset C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \times C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right),\ 0 < \alpha < 1\right)$, qui s'injecte, avec injection compacte dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, alors $\{(u_n, v_n)\}$ converge lui-même à (u, v). Maintenant, en tends $n \to \infty$ dans (2.17), nous en déduisons que (u, v) est une solution positive du systéme (2.1). La preuve du théorème est maintenant terminée. ■

Chapitre 3

Existence de solution faible positive pour une classe de système elleptique de type Kirchhoff à multiple paramètres avec (p,q) Laplace operateur

---

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'existence de solution faible positive du problème suivant :

$$\begin{cases} -M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\Delta_p u = \alpha_1 a(x) f_1(v) + \beta_1 b(x) g_1(u)\,,\ x\in\Omega, \\ \\ -M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right)\Delta_q v = \alpha_2 c(x) f_2(u) + \beta_2 d(x) g_2(v)\,,\ x\in\Omega, \\ \\ u = v = 0,\ x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega, 1 < p, q < N$, $M_i : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, sont des fonctions cotinues et croissantes, où $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)\,, a, b, c, d \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, et $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$, sont des paramètres positifs. $\triangle_s, s = p, q$ est l'opérateur $s-$**Laplace** définie par

$$\Delta_s u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{s-2}\nabla u\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{s-2}.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), s > 1$$

La technique employé dans ce chapitre est la méme qu'on a utilisé dans le chapitre précédent.

3.2 Définitions et notations :

Définition 3.1 *Soit* $(u, v) \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\times W_0^{1,q}(\Omega)\right), (u, v)$ *est dit une solution faible de* (3.1) *si elle satisfait*

$$\begin{aligned} M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w dx &= \alpha_1\int_\Omega a(x) f_1(u)\,w dx + \beta_1\int_\Omega b(x) g_1(v)\,w dx, \quad \forall w\in W, \\ M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla w dx &= \alpha_2\int_\Omega c(x) f_2(u)\,w dx + \beta_2\int_\Omega d(x) g_2(v)\,w dx, \quad \forall w\in W, \end{aligned}$$

où

$$W := \{w\in C_0^\infty(\Omega) : w \geq 0\ \text{dans}\ \Omega\}.$$

Définition 3.2 *Une paire de fonctions* $(\psi_1, \psi_2) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *est dit une sous-solution du probléme* (3.1) *si :*

$$\begin{aligned} & M_1\left(\int_\Omega |\nabla\psi_1|^p \, dx\right) \int_\Omega |\nabla\psi_1|^{p-2} \nabla\psi_1 \nabla w dx \\ \leq \quad & \alpha_1 \int_\Omega a(x) f_1(\psi_2) w dx + \beta_1 \int_\Omega b(x) g_1(\psi_1) w dx, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & M_2\left(\int_\Omega |\nabla\psi_2|^q \, dx\right) \int_\Omega |\nabla\psi_2|^{q-2} \nabla\psi_2 \nabla w dx \\ \leq \quad & \alpha_2 \int_\Omega c(x) f_2(\psi_1) w dx + \beta_2 \int_\Omega d(x) g_2(\psi_2) w dx, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

où

$$W := \{w \in C_0^\infty(\Omega) : w \geq 0 \ \text{dans } \Omega\}.$$

Définition 3.3 *Une paire de fonctions* $(z_1, z_2) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *est dit une sur solution du probléme* (3.1) *si :*

$$\begin{aligned} & M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p \, dx\right) \int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2} \nabla z_1 \nabla w dx \\ \geq \quad & \alpha_1 \int_\Omega a(x) f_1(z_2) w dx + \beta_1 \int_\Omega b(x) g_1(z_1) w dx, \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
& M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2}\nabla z_2\nabla w dx \\
\geq\ & \alpha_2\int_\Omega c(x)\,f_2(z_1)\,w dx+\beta_2\int_\Omega d(x)\,g_2(z_2)\,w dx,\quad \forall w\in W.
\end{aligned}
$$

où

$$
W := \{w\in C_0^\infty(\Omega) : w\geq 0 \ \ dans\ \Omega\}
$$

Nous supposons les hypothéses suivantes :

$(\mathcal{H}1)$ $a,b,c,d\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ et

$$
a(x)\geq a_0>0, b(x)\geq b_0>0, c(x)\geq c_0>0, d(x)\geq d_0>0
$$

pour tout $x\in\Omega$;

$(\mathcal{H}2)$ $M_i:\mathbb{R}_0^+\longrightarrow\mathbb{R}^+, i=1,2$, sont deux fonctions continues et croissantes et

$$
0<m_i\leq M_i(t)\leq m_{i,\infty}
$$

pour tout $t\in\mathbb{R}_0^+$.

$(\mathcal{H}3)$ $f_i,g_i\in C^1(0,\infty)\cap C[0,\infty),\ i=1,2$ sont des fonctions monotone telles que

$$
\lim_{t\to\infty} f_i(t)=\lim_{t\to\infty} g_i(t)=\infty;
$$

$(\mathcal{H}4)$

$$
\lim_{t\to\infty} f_1(L\left[f_2(t)\right]^{\frac{1}{q-1}})/t^{p-1}=0
$$

pour chaque $L>0$;

$(\mathcal{H}5)$

$$
\lim_{t\to\infty} g_1(t)/t^{p-1}=\lim_{t\to\infty} g_2(t)/t^{q-1}=0.
$$

Lemme 3.1 [12] (*de comparaison*) *Supposons que* $M:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}^+$ *soit continue et croissante et* *qu'il existe* $m_0 > 0$ *tel que* $M(t) \geq m_0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_0^+$. *Si les fonctions* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *vérifions*

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx \leq M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\varphi dx \tag{3.2}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0,$ *alors* $u \leq v$ *dans* Ω.

Preuve Notre preuve est basée sur les arguments présentés dans [18]. On commence par définir la fonction $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par la formule

$$J(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right),\ u \in W_0^{1,P}(\Omega). \tag{3.3}$$

Où

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)\, ds$$

il est évident que la fonctionnelle J est Gâteaux différentiable et continue et sa dérivé de Gâteaux au point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fonction $J'(u) \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ i.e

$$J'(u)(\varphi) = M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla\varphi dx, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.4}$$

$J'(u)$ est continue et bornée. Nous allons montrer que $J'(u)$ est strictement monotone dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

En effet, pour toute $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq v$ sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \geq \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx$$

D'autre part, en changeant le role de u et v dans la preuve suivante, donc nous obtenons :

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right) \geq M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx\right) \tag{3.5}$$

En utilisant l'inégalité de **Cauchy,** nous avons

$$\nabla u.\nabla v \leq |\nabla u| |\nabla v| \leq \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) \tag{3.6}$$

de la formule (3.6) on déduit

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \tag{3.7}$$

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v.\nabla u dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) dx \tag{3.8}$$

Si $|\nabla u| \geq |\nabla v|$, En utilisant $(3.5)-(3.8)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= J'(u)(u) - J'(u)(v) - J'(v)(u) + J'(v)(v) \\
&= M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx\right) \\
&-M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla u dx - \int_\Omega |\nabla v|^p dx\right) \\
&\geq \tfrac{1}{2}M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \\
&-\tfrac{1}{2}M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \\
&= \tfrac{1}{2}M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\right)\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx \\
&\geq \tfrac{M_0}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\right)\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Si $|\nabla v| \geq |\nabla u|$, en changeant le rôle de u et v en $(3.5)-(3.8)$ nous avons

$$\begin{aligned}
I_2(v) &= J'(v)(v) - J'(v)(u) - J'(u)(v) + J'(u)(u) \\
&= M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v.\nabla u dx\right) \\
&-M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right) \\
&\geq \tfrac{1}{2} M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) dx \\
&-\tfrac{1}{2} M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) dx \\
&= \tfrac{1}{2} M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2}\right)\left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) dx \\
&\geq \tfrac{M_0}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2}\right)\left(|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2\right) dx
\end{aligned} \tag{3.10}$$

de (3.9) et (3.10), nous avons

$$(J'(u) - J'(v))(u - v) = I_1 = I_2 \geq 0, \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

en autre, si $u \neq v$ et $(J'(u) - J'(v))(u - v) = 0$, puis nous avons

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\right)\left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx = 0,$$

si $|\nabla u| = |\nabla v|$ dans Ω, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left(J'(u) - J'(v)\right)(u-v) &= J'(u)(u-v) - J'(v)(u-v) \\ &= M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u - \nabla v|^2 \, dx = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

i.e $u - v$ est une constante, compte tenu de $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$ nous obtenons $u = v$, ce qui est contraire avec $u \neq v$. Donc $\left(J'(u) - J'(v)\right)(u-v) > 0$ et $J'(u)$ est strictement monotone dans $W_0^{-1,p}(\Omega)$. Soit u, v deux fonctions telles que (3.2) est satisfaite, Prenons $\varphi = (u-v)^+$, la partie positive de $u - v$ comme fonction test dans (3.2), nous obtenons que

$$\left(J'(u) - J'(v)\right)(\varphi) = M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \varphi dx - M\left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right) \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v . \nabla \varphi dx \leq 0. \tag{3.12}$$

Les relations (3.11) et (3.12) impliquent que $u \leq v$. ∎

3.3 Résultat d'existence

Théorème 3.1 [18] *Supposons que les conditions* $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}5)$ *sont vérifiée. alors le systéme* (3.1) *admet une solution faible positive pour* $a_0\alpha_1 + b_0\beta_1$ *et* $c_0\alpha_2 + d_0\beta_2$ *large.*

Preuve

Considérons le probléme de valeur propre suivant pour l'opérateur r-**Laplace** $-\Delta_r u$, voir [14] :

$$\begin{cases} -\Delta_r u = \lambda |u|^{r-2} u & \text{dans } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{on } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

Soit $\phi_{1,r} \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $(r = p, q)$, la fonction propre correspondant à la premiére valeur propre $\lambda_{1,r}$ de $(3,13)$ telle que $\phi_{1,r} > 0$ dans Ω et $\left\|\phi_{1,r}\right\|_\infty = 1$. on peut montrer que $\frac{\partial \phi_{1,r}}{\partial \eta} < 0$ sur $\partial\Omega$

(principe de maximum de **Hopf**), il existe des constantes positives $m, \eta, \sigma, \Omega_\eta, k_0$, telles que

$$\begin{cases} \left|\nabla \phi_{1,r}\right|^r - \lambda_{1,r}\phi_{1,r}^r \geq m \quad \text{dans } \bar{\Omega}_\eta, \\ \\ \phi_{1,r} \geq \sigma \qquad\qquad \text{on } x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_\eta, \end{cases} \tag{3.14}$$

ou

$$\bar{\Omega}_\eta : \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \leq \eta\}.$$

Et on a

$$f_i(t) \geq -k_0 \text{ et } g_i(t) \geq -k_0 \text{ pour tout } t \geq 0, i = 1, 2.$$

Nous vérifions que (ψ_1, ψ_2) est une sous-solution de (3.1) pour $a_0\alpha_1 + b_0\beta_1$ et $c_0\lambda_2 + d_0\mu_2$ large, où

$$\psi_1 = \left[\frac{k_0\left(a_0\alpha_1 + b_0\beta_1\right)}{mm_1}\right]^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-1}{p}\right) \phi_{1,p}^{\frac{p}{p-1}},$$

$$\psi_2 = \left[\frac{k_0\left(c_0\alpha_2 + d_0\beta_2\right)}{mm_2}\right]^{\frac{1}{q-1}} \left(\frac{q-1}{q}\right) \phi_{1,q}^{\frac{q}{q-1}}.$$

Soit la fonction de test

$$\omega \in W := \{\omega \in C_0^\infty(\Omega) : \omega \geq 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^{p-2} \nabla \psi_1 . \nabla \omega dx \\
= \quad & \frac{k_0 (a_0 \alpha_1 + b_0 \beta_1)}{m m_1} \int_{\Omega} \left|\nabla \phi_{1,p}\right|^{p-2} \phi_{1,p} \nabla \phi_{1,p} . \nabla \omega dx \\
= \quad & \frac{k_0 (a_0 \alpha_1 + b_0 \beta_1)}{m m_1} \left[\int_{\Omega} \left|\nabla \phi_{1,p}\right|^{p-2} \nabla \phi_{1,p} . \nabla (\phi_{1,p} \omega) dx - \int_{\Omega} \left|\nabla \phi_{1,p}\right|^{p} \omega \ dx \right] \\
= \quad & \frac{k_0 (a_0 \alpha_1 + b_0 \beta_1)}{m m_1} \int_{\Omega} \left[\lambda_{1,p} \phi_{1,p}^p - \left|\nabla \phi_{1,p}\right|^{p} \right] \omega dx. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

De méme,

$$
\int_{\Omega} |\nabla \psi_2|^{q-2} \nabla \psi_1 . \nabla \omega dx = \frac{k_0 (c_0 \alpha_2 + d_0 \beta_2)}{m m_2} \int_{\Omega} \left[\lambda_{1,q} \phi_{1,q}^q - \left|\nabla \phi_{1,q}\right|^{q} \right] \omega dx. \qquad (3.16)
$$

Pour tout fonction

$$
\omega \in W := \{ \omega \in C_0^{\infty} (\Omega) : \omega \geq 0 \text{ dans } \Omega \} .
$$

Maintenant, par (3.14) , dans $\bar{\Omega}_\eta$,

$$
\lambda_{1,p} \phi_{1,p}^p - \left|\nabla \phi_{1,p}\right|^{p} \leq -m
$$

et

$$
\lambda_{1,q} \phi_{1,q}^q - \left|\nabla \phi_{1,q}\right|^{q} \leq -m
$$

il en résult que dans $\bar{\Omega}_\eta$.

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0\left(a_0\alpha_1+b_0\beta_1\right)}{mm_1} M_1\left(\int_\Omega |\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\left[\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p-\left|\nabla\phi_{1,p}\right|^p\right] \\
\leq\ & -k_0\left(a_0\alpha_1+b_0\beta_1\right) \\
\leq\ & \alpha_1 a(x) f_1(\psi_2)+\beta_1 b(x) g_1(\psi_1)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0\left(c_0\alpha_2+d_0\beta_2\right)}{mm_2} M_2\left(\int_\Omega |\nabla\psi_2|^q\,dx\right)\left[\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q-\left|\nabla\phi_{1,q}\right|^q\right] \\
\leq\ & -k_0\left(c_0\alpha_2+d_0\beta_2\right) \\
\leq\ & \alpha_2 c(x) f_2(\psi_1)+\beta_2 d(x) g_2(\psi_2).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ensuite, dans $\Omega\diagdown\bar{\Omega}_\eta$, nous avons $\phi_{1,p}\geq\sigma>0$ et $\phi_{1,q}\geq\sigma>0$. par les hypothéses $(\mathcal{H}1)-(\mathcal{H}3)$ pour $a_0\alpha_1+b_0\beta_1$ et $c_0\alpha_2+d_0\beta_2$ grand nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0\left(a_0\alpha_1+b_0\beta_1\right)}{mm_1} M_1\left(\int_\Omega |\nabla\psi_1|^p\,dx\right)\left[\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p-\left|\nabla\phi_{1,p}\right|^p\right] \\
\leq\ & \frac{k_0\left(a_0\alpha_1+b_0\beta_1\right)}{mm_1} m_{1,\infty}\lambda_{1,p} \\
\leq\ & a_0\alpha_1 f_1(\psi_2)+b_0\beta_1 g_1(\psi_1) \\
\leq\ & \alpha_1 a(x) f_1(\psi_2)+\beta_1 b(x) g_1(\psi_1)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0\left(c_0\alpha_2+d_0\beta_2\right)}{mm_2}M_2\left(\int_\Omega\left|\nabla\psi_2\right|^q dx\right)\left[\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q-\left|\nabla\phi_{1,q}\right|^q\right] \\
\leq\quad & \frac{k_0\left(c_0\alpha_2+d_0\beta_2\right)}{mm_2}m_{2,\infty}\lambda_{1,q} \\
\leq\quad & c_0\alpha_2 f_2\left(\psi_1\right)+d_0\beta_2 g_2\left(\psi_2\right) \\
\leq\quad & \alpha_2 c\left(x\right)f_2\left(\psi_1\right)+\beta_2 d\left(x\right)g_2\left(\psi_2\right) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Pour tout $x\in\Omega$. De $(3.15)-(3.20)$, il en résulte que (ψ_1,ψ_2) est une sous-solution de systéme (3.1) .

Nous considérons également la résolution unique $e_r\in w_0^{1,r}(\Omega)$ du probléme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta_r e_r=1 \quad \text{dans } \Omega, \\ e_r=0 \quad \text{on } x\in\partial\Omega \end{cases} \qquad (3.21)$$

Pour discuter de notre résultat. on sait que $e_r>0$ dans Ω et $\frac{\partial e_r}{\partial\eta}<0$ sur $\partial\Omega$.

Maintenant, nous construisons une sur solution (z_1,z_2) du systéme (3.1) .

Soit

$$\begin{aligned}
z_1 &= Ce_p, \\
z_2 &= \left(\frac{\|c\|_\infty\alpha_2+\|d\|_\infty\beta_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left(f_2\left(C\left\|e_p\right\|_\infty\right)\right)^{\frac{1}{q-1}}e_q,
\end{aligned}$$

Où e_p,e_q sont la solutions du problèmes (3.21) et $C>0$. nous vérifierons que (z_1,z_2) est une sur solution du systéme (3.1) .

Soit

$$\omega\in W:=\left\{\omega\in C_0^\infty\left(\Omega\right):\omega\geq 0 \text{ dans } \Omega\right\}$$

D'aprés (3.21) et la condition $(\mathcal{H}2)$ que

$$\begin{aligned}
& M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1.\nabla\omega dx \\
= \ & M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla e_p|^{p-2}\nabla e_p.\nabla\omega dx \\
\geq \ & m_1 C^{p-1}\int_\Omega \omega dx.
\end{aligned}$$

Par $(\mathcal{H}4)$ et $(\mathcal{H}5)$, on peut choisir $C>0$ pour que

$$\begin{aligned}
m_1 C^{p-1} \ \geq \ & \alpha_1 \|a\|_\infty f_1\left[\left(\frac{\|c\|_\infty \alpha_2+\|d\|_\infty \beta_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left(f_2\left(C\|e_p\|_\infty\right)\right)^{\frac{1}{q-1}}\|e_q\|_\infty\right] \\
& +\beta_1\|b\|_\infty g_1\left(C\|e_p\|_\infty\right) \\
\geq \ & \alpha_1 a(x) f_1(z_2)+\beta_1 b(x) g_1(z_1)
\end{aligned}$$

Pour tout $x\in\Omega$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& M_1\left(\int_\Omega |\nabla z_1|^p\, dx\right)\int_\Omega |\nabla z_1|^{p-2}\nabla z_1\nabla w dx \\
\geq \ & \alpha_1\int_\Omega a(x) f_1(z_2)\, w dx+\beta_1\int_\Omega b(x) g_1(z_1)\, w dx.
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} & M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2}\,\nabla z_2\nabla w dx \\ \geq\ & \left(\|c\|_\infty\alpha_2+\|d\|_\infty\beta_2\right)\int_\Omega f_2\left(C\,\|e_p\|_\infty\right)wdx \\ \geq\ & \alpha_2\int_\Omega c\,(x)\,f_2\,(z_1)\,wdx+\beta_2\int_\Omega d\,(x)\,f_2\left(C\,\|e_p\|_\infty\right)wdx \end{aligned} \tag{3.22}$$

Encore, par $(\mathcal{H}3)$ et $(\mathcal{H}5)$ pour C assez grand nous avons

$$\begin{aligned} f_2\left(C\,\|e_p\|_\infty\right) \ &\geq\ g_2\left[\left(\frac{\|c\|_\infty\alpha_2+\|d\|_\infty\beta_2}{m_2}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left(f_2\left(C\,\|e_p\|_\infty\right)\right)^{\frac{1}{q-1}}\|e_q\|_\infty\right] \\ &\geq\ g_2\,(z_2)\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

À partir de (3.22) et (3.23) nous avons

$$\begin{aligned} & M_2\left(\int_\Omega |\nabla z_2|^q\,dx\right)\int_\Omega |\nabla z_2|^{q-2}\,\nabla z_2\nabla w dx \\ \geq\ & \alpha_2\int_\Omega c\,(x)\,f_2\,(z_1)\,wdx+\beta_2\int_\Omega d\,(x)\,g_2\,(z_2)\,wdx \end{aligned}$$

Donc (z_1, z_2) est une sur solution du système (3.1).

Évidement nous avons $\psi_i\,(x)\leq z_i\,(x)$ dans Ω avec grand C pour $i=1,2$. Ainsi, par le principe de comparaison, il existe une solution (u,v) de (3.1) avec $\psi_1\leq u\leq z_1$ et $\psi_2\leq v\leq z_2$. Ceci compléte la preuve du théorème 3.1.

Conclusion

L'idée c'était d'exploiter certaines propriétés afin de trouver la solution recherchée , plus précisément on a montrer que si on peut trouver une sous- solution $\underline{u}$ et

une sur-solution $\overline{u}$ d'un problème aux limites bien particulier, et si de plus $\underline{u}\leq \overline{u}$ alors il existe une solution qui satisfait $\underline{u}\leq u \leq \overline{u}$. Ce qui nous assure l'existence de solutions.

Bibliographie

[1] Zhang Z, Perera K. Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow. J Math Anal Appl. 2006 ;317 :456-463.

[2] Kirchhoff G. Mechanik. Leipzig, Germany : Teubner ; 1883.

[3] Perera K, Zhang Z. Nontrivial solutions of Kirchhoff -type problems via the Yang index. J Differential Equations. 2006 ;221 :246-255.

[4] Ricceri B. On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters. J Global Optim. 2010 ;46 :543-549.

[5] Fan XL, Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J Math Anal Appl. 2001 ;263 :424-446.

[6] Fan XL, Zhao D. A class of De Giorgi type and Holder continuity. Nonlinear Anal. 1999 ;36 :295-318.

[7] Fan XL, Zhao D. The quasi-minimizer of integral functionals with $m(x)$ growth conditions. Nonlinear Anal. 2000 ;39 :807-816.

[8] Perera K, Zhang Z. Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index. J Differential Equations. 2006 ;221(1) :246-255.

[9] Ricceri B. On an elliptic Kirchhoff-type problem depending on two parameters. J Global Optimization. 2010 ;46(4) :543-549. Ruzicka M. Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory. Berlin : Springer-Verlag ; 2002.

[10] Sun JJ, Tang CL. Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations. Nonlinear Anal. 2011 ;74 :1212-1222.

[11] Zhang QH. Existence of positive solutions for a class of $p(x)-$Laplacian systems. J Math Anal Appl. 2007 ;333 :591-603.

[12] Alves CO, Correa FJS. On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator. Commun Appl Nonlinear Anal. 2001 ;8 :43-56.

[13] Azouz N, Bensedik A. Existence result for an elliptic equation of Kirchhoff -type with changing sign data. Funkcial Ekvac. 2012 ;55 :55-66.

[14] Hai DD, Shivaji R. An existence result on positive solutions for a class of p-Laplacian systems. Nonlinear Anal. 2004 ;56 :1007-1010.

[15] Han X, Dai G. On the sub-supersolution method for $p(x)-$Kirchhoff type equations. J Inequal Appl. 2012 ;2012(283) :11.

[16] Guofa Li, Haihong Liu and Bitao Cheng. Eigenvalue problem for p-Laplacian with mixed boundary conditions. http ://www.iaumath.com/content/7/1/8. Li et alMathematical Sciences 2013, 7 :8.

[17] Salah Boulaaras, Rafik Guefaifia. Existence of positive weak solutions for a class of kirrchoff elliptic systems with multiple parameters. wileyonlilelibrary.com/journal/mma. Math Meth Appl Sci. 2018 ; 1-8.

[18] G. A. Afrouzi, N. T. Chung & S. Shakeri, Existence of positive solutions for kirchhoff Type equations, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2013 (2013), No. 180, pp. 1-8.