République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi – Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Thème

Décroissance générale d'une équation d'onde viscoélastique à retard dans $\mathbb{R}^n$

Présenté Par :
Merzoug Khaoula
Aziz Hanane

Devant le jury :

Abderrahmane. Zarai	M.C.A	Université	Larbi Tébessi	Président
Fareh. Hannachi	M.C.B	Université	Larbi Tébessi	Examinateur
Nouri . Boumaza	M.C.A	Université	Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2019

Résumé

Le but de notre travail (étudié par Feng [8]) est d'étudier les résultats généraux de la décroissance d'énergie de l'équation de viscoélasticité dans tout l'espace ($\mathbb{R}^n, n \geq 3$) sous certaines conditions relatives aux termes de retard et à la fonction de relaxation. Notre contribution dans ce travail a été d'étudier l'existence globale de la solution à l'aide de la méthode d'approximation de Galerkin et des estimations a priori.

Mots clés: viscoélasticité, fonction de relaxation, Solution globale, énergie, décroissance exponentielle, fonctionnel de Lyaponov, temps de retard.

Abstract

The purpose of our work (studied by Feng [8]) is to study the general results of the decay energy of the viscoelasticity equation in the whole space ($\mathbb{R}^n, n \geq 3$) under certain conditions on the delay coefficients and the relaxation function. Our contribution to this work was to study the global existence of the solution by using the Galerkin approximation method and a prior estimates.

Keywords: viscoelasticity, relaxation function, global solution, energy, exponential decay, delay time.

ملخص

الغرض من عملنا (الذي درسه فانغ [8]) هو دراسة النتائج العامة لتناقص الطاقة لمعادلة اللزوجة في الفضاء الغير منته ($\mathbb{R}^n, n \geq 3$) تحت ظروف معينة على معاملات التأخير ودالة الاسترخاء. مساهمتنا في هذا العمل ، كانت دراسة الوجود الكلي للحل باستخدام طريقة تقريب غلاركين و تقريبات مسبقة.

الكلمات المفتاحية: اللزوجة ، دالة التراخي ، الحل الشامل ، الطاقة ، التناقص الأسي ، دالة ليابونوف ، زمن التـأخير.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie le dieu, notre créateur, de me donner la force, la volonté et le courage d'accomplir ce modeste travail

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer d'une manière particulière, mes sincères remerciements à mon cher encadreur, Mr Boumaza Nouri

Pour son considérable apport, ses précieuses orientations et encouragement durant l'encadrement de ce travail

Je tiens également à remercier messieurs les membres du jury Mr Zarai Abderrahmane et Mr Hannachi Fareh

Pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de siéger à ma soutenance et prendre la peine de lire et relire ce travail de le corriger

Finalement, j'exprime mes profondes gratitudes à mes parents, mes frères et sœurs, mon fiancé, et mes proches amis, qui m'ont toujours soutenu et supporté

Dédicace

Avec énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie,

je dédie mon modeste travail à mes chers respectueux

et magnifiques parents, qui m'ont soutenu tout au long de ma vie,

ainsi que mes frères et sœurs Imed , Aymen ,Maroua ,

Et en particulier, le prince charment, mon fiancé

Billel Rezaiquia et sa famille et surtout ma tante Khayra,et ma voisine Souad ,et mon amie Anfel , et toute personnes qui m'ont encouragé et participé à réussir ce travail

Table des matières

Introduction générale

Dans ce mémoire, nous étudions le problème de cauchy à retard suivant [8] :

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) - \phi(x)(\Delta u(x,t) - \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds) \\ &+\mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

$$u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < \tau, \tag{1.3}$$

où $u = u(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R}^n$, et $u_0(x), u_1(x)$ et $f_0(x, t-\tau)$ sont des fonctions données appartenant à des espaces appropiés. La fonction $g(t)$ est la fonction de relaxation.
le coefficient $\phi(x) := (\rho(x))^{-1}$ représente la vitesse du son au point $x \in \mathbb{R}^n$ et la fonction $\rho(x)$ est la densité. μ_1, μ_2 sont des nombres réelles, et $\tau > 0$ désigne le temps de retard.
L'équation (1.1) avec le terme de mémoire $\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds$ peut être considérée comme une équation d'onde viscoélastique avec une perturbation, aussi être considéré comme une équation de flux élastoplastique, une équation (1.1) plus générale sans terme de retard s'ecrit :

$$u_{tt} - \phi(x)(\Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds) = 0. \tag{1.4}$$

Quand $\rho(x) = 1$, des nombreux chercheurs ont étudié le problème a valeurs initiale (1.4) dans une domaine bornée, et ils ont montré les résultats d'existence globale, la stabilité et l'explosion, pour les résultats de décroissance générale, nous renvoyons le lecteur aux Cao et Yao [3], Messaoudi [19 − 22], Messaoudi et Al-Gharabli [23], Messaoudi et Soufyan [22], Moustafa et Messaoudi [24], Said-Houari, Messaoudi et Guesmia [33], Tatar [35] ,Wu [36] etc. Pour le problème de cauchy, Kafini et Messaoudi [12] ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ils ont prouvé que l'énergie décroit de manière polynomiale, pour certains données compacte u_0, u_1 et sous la décroissance exponentielle de la fonction de relaxation.

Dans [11], les mêmes auteurs ont étudié le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + u_t = |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ils ont prouvé un résultat d'explosion de la solution du problème.
Quand la densité $\rho(x) \neq 1$, Karachalion et Stavrakakis [14] considéré le probléme semi-linéaire hyperbolique avec condition initiale suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \phi(x)\Delta u + \delta u_t + \lambda f(u) = \eta(x), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Les auteurs ont prouvé l'existence locale de la solution et établit l'existence d'un attracteur global dans l'espace d'énergie $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times L^2_g(\mathbb{R}^n)$ en utilisant l'injection compact $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \subset L^2_g(\mathbb{R}^n)$ dans le cas où $\big((\phi(x))^{-1} := g(x) \in L^2_g(\mathbb{R}^n)\big)$ et $n > 3$. par la suite, Papadopoulos et Stavrakakis [30] étudié l'équation d'onde quasilinéaire non locale dégénéré de type de Kirchhoff avec un terme dissipatif faible

$$\begin{cases} u_{tt} - \phi(x) \parallel \nabla u \parallel^2 \Delta u + \delta u_t = \mid u \mid^{\alpha} u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Dans le cas où $n \geqslant 3, \delta \geqslant 0$ et la fonction positive $(\phi(x))^{-1} := g(x)$ dans $L^{1/2}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Ils ont prouvé les résultats l'existence globale, la décroissante d'énergie, l'explosion de la solution.
Dans [10], I'auteur a considéré le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

et établit des résultats générales de la solution dans le cas où $\rho(x)$ est une fanction continue dans $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dans [39],l'auteur a considéré le problème suivant

$$\begin{cases} \rho(x)(|u_t|^{q-1}u_t)_t - M(\| \nabla u \|^2)\Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Dans le cas où q, $n \geq 2$ et M est une fonction positive de classe C^1, il a prouvé un résultat de

décroissance générale de la solution pour une classe de fonction de relaxation plus large. Pour plus de résultats dans ce travail, nous renvoyons le lecteur aux Cavalcanti et al. [4] et Zhou [40].
Au cours de ces derniéres années, des nombreux chercheurs ont étudié l'équation d'onde avec terme de retard. Mentionnons, le travail de Xu ,Yung et Li [38] qui ont étudié le système suivant dans un dimension un

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \; x \in (0,1), t > 0, \\ u(0,x) = 0, t > 0, \\ u_x(1,t) = -k\mu u_t(1,t) - k(1-\mu)u_t(1,t-\tau), t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in (0,1), \\ u(1,t-\tau) = f(t-\tau), \;\; t \in (0,\tau), \end{cases}$$

ont prouvé sous l'hypothèse $\mu > \frac{1}{2}$ que le système est exponentiellement stable, et si $\mu < 1/2$, le systéme est instable.
Quand $\mu = 1/2$, ils ont revendiqués que si $\tau \in (0,1)$ est rationnel, le système est instable. Si $\tau \in (0,1)$ est irrationnel, le système est asymptotiquement stable. Dans Nicaise et Pignotti [25], ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \; x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, x \in \Gamma_0, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau), x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in \Omega, \\ u(1,t-\tau) = f_0(t-\tau), x \in \Gamma_1, \, t \in (0,\tau). \end{cases}$$

Ils ont prouvé que le problème était bien posé en utilisant la méthode du semigroupe, et obtenu que l'énergie décroit de manière exponentielle en utilisant une inégalité d'observabilité. Ils ont étudié le cas des rétroactions internes et obtenu la décroissance exponentielle de l'énergie. Dans les deux cas, le résultat vérifié pour $0 < \mu_2 < \mu_1$. Si $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$, ils ont obtenu un suite explicite des termes arbitraires retards pour le quel le système est instable .
Kirane et Said -Houari [15] ont étudié l'équation d'onde viscoélastique suivant :

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = 0, \;\; x \in \Omega, t > 0,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n > 0)$ est un domaine borné avec une frontière régulière, μ_1 et μ_2 sont des constantes postives. Ils ont prouvé que le problème était bien posé avec la condition initiale en utilisant certaines hypothéses appropriées sur la fonction de relaxations et les paramètres μ_1 et μ_2. De plus, dans l'hypothése $0 < \mu_2 \leq \mu_1$, ils ont obtenu un résultat de décroissance générale de l'énergie totale du système. mais pour le cas $\mu_1 = 0$, ils n'ont pas obtenu la propriété de décroissance de l'énergie. Sur la base des résultats en [15], Lin [18] étendu les résultats à un système avec terme de retard. Dai et Yang [6] considéré la même équaion que dans [15], et ont résolu le probléme ouvert proposé par kirane et Said-Houari, dans ce travail, les auteurs ont prouvé l'existence globale de la solution sans restrictions de μ_1,$\mu_2 > 0$ et $\mu_2 \leq \mu_1$, et obtenu un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas $\mu_1 = 0$.

Notre mémoire se compose en trois chapitres

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre nous rappelons les principaux notions dont nous aurons besoins, commençons par les espaces normées, Banach et Hilbert, après nous donnerons les espaces L^p, les espaces de Sobolev, les espaces pondérés $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$. Finalement nous présentons les inégalités nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire et aussi nous citons quelques théorèmes utiles.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre notre contrubution et l'étudions de l'existence globale en se basant sur le travail de N. I. Karachalios and N. M. Stavrakakis [14], en utilisant l'approximation de **Faedo-Galarkin** et quelques **estimations d'énergie**.

Nous considérons pour $u \in C([0,T], \mathcal{D}^{1.2}(\mathbb{R}^n))$ le problème suivant :

$$u_{tt} - \phi(x)\left(\Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,ds\right) + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 z(x,1,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

et nous allons montrer que ce problème admet une solution globale unique u, cet méthode consiste une approximation de la solution, ensuite on obtient une estimation à priori nécessaire pour garantir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Chapitre 3 :

Ce chapitre est dévisé en deux sections

Dans la section1

Nous allons étudiées la Stabilité exponentielle, alors nous montrons une décroissance générale de l'énergie définie par (2.1) à condition $0 < |\mu_2| < \mu_1$.

Dans la section 2

Nous allons montrer le même résultat de décroissance si $\mu_1 = 0$ et $0 < |\mu_2| < a$ et donons quelques examples.

Notations

Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Γ : La frontière régulière de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$: Le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

$\nabla(u)$: Gradient de u.

$\Delta(u)$: Laplacien de u.

$u, u(t)$: $u(x,t)$.

$u_t = u'$, $u_{tt} = u''$.

w_j : $w_j(x)$.

p.p : La convergence presque partout.

$\rightarrow$: La convergence forte.

$\rightharpoonup$: La convergence faible.

$\rightharpoonup^*$: La convergence faible étoile.

$\langle .,. \rangle$: Le produit scalaire.

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$: La dérivé partielle de u par rapport à t.

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables continûment k fois dans Ω.

$C_0(\Omega)$: Espace des fonctions continues nulles sur le frontière de Ω.

H : Espace de Hilbert.

$U_n'' = U_{ttn}$

$U_n' = U_{tn}$

$H_0^1 = W_0^{1,2}$.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels, nous avons introduire les notions essentielles nécessaires à la compréhension des énoncés qui forment le thème de notre mémoire. Ces rappels concernent les espaces normés, les espaces de Banach, les espaces de Hilbert, les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev et les espaces pondérés $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$ et quelques inégalités et des théorèmes importants.

1.1 Espace normé

Définition 1.1 *Un espace vectoriel linéaire E est dit espace **normé** si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|$, vérifiant les axiomes*

1) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0,$
2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall u, v \in E$ (inégalité triangulaire),
3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|,\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1 $(E, \|.\|_E)$ *est un espace normé.*

Définition 1.2 ***(Equivalence des normes)***

Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur V on dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes c_1, c_2 strictement positives telles que

$$\forall u \in V, \;\; c_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1 .$$

Proposition 1.1 *Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence*

$$u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_1 \Longleftrightarrow u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_2 .$$

Définition 1.3 ***(Suite de Cauchy)***

Soit $(E, \|.\|)$ espace normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 (\varepsilon),\ \forall n,\ m \geq 0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.4 ***(Espace complet)***

Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace **complet** si toute suite de **Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'espace E est converge vers un élément u de E.

1.2 Espace de Banach

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.5 ***(Espace de Banach)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de **Banach** si E est un espace **complet**.

Définition 1.6 *E' est l'espace linéaire de toutes les fonctions linéaires continues*

$$f : E \to \mathbb{R},$$

et appelé l'espace dual de E.

Proposition 1.2 *(voir [30])*

L'espace E' muni de la norme $\|.\|_{E'}$ définie

$$\|f\|_{E'} = \sup \{|f(u)| : \|u\| \leq 1\},$$

est aussi un espace de Banach.
On note la valeur de $f \in E'$ au $u \in E$ par $f(u)$ ou $\langle f, u\rangle_{E,E'}$.

Définition 1.7 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de **Banach** tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F et on notera $E \hookrightarrow F$ ou $E \subset F$.*

On dira que cette inclusion est :
1) **Continue :** S'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C \|u\|_E$, et on notera $E \hookrightarrow_{continue} F$.

2) **Compact :** Si pour toute suite bornée dans E (pour la norme de E), on peut extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F), et on notera $E \hookrightarrow_{compact} F$.
3) **Dense :** Si pour tout $u \in E$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).

Théorème 1.1 *(voir [2])*

Soit E un espace de **Banach**, alors E est **réflexif** si et seulement si

$$B_E = \{u \in E : \|u\| \leq 1\},$$

est compact avec la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Définition 1.8 *Soit E espace de Banach et $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite dans E, alors u_n converge fortement vers u dans E si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0,$$

et notée par $u_n \to u$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

1.2.2 La topologie faible et faible étoile

Soit E un espace de Banach et $f \in E'$. On note par

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \varphi_f(u),$$

lorsque f dans E', on obtient la famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.9 *La topologie faible en E est la plus faible topologie en E, notée par $\sigma(E, E')$ pour tout $(\varphi_f)_{f\in E'}$ continue.*
allons définir la topologie faible étoile en E', qui notée par $\sigma(E', E)$. Pour tout $u \in E$, on a

$$\varphi_f : E' \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \varphi_u(f) = \langle f, u\rangle_{E',E}$$

lorsque $u \in E$, on obtient la famille d'applications de E' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.10 *La topologie faible étoile dans E' est la plus faible topologie dans E' pour tout $(\varphi_u)_{u\in E'}$ est continue.*

Remarque 1.2 *(voir* [2]*)*

Puisque $E \subset E''$, il est claire que la topologie faible étoile $\sigma(E', E)$ est plus faible que la topologie $\sigma(E', E'')$.

Théorème 1.2 *Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Définition 1.11 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E est converge faiblement vers u si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u), \text{ pour tout } f \in E',$$

cela noté par

$$u_n \rightharpoonup u.$$

Remarque 1.3 *(voir* [32]*)*

1) Si la limite faible existe, elle est unique.

2) Si $u_n \to u$ (fortement), alors $u_n \rightharpoonup u$ (faiblement).

3) Si $\dim E < +\infty$, alors la convergence faible implique la convergence forte.

Proposition 1.3 *(voir* [34]*)*

Sur la compacité dans les trois topologies dans l'espace de Banach E :

1) La boule d'unité

$$B = \{u \in E, \|u\| \leq 1\},$$

dans E est compact si et seulement si $\dim(E) < \infty$.

2) La boule d'unité B' dans E' est un compact faible dans E' si et seulement si E réflexif.

3) B' est toujours faiblement étoile compact dans la topologie faible étoile de E'.

Proposition 1.4 *(voir* [2]*)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E'. On a

1) $[f_n \rightharpoonup^* f \text{ dans } \sigma(E', E)] \Leftrightarrow [f_n(u) \to f(u), \forall u \in E]$.

2) Si $f_n \to f$ (fortement), alors $f_n \rightharpoonup f$, dans $\sigma(E', E'')$.

3) Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)$.

4) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est borné et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

5) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)$ et $u_n \to u$ (fortement) dans E, alors $f_n(u_n) \to f(u)$.

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.12 *Soit E un espace vectoriel, on appelle application de $E \times E$ dans le corp*

$K = \mathbb{C}$ définit par $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire si :

1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, pour tout $u, v \in E$,

2) $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, pour tout $u, v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$,

3) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Définition 1.13 *Un espace de **Hilbert** est un espace de Banach ($(E, \|.\|_E)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :*

$$\|u\|_E = \langle u, u \rangle^{1/2} \text{ (i.e) } \|u\|_E^2 = \langle u, u \rangle .$$

Définition 1.14 ***(Système orthonormé)***

Soit E un espace de Hilbert, la suite $\{e_n\}_{n \geq 1} \subset E$ est appelée un système orthonormé si

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

1) Si $e_n \perp e_m$ on dit que le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est orthogonal.

2) Si le système $\{e_n\}_{n \geq 1}$est orthogonal alors le système $\left\{ \dfrac{e_n}{\|e_n\|} \right\}_{n \geq 1}$ est orthonormé.

Définition 1.15 ***(Base Hilbertienne)***

Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de E qu'est orthonormée pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.

Définition 1.16 ***(Espace séparable)***

Un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace séparable.

Exemple 1.1 *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$).*

Théorème 1.3 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Proposition 1.5 *Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base Hilbertienne de E, il existe une suite unique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$u_n = (u, e_n),$$

telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} u_n e_n$ converge vers u quand p tends vers l'infinie.

De plus on a

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n\geq 1} |(u, e_n)|^2.$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n\geq 1} (u, e_n) e_n.$$

Théorème 1.4 *(voir [32])*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert E, alors on peut extraire une sous-suite converge dans la topologie faible.

Théorème 1.5 *(voir [32])*

Dans l'espace de Hilbert, toute suite converge dans la topologie faible est bornée.

Théorème 1.6 *(voir [32])*

Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite convergente vers u dans la topologie faible et $(v_n)_{n\in N*}$ une autre suite converge faiblement vers v, alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n \rangle = \langle v, u \rangle.$$

Théorème 1.7 *(voir [32])*

Soit E un espace normé, alors la boule d'unité

$$B' = \{u \in E' : \|u\| \leq 1\},$$

de E' est compact dans la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.6 *(voir [32])*

Soit E et F deux espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in N^*} \in E$ une suite qui converge faiblement vers $u \in E$, soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors la suite $(A(u_n))_{n\in N^*}$ converge vers $A(u)$ dans la topologie faible de F.

1.4 Espaces des fonctions

1.4.1 L'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.17 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. On définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$, la norme est notée par :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et il existe une constante positive } C \text{, telle que} \\ |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega. \end{array} \right\}.$$

Il sera muni de la norme du **sup-essentielle** :

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{x \in \Omega} \{C; \quad |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.18 *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ si $f\ |_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$*

Proposition 1.7 *$L^p(\Omega)$ muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de **Banach**, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.8 *$L^p(\Omega)$ est **séparable** pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.8 *$L^\infty(\Omega)$ est un espace de **Banach non séparable**.*

Théorème 1.9 *(voir [34])*

$L^p(\Omega)$ est un espace **réflexif**, pour $1 < p < \infty$.

Lemme 1.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(1 \leq p \leq \infty)$ et soient u_n, u sont des fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que u_n converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$ alors*

$$u_n \to u \ \text{ p.p dans } \Omega.$$

Lemme 1.2 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(1 \leq p \leq \infty)$ et soit u_n une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ converge presque partout vers u, alors*

1) u dans $L^p(\Omega)$.

2) u_n converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$.

Remarque 1.4 *Supposons que $(1 \leq p \leq \infty)$ et E est un espace de Banach réflexif alors la convergence faible étoile équivalent à la convergence faible.*

Théorème 1.10 *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente presque partout dans Ω.*

Si $u \in L^\infty(\Omega)$ alors

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega.$$

Remarque 1.5

1) La limite forte ou faible d'une suite de fonction est toujours unique.

2) Dans le cas $p = \infty$ la symbole * est posée pour montrer que la définition de convergence faible dans L^∞ n'est pas entièrement la même que dans les espaces $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. En effet, le dual de $L^\infty(\Omega)$ est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$.

3) La convergence forte dans $L^p(\Omega)$ implique la convergence faible dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

1) Si $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$, alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.

2) Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \rightharpoonup \|u\|_{L^p(\Omega)}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3) Si $1 \leq p < \infty$ et si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ et $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|u_n\|_{L^p(\Omega)}$.

Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$.

4) Si $1 < p < \infty$ et si $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^p} \leq K$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} et $u \in L^p(\Omega)$ tels que $u_{n_i} \longrightarrow u \in L^p(\Omega)$.

Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et on a alors $u_n \rightharpoonup^* u$ dans $L^\infty(\Omega)$.

5) Si $1 \leq p \leq \infty$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} telle que $u_{n_i} \rightharpoonup u$ **p.p** et $|u_{n_i}| \leq h$ **p.p** avec $h \in L^p(\Omega)$.

soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, u_m et u des fonctions de $L^p(\Omega), 1 < p < \infty$, telles que

$$\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad, u_m \to u \text{ p.p dans } \Omega.$$

Alors $u_m \to u$ dans $L^p(\Omega)$ faiblement.

Lemme 1.3 *$L^2(\Omega)$ est un espace de **Hilbert**, avec le produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \text{ pour tout } u, v \in L^2(\Omega).$$

1.4.2 L'espace $L^p((0,T), E)$.

Définition 1.19 *Soit E un espace de **Banach**, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de **Lebesgue** à valeurs dans E et on note $L^p((0,T), E)$ l'espace des fonctions $u :]0,T[\to E$, mesurable qui vérifient :*

$$\begin{aligned} &\textbf{i) } \text{Si } 1 \leq p \leq \infty, \ \|u\|_{L^p((0,T),E)} = \left(\int_0^t |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty, \\ &\textbf{ii) } \text{Si } p = \infty, \ \|u\|_{L^\infty((0,T),E)} = ess \sup_{x \in]0,T[} |u(x)| < \infty. \end{aligned}$$

Théorème 1.11 *(voir [32])*

L'espace $L^p((0,T), E)$ est complet.

Définition 1.20 *L'espace des fonctions indéfiniment différentiables $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est noté par $\mathcal{D}(\Omega)$ **(espace des fonctions test)**, c'est-à-dire*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) ; \exists K \subset \Omega, \ K \text{ compact (fermé, borné) ; } u = 0 \text{ sur } K\}.$$

Définition 1.21 *Notons par $\mathcal{D}'((0,T), E)$ l'espace de distribution dans $]0,T[$ à valeurs dans E, et on définie*

$$\mathcal{D}'((0,T), E) = \mathcal{L}(\mathcal{D}\,]0,T[\,, E),$$

où $\mathcal{L}(\phi, \varphi)$ est l'espace des fonctions linéaires continues de ϕ vers φ. Comme $u \in \mathcal{D}'((0,T), X)$, on définie la dérivé de distribution par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[),$$

et comme $u \in L^p((0,T), E)$, on a

$$u(\varphi) = \int_0^t u(t)\, \varphi(t)\, dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

Maintenant, nous allons introduire des résultats importants dans $L^p((0,T), E)$.

Lemme 1.4 *(voir* [16]*)*

Soit $u \in L^p((0,T),E)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T),E)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ alors la fonction u est continue de $[0,T]$ dans E (i.e) $u \in \mathcal{C}^1((0,T),E)$.

1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p((0,T),E)$ est un espace de Banach et en particulier $L^2((0,T),E)$ est un espace de Hilbert, lorsque E est un espace de Hilbert.

2) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E réflexif, alors $L^p(0,T,E)$ est aussi réflexif.

3) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E séparable, alors $L^p((0,T),E)$ est aussi séparable.

Lemme 1.5 *(voir* [17]*)*

Soit $\varphi =]0,T[\times \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et soit g_μ, g deux fonctions dans $L^q([0,T],L^q(\Omega))$, $1 < q < \infty$ telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q([0,T],L^q(\Omega))} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N},$$

et

$$g_\mu \longrightarrow g \text{ dans } \varphi,$$

alors

$$g_\mu \rightharpoonup g \text{ dans } L^q(\varphi).$$

Proposition 1.9 *(voir* [5]*)*

L'espace $L^p((0,T),E)$ qui associé à la norme $\|.\|_{L^p((0,T),X)}$, est un espace de Banach.

Proposition 1.10 *(voir* [9]*)*

Soit E un espace de Banach réflexif, de dual E' et $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors le dual de $L^p((0,T),E)$ est définie algébriquement et topologiquement dans $L^q((0,T),E')$.

Proposition 1.11 *(voir* [5]*)*

Soit E, F deux espaces de Banach, $E \subset F$ avec injection continue alors

$$L^p((0,T),E) \subset L^p((0,T),E'),$$

avec injection continue.

Proposition 1.12 ***(De compacité)*** *(voir* [16]*)*

Soient B_1, B_2 et B_3 trois espaces de Banach avec $B_1 \subset B_2 \subset B_3$, supposons que l'injection $B_2 \hookrightarrow B_3$ est continue et B_1, B_3 sont réflexifs. On définie pour $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$

$$W = \{u \in L^p((0,T),B_1) : \ u' \in L^q((0,T),B_3)\},$$

alors l'injection $W \hookrightarrow L^p((0,T),B_2)$ est compact.

1.5 Espace de Sobolev

1.5.1 Dérivée faible

Définition 1.22 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une **i-ème** dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de u au sens des distributions, on écrira :

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

1.5.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.23 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \textit{tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega)\}.$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1.5.3 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.24 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \textit{tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni par la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|\ D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.25 *On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'espace fermé de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 1.26 *Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{1/2},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{H^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leq m}\langle D^\alpha u,D^\alpha v\rangle_{L^2}=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \partial^\alpha u\partial^\alpha v dx,\ \text{pour tout } u,v\in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.13 *([32])*

1) Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
2) Si $m\geq m'$, $H^m(\Omega)\hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$, avec injection continue.
3) Si $m=0$ on a $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$.

Lemme 1.6 *Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, nous identifions un dual $H^{-m}(\Omega)$ de $H_0^m(\Omega)$ dans un sous-espace fermé sur Ω, on trouve*

$$\mathcal{D}(\Omega)\hookrightarrow H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-m}(\Omega)\hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Lemme 1.7 ***(Inégalité de Sobolev-Poincaré)***

Si

$$2\leq q\leq \frac{2n}{n-2}, n\geq 3,$$
$$q\geq 2,\ n=1,2,$$

alors, il existe une constante $C(p,\Omega)$ telle que :

$$\|u\|_q\leq C(p,\Omega)\|\nabla u\|_2,\ \text{pour } u\in H_0^1(\Omega).$$

1.5.4 les espaces pondérés $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L_\rho^p(\mathbb{R}^n)$

Comme dans [10], nous introduisons les espaces pondérés $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L_\rho^p(\mathbb{R}^n)$ pour notre système.Premier nous supposons la densité $\rho(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(n>3)$ satisfait les conditions suivantes.

(1) $\rho(x)>0, \rho\in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ avec $\gamma\in(0,1)$ et $\rho\in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

maintenant nous définissons les espaces pondérés $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et $L_\rho^p(\mathbb{R}^n)$, $(0<p<\infty)$.

(2) L'espace $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est défini comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonctions par rapport à quelle norme

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)=\left\{u\in L^{\frac{2n}{(n-2)}}(\mathbb{R}^n):\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

équipé de la norme $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx$.

(3) Nous introduisons l'espace pondéré $L_\rho^2(\mathbb{R}^n)$ à définir la fermeture de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

fonctions par rapport au produit intérieur

$$(u,v)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho uv dx$$

et nous savons que $L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert séparable et

$$\|u\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} = (u,u)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)}$$

(4) Si u est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$,nous définissons :

$$\|u\|_{L^p_\rho(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho \mid u \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pour } 1 < p < \infty.$$

et laisser $L^p_\rho(\mathbb{R}^n)$ se composent de tous u pour lesquels $\|u\|_{L^p_\rho(\mathbb{R}^n)} < \infty$
De $[6, 10]$,nous pouvons obtenir le lemme suivant.

Lemme 1.8 *Assumer la fonction ρ satisfait (1), alors pour tout $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|u\|_{L^q_\rho(\mathbb{R}^n)} < \|\rho\|_{L^S} \|\nabla u\|.$$

tell que $S = \frac{2n}{(2n-qn+2q)}$ et $2 \leq S \leq \frac{2n}{(n-2)}$.

Corollaire 1.1 *pour $q = 2$,on a*

$$\|u\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} < \|\rho\|_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla u\|.$$

Si $\rho \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|u\|_{L^p_\rho(\mathbb{R}^n)} < c_* \|\nabla u\|$$

où $c_* > 0$ est une constante.

Définition 1.27 ***(Intégration par partie)***

Soit $(u,v) \in H^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma,$$

où $\eta_i(x) = \cos(\eta, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point et l'axe des x_i.

Lemme 1.9 ***(Formule de Green)***

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_\Omega \Delta uv dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.10 *(voir* [38]*)*

Soit $1 \leq p \leq r \leq q$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

Lemme 1.11 *(voir* [32]*)*

Si $\mu(\Omega) < \infty, 1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, et

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/q} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.6 Quelques inégalités utiles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega uv dx\right| \leq \int_0^t |uv| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx\right)^{1/2},$$

(i.e)

$$\|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Cauchy avec ε (ε-inégalité)

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2.$$

Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.

Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, $|uv| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note q le conjugué de p $((L^p)^* = L^q)$, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et on a l'inégalité :

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v|^p\, dx\right)^{1/q},$$

(i.e)

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inégalité algébrique de Young

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|ab| \leq \delta |a|^2 + \frac{1}{4\delta} |b|^2, \text{ avec } \delta > 0.$$

Inégalité de Young

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{q} |b|^q,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon) |b|^q,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et $c(\varepsilon) = \frac{1}{p}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

Inégalité de Gronwall

Soit $T > 0$, φ une fonction telle que $\varphi \in L^1(0, T), \varphi \geq 0$, presque partout et $\phi \in L^1(0, T), \phi \geq 0$, presque partout et $\varphi\phi \in L^1(0, T)$, $C_1, C_2 \geq 0$.

Supposons que

$$\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \varphi(s)\phi(s)ds, \quad \text{p.p } t \in (0, T).$$

Alors on a

$$\phi(t) \leq C_1 e^{\left(C_2 \int_0^t \varphi(s)ds\right)}, \text{p.p } t \in (0, T).$$

Inégalité de Minkowski

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :

$$\|u + v\|_{L^P} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

1.7 Stabilité au sens de Lyapunov

Théorème 1.12 *(Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe* [40]*)*

Soit $y(t)$ solution de $\dot{y} = f(y)$
et soit V une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie positive sur un voisinage de $y^* = 0$
(sans perte de généralité on prend l'équilibre exactement l'origine)

1. Si $\dfrac{dV}{dt}$ est semi -définie négative alors y^*est stable_
2. Si $\dfrac{dV}{dt}$ est définie négative alors y^*est asymptotiquement stable

Dans le cas (1) $V(y)$ est function de lyapunov faile ,et dans le cas (2) $V(y)$ est dite fonction de Lyapunov stricte.

Théorème 1.13 *(Théoréme d'invariance de LaSalle* [40]*)*

Soit $y \in \mathbb{R}^n \to V(y)$ de calsse $\mathcal{C}^1$est définie positive

$$\frac{d}{dt}V(y) \leq 0$$

Alors, pour toute condition initiale y_0, la solution de $\dot{y} = f(y)$ (définie pour tout temps $t > 0$) converge asymptotiquement vers le plus grand sous-ensemble invariant contenu
dans l'ensemble des points $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\dfrac{d}{dt}V(\xi) = 0$

Chapitre 2

Existence de la solution

Dans ce chapitre nous allons démontrer **l'existence globale** en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin** et quelques **estimations de l'énergie.**

2.1 Position du problème

Pour prouver l'existence de la solution unique du problème (1.1), en utilisant la nouvelle variable suivante

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \quad x\in\mathbb{R}^n, \rho\in(0,1), \quad t>0. \tag{2.1}$$

Donc, on pose

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^n\times(0,1)\times(0,+\infty). \tag{2.2}$$

Par conséquent, le problème (1.1) est équivalent à

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \phi(x)(\Delta u(x,t) - \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds) + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 z(x,1,t) = 0, \ x\in\ B_R,\ t>0, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \ x\in\ \mathbb{R}^n, \rho\in(0,1), \quad t>0, \\ u(x,t) = 0, \ x\in\partial\Omega, \ t>0, \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), \ x\in\ \mathbb{R}^n, \ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x\in\ \mathbb{R}^n, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,t-\tau), \ x\in\ \mathbb{R}^n, t\in(0,\tau). \end{cases} \tag{2.3}$$

La première question naturelle est l'existence de la solution du problème (2.3). Dans cette section, nous allons donner une condition suffisante qui garantit que ce problème est bien posé.
D'abord, soit ε une constante positive telle que

$$\tau\mu_2 < \varepsilon, \tag{2.4}$$

Maintenant, nous énonçons les hypothèses générales sur la fonction de relaxation $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfait :

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0. \tag{G1}$$

Il existe une fonction différentiable positive non croissante $\varsigma(t)$ telle que :

$$g'(t) \leq -\zeta(t)\, g(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{G2}$$

et

$$\int_0^\infty \zeta(t)\, dt = +\infty$$

Lemme 2.1 *Pour tout* $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathcal{D}^{1,2}(\Omega))$ *on a*

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s)ds \int |\nabla u(s)|^2 dx\right\},\end{aligned}$$

où

$$(g \circ u)(t) = \int_0^t g(t-s) \int_{\mathbb{R}^n} |u(s) - u(t)|^2 dxds.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx &= \int_{B_R} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) dsdx \\ &+ \int_{B_R} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(t)dsdx, \\ &= \int_0^t g(t-s) \int_{B_R} \nabla u_t(t)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) dxds \\ &+ \int_0^t g(t-s) \int_{B_R} \nabla u_t(t)\nabla u(t)dxds.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx &= -\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\int_{B_R} |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2 \, dxds \\ &+ \int_0^t g(s)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{B_R} |\nabla u(t)|^2 \, dx\right) ds,\end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx &= \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_{B_R} |\nabla u(t)|^2 \, dx \\ &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s)ds \int_{B_R} |\nabla u(s)|^2 \, dx\right\}.\end{aligned}$$

■

Lemme 2.2 *Pour $u \in \mathcal{D}^{1,2}(B_R)$, on a*

$$\int_{B_R} \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, ds\right)^2 \leq (1-l)\, C_*^2 \,(g\circ\nabla u)(t),$$

où C_* est la constante de Poincaré et l est donné en $(G1)$.

2.2 Existence globale

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence globale du problème (**2.3**), pour $H = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.1 *Supposons que $G1$ et $G2$ est vérifié. Soit $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$,*

$f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,1))$, et $T > 0$.
Alors le problème (**2.3**) admet une solution faible unique (u, z) sur $(0, T)$ telle que :

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\right). \\ u_t &\in \mathcal{C}\left(0,T;L^2_\rho(\mathbb{R}^n)\right). \end{aligned}$$

Lemme 2.3 *(voir [14]) soit $G1$ et $G2$ vérifiés, Supposons que les constantes $T > 0$ et $R > 0$ et les conditions initiales $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(B_R)$, $u_1 \in L^2_\rho(B_R)$ sont donnés. Alors pour le problème (2.3) restreint sur $B_R \times (0, T)$ satisfaire à la condition limite $u = 0$ dans $\partial B_R * (0, T)$ il existe une solution faible unique (u, z) sur $(0, T)$ telle que*

$$
\begin{aligned}
u &\in \mathcal{C}\left(0, T; \mathcal{D}^{1,2}(B_R)\right). \\
u_t &\in \mathcal{C}\left(0, T; L^2_\rho(B_R)\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. Nous allons prouver l'existence à l'aide de la méthode classique de l'énergie (approximation de Faedo Galerkin).On divise la démonstration du théorème en deux étapes

Etape 1 : Approximation de Faedo-Galerkin

On construit des approximations de la solution (u, z) par la méthode de **Faedo-Galerkin**, comme suit pour tout $n \geq 1$, soit W_n =Vect$\{w_1, w_2, ..., w_n\}$, où $\{w_j\}_{j=1}^n$ est une base Hilbertienne de l'espace $\mathcal{D}^{1,2}$.

Pour $1 \leq j \leq n$, définissons la suite $\varphi_j(\rho, x)$ par

$$\varphi_j(0, x) = w_j(x).$$

Alors, nous pouvons étendre $\varphi_j(0, x)$ par $\varphi_j(\rho, x)$ sur $L^2(\ B_R \times [0, 1])$ et dénote V_n =Vect$\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$.

Nous choisissons deux suites (u_{0n}) et (u_{1n}) dans W_n et la suite (z_{0n}) dans V_n telle que $u_{0n} \to u_0$ fortement dans $\mathcal{D}^{1,2}(B_R)$, $u_{1n} \to u_1$ fortement dans $L^2_\rho(B_R)$ et $z_{0n} \to f_0$ fortement dans $L^2(B_R \times (0, 1))$. Maintenant, on définit les approximations

$$u_n(t, x) = \sum_{j=1}^{n} g_{jn}(t) w_j(x) \qquad \text{et} \qquad z_n(t, x, \rho) = \sum_{j=1}^{n} h_{jn}(t) \varphi_j(x, \rho),$$

où $(u_n(t), z_n(t))$ sont solutions du problème de Cauchy de dimension finie.

On résoud le problème

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\int\limits_{B_R} u_n''(t)\eta dx - \phi(x)(\int\limits_{B_R} \Delta u_n(t)\eta dx - \int\limits_{B_R}\int\limits_0^t g(t-s)\Delta u_n(s)\eta ds dx) \\
+ \int\limits_{B_R} (\mu_1 u_{tn}(x, t) + \mu_2 z_n(x, 1, t))\eta dx = 0, \\
z_n(x, 0, t) = u_{tn}(x, t), \\
(u_n(0), u_{tn}(0)) = (u_{0n}, u_{1n}),
\end{array}
\right. \tag{2.5}
$$

pour tout $\eta \in W_n$ et $t \geq 0$, on pose $\eta = \rho(x) w_j$ dans (2.5) on obtient le problème de **Cauchy** pour des équations différentielles par les inconnue

$$\begin{cases} \int\limits_{B_R}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{jn}'' w_j\right)\rho(x)w_j dx + \int\limits_{B_R}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{jn}\nabla w_j\left(x\right)\right)\nabla w_j dx \\ -\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{B_R}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{jn}\left(s\right)\nabla w_j\right)\nabla w_j dxds \\ +\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\mu_1\left(\sum_{j=1}^{n} g_{jn}' w_j\right)+\mu_2\left(\sum_{j=1}^{n} h_{jn}\left(t\right)\varphi_j\left(x,1\right)\right)\right)\rho(x)w_j dx = 0, \\ z_n(x,0,t) = u_{tn}(x,t), \\ \left(u_n\left(0\right), u_{tn}\left(0\right)\right) = \left(u_{0n}, u_{1n}\right) \end{cases} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{cases} \int\limits_{B_R}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\tau h_{jn}'\left(t\right)\varphi_j\left(x,\rho\right)+h_{jn}\left(t\right)\frac{d}{d\rho}\varphi_j\left(x,\rho\right)\right)\right)\varphi_j dx = 0, \\ z_n(\rho,0) = z_{0n}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Selon la théorie standard des équations différentielles ordinaires, le problème de dimension finie $(2.6), (2.7)$ admet une solution $\left(g_n\left(t\right), h_n\left(t\right)\right)$ définie sur $\left(0, t_n\right)$.

Etape 2 : Estimation de l'énergie

En multipliant l'équation (2.6) par $g_{jn}'(t)$, en intègrant sur $(0,t)$, pour $n \geq 1$, on obtient

$$\begin{cases} \int\limits_{B_R}\int\limits_0^t u_n''\left(t\right)\rho(x)\sum\limits_{j=1}^{n} w_j g_{jn}' dsdx + \int\limits_{B_R}\int\limits_0^t \nabla u_n\left(t\right)\sum\limits_{j=1}^{n}\nabla w_j g_{jn}'(s)dsdx \\ -\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{B_R}\nabla u_n\left(s\right)\sum\limits_{j=1}^{n}\nabla w_j g_{jn}'(s)dxds\right)ds' \\ +\int\limits_{B_R}\int\limits_0^t(\mu_1 u_n'(x,s)+\mu_2 z_n(x,1,s))\rho(x)\sum\limits_{j=1}^{n} w_j g_{jn}' dsdx = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Alors, (2.8) devient

$$\begin{cases} \int\limits_{B_R}\int\limits_0^t u_n''\left(t\right)u_n'(t)\rho(x)dsdx + \int\limits_{B_R}\int\limits_0^t \nabla u_n\left(t\right)\nabla u_n'\left(t\right)dsdx \\ -\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^t g(t-s)\int\limits_{B_R}\nabla u_n\left(s\right)\nabla u_n'\left(t\right)dxds\right)ds' \\ +\mu_1\int\limits_0^t\int\limits_{B_R} u_n'(x,s)u_n'(t)\rho(x)dxds + \mu_2\int\limits_0^t\int\limits_{B_R} z_n\left(x,1,t\right)u_n'(s,x)\rho(x)dxds = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Le premier terme dans (2.9), s'écrit

$$\int_{B_R}\int_0^t u_n''(t)\,u_n'(t)\,\rho(x)dsdx = \frac{1}{2}\int_{B_R}\Big(\int_0^t \frac{d}{dt}\left|u_n'(s)\right|^2 ds\Big)\rho(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\|u_n'(t)\right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} - \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(B_R)}. \tag{2.10}$$

Le deuxième terme dans (2.9), devient

$$\int_{B_R}\int_0^t \nabla u_n(t)\,\nabla u_n'(t)\,dsdx = \frac{1}{2}\int_{B_R}\int_0^t \frac{d}{dt}\mid \nabla u_n(s)\mid^2 dsdx$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2_{L^2(B_R)} - \frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(B_R)}. \tag{2.11}$$

En utilisant le **lemme 2.1,** Le troixième terme dans (2.9), devient

$$\int_0^t\left(\int_0^t g(t-s)\int_{B_R}\nabla u_n(s)\,\nabla u_n'(t)\,dxds\right)ds' = -\frac{1}{2}\int_0^t(g'\circ\nabla u_n)(s)ds + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t g(s)\left\|\nabla u_n(s)\right\|^2_{L^2(B_R)} ds \tag{2.12}$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2_{L^2(B_R)}.$$

Et

$$\int_0^t\int_{B_R}\rho(x)\,u_n'(s)u_n'(s)dxds = \int_0^t\left\|u_n'(s)\right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} ds \tag{2.13}$$

En remplaçant (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13) dans (2.9), on obtient

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\nabla u_n(t)\right\|^2_{L^2(B_R)} + \left\|u_n'(t)\right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} + (g\circ\nabla u)(t)\right] + \mu_1\int_0^t\left\|u_n'(s)\right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} ds$$
$$+\mu_2\int_0^t\int_{B_R}\rho(x)z_n(x,1,s)u_n'(s,x)dxds + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\left\|\nabla u_n(s)\right\|_2^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^t(g'\circ\nabla u_n)(s)ds$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\nabla u_0\right\|_2^2 + \left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} \tag{2.14}$$

On peut choisir $\varepsilon > 0$, en multipliant la première équation dans (2.7) par $\left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right) h'_{jn}(t)$ et en intégrant sur $(0,t) \times (0,1)$, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{\tau}\int_{B_R}\int_0^1\int_0^t \tau z_{tn}(x,\rho,s)\sum_{j=1}^n h'_{jn}(s)\varphi_j(x,\rho)\,dxd\rho ds + \frac{\varepsilon}{\tau}\int_0^t\int_{B_R}\int_0^1 z_{n\rho}\sum_{j=1}^n h'_{jn}(s)\varphi_j(x,\rho)\,d\rho dxds = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon\int_{B_R}\int_0^1\int_0^t z_{tn}(x,\rho,s)\,z_n(x,\rho,s)\,dsd\rho dx + \frac{\varepsilon}{\tau}\int_0^t\int_{B_R}\int_0^1 z_{n\rho}z_n(x,\rho,s)\,d\rho dxds = 0. \tag{2.15}$$

Alors (2.15), devient

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{B_R}\int_0^1 z_n^2(x,\rho,t)\,d\rho dx + \frac{\varepsilon}{\tau}\int_0^t\int_{B_R}\int_0^1 z_{n\rho}z_n(x,\rho,s)\,d\rho dxds = \frac{\varepsilon}{2}\|z_{0n}\|^2_{L^2(B_R\times(0,1))}. \tag{2.16}$$

Maintenant, en traitant le dernier terme du membre gauche dans (2.16), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{B_R}\int_0^1 z_{n\rho}z_n(x,\rho,s)\,d\rho dxds &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{B_R}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}z_n^2(x,\rho,s)\,d\rho dxds,\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{B_R}\left(z_n^2(x,1,s) - z_n^2(x,0,s)\right)dsdt,\end{aligned} \tag{2.17}$$

par addition de (2.14) et (2.16) et en utilisant (2.17), on obtient

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_n(t) + \mu_1\int_0^t \|u'_n(s)\|^2_{L^2_\rho(B_R)} - \frac{\varepsilon}{2\tau}\int_0^t \|u'_n(s)\|_2^2\,ds + \frac{\varepsilon}{2\tau}\int_0^t\int_{B_R} z_n^2(\sigma,1,s)\,d\sigma ds\\ &+\mu_2\int_0^t\int_{B_R} z_n(x,1,s)\,u'_n(s,x)\,dxds + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\|\nabla u_n(s)\|_2^2\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t (g'\circ\nabla u_n)(s)ds\\ =\;& \mathcal{E}_n(0).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Où

$$\mathcal{E}_n(t) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u_n(t)\|_2^2 + \|u'_n(t)\|^2_{L^2_\rho(B_R)} + (g\circ\nabla u)(t)\right] + \frac{\varepsilon}{2}\|z_n\|^2_{L^2(B_R\times(0,1))}. \tag{2.19}$$

Nous caractérisons deux cas :

Cas 1

Supposons que $0 < |\ \mu_2| < \mu_1$.On peut choisir ε satisfaisant l'inégalité (2.4).

En appliquant l'inégalité de Young au cinquième terme du membre gauche de (2.18), on obtient

$$\begin{aligned} & \mu_2 \int_0^t \int_{B_R} \rho(x) z_n(x,1,s)\, u_n'(s,x)\, dxds \\ \geq\ & -\frac{\mu_2}{2} \int_0^t \int_{B_R} \rho(x) z_n^2(x,1,s)\, dxds - \frac{\mu_2}{2} \int_0^t \int_{B_R} \rho(x) \left(u_n'\right)^2(s)\, dxds \\ =\ & -\frac{\mu_2}{2} \int_0^t \int_{B_R} \rho(x) z_n^2(x,1,s)\, dxds - \frac{\mu_2}{2} \int_0^t \left\| u_n'(s) \right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} ds. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Et

$$-\left\| u_n'(s) \right\|^2_{L^2_\rho(B_R)} \geq -c_* \left\| u_n'(s) \right\|_2^2. \tag{2.21}$$

En remplaçant (2.20), (2.21) dans (2.18), on trouve

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_n(t) - \left(c_*\mu_1 + \frac{\varepsilon}{2\tau} + \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^t \left\| u_n'(s) \right\|^2_{L^2_2(B_R)} ds + \left(\frac{\varepsilon}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^t \int_{B_R} z_n^2(x,1,s)\, dxds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t g(s) \left\| \nabla u_n(s) \right\|_2^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t \left(g' \circ \nabla u_n\right)(s)\, ds \\ \leq\ & \mathcal{E}_n(0). \end{aligned}$$

Par conséquent, en utlisant (2.4), nous pouvons trouver deux constantes positives C_1 et C_2 telles que

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_n(t) + C_2 \int_0^t \int_{B_R} z_n^2(x,1,s)\, dxds + \frac{1}{2} \int_0^t g(s) \left\| \nabla u_n(s) \right\|_2^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t \left(g' \circ \nabla u_n\right)(s)\, ds \\ \leq\ & \mathcal{E}_n(0) + C_1 \int_0^t \left\| u_n'(s) \right\|^2_{L^2_2(B_R)} ds. \leq \varrho_n(0) + C_1 \int_0^T \left\| u_n'(s) \right\|^2_{L^2_2(B_R)} ds. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Cas 2 :

Nous suppossons que $\mu_1 = 0$ et $0 < |\mu_2| < a$ tq a est une canstante positive et choisisons $\varepsilon = \tau\mu_2$, alors l'inégalité (2.21) devient

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}_n(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\|\nabla u_n(s)\|_2^2\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t (g' \circ \nabla u_n)(s)\,ds \\
\leq \; & \mathcal{E}_n(0) + \mu_2 \int_0^t \|u_n'(s)\|_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}^2\,ds \qquad (2.22)\\
. \quad \leq \; & \mathcal{E}_n(0) + a\int_0^T \|u_n'(s)\|_{L_2^2(B_R)}^2\,ds.
\end{aligned}$$

Maintenant, dans les deux cas et comme les suites $(u_{n0})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergents, en utilisant $(G1)$ et $(G2)$, on obtient une constante positive C indépendante de n telle que

$$\mathcal{E}_n(t) \leq C(T). \tag{2.23}$$

Où

$$C = \frac{1}{2}\left(\|u_{n1}\|_2^2 + \|\nabla u_{n0}\|_2^2\right) + \frac{\xi}{2}\|z_{0n}\|_{L^2(B_R\times(0,1))}^2 + \max(C_1, a)\int_0^T \|u_n'(s)\|_{L_2^2(B_R)}^2\,ds.$$

Passage à la limite

En utilisant la condition $1 - \int_0^t g(s)ds \geq l$, la dernière estimation (2.23) avec (2.19), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = T$ que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(B_R)\right), \tag{2.24}$$

$$(u_n')_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L_\rho^2(B_R)\right), \tag{2.25}$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(B_R\times(0,1))\right). \tag{2.26}$$

Par conséquent, on conclus que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(B_R)\right),$$

$$u_n' \rightharpoonup u \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L_\rho^2(B_R)\right),$$

$$z_n \rightharpoonup z \text{ faiblement}^* \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2(B_R\times(0,1))\right).$$

De (2.24), (2.25) et (2.26), on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(B_R)\right).$$

Alors

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(B_R)\right).$$

Comme

$$\left(u_n'\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^{\infty}\left(0,T;L^2_{\rho}\left(B_R\right)\right),$$

$$\left(u_n'\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^{2}\left(0,T;L^2_{\rho}\left(B_R\right)\right).$$

alors (u,z) solution faible d'un problème (2.3) ■

Proposition 2.1 *soit $G1$ et $G2$ vérifiés, Supposons que les constantes $T>0$ et $R>0$ et les conditions initiales :*

$$u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{et} \quad u_1 \in L^2_{\rho}\left(\mathbb{R}^n\right),$$

sont donnés. Alors pour le problème (2.3) il existe une solution (faible) telle que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\right). \\ \text{et } u_t &\in \mathcal{C}\left(0,T;L^2_{\rho}(\mathbb{R}^n)\right). \end{aligned}$$

Preuve. On divise la démonstration du proposition en deux étapes

Existence : Soit $R_0>0$ telle que $\operatorname{supp}(u_0)\subset B_{R_0}$ et $\operatorname{supp}(u_1)\subset B_{R_0}$. pour $R>R_0$, $R\in\mathbb{N}$, nous considérons le problème d'approximation

$$\begin{cases} u_R''(x,t)-\phi(x)(\Delta u_R(x,t)-\int\limits_0^t g(t-s)\Delta u_R(x,s)ds) \\ +\mu_1 u_R'(x,t)+\mu_2 z_R(x,1,t)=0,\ x\in\ B_R,\ t>0, \\ \tau z_{tR}(x,\rho,t)+z_{\rho R}(x,\rho,t)=0,\ x\in\ \mathbb{R}^n,\rho\in(0,1), \quad t>0, \\ u_R(x,t)=0,\ x\in\partial B_R,\ t>0, \\ z_R(x,0,t)=u_R'(x,t),\ x\in\ B_R,\ t>0, \\ u_R(.,0)=u_0(x)\in C_0^{\infty}(B_R),\ u_R'(x,0)=u_1(x)\in C_0^{\infty}(B_R) \\ z_R(x,\rho,0)=f_0(x,t-\tau),\ x\in B_R, t\in(0,\tau). \end{cases}$$

Par Lemme 2.3, le problème (2.3) ademet une solution faible (u_R,z_R) sur $(0,T)$ telle que

$$\begin{aligned} u_R &\in \mathcal{C}\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(B_R)\right). \\ \text{et } u_R' &\in \mathcal{C}\left(0,T;L^2_{\rho}(B_R)\right). \end{aligned}$$

Nous étendons la solution du problème (2.3) comme

$$\tilde{u}_R := \begin{cases} u_R, & \text{Si } |\, x\,| < R \\ 0, & \text{Si } |\, x\,| \geq R \end{cases}$$

la solution $\tilde{u}_R$ satisfait les estimations :

$$\begin{aligned}
&(\tilde{u}_R)_{R\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\right),\\
&(\tilde{u}'_R)_{R\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right),\\
&(\tilde{z}_R)_{R\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}^n\times(0,1)\right)\right),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\tilde{u}_R \text{ est relativement compact dans } C\left(0,T,L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right). \tag{2.28}$$

Maintenant, en utilisant des relations(2.27) et (2.28) , l'injection continue $C\left(0,T,L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \subset L^\infty\left(0,T;L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ nous pouvons extraire une sous-suite de $\tilde{u}_R$ désigné par $\tilde{u}_{R_m}$, telle que $m\to\infty$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{R_m} &\rightharpoonup u_0 \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\right),\\
\tilde{u}'_{R_m} &\rightharpoonup u_1 \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right),\\
\tilde{z}_{R_M} &\rightharpoonup z \text{ faiblement}^*\text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}^n\times(0,1)\right)\right).
\end{aligned}$$

Pour le reste de la preuve, nous procédons comme dans[2] . Pour fixe, $R=R_m$, notons L_m l'opérateur de restriction

$$L_m:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to[0,T]*B_R.$$

Il est clair que la sous-suite restreinte $L_m\tilde{u}_{R_m}$ satisfait aux estimations obtenues au lemme 2.3 (voir aussi (2.27)). Il existe donc une sous-suite $\tilde{u}_{R_{m_j}}\equiv\tilde{u}_j$ pour lequel cela peut être montré en suivant la procédure du lemme 2.3, $L_m\tilde{u}_j$ converge faiblement vers une solution (faible) u^m Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{B_R} L_m\tilde{u}_j"(t)\,\rho(x)\vartheta dxds+\int_0^T\int_{B_R}\nabla L_m\tilde{u}_j(t)\,\nabla\vartheta dxds-\int_0^T\left(\int_0^t g(t-s)\int_{B_R}\nabla L_m\tilde{u}_j(s)\,\nabla\vartheta dxds\right)ds'\\
&\qquad+\int_0^T\int_{B_R}(\mu_1L_m\tilde{u}'_j(x,t)+\mu_2L_m\tilde{z}_j(x,1,t))\rho(x)\vartheta dxds,\\
&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{u}_j"(t)\,\rho(x)\vartheta dxds+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\tilde{u}_j(t)\,\nabla\vartheta dxds-\int_0^T\left(\int_0^t g(t-s)\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\tilde{u}_j(s)\,\nabla\vartheta dxds\right)ds'\\
&\qquad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(\mu_1\tilde{u}'_j(x,t)+\mu_2\tilde{z}_j(x,1,t))\rho(x)\vartheta dxds,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

pour chaque $\vartheta\in C\left(0,T,B_R\right)$. Passer à la limite en (2.29) comme $j\to\infty$, on obtient $L_m\tilde{u}=u^m$. L'égalité (2.29) est valable pour $\vartheta\in C\left(0,T,\mathbb{R}^n\right)$ puisque le rayon R est choisi arbitrairement. Donc, $\tilde{u}_j$ est la solution faible du problème (2.3)

continuité :d'apérs la remarque suivante ■

Remarque 2.1 *Nous pouvons voir en utilisant un argument de la densité, que la formule générale* (2.6) *est vérifiés, pour chaque* $w \in L^2\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ *Par la densité et l'injection compacit suivante*

$$\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathcal{D}^{-1,2}\left(\mathbb{R}^n\right),$$

pour $p' \in (0,\infty)$, l'injection

$$\left\{u \in L^{p'}\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^n\right)\right), u_t \in L^{p'}\left(0,T;\mathcal{D}^{-1,2}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)\right\} \subset C\left(0,T;L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right),$$

est continue.
nous obtenons $u \in C\left(0,T;L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ et $u_t \in C\left(0,T;\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ alors u et u_t sont continues faiblement avec des valeurs dans $\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et $L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)$ respectivement, la solutions u est la limite de la suite de solutions $\tilde{u}_j$ satisfait l'inégalité (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} & \| \quad \tilde{u}_j(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))} \\ - & \| \quad \tilde{u}_j(0) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} - \| \tilde{u}'_j(0) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} - \| \tilde{z}_j(0) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))} \\ & \leq \quad C_1\int_0^t \| \tilde{u}'_j(s) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n)}\, ds. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Soit $s \in (0,T]$, La quantité

$$\sup_{s\in[0,T]}\left\{\| \tilde{u}_j(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))}\right\},$$

est équivalent de la norme au carré de l'espace
$L^\infty\left(0,s;\mathcal{D}^{1,2}\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \times L^\infty\left(0,s;L^2_\rho\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \times L^\infty\left(0,s;L^2_2\left(\mathbb{R}^n\times(0,1)\right)\right)$. Mais les balles dans cet espace sont faibles * -compact, donc ils sont faibles * -fermée. Nous concluons de l'estimation (2.30), on obtient

$$\begin{aligned} & \sup_{s\in[0,T]}\left\{\| \tilde{u}_j(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))}\right\} \\ \leq & \quad \| \tilde{u}_j(0) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(0) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(0) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))} \\ & + \limsup_{j\to\infty} C_1\int_0^t \quad \| \quad \tilde{u}'_j(s) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n)}\, ds, \end{aligned}$$

quand $s \to 0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{t\to 0^+}\left\{\| \tilde{u}_j(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))}\right\} \\
\leq\ & \| \tilde{u}_j(0) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(0) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(0) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))},
\end{aligned}
$$

par continuité faible de $u(t)$,$u_t(t)$ et $z_n(t)$, on a

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{t\to 0^+}\left\{\| \tilde{u}_j(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))}\right\} \\
\geq\ & \| \tilde{u}_j(0) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(0) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(0) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))}.
\end{aligned}
$$

Alors $\| \tilde{u}_j(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{u}'_j(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| \tilde{z}_j(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))}$est continu et par la solvabilité du problème inversé nous obtenons la continuité gauche.

$$
\begin{aligned}
&\| \quad u(t) - u(s) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| u'(t) - u'(s) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| z(t) - z(s) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))} \\
=\ & \| u(t) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} - 2\left(u(t), u(s)\right)_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \| u(s) \|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \\
+\ & \| \quad u'(t) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} - 2\left(u'(t), u'(s)\right)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} + \| u'(s) \|^2_{L^2_\rho(\mathbb{R}^n)} \\
+\ & \| \quad z(t) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))} - 2\left(z(t), z(s)\right)_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))} + \| z(s) \|^2_{L^2_2(\mathbb{R}^n\times(0.1))},
\end{aligned}
$$

où le côté droit de l'égalité tend vers à zéro quand $j \to 0$. Alors la preuve est complète.

Chapitre 3

La décroissance d'énergie

Dans ce chapitre, nous montrons selon l'hypothèse $0 < |\mu_2| < \mu_1$ que l'énergie de la solution du problème (1.1) décroit **exponentiellement** quand t tend vers l'infini, en utilisant la méthode de **l'énergie** et **les fonctionnels de Lyapunov** appropriée pour montrer la stabilité.
Nous discuterons deux cas, le cas où $0 < |\mu_2| < a$ et le cas $\mu_1 = 0$. Nous allons séparer les deux cas puisque les preuves sont légèrement différentes.

3.1 Stabilité exponentielle pour $0 < |\mu_2| < \mu_1$

Dans cette section, nous montrons que si l'hypothèse $0 < |\mu_2| < \mu_1$ est vérifee, la solution du problème (1.1) devient triviale.
Nous allons utiliser la **méthode de l'énergie** combinée avec le choix d'une **fonctionnels de Lyapunov.** Pour une constante positive ξ vérifiant l'inégalité (2.4), nous définissons la fonctionnelle d'énergie du problème (2.3)

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) + \frac{\xi}{2} \int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \exp(\sigma(s-t))\, u_s^2(x,s)\, ds dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses $(G1)$ et $(G2)$ soient vérifiées. toute donne initaile*

$u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), u_1 \in L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ et $f_0(x,t) \in L^2(\mathbb{R}^n \times (-\tau, 0))$. nous avons :
Si $0 <| \mu_2 |< \mu_1$ alors il existe deux constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que l'énergie $E(t)$ défini par (3.1) satisfait

$$E(t) \leq \beta \exp\left(-\gamma \int_0^t \zeta(s)\, ds\right) \text{ pour } t \geq t_0. \tag{3.2}$$

Dans cette section, on doit établir la propriété de décroissance générale de la solution du problème $(1.1)-(1.3)$. en utilisant les lemmes suivantes.

Lemme 3.1 *Sous les hypothèses du théorème* 3.1*, alors la fonctionelle d'énergie définie par* (3.1) *est une fonction décroissante, telle que*

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq \left(\frac{|\mu_2|}{2}-\mu_1+\frac{\xi}{2}\right)\|u_t(t)\|_{L^2_\rho}^2 \\ &+\left(\frac{|\mu_2|}{2}+\frac{\xi}{2}\exp(-\sigma\tau)\right)\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t^2(x,t-\tau)\,dx \qquad (3.3)\\ +\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{2}g(t) &\| \nabla u(t)\|_2^2-\frac{\xi}{2}\sigma\int_{t-\tau}^t\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\exp(-\sigma(t-s))u_s^2(x,s)\,dsdx. \end{aligned}$$

Preuve. la dérivée de $E(t)$:
En utilisant le lemme 2.1, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)\right) &= \left(-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u_t(x,t)\nabla u(x,t)\,dx \\ +\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t)-\frac{1}{2}g(t) &\| \nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|_2^2 \qquad (3.5)\\ &-\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u_t(x,t)\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s)-\nabla u(x,t))\,dsdx, \end{aligned}$$

et d'apérs la formule de Leibniz alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{2}\int_{t-\tau}^t\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\exp(\sigma(s-t))u_s^2(x,s)\,dsdx\right) &= -\frac{\xi}{2}\exp(-\sigma\tau)\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t^2(x,t-\tau)\,dx \\ &-\frac{\xi}{2}\sigma\int_{t-\tau}^t\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\exp(-\sigma(t-s))u_s^2(x,s)\,dsdx \\ &+\frac{\xi}{2}\ \|\ u_t(t)\|_{L^2_\rho}^2\,. \qquad (3.6) \end{aligned}$$

En estimant $E'(t)$:
d'apérs l'equation (1.1) :

$$u_{tt}(x,t)=\phi(x)\left[\Delta u(x,t)-\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,t)\,ds\right]-\mu_1u_t(x,t)-\mu_2u_t(x,t-\tau)\,. \qquad (3.7)$$

En utilisant (3.7) et la formule de green, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_{tt}(x,t) u_t(x,t)\, dx &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_t(x,t) \nabla u(x,t)\, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_t(x,t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t))\, ds dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_t(x,t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(x,t)\, ds dx \\
&- \mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t)\, dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t-\tau)\, dx,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

alors

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \\
&- \mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t)\, dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) u_t(x,t-\tau)\, dx \\
&- \frac{\xi}{2} \exp(-\sigma\tau) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx \\
&- \frac{\xi}{2}\sigma \int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \exp(-\sigma(t-s)) u_s^2(x,s)\, ds dx + \frac{\xi}{2} \parallel u_t(t) \parallel_{L_\rho^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant l'inégalite de Young sur le troisième terme dans (3.9), on obtient

$$| -\mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) u_t(x,t-\tau)\, dx | \leq \delta \mid \mu_2 \mid\parallel u_t(t) \parallel_{L_\rho^2}^2 + \frac{1}{4\delta} \mid \mu_2 \mid \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx, \tag{3.10}$$

on pose $\delta = \frac{1}{2}$, donc

$$| -\mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) u_t(x,t-\tau)\, dx | \leq \frac{\mid \mu_2 \mid}{2} \parallel u_t(t) \parallel_{L_\rho^2}^2 + \frac{\mid \mu_2 \mid}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx. \tag{3.11}$$

Nous avons :

$$-\mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t)\, dx = -\mu_1 \parallel u_t(t) \parallel_{L_\rho^2}^2, \tag{3.12}$$

en remplaçant (3.11) et (3.12) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
E'(t) &\leq \left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} - \mu_1 + \frac{\xi}{2} \right) \parallel u_t(t) \parallel_{L_\rho^2}^2 \\
&+ \left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2} \exp(-\sigma\tau) \right) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \\
-\frac{1}{2} g(t) &\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{\xi}{2}\sigma \int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \exp(-\sigma(t-s)) u_s^2(x,s)\, ds dx.
\end{aligned}$$

Alors la preuve est complète. ■

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses du théorème* 3.1*, soit* (u, u_t) *la solution du problème* $(1.1) - (1.3)$. *La fonctionnelle* $\Phi(t)$ *définie par :*

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t(x,t)\, u(x,t)\, dx.$$

Il existe trois constantes positives c_1, c_2 et c_3, telles que pour tout $t > 0$

$$\Phi'(t) \leq -\frac{l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + c_1 \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t^2(x, t-\tau)\, dx + c_3 (g \circ \nabla u)(t). \tag{3.13}$$

Preuve. la dérivée de $\Phi(t)$ est :

$$\Phi'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t^2(x,t)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_{tt}(x,t)\, u(x,t)\, dx,$$

et en utilisant (3.7)

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t^2(x,t)\, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Delta u(x,t) - \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(x,s)\, ds\right] u(x,t)\, dx \\
&\quad - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t(x,t)\, u(x,t)\, dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t(x,t-\tau)\, u(x,t)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t^2(x,t)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\, \nabla u(x,t)\, |^2\, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)\, \nabla u(x,s)\, ds dx \\
&\quad - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u(x,t)\, u_t(x,t-\tau)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_t^2(x,t)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)\, (\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t)) ds dx \\
&\quad - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u(x,t)\, u_t(x,t-\tau)\, dx
\end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^t g(s)\, ds - 1\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2. \tag{3.14}$$

En utilisant l'inégalité de Young pour tout $\epsilon > 0$ au second terme de (3.14), il vient

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)\, (\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t)) ds dx \right| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\, \nabla u(x,t)\, |^2\, dx \qquad (3.15) \\
&+ \frac{1}{4\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)\, (\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t)) ds\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder de (3.15) devient

$$\begin{aligned} & \mid \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t)) ds dx \mid \\ \leq & \ \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u(x,t) \mid^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}(\int_0^t g(s)\, ds)(g \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

En utilisant $\int_0^t g(s)ds \leq \int_0^\infty g(s)ds = 1 - l$

$$\begin{aligned} & \mid \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t)) ds dx \mid \\ \leq & \ \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u(x,t) \mid^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}(1-l)(g \circ \nabla u)(t) \\ \leq & \ \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u(x,t) \mid^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}(g \circ \nabla u)(t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

alors

$$\mid \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s) - \nabla u(x,t)) ds dx \mid \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u(x,t) \mid^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}(g \circ \nabla u)(t). \tag{3.18}$$

Ensuite,en appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré aux troisième et quatrième terme du membre droit de (3.14), pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mid -\mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u(x,t) u_t(x,t)\, dx \mid \leq \epsilon \mid \mu_1 \mid \parallel u(t) \parallel^2_{L^2_\rho} + \frac{1}{4\epsilon} \mid \mu_1 \mid \parallel u_t(t) \parallel^2_{L^2_\rho} \\ \leq & \ \epsilon \mid \mu_1 \mid \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{4\epsilon} \mid \mu_1 \mid \parallel u_t(t) \parallel^2_{L^2_\rho}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} & \mid \ \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u(x,t) u_t(x,t-\tau)\, dx \mid \\ \leq & \ \epsilon \mid \mu_2 \mid \parallel u(t) \parallel^2_{L^2_\rho} + \frac{1}{4\epsilon} \mid \mu_2 \mid \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx \\ \leq & \ \epsilon \mid \mu_2 \mid c_*^2 \parallel \nabla u(t) \parallel^2 + \frac{1}{4\epsilon} \mid \mu_2 \mid \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx, \end{aligned} \tag{3.20}$$

où c_*^2 constante de poincaré.
En remplaçant $(3.18), (3.19)$ et (3.20) dans (3.14),on obtient notre resultat

$$\Phi'(t) \leq -\frac{l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + c_1 \parallel u_t(t) \parallel^2_{L^2_\rho} + c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t-\tau)\, dx + c_3 (g \circ \nabla u)(t),$$

telles que $c_1 = 1 + \frac{|\mu_1|}{4\epsilon}$; $c_2 = \frac{|\mu_2|}{4\epsilon}$; $c_3 = \frac{1-l}{4\epsilon}$. ■

Lemme 3.3 *soit* $(u(x,t), u_t(x,t))$ *solution de* $(1.1)-(1.3)$, *La fonctionnelle* $\psi(t)$ *définie par*

$$\psi(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx, \tag{3.21}$$

il existe une constante c_4, alors pour tout $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\leq \left(2\delta - \int_0^t g(s)\,ds\right) \| u_t(t) \|_{L^2_\rho}^2 + \left(\delta + 2\delta(1-l)^2\right) \| \nabla u(t) \|_2^2 \\ &\quad + c_4 (g \circ \nabla u)(t) - \frac{g(0)\, c_*^2}{4\delta} (g' \circ \nabla u)(t) + \delta \int_{\mathbb{R}^n} \rho u_t^2 (t-\tau)\, dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Preuve. En utilisant (3.7), un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_{tt}(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) \int_0^t g'(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x,t) \int_0^t g(t-s)\,dsdx. \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_{tt}(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) \int_0^t g'(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx - \int_0^t g(s)\,ds \, \| u_t(t) \|_{L^2_\rho}^2 \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))ds\right) dx \\ &\quad + \mu_2 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t-\tau) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \\ &\quad + \mu_1 \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t(x,t) \int_0^t g'(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \\ &\quad - \int_0^t g(s)\,ds \, \| u_t(t) \|_{L^2_\rho}^2 . \end{aligned} \tag{3.24}$$

En utilisant la formule de green et l'inégalité de Young aux première et deuxième terme dans le membre droit de (3.24), pour tout $\delta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \quad -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \right| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))dsdx \right| \\
\leq & \ \delta \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds \right)^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ensuite ,en appliquant l'inégalité de Hölder dans (3.25)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds \right)^2 dx \leq \left(\int_0^t g(s)\,ds \right)(g \circ \nabla u)(t). \tag{3.26}$$

En utilisant $\int_0^t g(s)\,ds \leq \int_0^\infty g(s)\,ds = 1-l$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds \right)^2 dx \leq (1-l)(g \circ \nabla u)(t). \tag{3.27}$$

En remplaçant (3.27) dans (3.25)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x,t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))dsdx \right| \leq \delta \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{4\delta}(1-l)(g \circ \nabla u)(t), \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))ds \right) dx \right| \\
= & \left| -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(x,s)\,ds \right) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds)dx \right| \\
\leq & \ \delta \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s)-\nabla u(x,t)+\nabla u(x,t))ds \right)^2 dx \\
& + \frac{1}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds \right)^2 dx \\
\leq & \ \delta \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s)-\nabla u(x,t)\,ds \right) + \left(\left(\int_0^t g(s)ds \right) \nabla u(x,t) \right) \right)^2 dx \\
& + \frac{1}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds \right)^2 dx \\
\leq & \ 2\delta \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,s)-\nabla u(x,t)\,ds \right)^2 + \left(\left(\int_0^t g(s)ds \right) \nabla u(x,t) \right)^2 \right] dx \\
& + \frac{1}{4\delta} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds \right)^2 dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)\left(\int_0^t g(s)ds\right)(g\circ\nabla u)(t)+2\delta\left(\int_0^t g(s)ds\right)^2 \parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 \\
&\leq \left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(1-l)(g\circ\nabla u)(t)+2\delta(1-l)^2 \parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 . \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

En estimant le troisième, le quatrième et le dernier terme dans (3.24) et appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Hölder

$$
\begin{aligned}
&\left| \quad \mu_2\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t(x,t-\tau)\int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \right| \\
&\leq \delta\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t^2(x,t-\tau)dx+\frac{1}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s))ds\right)^2 dx \\
&\leq \delta\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t^2(x,t-\tau)dx+\frac{1}{4\delta}c_*^2(g\circ\nabla u)(t), \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left| \quad \mu_1\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t(x,t)\int_0^t g(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \right| \\
&\leq \delta \parallel u_t(t)\parallel_{L_\rho^2}^2+\frac{1}{4\delta}c_*^2(g\circ\nabla u)(t), \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left| \quad -\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)u_t(x,t)\int_0^t g'(t-s)(u(x,t)-u(x,s))dsdx \right| \\
&\leq \delta \parallel u_t(t)\parallel_{L_\rho^2}^2+\frac{1}{4\delta}\int_0^t g'(s)ds(g'\circ\nabla u)(t) \qquad (3.32) \\
&\leq \delta \parallel u_t(t)\parallel_{L_\rho^2}^2-\frac{g(0)}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}
$$

En remplaçant $(3.28), (3.29), (3.30), (3.31)$,et (3.32) dans (3.24)on obtient notre resultat

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \leq\ & \left(2\delta-\int_0^t g(s)ds\right)\parallel u_t(t)\parallel_{L_\rho^2}^2+\left(\delta+2\delta(1-l)^2\right)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 \\
&+c_4(g\circ\nabla u)(t)-\frac{g(0)c_*^2}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t)+\delta\int_{\mathbb{R}^n}\rho u_t^2(t-\tau)dx,
\end{aligned}
$$

telles que $c_4 := (1-l)\left[\left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)+\frac{1}{4\delta}\right]+\frac{c_*^2}{2\delta}$. ■

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov

$$
\mathcal{L}(t)=E(t)+\epsilon_1\phi(t)+\epsilon_2\psi(t)
$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des constantes positives

Nous avons ensuite le lemme suivant.

Lemme 3.4 *pour* $\epsilon_1 > 0$ *and* $\epsilon_2 > 0$ *assez petit, nous avons*

$$\frac{1}{2}E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq 2E(t). \tag{3.33}$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Holder, l'inégalité de Young et (3.1), nous pouvons obtenir pour tout $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
&| \quad \mathcal{L}(t) - E(t) | \leq \epsilon_1 \mid \phi(t) \mid + \epsilon_2 \mid \psi(t) \mid \\
&\leq \epsilon_1 \int_{\mathbb{R}^n} \mid \rho(x) u_t(x,t) u(x,t) \mid dx + \epsilon_2 \int_{\mathbb{R}^n} \mid \rho(x) u_t(x,t) \int_0^t g(t-s)(u(x,t) - u(x,s)) ds \mid dx \\
&\leq \epsilon_1 \left(\delta \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} \parallel u(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 \right) \\
&\quad + \epsilon_2 \left(\delta \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} \int_0^t g^2(t-s) ds \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) (u(x,t) - u(x,s))^2 dxds \right) \\
&\leq \epsilon_1 \left(\delta \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} \parallel u(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 \right) \\
&\quad + \epsilon_2 \left(\delta \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} c_*^2 \int_0^t g(t-s) ds \int_0^t g(t-s) \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u(x,t) - \nabla u(x,s))^2 dxds \right) \\
&\leq \epsilon_1 \left(\delta \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} \parallel u(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 \right) + \epsilon_2 \left(\delta \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} c_*^2 (1-l)(g \circ \nabla u)(t) \right) \\
&\leq \delta(\epsilon_1 + \epsilon_{2.}) \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} \left(\epsilon_1 \parallel u(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \epsilon_2 c_*^2 (1-l)(g \circ \nabla u)(t) \right),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

il existe une constante positive $\varepsilon > 0$ telle que

$$| \mathcal{L}(t) - E(t) | \leq \varepsilon E(t), \tag{3.35}$$

et

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2} \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\
&\quad + \frac{\xi}{2} \int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \exp(\sigma(s-t)) u_s^2(x,s) dsdx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\delta(\epsilon_1 + \epsilon_{2.}) \quad \parallel \quad & u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{4\delta} \left(\epsilon_1 c_*^2 \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \epsilon_2 c_*^2 (1-l)(g \circ \nabla u)(t) \right) \\
&\leq \varepsilon \frac{1}{2} \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon l \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon (g \circ \nabla u)(t) + \frac{\xi \varepsilon}{2} \int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \exp(\sigma(s-t)) u_s^2(x,s) dsdx.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\text{Si}\begin{cases} \delta\left(\epsilon_1+\epsilon_{2.}\right)\leq\varepsilon\frac{1}{2}, \\ \frac{1c_*^2}{4\delta}\epsilon_1\leq\frac{1}{2}\varepsilon l, \\ \frac{1}{4\delta}\epsilon_2c_*^2\left(1-l\right)\leq\frac{1}{2}\varepsilon, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\delta\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)\leq\varepsilon, \\ \frac{1c_*^2}{2l\delta}\epsilon_1\leq\varepsilon, \\ \frac{1}{2\delta}\epsilon_2c_*^2\left(1-l\right)\leq\varepsilon, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon\geq\max\left\{2\delta\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right),\frac{1c_*^2}{2l\delta}\epsilon_1,\frac{1}{2\delta}\epsilon_2c_*^2\left(1-l\right)\right\}, \tag{3.37}$$

(ie)$(1-\varepsilon)\,E(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq(1+\varepsilon)\,E(t)\,.$

Dans la remarque $\varepsilon>0$ est assez petit quand ϵ_1 et ϵ_2 sont assez petits, on peut obtenir (3.33) quand on choisit $\epsilon_1>0$ et $\epsilon_2>0$ assez petit. La preuve est complète. ■

Preuve. Théorème(3.1) Pour tout $t_0>0$ fixé, on sait que pour tout $t\geq t_0$

$$\int_0^t g(s)\,ds\leq\int_0^{t_0}g(s)\,ds:=g_{0,}$$

En utilisant les estimations $(3.22)\,,(3.13)\,,(3.3)$ nous prouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &= E'(t)+\epsilon_1\phi'(t)+\epsilon_2\psi'(t) \\ &\leq \left(\frac{\mid\mu_2\mid}{2}-\mu_1+\frac{\xi}{2}+c_1\epsilon_1+\epsilon_2\left(2\delta-g_0\right)\right)\parallel u_t(t)\parallel_{L^2_\rho}^2 \\ &\quad+\left(\frac{\mid\mu_2\mid}{2}-\frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma\tau\right)+c_2\epsilon_1+\epsilon_2\delta\right)\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\,u_s^2\left(x,t-\tau\right)dx \\ &\quad+\left(\frac{1}{2}-\frac{g(0)\,c_*^2}{4\delta}\epsilon_2\right)\left(g'\circ\nabla u\right)(t)\,,+\left(\epsilon_2\left(\delta+2\delta\left(1-l\right)^2\right)-\frac{l\epsilon_1}{2}\right)\parallel\nabla u(t)\parallel_2^2 \\ &\quad+\left(c_3\epsilon_1+c_4\epsilon_2\right)\left(g\circ\nabla u\right)(t) \end{aligned} \tag{3.38}$$

soit $\mathcal{L}(t)$ est fonction de Lyapunov alors $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)<0$ et nous savons que $0<\mid\mu_2\mid\leq\mu_1$. Évidemment,$\lim_{\sigma\to0}\exp(\sigma\tau)=1$ En utilisant la continuité de l'ensemble des nombres réels, alors on peut prendre σsi petit qu'il existe une constante $\xi>0$ telle que

$$\exp(\sigma\tau)\mid\mu_2\mid<\xi<\mu_1,$$

ce qui nous donne

$$\frac{\mid\mu_2\mid}{2}-\mu_1+\frac{\xi}{2}<0,$$

et

$$\frac{\mid\mu_2\mid}{2}-\frac{\xi}{2\exp(\sigma\tau)}<0,$$

$$\begin{cases} \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \mu_1 + \frac{\xi}{2} + c_1\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right)\right) < 0, \\ \left(\epsilon_2\left(\delta + 2\delta\left(1-l\right)^2\right) - \frac{l\epsilon_1}{2}\right) < 0, \\ \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma\tau\right) + c_2\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) < 0, \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{g(0)c_*^2}{4\delta}\epsilon_2\right) > 0, \end{cases}$$

pour tout fixe $\delta > 0$. Nous choisissons $\epsilon_1 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ assez petit pour que (3.33) restent valables, et plus

$$\left(\epsilon_2\left(\delta + 2\delta\left(1-l\right)^2\right) - \frac{l\epsilon_1}{2}\right) < 0 \Longrightarrow \frac{2}{l}\epsilon_2\left(\delta + 2\delta\left(1-l\right)^2\right) < \epsilon_1, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \mu_1 + \frac{\xi}{2} + c_1\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right)\right) &< 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{|\mu_2|}{2} - \mu_1 + \frac{\xi}{2} < 0 \\ \epsilon_1 > 0, c_1\epsilon_1 < -\epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) \\ \epsilon_2 > 0, 2\delta - g_0 < 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \frac{|\mu_2|}{2} - \mu_1 + \frac{\xi}{2} < 0 \\ \delta > 0, \delta < \frac{g_0}{2} \\ \epsilon_1 > 0, \epsilon_1 < \frac{1}{c_1}\epsilon_2\left(g_0 - 2\delta\right) \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \frac{|\mu_2|}{2} - \mu_1 + \frac{\xi}{2} < 0 \\ 0 < \delta < \frac{g_0}{2} \\ 0 < \epsilon_1 < \frac{1}{c_1}\epsilon_2\left(g_0 - 2\delta\right) \end{cases}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma t\right) + c_2\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) &< 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2\exp(\sigma\tau)} < 0 \\ \epsilon_2 > 0, \frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma\tau\right) + \epsilon_2\delta < 0 \\ \left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma t\right) + c_2\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) < 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2\exp(\sigma\tau)} < 0 \\ 0 < \epsilon_2 < \frac{1}{\delta}\left(\frac{\xi}{2\exp(\sigma\tau)} - \frac{|\mu_2|}{2}\right) \\ \epsilon_1 < \frac{\xi}{2c_2}\exp\left(-\sigma\tau\right) - \frac{|\mu_2|}{2c_2} - \frac{\epsilon_2\delta}{c_2} \end{cases}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{g\left(0\right)c_*^2}{4\delta}\epsilon_2\right) > 0 \Longrightarrow \epsilon_2 < \frac{2\delta}{g\left(0\right)c_*^2}. \tag{3.42}$$

Selon les résultats $(3.39), (3.40), (3.41)$ et (3.42) on obtient

$$\frac{2}{l}\epsilon_2\left(\delta + 2\delta\left(1-l\right)^2\right) < \epsilon_1 < \min\left\{\frac{1}{c_1}\epsilon_2\left(g_0 - 2\delta\right), \frac{\xi}{2c_2}\exp\left(-\sigma\tau\right) - \frac{|\mu_2|}{2c_2} - \frac{\epsilon_2\delta}{c_2}\right\}, \tag{3.43}$$

$$\epsilon_2 < \min\left\{\frac{2\delta}{g(0)\,c_*^2}, \frac{1}{\delta}\left(\frac{\xi}{2\exp(\sigma\tau)} - \frac{|\,\mu_2\,|}{2}\right)\right\}. \tag{3.44}$$

Il en résulte qu'il existe deux constantes positives γ_1 et γ_2 telles que, pour toute $t > t_0$

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\gamma_1 E(t) + \gamma_2 (g \circ \nabla u)(t). \tag{3.45}$$

En multipliant (3.45) par $\zeta(t)$ et utilisant

$$\zeta(t)(g \circ \nabla u)(t) \leq -(g' \circ \nabla u)(t) \leq 2E'(t). \tag{3.46}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \zeta(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t) + \gamma_2 \zeta(t)(g \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t) - 2\gamma_2 \zeta(t) E'(t), \end{aligned} \tag{3.47}$$

implique que

$$\zeta(t)\mathcal{L}'(t) + 2\gamma_2\zeta(t)E'(t) \leq -\gamma_1\zeta(t)E(t). \tag{3.48}$$

Soit $\varsigma(t) = \zeta(t)\mathcal{L}(t) + 2\gamma_2\zeta(t)E(t)$ alors $\varsigma(t)$ et $E(t)$ sont dites équivalentes .
En utilisant (3.38), c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq \varsigma(t) \leq \beta_2 E(t). \tag{3.49}$$

En utilisant $(3.48)\,.\,(3.49)$ et $\varsigma'(t) \leq 0$ on en déduit que pour tout $t > t_0$

$$\varsigma'(t) \leq -\gamma_1\zeta(t)E(t) \leq -\frac{\gamma_1}{\beta_2}\zeta(t)\varsigma(t),$$

ce qui nous donne

$$\varsigma(t) \leq \varsigma(t_0)\exp\left(-\frac{\gamma_1}{\beta_2}\int_0^t \zeta(s)\,ds\right).$$

Ainsi nous avons

$$E(t) \leq \frac{\beta_1}{\beta_2}E(t_0)\exp\left(-\frac{\gamma_1}{\beta_2}\int_0^t \zeta(s)\,ds\right). \tag{3.50}$$

Donc (3.1) suit en renommant les constantes, et par la continuité et la délimitation de $E(t)$. ■

3.2 Stabilité exponentielle pour $\mu_1 = 0$ et $0 < |\mu_2| < a$

Dans cette section, nous montrons que sous l'hypothèse $\mu_1 = 0$ et $0 < |\mu_2| < a$, que la solution du problème (1.1) se décroit à l'état stationnaire trivial. Pour atteindre notre objectif, nous allons utiliser **la méthode de l'énergie** combinée avec le choix d'une **fonctionnelle de Lyapunov**, et les lemmes Qui sont mentionné dans la section précédente.

Théorème 3.2 *Supposons que les hypothèses $(G1)$ et $(G2)$ soient vérifiées. pour toute données initaile $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n), u_1 \in L^2_\rho(\mathbb{R}^n)$ et $f_0(x,t) \in L^2(\mathbb{R}^n \times (-\tau, 0))$. Nous avons.*

Si $\mu_1 = 0, 0 <| \mu_2 |< \alpha$ et $\zeta(t) > \zeta_0$, où les constantes $\alpha > 0$ et $\zeta_0 > 0$ sont définis respectivement en (3.70) et (3.75). Alors il existe une constante $\gamma > 0$ telle que l'énergie $E(t)$ définie par (3.1) satisfait

$$E(t) \leq E_0(t) \exp\left(-\gamma \int_0^t \zeta(s)\, ds\right) \text{ pour } t \geq t_0. \tag{3.51}$$

Dans cette section, nous établirons la propriété de décroissance généralede la solution du problème $(1.1) - (1.3)$. Nous avons besoin des lemmes dans la section précédente

Preuve. Théorème (3.2) Pour tout $t_0 > 0$ fixé, pour tout $t \geq t_0$

$$\int_0^t g(s)\, ds \leq \int_0^{t_0} g(s)\, ds := g_{0.}$$

Dans la remarque $\varepsilon > 0$ est assez petit quand ϵ_1 et ϵ_2 sont assez petits, on peut obtenir (3.40) quand on choisit $\epsilon_1 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ assez petit et $\mu_1 = 0$. La preuve est complète

En utilisant les estimations $(3.22), (3.13), (3.3)$ nous prouvons écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &= E'(t) + \epsilon_1 \phi'(t) + \epsilon_2 \psi'(t) \\
&\leq \left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2} + c_5\epsilon_1 + \epsilon_2(2\delta - g_0)\right) \| u_t(t) \|^2_{L^2_\rho} + \left(\epsilon_2\left(\delta + 2\delta(1-l)^2\right) - \frac{l\epsilon_1}{2}\right) \| \nabla u(t) \|^2_2 \\
&\quad + \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2}\exp(-\sigma\tau) + c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, u_s^2(x, t-\tau)\, dx + (c_6\epsilon_1 + c_7\epsilon_2)(g \circ \nabla u)(t) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{g(0)c_*^2}{4\delta}\epsilon_2\right)(g' \circ \nabla u)(t),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

alors $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) < 0$ et nous avons $0 <| \mu_2 |\leq a$, telles que

$$\begin{cases}
\left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2} + c_5\epsilon_1 + \epsilon_2(2\delta - g_0)\right) < 0, \\
\left(\epsilon_2\left(\delta + 2\delta(1-l)^2\right) - \frac{l\epsilon_1}{2}\right) < 0, \\
\left(\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2}\exp(-\sigma\tau) + c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) < 0, \\
\left(\frac{1}{2} - \frac{g(0)c_*^2}{4\delta}\epsilon_2\right) > 0.
\end{cases} \tag{3.53}$$

pour tout $\delta > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ fixées, nous choisissons $\epsilon_1 > 0$ si petit que (3.38) tient, nous donne

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2} + c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right)\right) &< 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2} > 0 \text{ et } \left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2}\right) < -c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) \\
&\Longrightarrow c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) < 0 \text{ et } \epsilon_2\left(g_0 - 2\delta\right) - c_5\epsilon_1 > 0 \\
\epsilon_1 &< \frac{\epsilon_2\left(g_0 - 2\delta\right)}{c_5}. \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Évidemment,$\lim_{\sigma\to 0}\exp\left(\sigma\tau\right) = 1$, Maintenant, nous choisissons assez petit alors $\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2\exp(\sigma\tau)} < 0$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} - \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma\tau\right) + c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) &< 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\mid \mu_2 \mid}{2} - \frac{\xi}{2\exp\left(\sigma\tau\right)} < 0 \\
&\Longrightarrow c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta < -\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma t\right) \\
&\Longrightarrow \left(c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta\right) > 0. \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

En utilisant $(3.54)\,,(3.55)$ on obtient

$$\begin{aligned}
0 &< c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta < -\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2}\exp\left(-\sigma\tau\right) \\
&< \left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2}\right) < -c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) \\
0 &< c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta < -c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right), \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2c_5\epsilon_1 &< \epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) - \epsilon_2\delta \qquad (3.57) \\
&\Longrightarrow \epsilon_1 < \frac{\epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) - \epsilon_2\delta}{2c_5}.
\end{aligned}$$

En utilisant $(3.57)\,,(3.54)$ on obtient

$$\epsilon_1 < \min\left\{\frac{\epsilon_2\left(g_0 - 2\delta\right)}{c_5}, \frac{\epsilon_2\left(2\delta - g_0\right) - \epsilon_2\delta}{2c_5}\right\}. \qquad (3.58)$$

Nous avons :

$$\epsilon_2\left(\delta + 2\delta\left(1 - l\right)^2\right) - \frac{l\epsilon_1}{2} < 0 \Longrightarrow \frac{2\epsilon_2\left(\delta + 2\delta\left(1 - l\right)^2\right)}{l} < \epsilon_1, \qquad (3.59)$$

et

$$c_5\epsilon_1 + \epsilon_2\delta \Longrightarrow -\frac{\epsilon_2\delta}{c_5} < \epsilon_1. \tag{3.60}$$

En utilisant $(3.58), (3.59), (3.60)$ on obtient

$$\max\left\{\frac{2\epsilon_2\left(\delta+2\delta\left(1-l\right)^2\right)}{l}, -\frac{\epsilon_2\delta}{c_5}\right\} < \epsilon_1 < \min\left\{\frac{\epsilon_2\left(g_0-2\delta\right)}{c_5}, \frac{\epsilon_2\left(2\delta-g_0\right)-\epsilon_2\delta}{2c_5}\right\}. \tag{3.61}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\epsilon_2\left(\delta+2\delta\left(1-l\right)^2\right)-\frac{l\epsilon_1}{2} &< 0 \\
&\Longrightarrow \delta\left(1+2\left(1-l\right)^2\right) < \frac{l\epsilon_1}{2}\epsilon_2 \text{ et } \epsilon_1 < \frac{\epsilon_2\left(g_0-2\delta\right)}{c_5} \\
&\Longrightarrow \delta < \frac{l}{2}\frac{\left(g_0-2\delta\right)}{c_5\left(1+2\left(1-l\right)^2\right)},
\end{aligned}$$

qui donne

$$\frac{g_0}{8c_5} < \frac{\left(g_0-2\delta\right)}{c_5}. \tag{3.62}$$

Donc

$$\delta < \frac{g_0 l}{16c_5\left(1+2\left(1-l\right)^2\right)} \text{Si } \delta < \frac{g_0}{8}. \tag{3.63}$$

En utilisant $(3.62), (3.63)$ on obtient

$$\delta < \min\left\{\frac{g_0}{8}, \frac{g_0 l}{16c_5\left(1+2\left(1-l\right)^2\right)}\right\}, \tag{3.64}$$

En utilisant $(3.61).(3.64)$ on obtient

$$\max\left\{\frac{2\epsilon_2\left(\delta+2\delta\left(1-l\right)^2\right)}{l}, -\frac{g_0}{8c_5}\epsilon_2\right\} < \epsilon_1 < \min\left\{\frac{\epsilon_2\left(g_0-2\delta\right)}{c_5}, \frac{\epsilon_2\left(2\delta-g_0\right)-\epsilon_2\delta}{2c_5}\right\}. \tag{3.65}$$

Alors nous savons que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{g\left(0\right)c_*^2}{4\delta}\epsilon_2\right) > 0 \Longrightarrow \epsilon_2 < \frac{2\delta}{g\left(0\right)c_*^2}. \tag{3.66}$$

Si on note $\eta_1 := \epsilon_2\left(g_0-2\delta\right)-c_5\epsilon_1$, et $\eta_2 := c_5\epsilon_1+\epsilon_2\delta$, il résulte de (3.55) que $\eta_1 > \eta_2$

Maintenant, nous choisissons δ assez petit pour qu'il existe une constante positive ξ satisfaite

$$2\eta_2 \exp(\sigma\tau) < \xi < 2\eta_{1.} \tag{3.67}$$

En utilisant (3.52) on obtient

$$\begin{cases} \left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2} - \eta_1\right) < 0 \\ \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2}\exp(-\sigma\tau) + \eta_2\right) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \xi <\mid \mu_2 \mid +\xi < 2\eta_1, \\ \mid \mu_2 \mid -\xi \exp(-\sigma\tau) < -2\eta_2, \end{cases} \tag{3.68}$$

ce qui implique

$$\mid \mu_2 \mid < \min\{2\eta_1 - \xi, \xi\exp(-\sigma\tau) - 2\eta_2\} := a, \tag{3.70}$$

et

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 < 2\eta_1 - \xi \\ 0 < -2\eta_2 + \xi\exp(-\sigma\tau) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \xi < 2\eta_1 \\ 2\eta_2\exp(\sigma\tau) < \xi \end{cases} \\ &\Longrightarrow 2\eta_2 \exp(\sigma\tau) < \xi < 2\eta_1. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Par conséquent, il existe deux constantes positives γ_1 et γ_2 telles que pour tout $t \geq t_0$

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\gamma_1 E(t) + \gamma_2 (g \circ \nabla u)(t). \tag{3.72}$$

Puisque $\mu_1 = 0$, par (3.3), l'énergie $E(t)$ satisfait

$$\begin{aligned} E'(t) \leq& \left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2}\right) \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 - \frac{1}{2} g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \\ &+ \left(\frac{\mid \mu_2 \mid}{2} + \frac{\xi}{2}\exp(-\sigma\tau)\right) \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) u_t^2(x, t-\tau)\, dx + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \\ &- \frac{\xi}{2}\sigma \int_{t-\tau}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \exp(-\sigma(t-s)) u_s^2(x,s)\, ds dx. \end{aligned} \tag{3.73}$$

En multipliant (3.72), by $\zeta(t)$ et en utilisant l'hypothèses $(G2)$ et (3.73), on obtient que pour tout $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \zeta(t)\mathcal{L}'(t) \leq& -\gamma_1 \zeta(t) E(t) + \gamma_2 \zeta(t)(g \circ \nabla u)(t) \leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t) - \gamma_2 (g' \circ \nabla u)(t) \\ \leq& -\gamma_1 \zeta(t) E(t) - 2\gamma_2 E'(t) + 2\eta_1\gamma_2 \parallel u_t(t) \parallel_{L^2_\rho}^2 \\ \leq& -\gamma_1 \zeta(t) E(t) - 2\gamma_2 E'(t) + 4\eta_1\gamma_2 E(t). \end{aligned} \tag{3.74}$$

Si on suppose

$$\zeta(t) > \frac{4\eta_1\gamma_2}{\gamma_1} := \zeta_0, \tag{3.75}$$

alors on déduit de (3.74) qu 'il existe une constante positive γ_3 telle que pour tout $t \geq t_0$

$$\zeta(t)\mathcal{L}'(t) + 2\gamma_2 E'(t) \leq -\gamma_3 E(t).$$

Par conséquent, nous pouvons obtenir (3.51) en utilisant une analyse similaire à celle de (7.13).Puis la preuve du théorème 3.2 est complete. ■

3.3 Exemples

Dans [19, 20, 24], nous illustrons plusieurs résultats de décroissance de l'énergie à travers les exemples suivantes :

Exemple 3.1 *Si g décroît de façon exponentielle, c'est-à-dire $\zeta(t) = a$, alors (3.2) nous donne*

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \beta \exp\left(-\gamma \int_0^t a ds\right) \quad \text{pour } t \geq t_0 \\ &\Longrightarrow E(t) \leq \beta \exp(-\gamma a t) \quad \text{pour } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Exemple 3.2 *Si $\zeta(t) = \frac{a}{1+t}$ alors (3.2) devient*

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \beta \exp\left(-\gamma \int_0^t \frac{a}{1+s} ds\right) \quad \text{pour } t \geq t_0 \\ &\Longrightarrow E(t) \leq \beta \exp(-\gamma a \ln(1+t)) \quad \text{pour } t \geq t_0 \\ &\Longrightarrow E(t) \leq \beta \exp\left(\ln(1+t)^{-\gamma a}\right) \quad \text{pour } t \geq t_0 \\ &\Longrightarrow E(t) \leq \frac{\beta}{(1+t)^{\gamma a}} \quad \text{pour } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Exemple 3.3 *Lorsque $g(t) = a\exp(-b(1+t)^\alpha)$, pour $a; b > 0$ et $0 < \alpha < 1$, alors nous pouvons choisir $\zeta(t) = \alpha b (1+t)^{\alpha-1}$.*

L'estimation (3.2) prend la forme

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \beta \exp\left(-\gamma \int_0^t \alpha b (1+s)^{\alpha-1} ds\right) \\ E(t) &\leq \beta \exp(-b\gamma(1+t)^\alpha). \end{aligned}$$

Exemple 3.4 *Si* $g(t) = a\exp(-b\ln^{\alpha}(1+t))$, *pour* $a; b > 0$ *et* $1 < \alpha$. *Nous prenons*

$\zeta(t) = b\alpha\frac{\ln^{\alpha-1}(1+t)}{1+t}$
L'estimation (3.2) prend la forme

$$E(t) \leq \beta\exp(-b\gamma\ln^{\alpha}(1+t))\,0.$$

Conclusion

Dans ce travail [8], nous avons considéré une équation d'onde viscoélastique linéaire avec une fonction de densité et un terme de retard dans $\mathbb{R}^n$. Afin de dominer les difficultés liées à la non-compacité de certains opérateurs dans des domaines non bornés, nous avons introduit des espaces pondérés. Sous des hypothèses appropriées sur la fonction de relaxation, nous avons établi un résultat général de décroissance pour le problème de valeur initiale en utilisant la méthode d'énergie et les fonctionnelles de Lyapunov. Cette étude contient la décroissance exponentiels et polynomiales comme cas particulier. Nous avons mis en évidence une extension de résultats d'existence globale en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et des éstimations à priori.

(1) Pour le résultat général de la décroissance, il n'est valide
que pour $0 < |\mu 2| < \mu 1$ et $\mu 1 = 0, |\mu 2| > 0$.

(2) On pourrait résoudre le problème lorsque les nombres réels $\mu 1$ et $\mu 2$ satisfont
à la condition $0 < \mu 1 < |\mu 2|$.

Bibliographie

[1] A. V. Babin and M. I. Vishik, Attractors of partial di erential evolution equations in an unbounded domain, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 116 (1990), no. 3-4,221-243.

[2] [4] H. Brézis, "Analyse Fonctionnelle- Théorie et applications," Dunod, Paris (1999).

[3] X. Cao and P. Yao, General decay rate estimates for viscoelastic wave equation with variable coe cients, J. Syst. Sci. Complex. 27 (2014), no. 5, 836-852

[4] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and J. A. Soriano, On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear bound-ary conditions, J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), no. 1, 108-124.

[5] T. Cazenave et A. Hareaux, Introduction aux Problèmes d'évolution semi-linéaires, El-lipses, socété de mathématiques appliquées et industrielles

[6] Q. Dai and Z. Yang, Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay, Z. Angew Math. Phys. 65 (2014), no. 5,885-903.

[7] R. Datko, J. Lagnese and M. P. Polis, An example on the e ect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations, SIAM J. Control Optim. 24 (1986),no. 1, 152-156

[8] B. Feng, General decay for a viscoelastic wave equation with density and time delay term in Rn, Taiwanese journal of mathematics. June 2017

[9] V. Georgiev, G. Todorova, Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Differential Equations 109 (1994) 295–308.

[10] M. Kafini, Uniform decay of solutions to Cauchy viscoelastic problems with density, Elecron. J. Di erential Equations 2011 (2011), no. 93, 9 pp.

[11] M. Kafini and S. A. Messaoudi, A blow-up result in a Cauchy viscoelastic problem, Appl. Math. Lett. 21 (2008), no. 6, 549-553.

[12] ——————————————- , On the uniform decay in viscoelastic problem in Rn, Appl. Math. Comput.215 (2009), no. 3, 1161-1169.

[13] M. Kafini, S. A. Messaoudi and S. Nicaise, A blow-up result in a nonlinear ab-stract evolution system with delay, NoDEA Nonlinear Di erential Equations Appl. 23 (2016), no. 2, Art. 13, 14 pp

[14] N. I. Karachalios and N. M. Stavrakakis, Existence of a global attractor for semilinear dissipative wave equations on Rn, J. Differerential Equations 157 (1999), no. 1, 183-205.

[15] M. Kirane and B. Said-Houari, Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay, Z. Angew. Math. Phys. 62 (2011), no. 6, 1065-1082

[16] J. L. Lions, "quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires," Dunod, Gaulthier-Villars, Paris (1969).66

[17] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, Paris, 2002.

[18] W. Liu, General decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a time-varying delay term in the internal feedback, J. Math. Phys. 54 (2013), no. 4, 043504, 9 pp.

[19] S. A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008), no. 2, 1457-1467

[20] ——————, General decay of the solutions of a weak viscoelastic equation, Arab. J. Sci. Eng. 36 (2011), no. 8, 1569-1579.

[21] ——————, General decay of solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 8, 2589-2598

[22] S. A. Messaoudi and A. Soufyane, General decay of solutions of a wave equation with a boundary control of memory type, Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), no. 4, 2896-2904.

[23] S. A. Messaoudi and M. M. Al-Gharabli, A general decay result of a nonlinear system of wave equations with in nite memories, Appl. Math. Comput. 259 (2015), 540-551.

[24] M. I. Mustafa and S. A. Messaoudi, General stability result for viscoelastic wave equations, J. Math. Phys. 53 (2012), no. 5, 053702, 14 pp.

[25] S. Nicaise and C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks, SIAM J. Control Optim. 45 (2006),no. 5, 1561-1585.

[26] ————————————, Exponential stability of abstract evolution equations with time delay, J. Evol. Equ. 15 (2015), no. 1, 107-129

[27] ————————————, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Di erential Integral Equations 21 (2008), no. 9-10, 935-958.

[28] S. Nicaise and J. Valein, Stabilization of second order evolution equations with un- bounded feedback with delay, ESAIM Control. Optim. Calc. Var. 16 (2010), no. 2,420-456

[29] S. Nicaise, J. Valein and E. Fridman, Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 2 (2009), no. 3,559-581..

[30] P. G. Papadopoulos and N. M. Stavrakakis, Global existence and blow-up results for an equation of Kirchho type on Rn, Topol. Methods Nonlinear Anal. 17 (2001), no. 1, 91-109.

[31] H. Reinhard, Equation diff´erentielles Fondement et applications, 1982, BORDAS.

[32] B. Said-Houari, "Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un problème hyperbolique," Mémoire de magister (2002), Université de Annaba.

[33] B. Said-Houari, S. A. Messaoudi and A. Guesmia, General decay of solutions of a non- linear system of viscoelastic wave equations, NoDEA Nonlinear Di erential Equations Appl. 18 (2011), no. 6, 659-684.

[34] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Diferential.

[35] N.-e. Tatar, Arbitrary decays in linear viscoelasticity, J. Math. Phys. 52 (2011), no. 1, 013502, 12 pp

[36] S.-T. Wu, General decay of solutions for a nonlinear system of viscoelastic wave equa- tions with degenerate damping and source terms, J. Math. Anal. Appl. 406 (2013), no. 1, 34-48

[37] ————-, Asymptotic behavior for a viscoelastic wave equation with a delay term, Taiwanese J. Math. 17 (2013), no. 3, 765-784

[38] G. Q. Xu, S. P. Yung and L. K. Li, Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 12 (2006), no. 4, 770-785.

[39] K. Zennir, General decay of solutions for damped wave equation of Kirchho type with density in Rn, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. 61 (2015), no. 2, 381-394.

[40] Y. Zhou, A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping and vanishing initial energy in RN, Appl. Math. Lett. 18 (2005), no. 3, 281-286.

[41] ———-, Global existence and nonexistence for a nonlinear wave equation with damp- ing and source terms, Math. Nachr. 278 (2005), no. 11, 1341-1358.