



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique



Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire élaboré en vue de l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Equation aux dérivées partielles et applications

Thème :

**Théorèmes du point fixe commun sous
conditions contractives de type intégral
dans un espace métrique flou**

Présenté Par :

SEHAILIA Karima

SEHAILIA Dalel

Devant le jury :

M^{me} Hadia MASSAOUDENE MCA Université Larbi Tébessi Présidente

M^r Khaled BERRAH MCB Université Larbi Tébessi Examineur

M^r Faycel MERGHADI MCA Université Larbi Tébessi Encadreur

Date de soutenance : 25 /06/2020

Remerciements

Nous remercions Dieu, tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et surtout la santé pour réaliser ce modeste travail.

Nous tenons d'abord à exprimer nos vifs remerciements à Mr. F. MERGHADI pour son orientation, ses conseils ainsi que ses précieuses directions.

Nous exprimons mes profondes et respectueuses à Mme. H. MASSAOUDENE pour avoir accepté de présider le jury.

De meme, nous exprimons notre reconnaissance à Mr. K. BERRAH pour l'honneur qu'il nous a fait de bien vouloir accepter d'examiner ce travail.

Nous remercions tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont assuré notre formation universitaire.

Dédicases

Je consacre mon humble travail a mon modèle de vie, que m'a soutenu et m'a dirigé vers la voie du succès.

"Mon père Yahia "

A la source de tendresse et a la source de mon bonheur pour tous ses sacrifices, amour, soutien et prières pour moi tout au long de mes études.

"Ma mère Noura"

Mes sœurs, Nadjiba, Aouatef pour ses encouragements constants et son soutien moral.

A mes chers frères Adel, Amine, pour leur appui et leur encouragement.

Pour mon fiancé, Farid, merci d'être là pour moi.

A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Je veux exprimer ma gratitude et merci a mes chère amis: Bouthaina et Sara et spécialement ma binome Karima.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible je vous dis merci.

SEHAILIA Dalel

Dédicases

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs, affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne tout ma gratitude.

Mes chers frères et mes sœurs.

Toute ma famille.

Mes fidèles amies.

Tous les étudiants du 2ème Master Mathématique .

Tous ceux qui me sont chers.

Tous ce qui sacrifié leur tempts pour la science.

SEHAILIA Karima

Résumé

Dans ce mémoire on va présenter une étude de certains théorèmes de point fixe commun en utilisant des conditions contractives généralisées de certaines applications univoques considérées sur des structures métriques floues. En particulier, on va faire toute la lumière sur certains résultats publiés dans ce cadre par Mr F. Merghadi, A. Aliouche et C. Godet-Thobie. Plus précisément, on utilise les notions de la compacité séquentielle et les notions plus faibles de compatibilité de fonctions pour démontrer l'existence de point fixe pour une famille d'applications dans un espace métrique flou ou un espace métrique flou intuitionniste.

Mots clés :

Point fixe commun, Condition contractive, La compacité séquentielle, Application compatible, Espace métrique flou, Espace semi-métrique flou intuitionniste.

Abstract

In this thesis we will present a study of certain common fixed point theorems using generalized contractive conditions of certain single-valued mappings considered on fuzzy metric structures. In particular, we will shed light on some results published in this context by Mr F. Merghadi, A. Aliouche and C. Godet-Thobie. More precisely, we use the notions of sequential compactness and the weaker notions of compatibility of mappings to demonstrate the existence of a fixed point for a family of mappings in a fuzzy metric space or an intuitionistic fuzzy semi-metric space.

Keywords :

Common fixed point, Contract condition, Sequential compactness, Compatibility mapping, Fuzzy metric space, intuitionistic fuzzy semi-metric space.

ملخص

في هذه المذكرة, سوف نقدم دراسة لبعض نظريات النقطة الثابتة المشتركة باستخدام شروط تقلصية معممة لبعض التطبيقات المبنية على فضاءات مترية ضبابية. على وجه الخصوص, سوف نلقي الضوء على بعض النتائج التي نشرها السيد ف. مرغادي وع. عليوش و ك.قودت طوبي في هذا العرض. بتعبير أدق نستخدم مفاهيم التراص المتسلسل و المفاهيم الأضعف للتطبيقات المتوافقة لإثبات وجود نقطة ثابتة لعائلة من التطبيقات في فضاء متري ضبابي او فضاء متري ضبابي حدسي .

الكلمات المفتاحية :

نقطة ثابتة مشتركة, التراص المتسلسل, شروط تقلصية, التطبيقات المتوافقة , فضاء متري ضبابي, فضاء متري ضبابي حدسي.

Table des matières

1	Notions, définitions et préliminaires.	5
1.1	Ensembles flous	8
1.1.1	Caractéristiques d'un sous-ensemble flou	9
1.1.2	Opérations sur les ensembles flous	9
1.2	Espace métrique flou	11
1.3	Applications compatibles dans un espace métrique flou	15
1.4	Extensions du principe de Banach	17
2	Théorèmes de point fixe dans n-espaces métriques flous	22
2.1	Théorèmes de point fixe dans n -espaces métriques flous séquentiellement compact	22
2.2	Théorèmes de point fixe dans n -espaces métriques flous complet	35
3	Théorèmes de point fixe commun sous conditions contractives du type intégral dans un espace semi-métrique flou intuitionniste	41
3.1	Espace métrique flou intuitionniste	43
3.2	Espace semi-métrique flou intuitionniste	45
3.3	Propriétés de l'espace semi-métrique flou intuitionniste	48
3.4	Quelques résultats de point fixe commun dans un espace semi-métrique flou intuitionniste	52
3.5	Exemple illustrative	60
3.6	Conclusion	65

AVANT-PROPOS

La combinaison d'un espace métrique, d'un ensemble flou et de la théorie de point fixe nous amène à un bon sujet de recherche que nous étudierons dans ce travail. Tout d'abord, nous mettrons en évidence la signification des ensembles flous et leur histoire, puis un bref aperçu de l'histoire de la théorie des espaces métriques flous et de la théorie de point fixe.

Introduction générale

Il est beaucoup plus facile de dire si une personne est un homme ou une femme, si une personne est en classe terminale ou pas, mais il est difficile de dire si quelqu'un est beau (la notion de beauté est sujette à plusieurs discussion). C'est là où intervient la théorie des ensembles flous. En effet, la théorie des (sous-) ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite développée par Lotfi Zadeh en 1965 afin de représenter mathématiquement l'imprécision relative à certaines classes d'objets. Par ailleurs, la pauvreté peut aussi être étudiée en utilisant la théorie des ensembles flous, étant donné le manque d'attributs précis permettant de ranger les individus ou les ménages dans la classe des pauvres ou des non-pauvres (Ambapour, 2009). Le caractère flou est à privilégier car il sert à mieux modéliser l'incertitude et l'imprécision, par exemple est presque, est un peu plus grand que, est à peu près, etc. D'autre part, en 1975, Kramosil et Michálek [19, 19] ont introduit pour la première fois le concept d'espace métrique flou, basé sur le concept d'une métrique statistique (probabiliste) introduit par Menger en 1951 [23], [28]. Ici, nous l'appelons une métrique floue KM. Une métrique KM floue est dans un certain sens équivalente à une métrique statistique, mais ils ont des différences essentielles dans leurs définitions et interprétations. En 1994, George et Veeramani [12], voir aussi [13], ont légèrement modifié le concept original d'une métrique KM floue, nous appelons cette modification par une métrique floue GV. Cette modification permet de nombreux exemples naturels de métrique floue, en particulier, métriques floues construites à partir de métriques. Les mesures floues GV semblent également plus appropriées pour étudier des structures topologiques induites. Parallèlement à l'intérêt principal de nombreux chercheurs pour les aspects théoriques de la théorie des métriques floues, en particulier, les propriétés topologiques et séquentielles des espaces métriques flous, leur complétude, etc. Les mesures floues ont également suscité des spécialistes travaillant dans divers domaines appliqués des mathématiques. Entre autres, des mesures floues ont été utilisées dans les problèmes de prise de décision avec des informations incertaines et imprécises et d'autres problèmes techniques. Par exemple, Niskanen [31], [24] a développé une approche de

raisonnement métrique floue pour prise de décision dans les problèmes de soft computing. Gregori et Al [11] a construit une métrique floue qui prend en compte simultanément deux critères de distance différents entre les pixels de l'image couleur et utilisé cette métrique floue pour filtrer les images bruyantes, etc. Le fait que les métriques floues KM et GV soient obtenues sur la base d'une métrique statistique se reflète dans l'hypothèse que le degré de proximité de deux points dans un espace métrique flou correspond à la probabilité de la «coïncidence» de ces points dans la métrique statistique. En particulier, la distance floue entre deux points égaux est 1, tandis que dans les cas où un point est «loin» de l'autre, la distance floue entre eux est «proche» de 0. Cela peut sembler étrange si un seul ne pense pas à une métrique floue comme homologue d'une métrique statistique. Dans ces notes, nous considérons comment la définition d'une métrique floue peut être revue afin d'obtenir une notion mieux coordonnée avec le sens intuitif d'une distance. Par ailleurs, le théorème du point fixe est l'un des théorèmes fondamentaux en analyse, il a des applications nombreuses à la fois théoriques et pratiques dans les différentes branches des mathématiques, mais aussi de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'informatique et autre. Au rang des premières, citons le résultat le plus connu de la théorie du point fixe est le principe de contraction de Banach [8], qui est l'un des résultats d'analyse les plus importants et considéré comme le début et la source principale de la théorie du point fixe dans les espaces métriques. Il garantit l'existence et l'unicité des point fixe de certaines application. Par la suite, Grabiec [14] a défini l'intégralité de l'espace métrique flou (maintenant connu comme un espace métrique flou complet et a étendu le théorème de contraction de Banach à des espaces métriques flous complets). À la suite des travaux de Grabiec, Fang [9] a en outre établi de nouveaux théorèmes de point fixe pour les applications de type contractives dans des espaces métriques flous complets. Peu de temps après, Mishra et Al [29] ont également obtenu plusieurs théorèmes de points fixes communs pour des applications asymptotiquement commutantes dans le même espace, qui généralisent plusieurs théorèmes de points fixes dans les espaces métriques, Menger, flous et uniformes. Outre ces travaux basés sur l'espace métrique flou complet, George et Veeramani [12] ont modifié la définition de la suite de Cauchy introduite par Grabiec, parce que encore n'est pas complet avec la définition de complétude de Grabiec. Parallèlement, ils ont légèrement modifié la notion d'espace métrique flou introduite par Kramosil et Michálek [19], puis ont défini un Hausdorff et la première topologie dénombrable. Depuis lors, la notion d'espace métrique flou complet présentée par George et Veeramani (maintenant connu comme un espace métrique flou complet) est apparue comme une autre caractérisation de complétude, et certains théorèmes de point fixe ont également été construit sur la base de cet espace métrique. D'après l'analyse ci-dessus, nous pouvons voir qu'il existe de nombreuses études liées à la théorie du point fixe basées sur les deux types d'espaces métriques flous complets [10], [16], [27], [25], [28], [35], [1], [2].

Par conséquent, notre thème s'intéresse à l'étude de quelques théorèmes de point fixe satisfaisant quelques conditions de contractivités dans n -espaces métriques flous généralisés. On va essayer de faire un exposé et détailler l'essentiel du contenu de quelques articles publiés par A. Aliouche et F. Merghadi. On va travailler en parallèle de trois chapitres qui aboutissent à un seul objectif (l'existence de point fixe pour une famille d'applications).

De toute évidence le premier chapitre, comme dans toutes les mémoires, contient les éléments indispensables dont on aura besoin pour les chapitres suivants, Plus précisément, on va définir le concept d'un sous-ensemble flou et on va étudier le principe de contraction de Banach dans un espace métrique flou.

Le sujet de deuxième chapitre sera sur quelques résultats de point fixe sur n -espace métrique flou, citons en titre d'exemple l'article de A. Aliouche et F. Merghadi et qui s'intitule «A related fixed point theorem in two fuzzy metric spaces» publié en 2009 et A related fixed point theorem in n fuzzy metric spaces».

Concernant le dernier chapitre, nous allons travailler sur des articles publiés récemment par Mr. F. Merghadi et C. Godet. Thobie pour démontrer l'existence de point fixe commun d'une infinité d'applications sur un espace semi-métrique flou intuitionniste en utilisant la notion de la propriété $(E.A)$, la compatibilité faible et la compatibilité occasionnellement faible.

1

¹1)- Le pixel est la plus petite surface homogène constitutive d'une image enregistrée par un système informatique.

2)- Le nombre de pixels définit la précision de l'image.

3)- Le calcul souple (soft computing (en)) est un terme appliqué à un champ de l'informatique qui se caractérise par l'utilisation de solutions de calcul inexactes, pour lesquels une solution exacte ne peut être dérivée en temps polynomial.

Le calcul souple est devenu un domaine de recherche de l'informatique dans les années 1990. À l'époque, les approches du calcul informatique ne pouvaient aborder que des problèmes de simple complexité et les systèmes les plus complexes découlant de la biologie, la médecine, les sciences humaines, sciences de gestion, et des domaines similaires sont souvent restés irrésolus par les méthodes classiques des mathématiques et de l'analyse. Le calcul souple traite de l'imprécision, de l'incertitude, de la vérité partielle, et du rapprochement pour atteindre une traçabilité, une robustesse et un coût faible pour la solution.

Chapitre 1

Notions, définitions et préliminaires.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions essentielles pour la suite de cette étude. Tout d'abord on va définir la plateforme convenable sur la quelle de telle choses peuvent avoir lieu. On va commencer par la définition des espaces métriques et ces propriétés suivies par le concept des ensembles flous en tant qu'outils pour définir les espaces métriques flous. En suite on va concentrer sur la notion des applications compatibles et le théorème de point fixe de Banach dans un espace métrique flou.

Définition 1.1 [41] *Un espace métrique (X, d) où X est un ensemble non vide muni d'une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ appelée distance (ou métrique), qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in X$:*

- i. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$,
- iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemple 1.1 1. Dans \mathbb{R} , on peut considérer la distance d suivante dite distance usuelle :

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Soient $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ on définit :

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } p \geq 1.$$
$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

3. Soit X un ensemble quelconque, on définit :

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

on l'appelle métrique discrète.

Définition 1.2 [41] Soit (X, d) un espace métrique. La boule ouverte de centre x et de rayon r dans (X, d) est l'ensemble défini par :

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Un sous ensemble $U \subset X$ est dit ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$, tel que $B(x, r) \subset U$.

Un sous ensemble d'un espace métrique est dit fermé si son complémentaire est ouvert. Un exemple d'un ensemble fermé est la boule fermée de centre x et de rayon r donnée par :

$$B'(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

Définition 1.3 [41] Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (X, d) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n(\varepsilon) : d(x_n, x_m) \leq \varepsilon,$$

C'est à dire :

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Exemple 1.2 Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ la suite définie par :

$$U_n = \frac{1}{n}$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}, n > m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \\ &= \left| \frac{m - n}{nm} \right| \\ &\leq \left| \frac{n}{nm} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{m} \right|, \end{aligned}$$

alors $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$, Donc $\{U_n\}$ est une suite de Cauchy.

Définition 1.4 [41] Soit (X, d) un espace métrique alors $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X est appelée suite convergente si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon,$$

On note alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Proposition 1.1 [41] *Toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse est généralement faux.*

Exemple 1.3 *Soit la suite $\{x_n\}$ dans l'espace métrique $\{\mathbb{R} - \{1\}, |\cdot|\}$, tel que $x_n = \frac{n}{n+1}$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \notin \mathbb{R} - \{1\}$, donc la suite $\{x_n\}$ diverge.*

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| \\ &= \left| \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} \right| \\ &\leq \frac{n}{n(m+1)} \\ &\leq \frac{1}{m+1}, \end{aligned}$$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} = 0$. D'où $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$, donc la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy.

Définition 1.5 [41] *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $T : X \rightarrow Y$ une application et $a \in X$, on dit que T est continue au point a si :*

$$\lim_{x \rightarrow a} T(x) = T(a).$$

C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(T(x), T(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.6 [41] *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de cet espace converge vers limite dans ce même espace.*

Définition 1.7 [41] *Un espace métrique (X, d) est dit compact si toute suite d'éléments de (X, d) admet une suite extraite convergente vers un point de X . Une partie A de X est dite compacte si le sous-espace métrique (A, d) est compact.*

Définition 1.8 [41] *Un espace métrique (X, d) est dit séquentiellement compact si toute suite de X admet une sous suite convergente dans X .*

1.1 Ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à ce sous-ensemble.

Définition 1.9 [42] Soit X un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de X . Un sous-ensemble flou A de X est défini par sa fonction d'appartenance μ_A , telle que

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\} \text{ avec } \mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

où μ_A représente le degré d'appartenance avec lequel x appartient à l'ensemble flou A .

On observe les trois cas possibles suivants :

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 0 \\ 0 < \mu_A(x) < 1 \\ \mu_A(x) = 1 \end{cases}$$

Où, $\mu_A(x) = 0$ si x n'appartient pas à A ; $0 < \mu_A(x) < 1$ si x appartient partiellement à A ; et $\mu_A(x) = 1$ si x appartient entièrement à A . La fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ inclut ou exclut donc à ses extrémités, tout élément x au l'ensemble (Vero, 2002).

Remarque 1.1 [42] On peut faire remarquer que si A est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que les valeurs extrêmes 0 et 1. On a dans ce cas :

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 0 \\ \mu_A(x) = 1 \end{cases}$$

Exemple 1.4 Considérons l'expression "jeune". Dans le contexte "une personne jeune" peut être modélisée en utilisant les ensembles flous. L'ensemble flou A est défini par

$$\mu_A : [0, 100] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 25 \\ \frac{40-x}{25} & \text{si } 25 < x < 40 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

L'âge 1 est certainement jeune et 100 non jeune.

Exemple 1.5 La figure 1.1 montre graphiquement la différence entre un ensemble classique et un ensemble flou

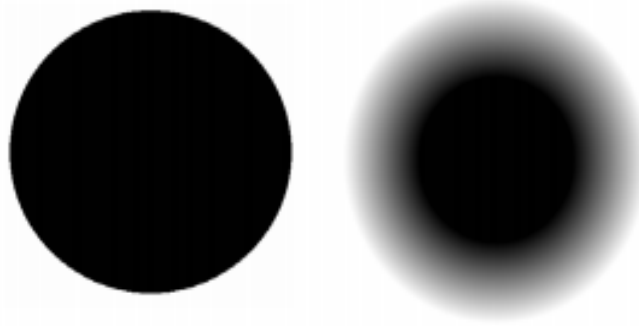


Fig 1.1 la différence entre l'ensemble classique et l'ensemble flou.

1.1.1 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Un sous-ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance, à partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques du sous-ensemble flou peuvent être étudiées.

- **Support**

Le support d'un ensemble flou A de X , noté $supp(A)$ est défini par

$$supp(A) = \{x \in X, \mu_A(x) > 0\}$$

- **Noyau**

Le noyau d'un sous-ensemble flous A de X noté par $noy(A)$ est défini par

$$noy(A) = \{x \in X, \mu_A(x) = 0\}$$

- **α -Coupe**

Une α -coupe de A est le sous ensemble classique noté A est défini par

$$A_\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) \succeq \alpha\}$$

1.1.2 Opérations sur les ensembles flous

Etant donné que le concept de sous-ensemble flou peut-être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les sous-ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsqu'on a affaire à des fonctions d'appartenance à valeurs 0 ou 1. On présente ici, les opérations les plus couramment utilisées.

• **Egalité**

Deux sous-ensembles flous A et B de X sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tous les élément x de X . Formellement $A = B$ si et seulement si :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

Exemple 1.6 *L'ensemble flou de petit B*

$$B = \{\{1, 1\}, \{3, 0.9\}, \{4, 0.6\}, \{5, 0.4\}, \{6, 0.3\}, \{7, 0.2\}, \{8, 0.1\}, \{9, 0\}, \{10, 0\}\}$$

L'ensemble flou aussi petit A

$$A = \{\{1, 1\}, \{3, 0.9\}, \{4, 0.6\}, \{5, 0.4\}, \{6, 0.3\}, \{7, 0.2\}, \{8, 0.1\}, \{9, 0\}, \{10, 0\}\}$$

$$A(x) = B(x)$$

Note : Si $A(x) = B(x)$ n'est pas satisfaite pour un élément $x \in X$ alors on dit que A n'est pas égal B .

• **Complément**

Le complémentaire d'un sous ensemble flou A de X noté A^c est défini par

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Exemple 1.7 *Soit A l'ensemble des enfants petites*

$$A = \{\{1, 1\}, \{3, 0.9\}, \{4, 0.6\}, \{5, 0.4\}, \{6, 0.3\}, \{7, 0.2\}, \{8, 0.1\}, \{9, 0\}, \{10, 0\}\}$$

L'ensemble flou A^c des enfants n'est pas petites

$$A^c = \{\{1, 0\}, \{3, 0.1\}, \{4, 0.4\}, \{5, 0.6\}, \{6, 0.7\}, \{7, 0.8\}, \{8, 0.9\}, \{9, 1\}, \{10, 1\}\}$$

Avec les définitions usuelles des opérateurs flous, on a trouvons toujours la propriété de commutativité, distributivité et associativité des opérateurs. Cependant, relevons deux exceptions notables :

1. En logique flou, le principe du tiers exclu n'est pas satisfaite : $A \cup \bar{A} \neq X$, autrement dit $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$.
2. En logique flou, la propriété de non contradiction n'est pas satisfaite ici $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

Les autres propriétés sont conservées, notamment :

$$(A^c)^c = A, X^c = \emptyset \text{ et } \emptyset^c = X.$$

• **Inclusion**

Soit A et B deux sous-ensembles flous de X , A est inclus dans B ($A \subset B$) est défini par

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

• Union

L'union de deux sous-ensembles flous A et B ($A \cup B$) est défini par

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

Exemple 1.8 1. L'union des ensembles A et B :

$$A(x) = 0.3 \text{ et } B(x) = 0.9 \quad (A \cup B)(x) = \max \{0.3, 0.9\} = 0.9.$$

2. L'union de "A" et de "B" :

$$A = \{ \{1, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 0.9\}, \{4, 0.2\}, \{5, 0.5\}, \{7, 0.2\}, \{8, 0.1\}, \{9, 4\}, \{12, 1\} \}$$

$$B = \{ \{1, 0\}, \{2, 0\}, \{3, 0.7\}, \{4, 0.5\}, \{5, 0.6\}, \{7, 0.1\}, \{8, 0.5\}, \{9, 0\}, \{12, 3\} \}$$

$$(A \cup B) = \{ \{1, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 0.9\}, \{4, 0.5\}, \{5, 0.6\}, \{7, 0.2\}, \{8, 0.5\}, \{9, 4\}, \{12, 3\} \}$$

• L'intersection

L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B ($A \cap B$) est défini par

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

Exemple 1.9 1. L'intersection des ensembles A et B :

$$A(x) = 0.3 \text{ et } B(x) = 0.9 \quad (A \cap B)(x) = \min \{0.3, 0.9\} = 0.3.$$

2. L'intersection flou de "A" et de "B" :

$$A = \{ \{1, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 0.9\}, \{4, 0.2\}, \{5, 0.5\}, \{7, 0.2\}, \{8, 0.1\}, \{9, 4\}, \{12, 1\} \}$$

$$B = \{ \{1, 0\}, \{2, 0\}, \{3, 0.7\}, \{4, 0.5\}, \{5, 0.6\}, \{7, 0.1\}, \{8, 0.5\}, \{9, 0\}, \{12, 3\} \}$$

$$(A \cap B) = \{ \{1, 0\}, \{2, 0\}, \{3, 0.7\}, \{4, 0.2\}, \{5, 0.5\}, \{7, 0.1\}, \{8, 0.1\}, \{9, 0\}, \{12, 1\} \}$$

1.2 Espace métrique flou

Définition 1.10 [38] Une opération binaire $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est *t-norm* continue s'il vérifie les conditions suivantes :

1. $*$ associative et commutative,
2. $*$ est continue,
3. $a * 1 = a$ pour tout $a \in [0, 1]$,
4. $a * b \leq c * d$ quand $a \leq c$ et $b \leq d$ pour tout $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Définition 1.11 [38] Une opération binaire \diamond : $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est *t-conorm* continue s'il vérifie les conditions suivantes :

1. \diamond associative et commutative,
2. \diamond est continue,
3. $a \diamond 0 = a$ pour tout $a \in [0, 1]$,
4. $a \diamond b \leq c \diamond d$ quand $a \leq c$ et $b \leq d$ pour tout $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Exemple 1.10 Notons que $a * b = ab$ pour tout $a, b \in [0, 1]$:

1. $a * b = ab = ba = b * a$,

Donc $*$ est commutative.

$$\forall a, b, c \in [0, 1] : a * (b * c) = a * (bc) = abc,$$

$$(a * b) * c = ab * c = abc,$$

Donc $*$ est associative.

2. Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec $f(a, b) = ab$ est une fonction continue..

3. Pour tout $a \in [0, 1]$: $a * 1 = a1 = a$.

4. On a $a * b = ab$ et $c * d = cd$ tel que $a \leq c$ et $b \leq d$:

$$a \leq c \Rightarrow ab \leq cb \Rightarrow ab \leq cd.$$

Exemple 1.11 Notons que $a * b = \min \{a, b\}$ pour tout $a, b \in [0, 1]$ (minimum continuous t-norm).

1. $a * b = \min \{a, b\} = \min \{b, a\} = b * a$,

Donc $*$ est commutatif.

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in [0, 1] : a * (b * c) &= a * (\min \{b, c\}) \\ &= \min \{a, \min \{b, c\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (\min \{a, b\}) * c \\ &= \min \{\min \{a, b\}, c\} \end{aligned}$$

Donc $*$ est associatif.

2. Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec $f(a, b) = \min \{a, b\}$ est une fonction continue.

3. Pour tout $a \in [0, 1]$: $a * 1 = \min \{a, 1\} = a$.

4. On a $a * b = \min \{a, b\}$ et $c * d = \min \{c, d\}$ tel que $a \leq c$ et $b \leq d$:

$$\min \{a, b\} \leq \min \{c, d\}$$

Si $\min \{a, b\} = a$ alors

$$a \leq \min \{c, d\} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq c \text{ trivial,} \\ \text{et} \\ a \leq d \text{ on } a \leq c \text{ et } a \leq b \leq d \Leftrightarrow a \leq d. \end{cases}$$

Si $\min \{a, b\} = b$ alors

$$b \leq \min \{c, d\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq d \text{ trivial,} \\ \text{et} \\ b \leq a \text{ on } a \leq b \text{ et } b \leq a \leq c \Leftrightarrow b \leq c. \end{cases}$$

Définition 1.12 [12] Un espace métrique flou $(X, M, *)$ où X un ensemble non vide $*$ est t -norm continue, et M un ensemble flou dans $X^2 \times [0, \infty)$, satisfaisant les conditions suivantes pour tout $x, y, z \in X$ et $t, s > 0$:

1. $M(x, y, t) > 0$,
2. $M(x, y, t) = 1$ si seulement si $x = y$,
3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,
5. $M(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ est continu.

Définition 1.13 [12] Soit $(X, M, *)$ est un espace métrique flou pour $t > 0$, la boule ouverte $B(x, r, t)$ de centre $x \in X$ et rayon $0 < r < 1$ définie par :

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}.$$

Un sous ensemble $A \subset X$ est appelé ouvert si pour chaque $x \in A$ il existe $t > 0$ et $0 < r < 1$ tel que $B(x, r, t) \subset A$. Soit τ dénote la famille de tout les sous ensembles ouverts de X Alors τ s'appelle la topologie sur X induit par la métrique flou M . Cette topologie est de Hausdorff et d'abord dénombrables.

Exemple 1.12 Soit $X = \mathbb{R}$. Notons que $a * b = ab$ pour tout $a, b \in [0, 1]$. Pour chaque $t > 0$, on définit par :

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}, \text{ pour tout } x, y \in X.$$

alors on peut voir facilement que le triple $(X, M, *)$ est un espace métrique flou. En effet on a :

1. $M(x, y, t) > 0$, pour tout $a, b \in [0, 1]$. Pour chaque $t > 0$.
2. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + |x - y|} = 1 \Leftrightarrow t + |x - y| = t \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|} = \frac{t}{t + |y - x|} = M(y, x, t)$.

$$4. M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{t}{t + |x - y|} \times \frac{s}{s + |y - z|} &\leq \frac{t + s}{t + s + |x - z|} \\ \frac{t}{t + |x - y|} \times \frac{s}{s + |y - z|} &= \frac{st}{st + t|y - z| + s|x - y| + |y - z||x - z|} \\ &\leq \frac{st}{st + t|y - z| + s|x - y|} \\ &\leq \frac{st + (\min(s, t))^2}{st + t|y - z| + s|x - y| + (\min(s, t))^2} \end{aligned}$$

$$D'autre part : t|y - z| + s|x - y| \geq \min(s, t)[|y - z| + |x - y|]$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{st}{st + t|y - z| + s|x - y|} &\leq \frac{st + (\min(s, t))^2}{st + \min(s, t)[|y - z| + |x - y|] + (\min(s, t))^2}, \\ &\leq \frac{\min(s, t)(s + t)}{\min(s, t)(s + t) + \min(s, t)[|y - z| + |x - y|]}, \\ &\leq \frac{\min(s, t)(s + t)}{\min(s, t)[s + t + |y - z| + |x - y|]}, \\ &\leq \frac{(s + t)}{s + t + |y - z| + |x - y|}, \\ &\leq \frac{(s + t)}{s + t + |x - z|}. \end{aligned}$$

$$5. \text{ Soit } M :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1] \text{ avec } M(x, y, t) \rightarrow \frac{t}{t + |x - y|}$$

Alors est une fonction continue.

Définition 1.14 [12] Soit $(X, M, *)$ est un espace métrique flou :

1. La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X converge à x si seulement si $\forall 0 < \varepsilon < 1$ et $t > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0$, $M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$.

C'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1.$$

2. La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X est appelé suite de Cauchy si seulement si $\forall 0 < \varepsilon < 1$ et $t > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n, m \geq n_0$, $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$.

C'est à dire :

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} M(x_n, x_m, t) = 1.$$

3. L'espace métrique flou $(X, M, *)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X .

Lemme 1.1 [14] Pour tout $x, y \in X$, $M(x, y, \cdot)$ est une application croissante.

Définition 1.15 Soit $(X, M, *)$ est un espace métrique flou. M est dite continue dans $X^2 \times [0, \infty)$ si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) = M(x, y, t).$$

Si $\{(x_n, y_n, t_n)\}$ est une suite dans $X^2 \times [0, \infty)$ qui converge au point $(x, y, t) \in X^2 \times [0, \infty)$; alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, y, t) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y, t_n) = M(x, y, t).$$

Lemme 1.2 [14] M est une fonction continue dans $X^2 \times [0, \infty)$.

Définition 1.16 Un espace métrique flou $(X, M, *)$ est dit séquentiellement compact si toute suite de X admet une sous suite convergente dans X .

1.3 Applications compatibles dans un espace métrique flou

L'étude du point fixe commun à deux applications exige une certaine flexibilité entre ces applications, la plus élémentaire est la commutativité de fonctions. Cependant il existe beaucoup d'autres types de compatibilité plus faible que la commutativité. Le but ici est de donner quelques définitions de compatibilités dans un espace métrique flou dont on aura besoin dans la suite de notre travail.

Définition 1.17 [14] Soient A et S deux applications d'un espace métrique flou $(X, M, *)$. A et S sont dites commutatives si $ASx = SAx$, pour tout $x \in X$.

Définition 1.18 [39] Deux applications A et S d'un espace métrique flou $(X, M, *)$ sont dites faiblement commutative si

$$M(ASx, SAx, t) \geq M(Ax, Sx, t)$$

pour tout $x \in X$ et $t > 0$.

Définition 1.19 [37] Deux applications A et S d'un espace métrique flou $(X, M, *)$ sont dites R -faiblement commutative s'il existe un constante $R > 0$ tel que

$$M(ASx, SAx, t) \geq M(Ax, Sx, \frac{t}{R})$$

pour tout $x \in X$ et $t > 0$.

Définition 1.20 [18] Deux applications A et S d'un espace métrique flou $(X, M, *)$ sont dites compatibles si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} M(ASx_n, SAx_n, t) = 1$ pour tout $t > 0$, Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X satisfaisant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = p.$$

pour tout $p \in X$ et $t > 0$.

Définition 1.21 [30] Soient A et S des applications d'un espace métrique flou $(X, M, *)$. Un point x dans X est appelé un point de coïncidence de A et S si et seulement si $Ax = Sx$. Dans ce cas, $w = Ax = Sx$ est appelé un point de coïncidence de A et S .

Définition 1.22 [39] On dit que les applications A et S d'un espace métrique flou $(X, M, *)$ sont faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence, c'est-à-dire si $Ap = Sp$ pour tout $p \in X$ alors $ASp = SAP$.

Définition 1.23 [39] On dit que les applications A et S d'un espace métrique flou $(X, M, *)$ sont occasionnellement faiblement compatible si et seulement s'il existe un certain point $x \in X$ satisfaisant $Ax = Sx$ et $ASx = SAx$.

Il est facile de voir que deux applications compatibles sont faiblement compatibles et sont occasionnellement faiblement compatible mais l'inverse n'est pas vrai.

Définition 1.24 [39] Le paire (A, S) satisfait la propriété $(E.A)$ s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = p \in X.$$

Il est à noter que la compatible faible et la propriété $(E.A)$ sont indépendantes.

Définition 1.25 [37] (W.3) : Donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x et y dans X .

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y, t) = 1$, alors $x = y$.

(W.4) : Donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et x dans X .

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t) = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, x, t) = 1$.

Il est clair que (W.4) implique (W.3).

Définition 1.26 [37] $(X, M, *)$ satisfait la propriété $(H.E)$ si et seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et x dans X , si $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, x, t) = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t) = 1$.

Définition 1.27 [?] $(X, M, *)$ satisfait la propriété $(CE.1)$ si et seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y et x dans X , $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y, t) = M(x, y, t)$.

Définition 1.28 [37] $(X, M, *)$ satisfait la propriété (CE.2) si et seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X , $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t) = 1$ implique $\limsup_{n \rightarrow \infty} M(z_n, y_n, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} M(z_n, x_n, t)$.

1.4 Extensions du principe de Banach

L'importance du principe de Banach est que non seulement il offre un point fixe et une suite itérative qui conduit à ce point mais il fournit aussi des erreurs de calcul. Cependant, le principe exige aussi plusieurs hypothèses. Ci-dessous on va exposer une extension du principe dans un espace métrique flou complet.

Définition 1.29 [22] Soit X un ensemble non vide. Un sous-ensemble R de X^2 est appelé une relation sur X . Notez que pour chaque $x, y \in X$, l'une des conditions suivantes est remplie :

- i. $(x, y) \in R$; ce qui revient à dire que " x est R lié à y " ou " x est lié à y sous R ". Parfois, nous écrivons xRy au lieu de $(x, y) \in R$,
- ii. $(x, y) \notin R$; ce qui signifie que " x n'est pas R lié à y " ou " x ne concerne pas y sous R ".

Trivialement, X^2 et φ étant des sous-formes de X^2 sont des relations binaires sur X , qui sont respectivement appelées relation universelle (ou relation complète) et relation vide tout au long de cet étude, R représente une relation binaire non vide, mais pour des raisons de simplicité, nous écrivons uniquement "relation binaire" au lieu de "relation binaire non vide".

Définition 1.30 [4] Soit R une relation binaire définie sur un ensemble non vide X et $x, y \in X$. Nous disons que x et y sont R -comparatifs si $(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$. Nous le désignons par $[x, y] \in R$.

Définition 1.31 [4] Soient X un ensemble non vide et R une relation binaire sur X .

- i. L'inverse de R , dénoté par R^{-1} , est défini par $R^{-1} = \{(x, y) \in X^2 : (y, x) \in R\}$.
- ii. La fermeture symétrique de R , désignée par R^s , est défini comme étant l'ensemble $R \cup R^{-1}$ (i.e., $R^s := R \cup R^{-1}$). En effet, R^s est la plus petite relation symétrique sur X contenant R .

Proposition 1.2 [4] Pour une relation binaire R définie sur un ensemble non vide

$$(x, y) \in R^s \Leftrightarrow [x, y] \in R$$

Preuve. L'observation est simple car

$$(x, y) \in R^s \Leftrightarrow (x, y) \in R \cup R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R \text{ ou } (x, y) \in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in R \text{ ou } (y, x) \in R$$

$$\Leftrightarrow [x, y] \in R \cup R^{-1}$$

■

Définition 1.32 [4] Soient X un ensemble non vide et R une relation binaire sur X . Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est appelé R -préservante si

$$(x_n, x_{n+1}) \in R \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Définition 1.33 [4] Soit $(X, M, *)$ un espace métrique flou. Une relation binaire R définie sur X est appelée d -fermée si à chaque fois $\{x_n\}$ est une suite R -préservante et $x_n \rightarrow x$, alors il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ avec $[x_{n_k}, x] \in R$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.34 [4] Soient X un ensemble non vide et T une application sur X . Une relation binaire R définie sur X est appelée T -fermée si pour tout $x, y \in X$

$$(x, y) \in R \Rightarrow (Tx, Ty) \in R$$

Proposition 1.3 [4] Soient X, T et R le même que dans la définition (1.34). si R est T -fermé, alors R^s est également T -fermé.

Définition 1.35 [4] Soient X un ensemble non vide et R une relation binaire sur X . Un sous-ensemble E de X est appelé R -dirigé si pour chaque $x, y \in E$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in R$ et $(y, z) \in R$

Définition 1.36 [4] Soit X un ensemble non vide et R une relation binaire sur X . pour $x, y \in X$, un chemin de longueur k (ou $k \in \mathbb{N}^*$) dans R de x à y est une suite finie $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_k\} \subset X$, satisfaisante aux conditions suivantes :

i. $z_0 = x$ et $z_k = y$

ii. $(z_i, z_{i+1}) \in R$ pour chaque $i (0 \leq i \leq k - 1)$

Notez qu'un chemin de longueur k implique $k + 1$ éléments de X , bien qu'ils ne soient pas distincts.

dans cet étude, nous utilisons les notations suivantes :

i. $F(T)$ l'ensemble de tous les points fixes de T .

ii. $X(T, R) = \{x \in X : (x, Tx) \in R\}$.

iii. $\gamma(x, y, R) :=$ la classe de tous les chemins dans R de x à y .

Proposition 1.4 [4] Si $(X, M, *)$ est un espace métrique flou, R est une relation binaire sur X , T est une application sur X , $0 < k < 1$ et $t > 0$, alors les conditions de contractivité suivantes sont équivalentes :

$$(i) M(Tx, Ty, kt) \geq M(x, y, t) \quad \forall x, y \in X \text{ avec } (x, y) \in R$$

$$(ii) \ M(Tx, Ty, kt) \geq M(x, y, t) \ \forall x, y \in X \text{ avec } [x, y] \in R$$

Preuve. L'implication (ii) \Rightarrow (i) est trivial. À l'inverse, supposons que (i) soit vrai. Prenons $x, y \in X$ avec $[x, y] \in R$, alors (ii) découle directement de (i). Sinon, si $(y, x) \in R$, puis en utilisant la symétrie de M et (i), on obtient

$$M(Tx, Ty, kt) = M(Ty, Tx, kt) \geq M(y, x, t) = M(x, y, t)$$

cela montre (i) \Rightarrow (ii) ■

Théorème 1.1 [6] Soient $(X, M, *)$ un espace métrique flou complet avec $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ pour tout $x, y \in X$, R une relation binaire sur X et T une application sur X . Supposons que les conditions suivantes sont satisfaisantes :

- a. $X(T, R)$ n'est pas vide,
- b. R est T -fermée,
- c. soit T est continu ou R est d -fermé,
- d.

$$M(Tx, Ty, kt) \geq M(x, y, t) \ \forall x, y \in X \text{ avec } (x, y) \in R$$

ou $0 < k < 1$ et $t > 0$, alors T admet un point fixe. De plus, si :

- e. Si $\gamma(x, y, R^s)$ n'est pas vide, pour tout $x, y \in X$, alors T admet un point fixe unique.

Preuve. Soit x_0 un point ordinaire de $X(T, R)$. On définit une suite itérative $\{x_n\}$ par $x_n = T^n(x_0)$ ou $x_{n+1} = Tx_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Comme $(x_0, Tx_0) \in R$, en utilisant l'hypothèse (b), nous obtenons :

$$(Tx_0, T^2x_0), (T^2x_0, T^3x_0), \dots, (T^n x_0, T^{n+1}x_0) \in R$$

Donc

$$(x_n, x_{n+1}) \in R, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Ainsi, $\{x_n\}$ est une suite R -préservante. Nous appliquons la contractive (d) à (1.1), nous déduisons pour $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\begin{aligned} M(Tx_n, Tx_{n+1}, kt) &= M(x_{n+1}, x_{n+2}, kt) \geq M\left(Tx_0, Tx_1, \frac{t}{k^{n-1}}\right) \\ &= M\left(x_1, x_2, \frac{t}{k^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$

Donc pour tout entier p positif, on a

$$M(Tx_n, Tx_{n+p}, t) = M(x_{n+1}, x_{n+p+1}, t)$$

$$\begin{aligned} &\geq M\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{p}\right) * \dots * M\left(x_{n+p}, x_{n+p+1}, \frac{t}{p}\right) \\ &\geq M\left(x_1, x_2, \frac{t}{pk^n}\right) * \dots * M\left(x_1, x_2, \frac{t}{pk^n}\right) \end{aligned}$$

$M(x, y, t) \rightarrow 1$ comme $t \rightarrow \infty$ on a

$$\lim_n M(Tx_n, Tx_{n+p}, t) \geq 1 * \dots * 1 = 1$$

qui implique que la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy, d'où converge. Donc, il existe $x \in X$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Supposons maintenant que T est continue alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx.$$

En raison de l'unicité de la limite nous obtenons $Tx = x$ i.e., x est une point fixe de T .

Supposons maintenant que R est d -fermé. Comme $\{x_n\}$ est une suite R -préservante et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ avec

$$[x_{n_k}, x] \in R \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

En utilisant (d) et la proposition (1.3), $[x_{n_k}, x] \in R$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$, on obtient

$$M(x_{n_{k+1}}, Tx, kt) = M(x_{n_k}, Tx, kt) \geq M(x_{n_k}, x, t) \rightarrow 1 \text{ comme } k \rightarrow \infty$$

i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n_k}, x, t) = 1$$

pour que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_{k+1}} = Tx$$

Encore une fois en raison de l'unicité de la limite, nous obtenons

$$Tx = x$$

de sorte que x est un point fixe de T .

Pour prouver l'unicité, prenons $x, y \in F(T)$, i.e ;

$$T(x) = x \text{ et } T(y) = y \quad (1.2)$$

Par hypothèse (e), il existe un chemin $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_r\}$ d'une certaine longueur finie r dans R^s de x à y de sorte que

$$z_0 = x, z_r = y, [z_i, z_{i+1}] \in R \text{ pour chaque } i(0 \leq i \leq r - 1) \quad (1.3)$$

comme R est T -fermé, en utilisant la proposition (1.3), on a

$$[T^n z_i, T^n z_{i+1}] \in R \text{ pour chaque } i(0 \leq i \leq r - 1) \text{ et pour chacun } n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

faisant maintenant usage de (1.2), (1.3), (1.4), l'hypothèse (d) et la proposition (1.3), on obtient

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &= M(Tx, Ty, t) \\ &= M(Tz_0, Tz_r, t) \\ &= M(T^n z_0, T^n z_r, t) \\ &\geq M(T^n z_0, T^n z_1, \frac{t}{p}) * M(T^n z_1, T^n z_2, \frac{t}{p}) * \dots * M(T^n z_{r-1}, T^n z_r, \frac{t}{p}) \\ &\geq M(z_0, z_1, \frac{r^n t}{p}) * M(z_1, z_2, \frac{r^n t}{p}) * \dots * M(z_{r-1}, z_r, \frac{r^n t}{p}) \\ &\geq 1 * 1 * \dots * 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alors $x = y$. D'ou T admet un point fixe unique. ■

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe dans n -espaces métriques flous

Dans cette partie on va présenter une étude qui améliore et généralise des résultats obtenus par F.Merghadi et A.Aliouche[11], [12] en démontrant deux théorèmes de point fixe liés de n -applications dans n -espaces métriques flous séquentiellement compacts et n -espace métriques flous complets sous des conditions contractives implicites.

2.1 Théorèmes de point fixe dans n -espaces métriques flous séquentiellement compact

En 2009, A. Aliouche, F. Merghadi et A. Djoudi[5], ont démontré l'existence et l'unicité de point fixe pour deux applications définie dans un espace métrique flou séquentiellement compact dans un autre en se servant d'une relation implicite définie sur R^6 .

Définition 2.1 [24] Soit Φ l'ensemble de tout les fonctions $\phi : [0, 1]^6 \rightarrow [0, 1]$ telle que si $\phi(u, 1, u, v, v, 1) > 0$ ou $\phi(u, u, 1, v, 1, v) > 0$ pour tout $u, v \in [0, 1)$, alors $u > v$.

Exemple 2.1 Soit $\phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$.

On a :

$$\phi(t_1, 1, t_1, t_2, t_2, 1) = t_1 - \min\{1, t_1, t_2, t_2, 1\}$$

$$\Rightarrow \phi(t_1, 1, t_1, t_2, t_2, 1) = t_1 - \min\{t_1, t_2\} = t_1 - t_2 > 0, \text{ tel que } t_1, t_2 \in [0, 1],$$

$$\Rightarrow t_1 > t_2.$$

Alors $\phi \in \Phi$.

Théorème 2.1 [5] Soient (X, M_1, θ_1) et (Y, M_2, θ_2) sont deux espaces métriques flous, et $T : X \rightarrow Y$, $S : Y \rightarrow X$ deux applications satisfaisant

$$\begin{aligned} \phi_1 \left(\begin{array}{l} M_1(Sy, STx, t), M_1(x, Sy, t), M_1(x, STx, t), \\ M_2(y, Tx, t), M_2(y, TSy, t), M_2(Tx, TSy, t) \end{array} \right) &> 0 \\ \phi_2 \left(\begin{array}{l} M_2(Tx, TSy, t), M_2(y, Tx, t), M_2(y, TSy, t), \\ M_3(x, Sy, t), M_3(x, STx, t), M_3(Sy, STx, t) \end{array} \right) &> 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$, $y \in Y$ avec $x \neq Sy$ et $y \neq Tx$ pour tout $t > 0$ alors $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$.

Supposons que l'un des conditions suivantes sont vérifie :

$a_1)$ (X, M_1, θ_1) est séquentiellement compact et ST est continue dans X ,

$a_2)$ (Y, M_2, θ_2) est séquentiellement compact et TS est continue dans Y .

Alors ST admet un point fixe unique $u \in X$ et TS admet un point fixe unique $v \in Y$.

De plus, $Sv = u$ et $Tu = v$.

En généralisant le théorème précédent, F. Merghadi et A. Aliouche ont démontré le théorème sous-dessous

Théorème 2.2 [24] Soient (X_i, M_i, θ_i) $i = \overline{1, n}$ sont n -espaces métriques flous, $A_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ et $A_n : X_n \rightarrow X_1$ sont des applications satisfaisant

$$\phi_1 \left(\begin{array}{l} M_1(A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 x_1, t), M_1(x_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, t), \\ M_1(x_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 x_1, t), M_2(x_2, A_1 x_1, t), \\ M_2(x_2, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, t), M_2(A_1 x_1, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.1.1)$$

pour tout $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ avec $x_2 \neq x_1 A_1$, et pour tout $t > 0$,

$$\phi_2 \left(\begin{array}{l} M_2(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 x_3, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 x_2, t), \\ M_2(x_2, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 x_3, t), \\ M_2(x_2, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, t), M_3(x_3, A_2 x_2, t), \\ M_3(x_3, A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 x_3, t), \\ M_3(A_2 x_2, A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 x_3, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.1.2)$$

pour tout $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$ avec $x_3 \neq x_2 A_2$, et pour tout $t > 0$,

$$\phi_3 \left(\begin{array}{l} M_3(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4 x_4, A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 x_3, t), M_3(x_3, A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4 x_4, t), \\ M_3(x_3, A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 x_3, t), M_4(x_4, A_3 x_3, t), \\ M_4(x_4, A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4 x_4, t), M_4(A_3 x_3, A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4 x_4, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.1.3)$$

pour tout $x_3 \in X_3$, $x_4 \in X_4$ avec $x_4 \neq x_3 A_3$, et pour tout $t > 0$,

$$\phi_i \left(\begin{array}{c} M_i (A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i x_i, t), \\ M_i (x_i, A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, t), \\ M_i (x_i, A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i x_i, t), M_{i+1} (x_{i+1}, A_i x_i, t), \\ M_{i+1} (x_{i+1}, A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, t), \\ M_{i+1} (A_i x_i, A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.1.i)$$

pour tout $x_i \in X_i$, $x_{i+1} \in X_{i+1}$ avec $x_{i+1} \neq x_i A_i$, $4 \leq i \leq n-1$, et pour tout $t > 0$,

$$\phi_n \left(\begin{array}{c} M_n (A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n x_n, t), \\ M_n (x_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, t), \\ M_n (x_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n x_n, t), M_1 (x_1, A_n x_n, t), \\ M_1 (x_1, A_n A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, t), \\ M_1 (A_n x_n, A_n A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.1.n)$$

pour tout $x_1 \in X_1$, $x_n \in X_n$ avec $x_1 \neq x_n A_n$, et pour tout $t > 0$ alors $\phi_i \in \Phi$, $i = \overline{1, n}$.

Supposons que l'un des conditions suivantes sont vérifie :

a_1) (X_1, M_1, θ_1) est séquentiellement compact et $A_n A_{n-1} \dots A_1$ est continue dans X_1 ,

a_2) (X_2, M_2, θ_2) est séquentiellement compact et $A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2$ est continue dans X_2 ,

a_i) (X_i, M_i, θ_i) est séquentiellement compact et $A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i$ est continue dans X_i ,

$i \geq 3$,

a_n) (X_n, M_n, θ_n) est séquentiellement compact et $A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n$ est continue dans X_n .

Alors $A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i$ admet un point fixe unique $\omega_i \in X_i$ pour tout $i = \overline{1, n}$.

De plus, $A_i \omega_i = \omega_{i+1}$ pour tout $i = \overline{1, n-1}$ et $A_n \omega_n = \omega_1$.

Preuve. Supposons que (X_1, M_1, θ_1) est séquentiellement compact $A_n A_{n-1} \dots A_1$ est continue sur X_1 .
pour chaque $t > 0$, on défini

$$\phi(x_1) = M_1(x_1, A_n A_{n-1} \dots A_1 x_1, t) \text{ pour tout } x_1 \in X_1.$$

Alors, il existe $p_1 \in X_1$ tel que

$$\phi(p_1) = M_1(p_1, A_n A_{n-1} \dots A_1 p_1, t) = \max \{ \phi(x_1) : \text{pour tout } x_1 \in X_1 \},$$

il existe $p_2 \in X_2$ tel que $p_2 = A_1 p_1$, $p_3 \in X_3$ tel que $p_3 = A_2 p_2 = A_2 A_1 p_1$.

De la meme manière, il existe $p_{i-1} \in X_{i-1}$ et $p_i \in X_i$ tel que :

$$p_i = A_{i-1} p_{i-1} = A_{i-1} A_{i-2} p_{i-2} = A_{i-1} A_{i-2} A_{i-3} p_{i-3} = \dots = A_{i-1} A_{i-2} \dots A_2 A_1 p_1, i = \overline{2, n}.$$

Pour $i = n$ on a

$$p_n = A_{n-1}p_{n-1} = A_{n-1}A_{n-2}p_{n-2} = A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}p_{n-3} = \dots = A_{n-1}A_{n-2}\dots A_2A_1p_1.$$

Par conséquent

$$\phi(p_1) = M_1(p_1, A_n p_n, t) = \max \{ \phi(x_1) : \text{pour tout } x_1 \in X_1 \}.$$

Supposons que

$$A_1(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2}(p_1) \neq A_1(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), \text{ i.e.,}$$

$$(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2} A_1(p_1) \neq (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1} A_1(p_1)$$

Comme $A_1(p_1) = p_2$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2) \neq (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2) \\ (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-3}(p_2) \neq (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)(p_2) \neq (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^2(p_2) \\ (A_n A_{n-1} \dots A_2 p_2) \neq (A_n A_{n-1} \dots A_2)(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 p_2) \\ (A_{n-1} \dots A_2 p_2) \neq (A_{n-1} \dots A_2)(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 p_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_2 \neq A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 p_2 \\ p_1 \neq A_n A_{n-1} \dots A_1 p_1 \end{array} \right.$$

On pose $x_2 = A_1(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2}(p_1)$ et $x_1 = (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1)$ dans (2.1.1) on a

$$\phi_1 \left(\begin{array}{l} M_1((A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), t), \\ M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2}(p_1), t), \\ M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), t), \\ M_2((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2} A_1(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1} A_1(p_1), t), \\ M_2((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2} A_1(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2} A_1(p_1), t), \\ M_2((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1} A_1(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-2} A_1(p_1), t) \end{array} \right) > 0$$

Donc

$$\phi_1 \begin{pmatrix} M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)^n(p_1), t), \\ M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), t), \\ M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_1)^n(p_1), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t) \end{pmatrix} > 0 \quad (2.2.1)$$

Alors

$$\begin{aligned} & \phi((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1)) \\ &= M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)^n(p_1), t) \\ &> M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2)). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

On pose $x_2 = (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2)$ et $x_3 = A_2(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-3}(p_2)$ dans (2.1.2) on a :

$$\phi_2 \begin{pmatrix} M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2)(A_1 A_n A_{1-n} \dots A_2)^{n-3}(p_2), \\ (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2)(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2)(A_1 A_n A_{1-n} \dots A_2)^{n-3}(p_2), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), t), \\ M_3((A_2 A_1 A_n A_{1-n} \dots A_3)^{n-3} A_2(p_2), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2} A_2(p_2), t), \\ M_3((A_2 A_1 A_n A_{1-n} \dots A_3)^{n-3} A_2(p_2), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)(A_2 A_1 A_n A_{1-n} \dots A_3)^{n-3}(p_2), t), \\ M_3((A_2 A_1 A_n A_{1-n} \dots A_3)^{n-3} A_2(p_2), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)(A_2 A_1 A_n A_{1-n} \dots A_3)^{n-3} A_2(p_2), t) \end{pmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \phi_2 \begin{pmatrix} M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), t), \\ M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t), \\ M_3((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), t), \\ M_3((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), t), \\ M_3((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), t) \end{pmatrix} > 0$$

Alors

$$\begin{aligned} & M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t) \\ &> M_3((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), t) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

On pose $x_3 = (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3)$ et $x_4 = A_3(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-4}(p_3)$ dans (2.1.3) on a

$$\phi_3 \left(\begin{array}{c} M_3 \left(\begin{array}{c} (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)(A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-4}(p_3), \\ (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}, t \end{array} \right), \\ M_3 \left((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-4}(p_3), t \right), \\ M_3 \left((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), t \right), \\ M_4 \left((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-4} A_3(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3} A_3(p_3), t \right), \\ M_4 \left((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-4} A_3(p_3), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-4} A_3(p_3), t \right), \\ M_4 \left((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3} A_3(p_3), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)(A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-4} A_3(p_3), t \right) \end{array} \right) > 0$$

Donc

$$\phi_3 \left(\begin{array}{c} M_3 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}, t \right), \\ M_3 \left((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), t \right), \\ M_3 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), t \right), \\ M_4 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-4}(p_4), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_4), t \right), \\ M_4 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-4}(p_4), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_4), t \right), \\ M_4 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_3), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_3), t \right) \end{array} \right) > 0$$

Alors

$$\begin{aligned} & M_3 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}, t \right) \\ & > M_4 \left((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-4}(p_4), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_4), t \right) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

De la même manière, on obtient pour tout $i = \overline{1, n-1}$

$$\begin{aligned} & M_i \left((A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i)^{n-i}(p_i), (A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i)^{n-i+1}(p_i), t \right) \\ & > M_{i+1} \left((A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1})^{n-i-1}(p_{i+1}), (A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1})^{n-i}(p_{i+1}), t \right) \end{aligned} \quad (2.2.i)$$

Par exemple, si $i = n-1$ alors

$$\begin{aligned} & M_{n-1} \left((A_{n-2} A_{n-3} \dots A_1 A_n A_{n-1})(p_{n-1}), (A_{n-2} A_{n-3} \dots A_1 A_n A_{n-1})^2(p_{n-1}), t \right) \\ & > M_n(p_n, (A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n)(p_n), t) \end{aligned} \quad (2.2.n-1)$$

Maintenant, on pose $x_1 = p_1$ et $x_n = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1(p_1) = p_n$ dans (2.1.n) on obtient

$$\phi_n \left(\begin{array}{c} M_n(p_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n(p_n), t), \\ M_n(p_n, p_n, t), \\ M_n(p_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n(p_n), t), \\ M_1(p_1, A_n p_n, t), \\ M_1(p_1, A_n p_n, t), \\ M_1(A_n p_n, A_n p_n, t), \end{array} \right) > 0$$

d'ou

$$\begin{aligned} M_n(p_n, A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1A_n(p_n), t) &> M_1(p_1, A_n p_n, t) \\ M_n(p_n, A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1A_n(p_n), t) &> M_1(p_1, A_n A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1, t) \end{aligned} \quad (2.2.n)$$

De (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), ..., (2.2.i), ..., (2.2.n - 1) et (2.2.n) on a :

$$\begin{aligned} \phi((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1)) &= M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1), (A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1)^n(p_1), t) \\ &> M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M_2((A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2), (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2), t) \\ &> M_3((A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}(p_3), t) \\ &M_3((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_3), (A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3)^{n-2}, t) \\ &> M_4((A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-4}(p_4), (A_3 A_2 A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4)^{n-3}(p_4), t) \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M_i((A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_i)^{n-i}(p_i), A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_i)^{n-i+1}(p_i), t) \\ &> M_{i+1}((A_iA_{i-1}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1})^{n-i-1}(p_{i+1}), (A_iA_{i-1}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1})^{n-i}(p_{i+1}), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n(p_n, A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1A_n(p_n), t) &> M_1(p_1, A_n A_{n-1}A_{n-2}\dots A_1, t) \\ \phi((A_n A_{n-1} \dots A_1)^{n-1}(p_1)) &> \phi(p_1) = \max \{ \phi(x_1) : \text{pour tout } x_1 \in X_1 \} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

qu'elle est une contradiction. Alors

$$(A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-2}(p_2) = (A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2)^{n-1}(p_2) \quad (2.3.2)$$

En utilisant (2.3.2), on a :

$$\begin{aligned} p_2 &= A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2(p_2) = A_1 A_n A_{n-1} \dots A_3(p_3) = A_1 A_n A_{n-1} \dots A_4(p_4) = \dots \\ &= A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} A_i(p_i) = \dots = A_1 A_n A_{n-1}(p_{n-1}) = A_1 A_n(p_n) = A_1 p_1 \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} p_1 &= A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1(p_1) = A_n A_{n-1} \dots A_2(p_2) = A_n A_{n-1} \dots A_3(p_3) = \dots \\ &= A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} A_i(p_i) = \dots = A_n(p_n). \end{aligned}$$

Pour tous $i \in \overline{1, n}$, il existe p_i dans X_i tel que

$$\begin{aligned} &A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i(p_i) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1}(p_{i+1}) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+2}(p_{i+2}) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+3}(p_{i+3}) \\ &= \dots \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1}(p_{n-1}) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n(p_n) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1(p_1) \\ &= p_i. \end{aligned}$$

Pour l'unicité de p_1 , supposons qu'il existe z_1 dans X_1 tel que $A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1(z_1) = z_1$ avec $z_1 \neq p_1$ et pour tous $i \in \overline{2, n}$, $z_i = A_{i-1} z_{i-1}$ dans X_i . Ensuite :

$$\begin{aligned} A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1(z_1) &\neq A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1(p_1) \\ A_{n-2} \dots A_2 A_1(z_1) &\neq A_{n-2} \dots A_2 A_1(p_1) \\ A_{n-2} \dots A_2 A_1(z_1) &\neq A_{n-2} \dots A_2 A_1(p_1) \\ A_2 A_1(z_1) &\neq A_2 A_1(p_1) \\ A_1(z_1) &\neq A_1(p_1) \end{aligned}$$

On pose $x_1 = p_1$ et $x_2 = A_1 z_1 = z_2$ dans (2.1.1) on a

$$\phi_1 \left(\begin{array}{l} M_1(A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 z_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 p_1, t), \\ M_1(p_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 z_1, t), \\ M_1(p_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 p_1, t), M_2(A_1 z_1, A_1 p_1, t), \\ M_2(A_1 z_1, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 z_1, t), \\ M_2(A_1 p_1, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 z_1, t) \end{array} \right) > 0$$

Et donc

$$M_1(z_1, p_1, t) > M_2(z_2, p_2, t) \quad (2.3.3)$$

On pose $x_3 = A_2A_1p_1 = A_2p_2 = p_3, x_2 = A_1z_1 = z_2$ dans (2.1.2) on a

$$\phi_2 \left(\begin{array}{c} M_2(A_1A_nA_{n-1}\dots A_3A_2p_2, A_1A_nA_{n-1}\dots A_3A_2z_2, t), \\ M_2(z_2, A_1A_nA_{n-1}\dots A_3A_2p_2, t), \\ M_1(z_2, A_1A_nA_{n-1}\dots A_2z_2, t), M_3(p_3, A_2z_2, t), \\ M_3(p_3, A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_3p_3, t), \\ M_3(A_2z_2, A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_3p_3, t) \end{array} \right) > 0$$

Et ainsi de

$$M_2(z_2, p_2, t) > M_3(z_3, p_3, t) \quad (2.3.4)$$

De la même manière, on pose pour tout $i = \overline{3, n-1}, x_{i+1} = A_iA_{i-1}\dots A_2A_1p_1 = A_ip_i = p_{i+1}$ et $x_i = A_{i-1}z_{i-1} = z_i$ dans (2.1.i) on obtient

$$\phi_i \left(\begin{array}{c} M_i(A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1}A_ip_i, A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_iz_i, t), \\ M_i(z_i, A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1}A_ip_i, t), \\ M_i(z_i, A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_iz_i, t), M_{i+1}(p_{i+1}, A_iz_i, t), \\ M_{i+1}(p_{i+1}, A_iA_{i-1}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1}p_{i+1}, t), \\ M_{i+1}(A_iz_i, A_iA_{i-1}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1}p_{i+1}, t) \end{array} \right) > 0$$

Et ainsi de

$$M_i(z_i, p_i, t) > M_{i+1}(z_{i+1}, p_{i+1}, t) \quad (2.3.i)$$

On pose $x_1 = A_nA_{n-1}\dots A_2A_1p_1 = A_np_n = p_1$ et $x_n = A_{n-1}\dots A_2A_1A_nz_n = z_n$ dans (2.1.n) on obtient :

$$\phi_n(M_n(p_n, z_n, t), M_n(z_n, p_n, t), 1, M_1(p_1, z_1, t), 1, M_1(z_1, p_1, t)) > 0$$

Et ainsi de

$$M_n(p_n, z_n, t) > M_1(p_1, z_1, t) \quad (2.3.n)$$

A l'aide de (2.3.3), (2.3.4), (2.3.i) et (2.3.n) on obtient

$$M_1(p_1, z_1, t) > M_1(p_1, z_1, t)$$

Qu'elle est une contradiction. D'où p_1 est le point fixe unique de $A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1$.

De même, nous pouvons l'unicité des points fixes de $A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i$, pour tout $i = \overline{2, n}$.

De la même, le théorème (2.2) tient si $(a_i), i \geq 2$ est satisfait.

Exemple 2.2 Soient $(M_i, X_i, \theta_i), i = \overline{1, n}$ sont des n -espaces métriques flous

$M_i(x_i, y_i, t) = \frac{t}{t + |x_i - y_i|}$ pour $i = \overline{1, n}$ et $X_1 = [0, 1], X_i =]i - 1, i[$, pour tout $i \geq 2$.

On défini $A_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ et $A_n : X_n \rightarrow X_1, \forall i = \overline{1, n-1}$ par :

$$A_1 x_1 = \begin{cases} \frac{5}{4} \text{ si } x_1 \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{3}{2} \text{ si } x_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

$$A_i x_i = \begin{cases} i + \frac{1}{4} \text{ si } x_i \in]i - 1, i - \frac{3}{4}[\\ i + \frac{1}{2} \text{ si } x_i \in [i - \frac{3}{4}, i] \end{cases} \text{ pour tout } i = \overline{2, n-1},$$

$$A_n x_n = \begin{cases} \frac{3}{4} \text{ si } x_n \in]n - 1, n - \frac{3}{4}[\\ 1 \text{ si } x_n \in [n - \frac{3}{4}, n[\end{cases}$$

Soit $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = \phi$ et $\phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \min\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$.

Notons qu'il existe w_i dans X_i tel que :

$$(A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n \dots A_i) w_i = w_i, \forall i = \overline{1, n}$$

a) Pour $i = n$ on a $(A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n) w_n = w_n$ si $w_n = n - \frac{1}{2}$

$$(A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n) (n - \frac{1}{2}) = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 (1),$$

$$A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 (1) = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_2 (\frac{3}{2}),$$

$$A_{n-1} A_{n-2} \dots A_2 (\frac{3}{2}) = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_3 (\frac{5}{2}),$$

$$\dots = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_{i+1} (i + \frac{1}{2}) = \dots$$

$$= A_{n-1} A_{n-2} (n - \frac{5}{2}) = A_{n-1} (n - \frac{3}{2})$$

$$= n - \frac{1}{2}.$$

Puisque $A_{n-1} x_{n-1} = \begin{cases} n - \frac{3}{4} \text{ si } x_i \in]n - 2, n - \frac{7}{4}[\\ n - \frac{1}{2} \text{ si } x_i \in [n - \frac{7}{4}, n - 1] \end{cases}$, donc $n - \frac{3}{2} \in [n - \frac{7}{4}, n - 1[$.

b) On remarque que pour tout $i = \overline{1, n-1}$ et $x_i \in [i - \frac{3}{4}, i[; A_i x_i \in [(i+1) - \frac{3}{4}, i+1[$ et $A_n x_n \in [\frac{1}{2}, 1[$ pour tout $x_n \in (n - \frac{3}{4}, n)$, alors il existe $w_i = i + \frac{1}{2}$ tel que :

$$(A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n \dots A_i) (i + \frac{1}{2}) = i + \frac{1}{2} \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n-1$$

De plus, $A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 A_1$ est continue dans X_1 par ce que $x = \frac{1}{2}$ est le point de discontinuité de A_1 on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 A_1 x &= A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 \left(\frac{3}{2}\right) = \\ A_n A_{n-1} \dots A_3 \left(2 + \frac{1}{2}\right) &= A_n A_{n-1} \dots A_4 \left(3 + \frac{1}{2}\right) = \\ A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} A_i \left(i - \frac{1}{2}\right) &= \dots = \\ = A_n A_{n-1} \left(n - \frac{3}{2}\right) &= A_n \left(n - \frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 A_1 x &= A_n A_{n-1} \dots A_3 A_2 \left(\frac{3}{2}\right) = \\ A_n A_{n-1} \dots A_3 \left(2 + \frac{1}{2}\right) &= A_n A_{n-1} \dots A_4 \left(3 + \frac{1}{2}\right) = \\ A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} A_i \left(i - \frac{1}{2}\right) &= \dots = A_n A_{n-1} \left(n - \frac{3}{2}\right) = A_n \left(n - \frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

c) Les inégalités (2.i) pour tout $i = \overline{1, n}$ sont satisfaits puisque la valeur du coté gauche de chaque inégalité est 1. En fait ,

$$M_i(A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i x_i, t) = 1$$

pour tout $i = \overline{1, n-1}$ on a :

(1) si $x_i \in]i-1, i - \frac{3}{4}[$ on a :

$$\begin{aligned} A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i x_i &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} \left(i + \frac{1}{4}\right) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+2} \left(\left(i + 1\right) + \frac{1}{2}\right) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \left(\left(n - 2\right) + \frac{1}{2}\right) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_2 A_1 (1) \\ &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ A_{i-1} \left(\left(i - 2\right) + \frac{1}{2}\right) &= (i + 1) + \frac{1}{2} = i - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) Si $x_i \in [i - \frac{3}{4}, i[$ on obtient

$$A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i x_i = A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} \left(i + \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1} \left((n-2) + \frac{1}{2} \right), \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_n \left(n - \frac{1}{2} \right), \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_2A_1(1) \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & = A_{i-1} \left((i-2) + \frac{1}{2} \right) = (i-1) + \frac{1}{2} = i - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(3) Si $x_{i+1} \in [i, i + \frac{1}{4}[$ on obtient

$$A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1}x_{i+1} = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+2} \left((i+1) + \frac{1}{4} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_n \left(n - \frac{1}{2} \right), \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_2(1) \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & = A_{i-1} \left((i-2) + \frac{1}{2} \right) = (i-1) + \frac{1}{2} = i - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(4) Si $x_{i+1} \in [i + \frac{1}{4}, i + 1[$ on obtient

$$A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+1}x_{i+1} = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_nA_{n-1}\dots A_{i+2} \left((i+1) + \frac{1}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_n\left(n - \frac{1}{2}\right), \\
 & = A_{i-1}A_{i-2}\dots A_1A_2(1) \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & = A_{i-1}\left((i-2) + \frac{1}{2}\right) = (i-1) + \frac{1}{2} = i - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Alors, toutes les conditions de le théorème (2.2) sont satisfaites.

Si on prend $n = 5$ dans le théorème (2.2), on trouve le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 [24] Soient (X_i, M_i, θ_i) $i = \overline{1, 5}$ sont 5-espaces métriques flous , $A_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$, $i = \overline{1, 4}$ et $A_n : X_n \rightarrow X_1$ sont des applications satisfaisant

$$\phi_1 \left(\begin{array}{l} M_1(A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, A_nA_{n-1}\dots A_2A_1x_1, t), M_1(x_1, A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, t), \\ M_1(x_1, A_nA_{n-1}\dots A_2A_1x_1, t), M_2(x_2, A_1x_1, t), \\ M_2(x_2, A_1A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, t), M_2(A_1x_1, A_1A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.4.1)$$

pour tout $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ avec $x_2 \neq x_1A_1$, et pour tout $t > 0$,

$$\phi_2 \left(\begin{array}{l} M_2(A_1A_nA_{n-1}\dots A_3x_3, A_1A_nA_{n-1}\dots A_3A_2x_2, t), \\ M_2(x_2, A_1A_nA_{n-1}\dots A_3x_3, t), \\ M_2(x_2, A_1A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, t), M_3(x_3, A_2x_2, t), \\ M_3(x_3, A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_3x_3, t), \\ M_3(A_3x_3, A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_3x_3, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.4.2)$$

pour tout $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$ avec $x_3 \neq x_2A_2$, et pour tout $t > 0$,

$$\phi_3 \left(\begin{array}{l} M_3(A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, A_nA_{n-1}\dots A_3x_3, t), M_3(x_3, A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_2x_2, A_nA_{n-1}\dots A_4x_4, t), \\ M_3(x_3, A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_3x_3, t), M_4(x_4, A_3x_3, t), \\ M_4(x_4, A_3A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_4x_4, t), M_4(A_3x_3, A_3A_2A_1A_nA_{n-1}\dots A_4x_4, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.4.3)$$

pour tout $x_3 \in X_3$, $x_4 \in X_4$ avec $x_4 \neq x_3A_3$, et pour tout $t > 0$:

$$\phi_4 \left(\begin{array}{c} M_4(A_3A_2A_1A_5x_5, A_3A_2A_1A_5A_4x_4, t), \\ M_4(x_4, A_3A_2A_1A_5x_5, t), \\ M_4(x_4, A_3A_2A_1A_5A_4x_4, t), M_5(x_5, A_4x_4, t), \\ M_5(x_5, A_4A_3A_2A_1A_5x_5, t), \\ M_5(A_4x_4, A_4A_2A_2A_1A_5x_5, t) \end{array} \right) > 0 \quad (2.4.4)$$

pour tout $x_4 \in X_4$, $x_5 \in X_5$ avec $x_5 \neq x_4A_4$, et pour tout $t > 0$:

$$\phi_5 \left(\begin{array}{c} M_5(A_4A_3A_2A_1x_1, A_4A_3A_2A_1A_5x_5, t), \\ M_5(x_5, A_4A_3A_2A_1x_1, t), \\ M_5(x_5, A_4A_3A_2A_1A_5x_5, t), M_1(x_1, A_5x_5, t) \end{array} \right) > 0$$

pour tout $x_1 \in X_1$, $x_5 \in X_5$ avec $x_1 \neq x_5A_5$, et pour tout $t > 0$:

$A_5A_4A_3A_2A_1$ est continue dans X_1

a_1) (X_1, M_1, θ_1) est séquentiellement compact et $A_5A_4A_3A_2A_1$ est continue dans X_1 ,

a_2) (X_2, M_2, θ_2) est séquentiellement compact et $A_1A_5A_4A_3A_2$ est continue dans X_2 ,

a_3) (X_3, M_3, θ_3) est séquentiellement compact et $A_2A_1A_5A_4A_3$ est continue dans X_3 ,

a_4) (X_4, M_4, θ_4) est séquentiellement compact et $A_3A_2A_1A_5A_4$ est continue dans X_4 ,

a_5) (X_5, M_5, θ_5) est séquentiellement compact et $A_4A_3A_2A_1A_5$ est continue dans X_5 .

Alors

$A_5A_4A_3A_2A_1$ a un point fixe $w_1 \in X_1$,

$A_1A_5A_4A_3A_2$ a un point fixe $w_2 \in X_2$,

$A_2A_1A_5A_4A_3$ a un point fixe $w_3 \in X_3$,

$A_3A_2A_1A_5A_4$ a un point fixe $w_4 \in X_4$,

$A_4A_3A_2A_1A_5$ a un point fixe $w_5 \in X_5$.

De plus, $A_1w_1 = w_2$, $A_2w_2 = w_3$, $A_3w_3 = w_4$, $A_4w_4 = w_5$ et $A_5w_5 = w_1$.

2.2 Théorèmes de point fixe dans n -espaces métriques flous complet

Définition 2.2 [25] M est une fonction continue sur $X^2 \times (0, 1)$.

Nous notons Ψ l'ensemble de toutes les fonctions $\psi : [0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]$ tel que

i) ψ est semi-continue supérieur dans chaque variable.

ii) ψ décroissante en 3ième et 4ième variable.

iii) si $\psi(u, v, 1, u) \geq 0$ ou $\psi(u, 1, 1, v) \geq 0$ ou $\psi(u, 1, v, 1) \geq 0$ pour tout $u, v \in [0, 1]$, alors $u \geq v$.

Lemme 2.1 [25] La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(x, y, t) = 1$ pour $x, y \in X$. S'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$M(x_{n+1}, x_n, kt) \geq M(x_n, x_{n-1}, t)$$

alors $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X .

Théorème 2.3 [25] Soient $(X_i, M_i, \theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n -espaces métriques flous complet avec $M_i(x, x_i, t) \rightarrow 1$ comme $t \rightarrow \infty$ pour tout $x, x_i \in X_i$ et $\{A_i\}_{i=1}^{i=n} A_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ et $A_n : X_n \rightarrow X_1$, satisfaire les inégalités

$$\phi_1 \left(\begin{array}{c} M_1(A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 x_1, kt), \\ M_2(x_2, A_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, t), \\ M_1(x_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 x_2, t), M_1(x_1, A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 x_1, t) \end{array} \right) \geq 0 \quad (2.4.5)$$

pour tout $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ et $t > 0$, en général,

$$\phi_i \left(\begin{array}{c} M_i(A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_i x_i, kt), \\ M_{i+1}(x_{i+1}, A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, t), \\ M_i(x_i, A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{i+1} x_{i+1}, t), \\ M_i(x_i, A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i x_i, t) \end{array} \right) \geq 0 \quad (2.4.i)$$

pour tout $x_i \in X_i, x_{i+1} \in X_{i+1}, t > 0$ et $i = 2, \dots, n-1$ et

$$\phi_n \left(\begin{array}{c} M_n(A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n x_n, kt), \\ M_1(x_1, A_n A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, t), \\ M_n(x_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 x_1, t), \\ M_n(x_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n x_n, t) \end{array} \right) \geq 0 \quad (2.4.n)$$

pour tout $x_1 \in X_1, x_n \in X_n$ et $t > 0$ ou $\phi_i \in \Psi, i = 1, 2, \dots, n$ et $0 < k < 1$ alors $A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i$ admet un point fixe unique $p_i \in X_i$ pour $i = 1, \dots, n$ de plus, $A_i p_i = p_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $A_n p_n = p_1$.

Preuve. Soient $\{x_r^{(1)}\}, \{x_r^{(2)}\}, \dots, \{x_r^{(i)}\}, \dots, \{x_r^{(n)}\}, r \in \mathbb{N}$ sont des suites dans $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ respectivement. Maintenant, soit $x_0^{(1)}$ un point arbitraire dans X_1 , nous définissons les suites $\{x_r^{(i)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ pour $i = 1, \dots, n$ par

$$\begin{aligned} x_r^{(1)} &= (A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)} \\ x_r^{(i)} &= A_{i-1} A_{i-2} \dots A_1 (A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)} \text{ pour } i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 2, \dots, x_r^{(1)} \neq x_{r+1}^{(1)}$ on appliquons l'inégalité (2.4.5) pour $x_2 = A_1 (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{r-1} x_0^{(1)}$, $x_1 = (A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \phi_1 \left(\begin{array}{l} M_1 \left((A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}, (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, kt \right), \\ M_2(A_1(A_n A_{n-1} \dots A_1)^{r-1} x_0^{(1)}, A_1(A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}, t), \\ M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}, (A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}, t), \\ M_1((A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}, (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, t) \end{array} \right) \\ &= \phi_1 \left(M_1 \left(x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, kt \right), M_2 \left(x_{r-1}^{(2)}, x_r^{(2)}, t \right), 1, M_1 \left(x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, t \right) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

D'où la relation implicite on a :

$$M_1 \left(x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, kt \right) \geq M_2 \left(x_{r-1}^{(2)}, x_r^{(2)}, t \right)$$

$$M_1 \left(x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, kt \right) \geq M_2 \left(x_{r-1}^{(2)}, x_r^{(2)}, t \right) \quad (2.5.1)$$

On applique l'inégalité (2.4.n) pour $x_{i+1} = A_i \dots A_1 (A_n \dots A_1)^{r-1} x_0^{(1)}$ et $x_i = A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \phi_i \left(\begin{array}{l} M_i(A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, A_{i+1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, kt), \\ M_{i+1}(x_{i+1} = A_i \dots A_1 (A_n \dots A_1)^{r-1} x_0^{(1)}, A_i \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, t), \\ M_i(A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, t), \\ M_i(A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, A_{i-1} \dots A_1 A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, t) \end{array} \right) \\ &= \phi_i \left(\begin{array}{l} M_i \left(x_r^{(i)}, x_{r+1}^{(i)}, kt \right), M_{i+1} \left(x_{r-1}^{(i+1)}, x_r^{(i+1)}, t \right), \\ 1, M_i \left(x_r^{(i)}, x_{r+1}^{(i)}, t \right) \end{array} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$M_i \left(x_r^{(i)}, x_{r+1}^{(i)}, kt \right) \geq M_{i+1} \left(x_{r-1}^{(i+1)}, x_r^{(i+1)}, t \right) \quad (2.5.i)$$

Pour $i = \overline{2, n-1}$ et $r = \overline{1, n}$ on applique l'inégalité (2.4.n) pour $x_n = A_{n-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}$ et $x_1 = (A_n A_{n-1} \dots A_1)^r x_0^{(1)}$ on a :

$$\begin{aligned} & \phi_n \left(\begin{array}{l} M_n(A_{n-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, A_{n-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, kt), \\ M_1((A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, (A_n \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, t), \\ M_n(x_n = A_{n-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, A_{n-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, t), \\ M_n(A_{n-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^{(1)}, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{r+1} x_0^{(1)}, t) \end{array} \right) \\ &= \phi_n \left(\begin{array}{l} M_n \left(x_r^{(n)}, x_{r+1}^{(n)}, kt \right), M_1 \left(x_{r-1}^{(1)}, x_r^{(1)}, t \right), \\ 1, M_n \left(x_r^{(n)}, x_{r+1}^{(n)}, t \right) \end{array} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$M_n \left(x_r^{(n)}, x_{r+1}^{(n)}, kt \right) \geq M_1 \left(x_{r+1}^{(1)}, x_r^{(1)}, t \right) \quad (2.5.n)$$

d'après (2.5.1), (2.5.i) et (2.5.n) pour n suffisamment grand on obtient :

$$\begin{aligned} M_i(x_r^{(i)}, x_{r+1}^{(i)}, kt) &\geq M_{i+1}(x_{r+1}^{(i+1)}, x_r^{(i+1)}, t) \\ M_{i+1}(x_{r-1}^{(i+1)}, x_r^{(i+1)}, t) &= M_{i+1}(x_{r-1}^{(i+1)}, x_r^{(i+1)}, \frac{kt}{k}) \\ &\geq M_{i+2}(x_{r-2}^{(i+2)}, x_{r-1}^{(i+2)}, \frac{t}{k}) \\ &\geq M_{i+3}(x_{r-3}^{(i+3)}, x_{r-2}^{(i+3)}, \frac{t}{k^2}) \\ &\geq M_{i+4}(x_{r-4}^{(i+4)}, x_{r-3}^{(i+4)}, \frac{t}{k^3}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\geq M_n(x_{r+i-n}^{(n)}, x_{r+i-n+1}^{(n)}, \frac{t}{k^{n-i-1}}) \\ &\geq M_1(x_{r+i-n}^{(1)}, x_{r+i-n+1}^{(1)}, \frac{t}{k^{n-i}}) \\ &\geq M_2(x_{r+i-n-1}^{(2)}, x_{r+i-n}^{(2)}, \frac{t}{k^{n-i+1}}) \\ &\geq M_3(x_{r+i-n-2}^{(3)}, x_{r+i-n-1}^{(3)}, \frac{t}{k^{n-i+2}}) \\ &\geq M_4(x_{r+i-n-3}^{(4)}, x_{r+i-n-2}^{(4)}, \frac{t}{k^{n-i+3}}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\geq M_i(x_{r-n+1}^{(i)}, x_{r-n+2}^{(i)}, \frac{t}{k^{n-1}}) \end{aligned}$$

si $r = n$

$$\begin{aligned} &\geq M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \frac{t}{k^{n-1}}) \\ &M_{i+1}(x_0^{(i+1)}, x_1^{(i+1)}, \frac{t}{k^n}) \end{aligned}$$

Deput $0 \leq k \leq 1$. D'apret le lemme (2.1) la suite $\{x_r^{(i)}\}$ est de Cauchy dans X_i avec une limit p_i dans X_i pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Pour prouver que p_i est un point fixe de $A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i$, pour $i = 2, \dots, n-1$, supposons que $A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i \neq p_i$.

En utilisant l'inégalité (2.4.i) pour $x_i = p_i$ et $x_{i+1} = x_r^{(i+1)} = A_i A_{i-1} \dots A_1 (A_n \dots A_1)^r x_0^1$ obtient :

$$\phi_i \left(\begin{array}{c} M_i(x_{r+1}^{(i)}, A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i, kt), \\ M_{i+1}(x_{r+1}^{(i+1)}, x_r^{(i+1)}, t), M_i(p_i, x_r^{(i)}, t), \\ M_i(p_i, A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i, t) \end{array} \right) \geq 0$$

Pour $r \rightarrow +\infty$ on a :

$$\phi_i \left(\begin{array}{c} M_i(p_i, A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i, kt), 1, 1, \\ M_i(p_i, A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i, t) \end{array} \right) \geq 0.$$

Il découle de (iii) que $p_i = A_{i-1}\dots A_1 A_n \dots A_i p_i$ dans X_i pour $i = \overline{2, n-1}$

et

$$p_i = A_{i-1} p_{i-1} = \dots = A_{i-1} A_{i-2} \dots A_2 A_1 p_1.$$

Pour le cas $i = 1$, nous utilisons (2.4.5) pour $x_1 = p_1$ et $x_2 = A_1 (A_n A_{n-1} \dots A_1)^{r-1} x_0^{(1)} = x_r^{(2)}$ en donnant :

$$\phi_1 \left(\begin{array}{c} M_1(x_{r+1}^{(1)}, A_n A_{n-1} \dots A_1 p_1, kt) \\ , M_2(x_r^{(2)}, x_{r+1}^{(2)}, t), M_1(p_1, x_r^{(1)}, t), \\ M_1(p_1, A_n A_{n-1} \dots A_1 p_1, t) \end{array} \right) \geq 0$$

pour $n \rightarrow \infty$ on a

$$\phi_1 \left(\begin{array}{c} M_1(p_1, A_n A_{n-1} \dots A_1 p_1, kt), 1, 1, \\ M_1(p_1, A_n A_{n-1} \dots A_1 p_1, t) \end{array} \right) \geq 0$$

Il découle de (iii) que $A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 p_1 = p_1$ dans X_1 .

Finalement, si $i = n$ en utilisant l'inégalité (2.4.n) pour $x_n = p_n$ et $x_1 = x_r^{(1)}$ on obtient :

$$\phi_n \left(\begin{array}{c} M_n(x_{r+1}^{(n)}, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n p_n, kt) \\ , M_1(x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}, t), M_n(p_n, x_{r+1}^{(n)}, t), \\ M_n(p_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n p_n, t) \end{array} \right) \geq 0$$

Pour $r \rightarrow +\infty$ on a :

$$\phi_n \left(\begin{array}{c} M_n(p_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n p_n, kt), 1, 1, \\ M_n(p_n, A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n p_n, t) \end{array} \right) \geq 0$$

Et par (iii), $p_n = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 A_n p_n$ dans X_n et $p_n = A_{n-1} p_{n-1} = \dots = A_{n-1} A_{n-2} \dots A_2 A_1 p_1$.

Pour prouver l'unicité supposons que $A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_i$ admet un deuxième point fixe $z_1 \neq p_1$ dans X_1 . En utilisant l'inégalité (2.4.5) pour $x_{i+1} = A_i z_i$ et $x_i = p_i$ on a :

$$\phi_i \left(\begin{array}{c} M_i(A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_i z_i, A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_i p_i, kt), \\ M_{i+1}(A_i z_i, A_i \dots A_1 A_n \dots A_i z_i, t), \\ M_i(p_i, A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_i z_i, t) M_1(p_i, A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_i p_i, t) \end{array} \right)$$

Et comme

$$\varphi_i(M_i(z_i, p_i, kt), 1, M_i(p_i, z_i, t), 1) \geq 0$$

qui implique que $z_i = p_i$. On prouve l'unicité de p_i dans X_i pour $i = 2, \dots, n - 1$

L'unicité de p_1 dans X_1 et p_n dans X_n de la même manière.

Finallement, on note que :

$$A_i p_i = A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_{i+1} (A_i p_i),$$

par conséquent, p_i est un point fixe unique de $A_i A_{i-1} \dots A_1 A_n \dots A_{i+1}$. Il suit que $A_i p_i = p_{i+1}$. pour tout $i = 1, \dots, n - 1$.

De la même manière $A_n p_n = p_1$. ■

Chapitre 3

Théorèmes de point fixe commun sous conditions contractives du type intégral dans un espace semi-métrique flou intuitionniste

Le but de ce chapitre est de prouver des théorèmes de point fixe commun pour une famille d'applications dans un espace symétrique flou intuitionniste à l'aide de la propriété (E.A) et la compatibilité de fonctions.

Théorèmes de point fixe commun sous des conditions contractives de type integral dans un espace symétrique

Dans ce paragraphe on va mentionner un théorème de point fixe commun de type intégral pour une famille d'applications dans un espace symétrique. Ce théorème a été établi par F. Merghadi et C. Godet-Thobie [26]. Tout d'abord nous commençons par la définition de la fonction implicite.

Définition 3.1 [32] soit \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions continues $F : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

$(\varphi_1) : F \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, 0, 0, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) > 0$ pour tout $u > 0$, ou $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfait

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t) dt > 0, \forall \varepsilon > 0$$

$(\varphi_2) : \text{il existe } 0 < \alpha < 1 \text{ de telle que pour tout } u, v \geq 0, \text{ si } (F_a) \text{ ou } (F_b) \text{ est satisfait}$

$$(F_a) F \left(\int_0^u \varphi(t)dt, \int_0^v \varphi(t)dt, \int_0^u \varphi(t)dt, \int_0^v \varphi(t)dt, \int_0^u \varphi(t)dt + \int_0^v \varphi(t)dt, 0 \right) \leq 0.$$

$$(F_b) F \left(\int_0^u \varphi(t)dt, \int_0^v \varphi(t)dt, \int_0^v \varphi(t)dt, \int_0^u \varphi(t)dt, 0, \int_0^u \varphi(t)dt + \int_0^v \varphi(t)dt \right) \leq 0.$$

on a $\int_0^u \varphi(t)dt \leq \alpha \int_0^v \varphi(t)dt$.

Exemple 3.1 $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - c \max\{t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}[t_5 + t_6]\}$, avec $c \in [0, 1[$ et $\varphi(t) = 3t^2$.

* $(\varphi_1) \int_0^u \varphi(t)dt = u^3$. Donc, (φ_1) est satisfait de puis $F(u^3, u^3, 0, 0, u^3, u^3) = (1 - c)u^3$.

* (φ_2) pour (F_a) soit $u, v \geq 0$ et

$$F \left(\int_0^u \varphi(t)dt, \int_0^v \varphi(t)dt, \int_0^u \varphi(t)dt, \int_0^v \varphi(t)dt, \int_0^u \varphi(t)dt + \int_0^v \varphi(t)dt, 0 \right) = u^3 - c \max\{u^3, v^3, \frac{1}{2}(u^3 + v^3)\}$$

lequel est ≤ 0 seulement si $u \leq v$ puis il est égal a $u^3 - cv^3$. Avec (φ_2) est satisfait de $\alpha = c$.

De meme, nous montrons (F_b) .

On peut aussi donner :

* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - c \max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$, avec $c \in [0, 1[$ et $\varphi(t) = 3t^2$.

* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \min\{t_1, t_2\} - c \max\{t_3, t_4, t_5, t_6\}$, avec $c \in [0, 1[$ et $\varphi(t) = 3t^2$.

* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - c \max\{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$, avec $c \in [0, 1[$ et $\varphi(t) = 1/(1 + t)$.

Théorème 3.1 [26] soient (X, d) un espace symétrique qui satisfait les propriétés (W_4) , $(H.E)$, (CE_1) et (CE_2) , et $(A_i)_{i \in I}$, A, S et $T, \forall i \in I$, sont des auto-applications de X satisfaisantes

$$AX \subset TX, \text{ et } A_i X \subset SX, \forall i \in I. \quad (3.1)$$

et

$$F \left(\int_0^{d(Ax, A_i y)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(Ax, Sx)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(A_i y, Ty)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(Ax, Ty)} \varphi(t)dt, \int_0^{d(Sx, A_i y)} \varphi(t)dt \right) \leq 0 \quad (3.2)$$

pour tout $i \in I$, et tout $x, y \in X$, avec $F \in \mathcal{F}$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfait $\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0, \forall \varepsilon > 0$.

Supposons que :

i. La paire (A, S) satisfait la propriété $(E.A)$.

ii. La paire (A, S) pour certains $k \in I$, et (A_k, T) sont compatibles.

Si l'un des sous-espaces $AX, SX, A_i X$ et TX de X est fermé, alors A_i, A, S et T ont un point fixe commun unique dans $X, \forall i \in I$.

Preuve. voir [26] ■

3.1 Espace métrique flou intuitionniste

Le concept suivant d'espace métrique flou intuitionniste est donné par Park (2004) avec la définition de l'espace métrique flou de George et Veeramani (1994).

Définition 3.2 [36] *Un espace métrique flou intuitionniste (en court **MFI**) $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ si X un ensemble non vide $*$ est t -norm continue, et \diamond est t -conorm continue, et M, \mathcal{N} des ensembles flous dans $X^2 \times [0, \infty)$, satisfaisant les conditions suivantes pour tout $x, y, z \in X$ et $t, s > 0$:*

1. $M(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t) \leq 1$,
2. $M(x, y, t) > 0$,
3. $M(x, y, t) = 1$ si seulement si $x = y$,
4. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
5. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,
6. $M(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ est continue,
7. $\mathcal{N}(x, y, t) = 0$ si seulement si $x = y$,
8. $\mathcal{N}(x, y, t) = \mathcal{N}(y, x, t)$,
9. $\mathcal{N}(x, y, t) \diamond \mathcal{N}(y, z, s) \geq \mathcal{N}(x, z, t + s)$,
10. $\mathcal{N}(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ est continue.

Alors $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ s'appelle un espace métrique flou intuitionniste dans X .

Exemple 3.2 Soient $X = \mathbb{R}$. Notons que $a * b = ab$ et $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$ pour tout $a, b \in [0, 1]$. Pour tout $t > 0$, on défini :

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|} \text{ et } \mathcal{N}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)} \text{ pour tout } x, y \in X.$$

$$1) M(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|} + \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)} \leq 1.$$

Les conditions 2, 3, 4, 5 et 6 sont satisfaisantes, voir l'exemple (1.12) chapitre 1

$$7) \mathcal{N}(x, y, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$8) \mathcal{N}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{t + d(y, x)} = \mathcal{N}(y, x, t),$$

$$9) \mathcal{N}(x, y, t) \diamond \mathcal{N}(y, z, s) \geq \mathcal{N}(x, z, t + s)$$

$$\mathcal{N}(x, y, t) \diamond \mathcal{N}(y, z, s) = \min\{1, \mathcal{N}(x, y, t) + \mathcal{N}(y, z, s)\} \geq \mathcal{N}(x, z, t + s)$$

Cas 1 : $\min\{1, \mathcal{N}(x, y, t) + \mathcal{N}(y, z, s)\} = 1$ est triviale.

Cas 2 : $\min \{1, \mathcal{N}(x, y, t) + N(y, z, s)\} = \mathcal{N}(x, y, t) + N(y, z, s)$ alors :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(x, y, t) \diamond N(y, z, s) &= \mathcal{N}(x, y, t) + N(y, z, s) \\
 &= \frac{d(y, x)}{t + d(y, x)} + \frac{d(y, z)}{t + d(y, z)} \\
 &\geq \frac{d(y, x)}{t + s + d(y, z) + d(y, x)} + \frac{d(y, z)}{t + s + d(y, z) + d(y, x)} \\
 &\geq \frac{d(y, x) + d(y, z)}{t + s + d(y, z) + d(y, x)} \\
 &\geq \frac{d(x, z)}{t + s + d(x, z)} \\
 &\geq \mathcal{N}(x, z, t + s).
 \end{aligned}$$

10) Soit $\mathcal{N} :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ avec $\mathcal{N}(x, y, t) \rightarrow \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$

Donc \mathcal{N} est une fonction continue.

Alors $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace métrique flou intuitionniste.

Remarque 3.1 1. Il résulte de la définition que $M(x, y, \cdot)$ est croissante et $\mathcal{N}(x, y, \cdot)$ est décroissante.

2. Les fonctions $M(x, y, t)$, $\mathcal{N}(x, y, t)$ désignent le degré de proximité et le degré de non proximité entre x et y par rapport à t respectivement.

3. Chaque espace métrique flou $(X, M, *)$ est un espace métrique flou intuitionniste de la forme $(X, M, 1 - M, *, \diamond)$ tel que $*$ t -norm, et \diamond t -conorm est associé, i.e. $x \diamond y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$ pour tout $(x, y) \in X^2$ (Lowen, 1996).

4. Si, dans un espace métrique (X, d) , nous définissons $*$ et \diamond par $a * b = ab$ et $a \diamond b = \min \{1, a + b\}$ pour tout $a, b \in [0, 1]$,

$M(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}$ et $N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$, $\forall x, y \in X^2, \forall t \in [0, 1]$, alors $(X, M, *)$ est dit espace métrique flou standart induit par d , alors $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace métrique flou intuitionniste qui s'appelle l'espace métrique flou intuitionniste induit par la métrique d (Park, 2004).

3.2 Espace semi-métrique flou intuitionniste

Dans cette section, nous définissons une nouvelle classe d'espaces semi-métriques flous intuitionnistes introduit par F. Merghadi. et C. Godet. Thobie. Nous étudions certaines propriétés topologiques de ces espaces. Ensuite, nous étendons, dans ce contexte, certaines propriétés classiques utilisées dans l'espace métrique généralisé pour prouver des théorèmes du point fixe commun.

Définition 3.3 [15] Un espace semi-métrique flou (en court **SMF**) $(X, M, *)$ si X un ensemble non vide, $*$ est t -norm continue, et M un ensemble flou dans $X^2 \times [0, \infty)$, satisfaisant les conditions suivantes pour tout $x, y, z \in X$ et $t > 0$,

1. $M(x, y, t) > 0$,
2. $M(x, y, t) = 1$ si seulement si $x = y$,
3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
4. $M(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ est continu.

Définition 3.4 [15] Un espace semi-métrique flou intuitionniste (en court **SMFI**) $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ si X un ensemble non vide $*$ est t -norm continue, et \diamond est t -conorm continue, et M, \mathcal{N} des ensembles flous dans $X^2 \times [0, \infty)$, satisfaisant les conditions suivantes pour tout $x, y, z \in X$ et $t, s > 0$:

1. $M(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t) \leq 1$,
2. $M(x, y, t) > 0$,
3. $M(x, y, t) = 1$ si seulement si $x = y$,
4. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
5. $M(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ est continu,
6. $\mathcal{N}(x, y, t) = 0$ si seulement si $x = y$,
7. $\mathcal{N}(x, y, t) = \mathcal{N}(y, x, t)$,
8. $\mathcal{N}(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ est continu,

Remarque 3.2 i. Dans la définition précédente, les relations (5) et (9) de la définition (3.2) qui sont sorte d'inégalité triangulaire, sont supprimé. Le passage de l'espace **MFI** à l'espace **SMFI** est similaire à celui de l'espace symétrique (semi-métrique).

ii. Il evident que chaque espace **MFI** $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace **SMFI**.

iii. Tout espace semi-métrique flou $(X, M, *)$ est un espace **SMFI** de la forme $(X, M, 1 - M, *, \diamond)$ tel que $*$ t -norm, et \diamond t -conorm est associé, i.e. $x \diamond y = 1 - ((1 - x) * (1 - y))$ pour tout $(x, y) \in X^2$ (Lowen, 1996).

iii. Dans un espace symétrique (X, d) , nous définissons $*$ et \diamond par : $a*b = ab$ et $a\diamond b = \min\{1, a + b\}$, $\forall a, b \in [0, 1]$, et $M(x, y, t) = \frac{t}{t+|x-y|}$, $N(x, y, t) = \frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$, $\forall x, y \in X^2, \forall t \in [0, 1]$, alors $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace **SMFI** qui est appelé l'espace semi-métrique flou intuitionniste standard induit par la symétrie d .

Pour étayer son résultat les auteurs présentent l'exemple suivant

Exemple 3.3 Soit $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ défini come suit :

$X = [0, 1]$, $a * b = ab$, $a \diamond b = \max\{a, b\}$,

$$M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad \text{et} \quad N(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |\frac{x}{2} - \frac{y}{2}| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

1. $M(x, y, t) + \mathcal{N}(x, y, t) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} & \text{si } x \neq y \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |\frac{x}{2} - \frac{y}{2}| & \text{si } x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} + |\frac{x}{2} - \frac{y}{2}| & \text{si } x \neq y \end{cases} \leq 1.$$

2. $M(x, y, t) > 0, \Leftrightarrow M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} & \text{si } x \neq y \end{cases} \geq 0.$

3. $M(x, y, t) = 1$ si seulement si $x = y, \Leftrightarrow M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} & \text{si } x \neq y \end{cases}$
 $\Leftrightarrow x = y.$

4. $M(x, y, t) = M(y, x, t),$

On a : $M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} & \text{si } x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ \max\{\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\} & \text{si } y \neq x \end{cases}$

donc $M(x, y, t) = M(y, x, t).$

5. Soit $M :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ avec $M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\} & \text{si } x \neq y \end{cases}$ est une fonction continue.

6. $\mathcal{N}(x, y, t) = 0$ si seulement si $x = y, \Leftrightarrow N(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |\frac{x}{2} - \frac{y}{2}| & \text{si } x \neq y \end{cases} = 0$
 $\Leftrightarrow x = y.$

7. $\mathcal{N}(x, y, t) = \mathcal{N}(y, x, t),$

On a : $N(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |\frac{x}{2} - \frac{y}{2}| & \text{si } x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y = x \\ |\frac{y}{2} - \frac{x}{2}| & \text{si } y \neq x \end{cases}.$

donc $\mathcal{N}(x, y, t) = \mathcal{N}(y, x, t).$

8. Soit $\mathcal{N}(x, y, \cdot) :]0, +\infty[\rightarrow [0, 1]$ avec $N(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |\frac{x}{2} - \frac{y}{2}| & \text{si } x \neq y \end{cases}$ est une fonction continue.

Nous pouvons facilement vérifier que toutes les conditions de définition (3.4) sont satisfaites. Donc $([0, 1], M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace semi-métrique flou intuitionniste.

Et que les conditions (5) et (9) de la définition (3.2) ne sont pas satisfaisantes.

George et Veeramani (1994), nous pouvons définir une topologie sur X par la famille des ensembles ouverts comme suites

Définition 3.5 [15] Soit $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ un espace semi-métrique flou intuitionniste. Pour $t > 0$, la boule ouverte $B(x, r, t)$ de centre x et rayon r est définie par :

$$B(x, r, t) = \{y \in X, M(x, y, t) > 1 - r \text{ et } N(x, y, t) < r\}$$

Un sous-ensemble $A \subset X$ est appelé ensemble ouvert si pour chaque $x \in A$, il existe $t > 0$ et $0 < r < 1$ tel que $B(x, r, t) \subset A$.

Soit $\tau_{(M, \mathcal{N})}$ désigner la famille de tous les sous-ensembles ouverts X . Alors $\tau_{(M, \mathcal{N})}$ s'appelle la topologie sur X induite par l'espace semi-métrique flou intuitionniste $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$.

Il est facile de montrer que $\tau_{(M, \mathcal{N})}$ est une topologie sur X . Cette topologie n'est généralement pas Hausdorff, contrairement à l'espace MFI.

Maintenant, nous donnons ces définitions qui étendent celles de George & Veeramani 1994.

Définition 3.6 [15] Soit $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace semi-métrique flou intuitionniste.

1. Une suite (x_n) en X converge vers x si et seulement si $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ et $\mathcal{N}(x_n, x, t) \rightarrow 0$ comme $n \rightarrow \infty$, pour chaque $t > 0$.
2. La suite (x_n) dans X est une suite de Cauchy si, pour chaque $0 < \varepsilon < 1$ et chaque $t > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$:

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon \text{ et } \mathcal{N}(x_n, x_m, t) < \varepsilon.$$

Nous donnons des propriétés élémentaires de ces espaces.

Proposition 3.1 [15] Soit $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace semi-métrique flou intuitionniste et $\tau_{(M, \mathcal{N})}$

sa topologie sur X induite par l'espace semi-métrique flou intuitionniste $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$.

Alors la convergence dans l'espace topologique $(X, \tau_{(M, \mathcal{N})})$ coïncide avec celui de définition (3.18).

Proposition 3.2 [15] Soit $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ est un espace semi-métrique flou intuitionniste. La topologie $\tau_{(M,N)}$ sur X est indépendante de N et edentique à celle de l'espace semi-métrique flou $(X, M, *)$.

Preuve. Il suffit de montrer que les boules ouvertes de ces deux topologies sont les mêmes.

Soit $B_{(M,N)}(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r, \mathcal{N}(x, y, t) < r\}$ la boule ouverte dans l'espace semi-métrique flou intuitionniste. Et $B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$ celui la dans l'espace semi-métrique flou $(X, M, *)$. Il est clair que $B_{(M,N)}(x, r, t) \subset B(x, r, t)$. ■

3.3 Propriétés de l'espace semi-métrique flou intuitionniste

Dans la première partie de ce paragraphe, nous montrons que tout espace métrique flou intuitionniste satisfait les propriétés classiques qui sont généralement utilisées dans un espace métrique généralisé pour prouver les théorèmes de point fixe commun. Elles sont Propriétés (W4), (W3) à (Wilson, 1931), (H.E) à (Aamri & El Moutawakil, 2003), (CE.1) et (CE.2) dans (Pathak et Al, 2007a; Pathak et al., 2007b). Dans le deuxième partie, nous étendons au contexte des espaces SMFI, quelques propriétés de compatibilité.

Définition 3.7 [15] $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ satisfait la propriété (W3) si seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x et y dans X , si pour chaque $t > 0$, d'une partie $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y, t) = 1$, et sur l'autre partie $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, x, t) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y, t) = 0$, alors $x = y$.

Définition 3.8 [15] $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ satisfait la propriété (W4) si seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X , si pour chaque $t > 0$, d'une partie $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t) = 1$ d'une premier partie, d'une autre partie $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, x, t) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y_n, t) = 0$, alors pour chaque $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(y_n, x, t) = 0$.
Il claire que (W4) implique (W3).

Définition 3.9 [15] $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ satisfait la propriété (H.E) si seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et x dans X , si pour chaque $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, x, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, x, t) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(y_n, x, t) = 0$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y_n, t) = 0.$$

Définition 3.10 [8] $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ satisfait la propriété (CE.1) si seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x et y dans X , si pour chaque $t > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y, t) = M(x, y, t) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, x, t) = 0 \text{ implique}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y, t) = \mathcal{N}(x, y, t).$$

Définition 3.11 [15] $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ satisfait la propriété (CE.2) si seulement si, donné $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(y)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X , si pour chaque $t > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t) = 1 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf M(z_n, y_n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf M(z_n, x_n, t) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y_n, t) = 0$$

$$\text{implique } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathcal{N}(z_n, y_n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathcal{N}(z_n, x_n, t).$$

Définition 3.12 [15] Soient S et T deux auto-applications de X . La paire (S, T) satisfait la propriété

(E.A) s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = u \in X$$

$$\text{pour chaque } t > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} M(Sx_n, u, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(Tx_n, u, t) = 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Sx_n, u, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Tx_n, u, t) = 0.$$

Proposition 3.3 [15] Tout espace métrique flou intuitionniste satisfait les propriétés (W4), (H.E),

(CE.1) et (CE.2).

Preuve. D'abord on note (5) et (9) de la définition (3.2)

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s) \text{ et } N(x, y, t) \diamond N(y, z, t) \geq N(x, z, t + s) \quad (*)$$

par conséquent

1) si $x = x_n$, $y = x_n$ et $z = y$ dans (*) on a

$$M(x, x_n, t) * M(x_n, y, s) \leq M(x, y, t + s) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M(x_n, x, t) * M(x_n, y, s)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y, t + s) \Rightarrow$$

$$1 * 1 \leq M(x, y, t + s) \leq 1 \Rightarrow$$

$$M(x, y, s) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

et

$$N(x, x_n, t) \diamond N(x_n, y, s) \geq N(x, y, t + s) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x, x_n, t) \diamond N(x_n, y, s) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} N(x, y, t + s) \Rightarrow$$

$$0 \geq N(x, y, t + s) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x, y, t + s) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

alors la propriété (W3)

2) si $x = x$, $y = x_n$ et $z = y_n$ dans (*) on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, x_n, t) * M(x_n, y_n, s) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, y_n, t + s) \Rightarrow \\ 1 * 1 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, x, s + t) \leq 1 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, x, s + t) &= 1 \end{aligned}$$

et de la même manière on obtient

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, x, t) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, y_n, s) = 0$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} N(y_n, x, t + s) = 0$

alors la propriété (W4) est satisfaisante

3) si $x = x_n$, $y = x$ et $z = y_n$ dans (*) on a

$$\begin{aligned} M(x, y, t) * M(y, z, s) &\leq M(x, z, t + s) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) * M(x_n, y_n, s) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t + s) \Rightarrow \\ 1 * 1 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t + s) \leq 1 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t + s) &= 1 \end{aligned}$$

et

$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, y_n, t + s)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, y_n, t + s)$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n, y_n, t + s) = 0$, par conséquent, la propriété (HE) satisfait.

4) Maintenant, nous supposons que $M(x_n, x, u) \rightarrow 1$ pour chaque $u, t \in]0, \infty[$, et chaque $0 \leq \varepsilon \leq t$, de $M(x_n, y, t) \geq M(x_n, x, \varepsilon) * M(x, y, t - \varepsilon)$, nous obtenons $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf M(x_n, y, t) \geq M(x, y, t - \varepsilon)$, et par la propriété (5) de définition (3.4) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf M(x_n, y, t) \geq M(x, y, t) \quad (*_1)$$

Et on a : $M(x, y, t + \varepsilon) \geq M(x, x_n, \varepsilon) * M(x_n, y, t)$, pour chaque $t, \varepsilon > 0$, on obtient $M(x, y, t + \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup M(x_n, y, t)$, et

$$M(x, y, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup M(x_n, y, t) \quad (*_2)$$

D'après (*₁) et (*₂), nous obtenons $M(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y, t)$.

La même raison pour \mathcal{N} , nous supposons $\mathcal{N}(x_n, x, u) \rightarrow 0$, pour chaque $u, t \in]0, \infty[$, et chaque $0 \leq \varepsilon \leq t$, de $\mathcal{N}(x_n, y, t) \leq \mathcal{N}(x_n, x, \varepsilon) \diamond \mathcal{N}(x, y, t - \varepsilon)$, nous obtenons

$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \mathcal{N}(x_n, y, t) \leq \mathcal{N}(x, y, t - \varepsilon)$, et par la propriété (5) de définition (3.4) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \mathcal{N}(x_n, y, t) \leq \mathcal{N}(x, y, t). \quad (*_3)$$

Et on a : $\mathcal{N}(x, y, t + \varepsilon) \leq \mathcal{N}(x, x_n, \varepsilon) \diamond \mathcal{N}(x_n, y, t)$, pour chaque $t, \varepsilon > 0$, on obtient $\mathcal{N}(x, y, t + \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y, t)$, et

$$\mathcal{N}(x, y, t + \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y, t). \quad (*_4)$$

D'après $(*_3)$ et $(*_4)$, nous obtenons $\mathcal{N}(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n, y, t)$.

Donc la propriété (CE.1) est satisfait.

5) Maintenant, nous supposons $M(x_n, y_n, u) \rightarrow 1$ pour chaque $u \in]0, \infty[$, par (5) de déf (3.2), $M(z_n, y_n, t + \varepsilon) \geq M(z_n, x_n, t) * M(x_n, y_n, \varepsilon)$, alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, y_n, t + \varepsilon) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, x_n, t)$, donc :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, y_n, t) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, x_n, t) \text{ pour chaque } t > 0$$

L'inégalité opposée résulte de :

$M(z_n, x_n, t + \varepsilon) \geq M(z_n, y_n, t) * M(y_n, x_n, \varepsilon)$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, x_n, t) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, y_n, t)$, donc :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, x_n, t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} M(z_n, y_n, t)$$

De la même, nous obtenons $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(z_n, y_n, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(z_n, x_n, t)$. Alors la propriété (CE.2) satisfait. ■

Définition 3.13 [15] Soient S, T deux applications d'un espace semi-métrique flou intuitionniste $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$. S, T sont dites R -faiblement commutative s'il existe un $R > 0$ tel que pour chaque $x \in X$:

$$M(STx, TSx, t) \geq M(Tx, Sx, \frac{t}{R}) \text{ et } \mathcal{N}(STx, TSx, t) \geq \mathcal{N}(Tx, Sx, \frac{t}{R})$$

Définition 3.14 [15] S et T sont dite compatibles si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(STx_n, TSx_n, t) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(STx_n, TSx_n, t) = 0$$

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X satisfaisant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = p$$

pour un certain $P \in X$.

Définition 3.15 [15] S et T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence ; i.e., pour tout $x \in X$ satisfaisant $\{Sx = Tx\} \subseteq \{STx = TSx\}$.

Définition 3.16 [15] Soient S, T deux applications d'un espace métrique. Alors S et T sont dites occasionnellement faiblement compatible si :

$$\{x \in X : Sx = Tx\} \cap \{x \in X : STx = TSx\} \neq \emptyset.$$

Remarque 3.3 1. Si S et T sont commutatives, alors elles sont faiblement commutatives, donc compatibles, et la compatible implique la faiblement compatible.

2. Il est prouvé que la R -faiblement commutative équivaut à la commutativité à des point de coïncidence. S et T point sager R -faiblement commutative se traduisant si et seulement s'il sont faiblement compatibles.
3. Il est connu que l'ensemble de toutes les sélections non faiblement compatibles forme une sous-classe appropriée des applications occasionnellement faiblement compatibles (Voir Al-Thagafi & Shahzad, 2008).
4. Les propriétés de la compatibilité faible ou compatibilité et la propriété (E.A) sont indépendantes comme le montrent les exemples 1 et 2 de (Merghadi & Godet-Thobie, 2013).

3.4 Quelques résultats de point fixe commun dans un espace semi-métrique flou intuitionniste

On commence par la définition des relations implicites qui seront utilisées dans les prochains résultats dans ce qui suit.

Définition 3.17 [15] Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui vérifie $\int_{\delta}^{\varepsilon} \varphi(t) dt > 0$, pour chaque $0 < \delta < \varepsilon$.

On note par Φ , (respectivement Ψ), l'ensemble de toutes les fonctions continues ϕ , (respectivement ψ) : $\mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, si

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt \right) \geq 0, \quad (\phi_1)$$

ou

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) \geq 0, \quad (\phi_2)$$

ou

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) \geq 0. \quad (\phi_3)$$

Alors, $\int_0^u \varphi(t) dt \geq \int_0^v \varphi(t) dt$.

Et respectivement, si

$$\psi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt \right) \leq 0, \quad (\psi_1)$$

ou

$$\psi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) \leq 0, \quad (\psi_2)$$

ou

$$\psi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) \leq 0. \quad (\psi_3)$$

Alors, $\int_0^u \varphi(t) dt \leq \int_0^v \varphi(t) dt$.

Nous donnons quelques exemples de $\phi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$.

Exemple 3.4 Soit $\phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \frac{1}{5}(t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6)$

Nous devons commencer par (ϕ_i) pour $i = \overline{1, 3}$.

Pour $i = 1$:

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt \right) = \frac{3}{5} \left(\int_0^u \varphi(t) dt - \int_0^v \varphi(t) dt \right) \geq 0$$

Si et seulement si $\int_0^u \varphi(t) dt \geq \int_0^v \varphi(t) dt$. Alors, (ϕ_1) est satisfait pour chaque φ .

Pour $i = 2$:

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) = \frac{3}{5} \left(\int_0^u \varphi(t) dt - \int_0^v \varphi(t) dt \right) \geq 0$$

Si et seulement si $\int_0^u \varphi(t) dt \geq \int_0^v \varphi(t) dt$. Alors, (ϕ_2) est satisfait pour chaque φ .

Pour $i = 3$:

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt \right) = \frac{2}{5} \left(\int_0^u \varphi(t) dt - \int_0^v \varphi(t) dt \right) \geq 0$$

Si et seulement si $\int_0^u \varphi(t) dt \geq \int_0^v \varphi(t) dt$. Alors, (ϕ_3) est satisfait pour chaque φ et $\phi \in \Phi$.

De même, nous montrons que $\psi \in \Psi$.

Exemple 3.5 Un autre exemple est donné par :

$$\phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \min \{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\} \text{ et } \psi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \max \{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

Nous devons commencer par (ϕ_i) pour $i = \overline{1, 3}$.

Pour $i = 1$:

$$\phi \left(\int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt, \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt \right) = \int_0^u \varphi(t) dt - \min \left\{ \int_0^u \varphi(t) dt, \int_0^v \varphi(t) dt \right\} \geq 0$$

Si et seulement si $\int_0^u \varphi(t)dt \geq \int_0^v \varphi(t)dt$. Il est facile de vérifier que (ϕ_2) et (ϕ_3) sont satisfaits puis $\phi \in \Phi$. de même, nous montrons que $\psi \in \Psi$.

Maintenant, nous présentons deux théorèmes pour une infinité (pas nécessairement dénombrable) des applications dans un espace **SMFI** et **MFI** en utilisant les hypothèses de la propriété (E.A) et la compatibilité faible.

Théorème 3.2 [15] Soient $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ un espace semi-métrique flou intuitionniste (qui vérifie implicitement les propriétés (W4), (H.E), (CE.1), et (CE.2)) et $A, (A_i)_{i \in I}, S$ et T sont des auto-applications de X satisfaisant $AX \subset TX$ et $A_i X \subset SX, \forall i \in I$ et

$$\phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(Ax, A_i y, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax, Sx, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(A_i y, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx, A_i y, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \geq 0 \quad (3_\phi)$$

$$\psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(Ax, A_i y, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Sx, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(A_i y, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx, A_i y, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \leq 0 \quad (3_\psi)$$

Pour tout $x, y \in X, \forall i \in I$, ou $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfait $\int_\delta^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$ pour chaque $0 < \delta < \varepsilon$.

On suppose que :

i. La paire (A, S) vérifie la propriété (E.A),

ii. La paire (A, S) et (A_k, T) sont compatibles pour certains k ,

si l'un des sous-espaces $AX, SX, A_i X$ et TX de X est fermé, alors A, A_i, S et T ont un point fixe commun unique en $X, \forall i \in I$.

Preuve. Depuis (A, S) satisfait la propriété (E.A), il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que, pour certains z dans $X, \lim_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(Sx_n, z, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Ax_n, z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Sx_n, z, t) = 0$. Par propriété (HE), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, Sx_n, t) = 1 \quad (3.1_\phi)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Ax_n, Sx_n, t) = 0 \quad (3.1_\psi)$$

Depuis $AX \subset TX$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X tel que $Ax_n = Ty_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout i . De plus, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, Ty_n, t) = 1 \quad (3.2_\phi)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Ax_n, Ty_n, t) = 0 \quad (3.2_\psi)$$

Par (CE.2), (3.1 $_\phi$) et (3.1 $_\psi$), on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, A_i y_n, t) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} M(Sx_n, A_i y_n, t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} M(Tx_n, A_i y_n, t), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Ax_n, A_i y_n, t) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Sx_n, A_i y_n, t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Tx_n, A_i y_n, t), \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_i y_n = z$, soit $\alpha_i = \liminf_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, A_i y_n, t)$ et $\beta_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \mathcal{N}(Ax_n, A_i y_n, t)$, de (3.3 $_\phi$) et (3.3 $_\psi$) avec $x = x_n$ et $y = y_n$ on a

$$\begin{aligned} \phi \left(\int_0^{M(Ax_n, A_i y_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx_n, Ty_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax_n, Sx_n, t)} \varphi(s) ds, \right. \\ \left. \int_0^{M(A_i y_n, Ty_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax_n, Ty_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx_n, A_i y_n, t)} \varphi(s) ds \right) \geq 0 \\ \psi \left(\int_0^{\mathcal{N}(Ax_n, A_i y_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx_n, Ty_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax_n, Sx_n, t)} \varphi(s) ds, \right. \\ \left. \int_0^{\mathcal{N}(A_i y_n, Ty_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax_n, Ty_n, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx_n, A_i y_n, t)} \varphi(s) ds \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Comme $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi \left(\int_0^{\alpha_i} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{\alpha_i} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{\alpha_i} \varphi(s) ds \right) \geq 0 \\ \psi \left(\int_0^{\beta_i} \varphi(s) ds, 0, 0, \int_0^{\beta_i} \varphi(s) ds, 0, \int_0^{\beta_i} \varphi(s) ds \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Alors, $\alpha_i = \liminf_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, A_i y_n, t) = 1$ et $\beta_i = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Ax_n, A_i y_n, t) = 0$, par (3.3 $_\phi$) et (3.3 $_\psi$). Donc, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Ax_n, A_i y_n, t) = 1 \quad (3.3_\phi)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(Ax_n, A_i y_n, t) = 0 \quad (3.3_\psi)$$

Par (W.4), (3.3 $_\phi$) et (3.3 $_\psi$), $\lim_{n \rightarrow \infty} M(A_i y_n, z, t) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(A_i y_n, z, t) = 0$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_i y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = z, \quad \forall i$$

Si nous supposons que $T(X)$ est fermé, $z \in T(X)$ et il existe $u \in X$ tel que $z = Tu$. par (3.3 $_\phi$) et (3.3 $_\psi$), avec $x = x_n$ et $y = u$, on a

$$\begin{aligned} \phi \left(\int_0^{M(Ax_n, A_i u, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx_n, Tu, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax_n, Sx_n, t)} \varphi(s) ds, \right. \\ \left. \int_0^{M(A_i u, Tu, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax_n, Tu, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx_n, A_i u, t)} \varphi(s) ds \right) \geq 0 \\ \psi \left(\int_0^{\mathcal{N}(Ax_n, A_i u, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx_n, Tu, t)} \varphi(s) dt, \int_0^{\mathcal{N}(Ax_n, Sx_n, t)} \varphi(s) ds, \right. \\ \left. \int_0^{\mathcal{N}(A_i u, Tu, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax_n, Tu, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx_n, A_i u, t)} \varphi(s) ds \right) \leq 0 \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$, en utilisant (CE.1), on obtient

$$\begin{aligned} \phi \left(\int_0^{M(z, A_i u, t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \right. \\ \left. \int_0^{M(z, A_i u, t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(z, A_i u, t)} \varphi(s) ds \right) \geq 0 \\ \psi \left(\int_0^{\mathcal{N}(z, A_i u, t)} \varphi(s) ds, 0, 0, \int_0^{\mathcal{N}(z, A_i u, t)} \varphi(s) dt, 0, \int_0^{\mathcal{N}(z, A_i u, t)} \varphi(s) ds \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique, par (CE.1), (ϕ_2) et (ψ_2) ,

$$A_i u = Tu = z, \quad \forall i \quad (3.4)$$

depuis $z \in A_i X \subset SX$, il existe $v \in X$ tel que $z = A_i u = Sv = Tu$ et, appliquant (3_ϕ) et (3_ψ) , avec $x = v$ et $y = u$ on a

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{c} \int_0^{M(Av,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(Av,z,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(Av,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{c} \int_0^{\mathcal{N}(Av,z,t)} \varphi(s) ds, 0, \int_0^{\mathcal{N}(Av,z,t)} \varphi(s) ds, 0, \\ \int_0^{\mathcal{N}(Av,z,t)} \varphi(s) ds, 0 \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc, par (ϕ_1) et (ψ_1) , $z = Av = Sv$. Alor (A, S) est faiblement compatible, $ASv = SAV$ i.e. $Az = Sz$.

On remplace $x = z$ et $y = u$ dans (3_ϕ) et (3_ψ)

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{c} \int_0^{M(Az,A_i u,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sz,Tu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,Sz,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(A_i u,Tu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,Tu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sz,A_i u,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{c} \int_0^{\mathcal{N}(Az,A_i u,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sz,Tu,t)} \varphi(s) dt, \int_0^{\mathcal{N}(Az,Sz,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(A_i u,Tu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Az,Tu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sz,A_i u,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

C'est

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{c} \int_0^{M(Az,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \\ \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,z,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{c} \int_0^{\mathcal{N}(Az,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Az,z,t)} \varphi(s) ds, 0, 0, \\ \int_0^{\mathcal{N}(Az,z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Az,z,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Alors, $Az = z$ par (ϕ_3) et (ψ_3) .

Par la compatible faible de A_k et T , on obtient $A_k T u = A_k z = T A_k u = T z$.

Et on applique (3_ϕ) et (3_ψ) avec $x = y = z$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{c} \int_0^{M(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \\ \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{c} \int_0^{\mathcal{N}(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds, 0, 0, \\ \int_0^{\mathcal{N}(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(z,A_k z,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

De (ϕ_3) , (ψ_3) et (3.3), est suit $A_k z = T z = S z = z$. Alors, z est un point fixe commun de A, S, T et A_k . Mais, pour chaque i , on obtient

$$\phi \left(\begin{array}{c} \int_0^{M(Az,A_i z,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sz,Tz,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,Sz,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(A_i z,Tz,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Az,Tz,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sz,A_i z,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \geq 0$$

et

$$\psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(Az, A_i z, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sz, Tz, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Az, Sz, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(A_i z, Tz, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Az, Tz, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sz, A_i z, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \leq 0$$

C'est

$$\phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(z, A_i z, t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(z, A_i z, t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(z, A_i z, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \geq 0$$

et

$$\psi \left(\int_0^{\mathcal{N}(z, A_i z, t)} \varphi(s) ds, 0, 0, \int_0^{\mathcal{N}(z, A_i z, t)} \varphi(s) ds, 0, \int_0^{\mathcal{N}(z, A_i z, t)} \varphi(s) ds \right) \leq 0$$

Puis, de (ϕ_2) et (ψ_2) , $z = A_i z$ alor z est un point fixe commun de A, S, T et A_i , pour chaque i .

Maintenant, on montre l'unicité du point fixe commun. Si \bar{z} est un autre point fixe commun, à partir (3_ϕ) et (3_ψ) on applique $x = z$ et $y = \bar{z}$, on a

$$\phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \\ \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \geq 0$$

$$\psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds, 0, \\ 0, \int_0^{\mathcal{N}(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(z, \bar{z}, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \leq 0$$

Donc, par (ϕ_3) et (ψ_3) , on obtient $z = \bar{z}$. Alors, z est le point fixe commun unique de A_i, A, S et T , $\forall i \in I$. ■

Dans le théorème suivant, le seul changement par rapport au théorème précédent est l'hypothèse (i).

Théorème 3.3 [15] Soient $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ un espace semi-métrique flou intuitionniste pour X qui satisfait les propriétés (W4), (H.E), (CE.1), et (CE.2) et $A, (A_i)_{i \in I}, S$ et T sont des auto-applications de X satisfaisant $AX \subset TX$ et $A_i X \subset SX, \forall i \in I$ et

$$\phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(Ax, A_i y, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax, Sx, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(A_i y, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx, A_i y, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \geq 0 \quad (3_\phi)$$

$$\psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(Ax, A_i y, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Sx, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(A_i y, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx, A_i y, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \leq 0 \quad (3_\psi)$$

Pour tout $x, y \in X$, pour tout $i \in I$, ou $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfait $\int_\delta^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$ pour chaque $0 < \delta < \varepsilon$. On suppose que :

i. La paire (A_i, T) satisfait la propriété (E.A), $\forall i \in I$,

ii. La paire (A, S) et (A_k, T) sont faiblement compatibles pour certains k ,

Si l'un des sous-espaces AX, SX, A_iX et TX de X est fermé, alors A, A_i, S et T ont un point fixe commun unique dans $X, \forall i \in I$.

Remarque 3.4 Lorsque TX est supposé un sous-espace ferme de X , la preuve est similaire. D'autre part, le cas que AX ou A_iX est un sous-espace fermé de X est similaire au cas dans lequel TX ou SX est fermé.

Théorème 3.4 [15] Soient $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ un espace métrique flou intuitionniste et $A, (A_i)_{i \in I}, S$ et $T : X \rightarrow X$ sont des auto-applications de X satisfaisons $AX \subset TX$ et $A_iX \subset SX, \forall i \in I$ et (3_ϕ) et $(3_\psi), \forall x, y \in X$ et $\forall t > 0$ ou $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfaisant $\int_\delta^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$, pour chaque $0 < \delta < \varepsilon$.

On suppose que :

i. La paire (A, S) ou $(A_i, T), \forall i \in I$ satisfait la propriété $(E.A)$,

ii. La paire (A, S) et (A_k, T) sont faiblement compatibles pour certains k ,

Si l'un de sous-espaces AX, SX, A_iX et TX de X est fermé, alors A, A_i, S et T ont un point fixe commun unique dans

$X, \forall i \in I$.

Théorème 3.5 [15] Soient $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ un espace semi-métrique flou intuitionniste et $A, (A_i)_{i \in I}, S$ et T sont des auto-applications de X satisfaisant les conditions suivantes :

i. La paire (A, S) est occasionnellement faiblement compatible.

ii. Il existe $v \in \cap_{i \in I} C(A_i, T)$ tel que $A_iTv = TA_iv, \forall i \in I$, ou $C(A_i, T)$ est l'ensemble des points de coïncidence de A_i et T .

A, A_i, S et $T, \forall i \in I$ satisfaire (3_ϕ) et $(3_\psi), \forall x, y \in X$ ou $\phi, \psi : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaire les conditions (ϕ_3) et (ψ_3) avec $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfait $\int_\delta^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$, pour chaque $0 < \delta < \varepsilon$. Puis, A, A_i, S et T ont un point fixe commun unique dans $X, \forall i \in I$.

Preuve. Par (i) et (ii), il existe u et $v \in X$ tel que, $\forall i \in I$

$$Au = Su, \quad ASu = SAu \quad A_iv = Tv, \quad A_iTv = TA_iv \quad (3.5)$$

En utilisant (3_ϕ) et (3_ψ) avec $x = u$ et $y = v$, on a

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(Au, A_iv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Su, Tv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Au, Su, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(A_iv, Tv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Au, Tv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Su, A_iv, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(Au, A_iv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Su, Tv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Au, Su, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(A_iv, Tv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Au, Tv, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Su, A_iv, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Puis par (ϕ_3) et (ψ_3) , $Au = Tv$ et nous avons

$$Au = Su = A_i v = Tv \text{ pour chaque } i \quad (3.6)$$

De (3.5), nous pouvons écrire, pour tout i ,

$$A_i Au = A_i Tv = T A_i v = T Au, \quad (3.7)$$

En utilisant (3_ϕ) et (3_ψ) encore une fois avec $x = u$ et $y = Tu$, nous obtenons avec (3.7)

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(Au,TAu,t)} \varphi(t) dt, \int_0^{M(Au,TAu,t)} \varphi(t) dt, \int_0^1 \varphi(s) ds, \\ \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^{M(Au,TAu,t)} \varphi(t) dt, \int_0^{M(Au,TAu,t)} \varphi(t) dt \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{N(Au,TAu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{N(Au,TAu,t)} \varphi(s) ds, 0, \\ 0, \int_0^{N(Au,TAu,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{N(Au,TAu,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc grace a (ϕ_3) et (ψ_3) , $Au = T Au$. par conséquent, nous avons par (3.5), (3.6) et (3.7) pour chaque $i \in I$,

$$A_i (Au) = T (Au) = Au \quad (3.8)$$

et

$$A (Au) = A (Su) = S(Au) \quad (3.9)$$

En utilisant (3_ϕ) et (3_ψ) encore une fois avec $x = y = Au$, on a

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \int_0^1 \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\geq 0 \\ \psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{N(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{N(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds, 0, 0, \\ \int_0^{N(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{N(AAu,Au,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, par (ϕ_3) , (ψ_3) , (3.8) et (3.9), pour tout i , on a

$$A (Au) = S (Au) = A_i (Au) = T (Au) = Au$$

Donc Au est un point fixe de A_i , A , S et T , pour tout $i \in I$. l'unicité du point fixe commun est prouvée comme dans le théorème précédent. ■

Théorème 3.6 [15] Soient A, B, S et T sont des auto-applications d'un espace semi métrique flou intuitionniste $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ qui satisfait

$$\phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(Ax,By,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax,Sx,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(By,Ty,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(Ax,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx,By,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \geq 0 \quad (3_\phi)$$

$$\psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(Ax,By,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax,Sx,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(By,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx,By,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right) \leq 0 \quad (3_\psi)$$

$\forall x, y \in X$, ou $\phi, \psi : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaire les conditions (ϕ_3) et (ψ_3) ou $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable qui satisfait $\int_\delta^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$, pour chaque $0 < \delta < \varepsilon$.

Si les paires (A, S) et (B, T) sont occasionnellement faiblement compatibles, A, B, S et T ont un point fixe commun unique.

3.5 Exemple illustrative

Exemple 3.6 $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ un espace semi-métrique flou intuitionniste, tel que

$X = [0,4]$, $M(x, y, t) = \frac{t}{t+|x-y|}$, $\mathcal{N}(x, y, t) = \frac{|x-y|}{t+|x-y|}$, $a * b = ab$ et $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$.

Soit $\phi(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = s_1 - \min\{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ et $\psi(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = s_1 - \min\{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$.

A_i, A, S et T sont des auto-applications de X tel que

$$Ax = \begin{cases} \frac{7}{3} & \text{if } x \in [0, 2[\\ 2 & \text{if } x \in [2, 3[\\ \frac{3}{2} & \text{if } x \in [3, 4] \end{cases}, \quad Sx = \begin{cases} 3 & \text{if } x \in [0, 2[\\ x & \text{if } x \in [2, 3[\\ \frac{7}{2} & \text{if } x \in [3, 4] \end{cases}$$

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*, A_i y = \begin{cases} 2 & \text{if } y \in [0, 3[\\ 2 + \frac{1}{i} & \text{if } y \in [3, 4] \end{cases}, \quad Ty = \begin{cases} 4 - y & \text{if } y \in [0, 3[\\ \frac{3}{4} & \text{if } y \in]3, 4] \end{cases}$$

On remarque qu'il existe $z = 2$ dans X tel que $Az = A_i z = Sz = Tz = 2, \forall i$. C'est clair que la paire (A, S) satisfait la propriété (E.A) pour la suite $x_n = 2 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$C(A, S) = \{2\}$, $ASz = SAz$, alors la paire (A, S) est faiblement compatible.

$C(A_2, T) = \{2\}$ et $A_2 Tz = T A_2 z = 2$, alors le paire (A_2, T) est faiblement compatible.

Puis, les hypothèses (i) et (ii) du théorème (3.2) sont satisfait.

$AX = \{\frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}\} \subset TX = \{\frac{3}{4}\} \cup]1, 4]$ et $A_i X = \{2, 2 + \frac{1}{i}\} \subset SX = [2, 3] \cup \{\frac{7}{2}\}$.

Maintenant, nous vérifions les conditions (3_ϕ) et (3_ψ) du théorème (3.2). Soit $\varphi(s) = 1$.

Donc $\int_0^{M(x,y,t)} \varphi(s) ds = \frac{t}{t+|x-y|}$ et $\int_0^{\mathcal{N}(x,y,t)} \varphi(s) ds = \frac{|x-y|}{t+|x-y|}$.

Si on définit R, L, P et Q par

$$R(x, y, t) = \phi \left(\begin{array}{l} \int_0^{M(Ax,A_i y,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax,Sx,t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{M(A_i y,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Ax,Ty,t)} \varphi(s) ds, \int_0^{M(Sx,A_i y,t)} \varphi(s) ds \end{array} \right)$$

$$L(x, y, t) = \psi \left(\begin{array}{l} \int_0^{\mathcal{N}(Ax, A_iy, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Ty, t)} \varphi(s) dt, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Sx, t)} \varphi(s) ds, \\ \int_0^{\mathcal{N}(A_iy, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Ax, Ty, t)} \varphi(s) ds, \int_0^{\mathcal{N}(Sx, A_iy, t)} \varphi(s) ds \end{array} \right)$$

$$P(x, y, t) = \min \left\{ \frac{t}{t+|Sx-Ty|}, \frac{t}{t+|Ax-Sx|}, \frac{t}{t+|A_iy-Ty|}, \frac{t}{t+|Ax-Ty|}, \frac{t}{t+|Sx-A_iy|} \right\}$$

$$Q(x, y, t) = \max \left\{ \frac{|Sx-Ty|}{t+|Sx-Ty|}, \frac{|Ax-Sx|}{t+|Ax-Sx|}, \frac{|A_iy-Ty|}{t+|A_iy-Ty|}, \frac{|Ax-Ty|}{t+|Ax-Ty|}, \frac{|Sx-A_iy|}{t+|Sx-A_iy|} \right\}$$

alors, $R(x, y, t) = \frac{t}{t+|Ax-A_iy|} - P(x, y, t)$ et $L(x, y, t) = \frac{|Ax - A_iy|}{t + |Ax - A_iy|} - Q(x, y, t)$. nous devons prouver que $R(x, y, t) \geq 0$ et $L(x, y, t) \leq 0$, $\forall x, y \in [0, 4]$. C'est évident que $R(x, y, t) \geq 0$ et $L(x, y, t) \leq 0$ quand $x \in [2, 3]$ et $y \in [0, 3]$ puisque, dans ce cas, $|Ax - A_iy| = 0$. nous devons étudier les autres cas suivants.

Il est facile de voir que $R(x, y, t) \geq 0$ et $L(x, y, t) \leq 0$ si

$$V(x, y) = \max \{|Sx - Ty|, |Ax - Sx|, |A_iy - Ty|, |Ax - Ty|, |Sx - A_iy|\} \geq |Ax - A_iy|$$

$$K(x, y) = \min\{|Sx - Ty|, |Ax - Sx|, |A_iy - Ty|, |Ax - Ty|, |Sx - A_iy|\} \leq |Ax - A_iy|$$

	$x \in [0, 2[$	$x \in [0, 2[$	$x \in [0, 2[$	$x \in [0, 2[$	$x \in [2, 2 + \frac{1}{i}[$
	$y \in [0, 1[$	$y \in [1, 2[$	$y \in [2, 3]$	$y \in [3, 4]$	$y \in [3, 4[$
$ Ax - A_iy $	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{i}$	$\frac{1}{i}$
$ Sx - Ty $	$1 - y$	$y - 1$	$y - 1$	$\frac{9}{4}$	$x - \frac{3}{4}$
$ Ax - Sx $	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x - 2$
$ A_iy - Ty $	$2 - y$	$2 - y$	$y - 2$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$
$ Ax - Ty $	$\frac{5}{3} - y$	$ y - \frac{5}{3} $	$y - \frac{5}{3}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{5}{4}$
$ Sx - A_iy $	1	1	1	$1 - \frac{1}{i}$	$2 + \frac{1}{i} - x$
$V(x, y)$	$\frac{1}{3}$	1	$y - 1$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$
	$\geq \frac{1}{3}$	$\geq \frac{1}{3}$	$\geq \frac{1}{3}$	$\geq \frac{1}{3} - \frac{1}{i}$	$\geq \frac{1}{i}$
	$x \in [2 + \frac{1}{i}, 3[$	$x \in [3, 4]$	$x \in [3, 4]$	$x \in [3, 4]$	$x \in [3, 4]$
	$y \in [3, 4]$	$y \in [0, \frac{1}{2}[$	$y \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[$	$y \in [\frac{5}{2}, 3[$	$y \in [3, 4]$
$ Ax - A_iy $	$\frac{1}{i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$ \frac{1}{2} - \frac{1}{i} $
$ Sx - Ty $	$x - \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} - y$	$y - \frac{1}{2}$	$y - \frac{1}{2}$	$\frac{11}{4}$
$ Ax - Sx $	$x - 2$	2	2	2	2
$ A_iy - Ty $	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$	$2 - y$	$ y - 2 $	$y - 2$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$
$ Ax - Ty $	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2} - y$	$\frac{5}{2} - y$	$y - \frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
$ Sx - A_iy $	$2 + \frac{1}{i} - x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{i}$
$V(x, y)$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$	$\frac{5}{2} - y$	2	$y - \frac{1}{2}$	$\frac{11}{4}$
	$\geq \frac{1}{i}$	$\geq \frac{1}{2}$	$\geq \frac{1}{2}$	$\geq \frac{1}{2}$	$\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{i} $

	$x \in [0, 2[$	$x \in [0, 2[$	$x \in [0, 2[$	$x \in [0, 2[$	$x \in [2, 2 + \frac{1}{i}[$
	$y \in [0, 1[$	$y \in [1, 2[$	$y \in [2, 3[$	$y \in [3, 4[$	$y \in [3, 4[$
$ Ax - A_iy $	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{i}$	$\frac{1}{i}$
$ Sx - Ty $	$1 - y$	$y - 1$	$y - 1$	$\frac{9}{4}$	$x - \frac{3}{4}$
$ Ax - Sx $	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x - 2$
$ A_iy - Ty $	$2 - y$	$2 - y$	$y - 1$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$
$ Ax - Ty $	$\frac{5}{3} - y$	$ y - \frac{5}{3} $	$y - \frac{5}{3}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{5}{4}$
$ Sx - A_iy $	1	1	1	$1 - \frac{1}{i}$	$2 + \frac{1}{i} - x$
$K(x, y)$	$1 - y$	$1 - y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{i}$	$2 + \frac{1}{i} - x$
	$\leq \frac{1}{3}$	$\leq \frac{1}{3}$	$\leq \frac{1}{3}$	$\leq \frac{1}{3} - \frac{1}{i}$	$\leq \frac{1}{i}$
	$x \in [2 + \frac{1}{i}, 3[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [3, 4[$
	$y \in [3, 4[$	$y \in [0, \frac{1}{2}[$	$y \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[$	$y \in [\frac{5}{2}, 3[$	$y \in [3, 4[$
$ Ax - A_iy $	$\frac{1}{i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$ \frac{1}{2} - \frac{1}{i} $
$ Sx - Ty $	$x - \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2} - y$	$y - \frac{1}{2}$	$y - \frac{1}{2}$	$\frac{11}{4}$
$ Ax - Sx $	$x - 2$	2	2	2	2
$ A_iy - Ty $	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$	$2 - y$	$ y - 2 $	$y - 2$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{i}$
$ Ax - Ty $	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2} - y$	$\frac{5}{2} - y$	$y - \frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
$ Sx - A_iy $	$2 + \frac{1}{i} - x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{i}$
$K(x, y)$	$2 + \frac{1}{i} - x$	$\frac{1}{2} - y$	$y - \frac{1}{2}$	$y - \frac{5}{2}$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{i}$
	$\leq \frac{1}{i}$	$\leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{2}$	$\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{i} $

Donc, pour chaque x, y , $R(x, y, t) \geq 0$ et $L(x, y, t) \leq 0$. alors, toutes les conditions du théorème (3.2) sont remplies.

Nous donnons maintenant un exemple qui illustre le théorème (3.5)

Exemple 3.7 Soit $(X, M, \mathcal{N}, *, \diamond)$ l'espace **SMFI**, $X = [0, 4]$, $M(x, y, t) = \max\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\}$, $\mathcal{N}(x, y, t) = \min\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\}$, $a * b = ab$ et $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$.

Soit $\phi(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = s_1 - \min\{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ et $\psi(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = s_1 - \max\{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$.

$A, A_{i \in \mathbb{N}^*, i \geq 3}, S$ et T sont des auto-applications de X tel que

$$Ax = \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad Sx = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*, A_i y = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } y = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} + \frac{1}{2i} & \text{si } y \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad Ty = \begin{cases} \frac{4}{5} & \text{si } y \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$C(A, S) = \{\frac{1}{2}\}$, $AS\frac{1}{2} = SA\frac{1}{2}$, alors la paire (A, S) est occasionnellement faiblement compatible faiblement compatible.

$C(A_i, T) = \{\frac{1}{2}\}$, $A_i T\frac{1}{2} = TA_i\frac{1}{2}$, alors la paire (A_i, T) est occasionnellement faiblement compatible faiblement compatible.

Maintenant, nous vérifions les conditions (3_ϕ) et (3_ψ) du théorème (3.5). Soit $\varphi(s) = 1$.

Si on définit R, L, P et Q comme suite :

$$2P(x, y, t) = \min \{ \max \{Sx, Ty\}, \max \{Ax, Sx\}, \max \{A_i y, Ty\}, \max \{Ax, Ty\}, \max \{Sx, A_i y\} \}$$

$$2Q(x, y, t) = \max \{ \min \{Sx, Ty\}, \min \{Ax, Sx\}, \min \{A_i y, Ty\}, \min \{Ax, Ty\}, \min \{Sx, A_i y\} \}$$

$$R(x, y, t) = \frac{1}{2} \max \{Ax, A_i y\} - P(x, y, t) \text{ et } L(x, y, t) = \frac{1}{2} \min \{Ax, A_i y\} - Q(x, y, t)$$

nous devons prouver que $R(x, y, t) \geq 0$ et $L(x, y, t) \leq 0$, $\forall x, y \in X$.

C'est évident que $R(x, y, t) \geq 0$ et $L(x, y, t) \leq 0$ quand $x = y = \frac{1}{2}$ puisque, dans ce cas, $Ax = A_i y = Sx = Ty = \frac{1}{2}$, nous présentons les autres cas dans les tableau suivants :

	$x \in [0, \frac{1}{2}[$ $y \in [0, \frac{1}{2}[$	$x \in [0, \frac{1}{2}[$ $y = \frac{1}{2}$	$x \in [0, \frac{1}{2}[$ $y \in]\frac{1}{2}, 1]$	$x = \frac{1}{2}$ $y \in [0, \frac{1}{2}[$
$\max \{Ax, A_i y\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$
$\max \{Sx, Ty\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$
$\max \{Ax, Sx\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\max \{A_i y, Ty\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$
$\max \{Ax, Ty\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$
$\max \{Sx, A_i y\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$	$\frac{3}{4}$
$P(x, y, t)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{4i}$	$\frac{3}{8}$
$R(x, y, t)$	$\frac{5}{12} - \frac{3}{8} \geq 0$	$\frac{5}{12} - \frac{1}{4} \geq 0$	$\frac{5}{12} - \frac{1}{7} - \frac{1}{4i} \geq 0$	$\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \geq 0$

	$x = \frac{1}{2}$	$x \in]\frac{1}{2}, 1]$	$x \in]\frac{1}{2}, 1]$	$x \in]\frac{1}{2}, 1]$
	$y \in]\frac{1}{2}, 1]$	$y \in [0, \frac{1}{2}[$	$y = \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}$
$\max \{Ax, A_iy\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\max \{Sx, Ty\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\max \{Ax, Sx\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\max \{A_iy, Ty\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\max \{Ax, Ty\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\max \{Sx, A_iy\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$
$P(x, y, t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{4i}$
$R(x, y, t)$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \geq 0$	$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \geq 0$	$1 - \frac{1}{4} \geq 0$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{4i} \geq 0$

Et les tableaux similaires pour \mathcal{N}

	$x \in [0, \frac{1}{2}[$	$x \in [0, \frac{1}{2}[$	$x \in [0, \frac{1}{2}[$	$x = \frac{1}{2}$
	$y \in [0, \frac{1}{2}[$	$y = \frac{1}{2}$	$y \in]\frac{1}{2}, 1]$	$y \in [0, \frac{1}{2}[$
$\min \{Ax, A_iy\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$	$\frac{1}{2}$
$\min \{Sx, Ty\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$\min \{Ax, Sx\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$\min \{A_iy, Ty\}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$	$\frac{3}{4}$
$\min \{Ax, Ty\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\min \{Sx, A_iy\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
$Q(x, y, t)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$L(x, y, t)$	$\frac{3}{8} - \frac{1}{5} \leq 0$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq 0$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{4i} - \frac{1}{4} \leq 0$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \leq 0$

	$x = \frac{1}{2}$	$x \in]\frac{1}{2}, 1]$	$x \in]\frac{1}{2}, 1]$	$x \in]\frac{1}{2}, 1]$
	$y \in]\frac{1}{2}, 1]$	$y \in [0, \frac{1}{2}[$	$y = \frac{1}{2}$	$y \in]\frac{1}{2}, 1]$
$\min \{Ax, A_iy\}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$
$\min \{Sx, Ty\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\min \{Ax, Sx\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\min \{A_iy, Ty\}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$
$\min \{Ax, Ty\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\min \{Sx, A_iy\}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2i}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$Q(x, y, t)$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{4i}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7} - \frac{1}{4i}$
$L(x, y, t)$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{4i} - \frac{1}{7} - \frac{1}{4i} \leq 0$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{8} \leq 0$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq 0$	$\frac{1}{7} + \frac{1}{4i} - \frac{1}{7} - \frac{1}{4i} \leq 0$

3.6 Conclusion

La théorie des ensembles flous apporte un cadre formel, un support logique et un outil mathématique rigoureux à l'axiomatique et la définition des espaces métriques flous telles que l'imprécision et l'incertitude. Puisque dans la réalité, toute activité humaine comporte soit de l'incertitude soit de l'imprécision, il s'avère donc important pour des recherches futures, de montrer comment la théorie des ensembles flous peut contribuer à mieux modéliser différents comportements observés dans le monde réel. Par ailleurs, la théorie de point fixe et la théorie des ensembles flous ont également ouvert un vaste champ de recherche dans le domaine purement théorique et scientifique. Ainsi, dans les publications ultérieures, nous tenterons également d'explorer quelques notions plus avancées des mathématiques floues, telles que la topologie floue. Et nous montrerons que ces notions plus approfondies sont utiles dans la formulation des plusieurs problèmes mathématiques.

Bibliographie

- [1] M. Aamri, D. El Moutawakil, Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions, *J. Math. Anal. Appl*, 270(1) (2002), 181-188.
- [2] M. Aamri, D. El Moutawakil, Common fixed points under contractive conditions in symmetric spaces, *Appl. Math. E-Notes*, 3 (2003), 156-162.
- [3] M. A. Al-Thagafi, N. Shahzad, Generalized I-nonexpansive selfmaps and invariant approximations, *Acta Math. Sinica*, 24(5) (2008), 867-876.
- [4] A. Aliouche and B. Fisher, Fixed point theorems for mappings satisfying implicit relation on two complete and compact metric spaces, *Applied Mathematics and Mechanics*, 27(9) (2006), 1217-1222.
- [5] A. Aliouche and F. Merghadi and A. Djoudi, A related fixed point theorem in two fuzzy metric spaces, *The Journal of Nonlinear Science and Applications*, 2(2009), 9-21.
- [6] L. B. Ćirić, A Generalization of of a contraction principle, *Proc. Am. Math. Soc.* 45(1974), 267-273.
- [7] L. B. Ćirić, Some new results of Banach contractions and Edelstein contractive mappings on fuzzy metric spaces, *Chaos Solitons Fractals*, 42(2009), 146-154.
- [8] B. Deshpande and S. Sheikh, Relation-theoretic fuzzy Banach contraction principle and fuzzy Edelstein contraction theorem, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2017), 6933-6935.
- [9] J. X. Fang, On fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 46 (1992), 107-113.
- [10] V. Gregori, A. Sapena, On fixed-point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 125 (2002), 245-252.

-
- [11] Gregori, V. Morillas, S. Sapena, A. Examples of fuzzy metrics and applications, *Fuzzy Sets Syst*, 170 (2011), 95-111.
- [12] George and P. Veeramani, On some result in fuzzy metric space, *Fuzzy Sets and Systems*, 64 (1994), 395-399.
- [13] George, A. Veeramani, On some results of analysis for fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst*, (1997), 365-368.
- [14] M. Grabiec, Fixed points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 27 (1988), 385-389.
- [15] C. Godet-Thobie and F. Merghadi, Common fixed point theorems under contractive condition of integral type in intuitionistic fuzzy semi-metric spaces, *Universitatea Tehnică, Gheorghie Asachi din Iași*, LXI (LXV), (2015) 36-60.
- [16] M. Imdad, J. Ali, Some common fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Mathematical Commaunications*, 11 (2006), 153-163.
- [17] M. Imdad, J. Ali, Some common fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Mathematical Commaunications*, 11 (2006), 153-163.
- [18] G. Jungck, Commuting mappings and fixed points, *Amer. Math. Monthly*, 83 (4) (1976), 261-263.
- [19] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, *Internat. J. Math. Math. Sci*, 9(4) (1986), 771-779.
- [20] I. Kramosil, J. Michálek, Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11 (1975), pp. 336-344.
- [21] Li, C. Chen, G. Estimating the Lyapunov exponents of discrete systems , *Chaos*. 14 (2) (2004), 343-346.
- [22] S. Lipschutz, *Schaum's outlines of Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*, McGraw-Hill, NewYork, (1964).
- [23] Menger, K. Probabilistic geometry, *Proc. Natl. Acad. Sci, USA* 37 (1951), 226-229.
- [24] F. Merghadi and A. Aliouche, A related fixed point theorem in n fuzzy metric spaces, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 7(2010), 73-83.
- [25] F. Merghadi and A. Aliouche, A related fixed point theorem in n complete fuzzy metric spaces, *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization*, 3(2012), 113-116.
- [26] F. Merghadi, C. Godet-Thobie, Common fixed point theorems under contractive conditions of integral type in symmetric spaces, *XLVI*(2013), 757-765.

- [27] D. Mihet, A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 144 (2004), 431-439.
- [28] D. Mihet, A Generalization of of a contraction principle in probabilistic metric spaces (ii), *Int. J. Math Sci*, 5(2005), 729-736.
- [29] S.N. Mishra, N. Sharma, S.L. Singh, Common fixed points of maps on fuzzy metric spaces, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 17 (1994), 253-258.
- [30] S. B. Jr. Nadler, Multi-valued contraction mappings, *Pac. J. Math.* 30(1969), 475-488.
- [31] Niskanen, V. A. The fuzzy metric-truth reasoning approach to decision making in soft computing milleux, *Int. J. Gen. Syst.* 28(1999), 139-172.
- [32] H. K. Pathak, R. R. Lopez, R. K. Verma, A common fixed point theorem using implicit relation and property (E.A) in metric spaces, *Filomat* 21(2) (2007), 211-234.
- [33] H. K. Pathak, R. Tiwari, M. S. Khan, A common fixed point theorem satisfying integral type implicit relations, *Appl. Math. E-Notes*, 7 (2007), 222-228.
- [34] R. P. Pant, Common fixed points for four mappings, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 9 (1998), 281-286.
- [35] R. P. Pant, Common fixed points of noncommuting mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 188 (1994), 436-440.
- [36] J. H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22 (2004), 1039-1046.
- [37] S. Reich, A comparison of various definitions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 226 (1977), 257-290.
- [38] T. K. Samanta, B. Dinda, S. Mohinta, S. Roy AND J. Ghosh, ON COINCIDENCE AND FIXED-POINT THEOREMS IN FUZZY SYMMETRIC SPACES, *Journal of Hyperstructures* (1) (2012), 77-80.
- [39] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 313-334.
- [40] B. Singh, A. A Wani, Sub-Compatibility and Fixed Point Theorem in Fuzzy Metric Spacen, *Int. Journal of Math. Analysis*, 5(2011), 1303-1305.
- [41] Y. SONNTAG, *topologie et analyse fonctionelle, ellipes, (cours des licence avec 240exercice et 30 problèmes courigés)*, 1998.
- [42] F. Z. Chamkha, *Sur les problèmes de Cauchy pour les équations différentielles floues*, (2013), 3-9.