République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématique
Option : Equation aux derivées partielles et applications

Les équations intégrales

Thème
Présenté Par :

Ayada Imane ***Slimani Houda***

Devant le jury :

Mr **A .Lamairia**	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr **M.Benzahi**	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr **A.Toualbia**	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 25/06/2020

بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله وكفى والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى أما بعد

قال صلى الله عليه وسلم "اطلبوا العلم من المهد الى اللحد" وها قد وصلنا الى درجة مهمة من درجات الرقي العلمي فنرجو من الله العزيز الحكيم التوفيق.

ان شكر الناس من شكر الله لذا فأنا أقدم تشكراتي وإهدائي إلى كل من

إلى من تحت قدميها الجنة *أمي* الحنون.

إلى سبب وجودي ***والدي*** الكريم.

إلى من لازلت صغيرة عنده أخي الأكبر ***"خليفة"*** .

إلى كل إخوتي صغارا وكبارا ***"حدة سامية عبد الرؤوف حليمة سلمان عبد الناصر نورة تامر معاذ".***

إلى زوجات إخوتي وأزواج أخواتي وكل ما يناديني بعمتي أو خالتي.

إلى عائلتي الكبيرة أعمامي ***"الهادي الزين محمد الصالح"*** وعمتي الكبيرة ***"العائشة".***

إلى كل أخوالي وخالاتي "***ناجي الأزهاري فاطمة أم الهاني".***

إلى أبناء أعمامي وأخوالي رفقتي منذ الصغر وبالأخص الشهيد ***"عيادة سيد"*** والمرحوم ***"عيادة رابح"*** والعمرين "ابن خالي وابن عمي".

إلى كل من علمني حرفا فصرت له أمة معلمي وأساتذتي من الابتدائي إلى الجامعة.

"وأخ لود لا أخ لولادة وأعز من نسب الولاد وداد" إلى إخوة لم تلدهم أمي ***"مريم نجمة خديجة إيناس بثينة عائشة سعاد زهية ربيعة مروة صبرينة"*** كانوا أنعم الرفقة ولا زالوا.

إلى رفيقة الدرب من كانت معي عملنا بجد لإتمام هذا البحث صديقتي ورفيقتي ***" هدى".***

إلى من كان عونا لي في يوم ما ونسيته لا أنسى أن أحييه الآن.

الإهداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله خالق الكون العريض ومنزل من السماء ماءا فضيض والصلاة والسلام على من سنا نوره وميض والكل لحوض ماءه رميض

أما بعد ها قد صرنا قاب قوسين أو أدنى من تحقيق حلم من أحلام طفولتنا فكما يقول المثل الصيني "مسيرة الألف ميل تبدأ بخطوة" والحمد لله قد اجتزنا خطوات عديدة وعثرات كانت دافعا لنا ووصلنا على خطوة نتمنى أن نجتازها بإذن الله بالتوفيق.

أهدي مجهوداتي إلى :

إلى *أمي* التي فارقتنا بجسدها ولكن روحها مازالت ترفرف في سماء حياتي رحمة الله عليها.

إلى *أبي* الرجل المثالي اطال الله في عمره ليظل عونا لي.

إلى الأم التي ربتني بعد أمي أطال الله في عمرها.

إلى كبيرة المقام ذات السيرة العطرة جدتي الغالية.

إلى ***إخوتي*** سندي وعضدي ورفقائي [illegible] وأحزاني "***محمد الهادي عبد الرزاق رياض***" حفظهم الله.

إلى توأم روحي ورفيقة دربي إلى صاحبة القلب الطيب والنوايا الصادقة أختي "***زينب***".

إلى من أرى التفاؤل بعينيها إلى شعلة الذكاء والنور إلى الوجه المفعم بالبراءة بمحبتك أزهرت أيامي وتفتحت براعم الغد أختي "***سندس***".

لأخت أنجبتها لي الأيام رافقتني في كل صفحات مذكرة التخرج صديقتي وحبيبتي "***إيمان***".

إلى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء إلى ينابيع الصدق الصافي إلى من سعدت برفقتهم في الدروب الحلوة والحزينة سرت إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير إلى من عرفت كيف أجدهم وعلموني ألا أضيعهم صديقاتي "***بثينة سعاد رندة زهية صبرينة عائشة إيناس***".

إلى من جعلهم الله إخوتي ومن أحببتهم بالله طلاب قسم الرياضيات والإعلام الآلي.

إلى كل أقاربي وأحبابي.

إلى أساتذتي الكرام من الطور الابتدائي إلى الجامعة.

لكم مني دعوة من القلب ولكل من انتفعت من عنده علما.

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.
Nous tenons à remercier particulièrement mon encadreur le docteur **Toualbia Abdelatif** qui à proposé le thème de ce mémoire, pour son conseils, pour son aide précieuse et pour le temps qu'il m'a consacré.
Nous remercions lr Dr : **Lamairia Abd elhakim** d'avoir accepter de présider le jury.
Nous remercions lr Dr : **Benzahi Mourad** d'avoir accepter de faire partie du jury.
Enfin, nous exprimons nos sincères remerciements à tous ceux qui nous ont aidés et notre soutien.

Resumé

L'objectif éssensiel de ce travail consiste à résoudre analytiquement une équation intégrale de Fredholm et de Volterra. Une équation intégrale est une équation dans lequelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégrale..

Mots clés :
Équation intégrale de Volterra, équation intégrale de Fredholm, opérateurs integraux.

abstract

The essential objective of this work is to solve analytically an integral equation of Fredholm and Volterra. An equation in which the unknown function d'one or more variables appears under the integral sign.

Key words :
Integral equation of Volterra, integral equation of Fredholm, integrals operators.

ملخص

الهدف الأساسي من هذا العمل هو حل معادلة تكاملية لفريدهولم وفولترا بشكل تحليلي، وهي معادلة تظهر فيها الدالة غير المعروفة ذات متغير واحد او أكثر تحت علامة التكامل.

الكلمات المفتاحية

معادلة فولترا التكاملية، معادلة فريدهولم التكاملية، مؤثرات تكاملية.

Table des matières

Notations et Symboles

$\langle .,. \rangle$	:Le produit scalaire.
H	:Espace de Hilbert.
$\mathcal{L}(H)$	:Espace des opérateurs linéaire bornés sur $H.$
A	:Opérateur linéaire borné.
A^*	:Adjoint de l'opérateur $A.$
A^{-1}	:L'inverse de l'opérateur $A.$
$\|A\|$	:La norme de l'opérateur $A.$
K	:Opérateur intégrale linéaire.
$k(x,y)$	:Le noyau de l'opérateur intégrale.
φ	:La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
$f(x)$	:Fonction donnée.
λ	:Constante.
$\mathbb{R}$	:L'ensemble des réels.
I	:L'opérateur identité.
$\mathcal{L}\left[f\right](p)$	:La transformation de Laplace de la fonction $f.$
$C^1(a,b)$	:L'espace des fonctions dérivables jusqu'a l'ordre 1 sur $[a,b]$.
$L_2(a,b)$	:L'ensemble des fonctions à carré intégrable.

Introduction Générale

En mathématique, une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieures variables, se produit sous signe intégral. Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe de problèmes formulés auparavant par des opérateurs différentiels, notamment les problèmes aux limites et ceux de Cauchy.

La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int k(x,y)\varphi(y)dy$$

où $h(x), f(x); k(x,y)$ sont des fonctions données, la fonction $\varphi(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieurr du signe intégral est l'inconnu à déterminer ; λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k(x,y)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

L'objet principal de ce mémoire est de présenter les méthodes qui se rencontrent dans la résolution d'une équation intégrale. Pour cela, en procède comme suite :

Dans le **premier chapitre**, on donne des Préliminaires et des définitions nécessaires pour bien comprendre le reste du travaille.

Dans **le deuxième chapitre**, on explique la relation entre l'équation intégrale de Voltera et les équation différentielles. De plus on présente deux méthodes différentes qui nous servent à caractériser et résoudre l'équation de Volterra, telles que la résolution à l'aide du résolvante et aussi par la transformation de Laplace. On propose systèmatiquement des exemples dans le but de faciliter la compréhension et l'assimilation de la méthode exposée. Enfin, on fait une généralisation de la méthode de transformation de Laplace aux systèmes d'équations de Volterra.

Dans **le troisième chapitre**, on présenter la relation entre l'équation de Fredholm et les équations différentielles, puis on explique la méthode proprement dite et on énonce fort rigoureusement les théorèmes qui y sont afférent dans la résolution de l'équation de Fredholm (la méthode de Fredholm, la méthode des noyaux dégénérées et la méthode des noyaux iérés), on fait un certain nombre d'exemples afin de faciliter la comprehension de la méthode.

Chapitre 1

Rappels et Préliminaires

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 1.1 *1). Soit H un espace vectoriel construit sur $\mathbb{R}$, on appelle produit scalaire sur H une application*

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \to & \langle u,v\rangle. \end{array}$$

telle que
a. $\langle u,v\rangle \geq 0$, $\langle u,u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad \forall u \in H.$
b. $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \qquad \forall u_1, u_2, v \in H.$
c. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v \in H$ *de sorte que* $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

2. On dit que u *et* v *sont orthogonaux si* $\langle u,v\rangle = 0.$

Proposition 1.1 *Le produit scalaire* $\langle .,.\rangle$ *définie une norme sur* H*, tel que* $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}, \forall u \in H.$

Proposition 1.2 *(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \text{ pour tout } u,v \in H.$$

Preuve. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u,v \in H$

$$0 \leq \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u,u\rangle + \lambda\langle v,u\rangle + \lambda\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle.$$

l'équation précédente s'écrit pour un λ de cette forme $0 \leq \lambda^2\langle v,v\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle$ donc $|\langle u,v\rangle| \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$ i.e $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ ■

Définition 1.2 *Si H est complet pour cette norme, H s'appelle un espace de Hilbert.*

Exemple 1.1 *1)L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire $\langle u,v\rangle = \sum\limits_{1}^{n} u_i v_i$ pour $u=(u_1,u_2,...,u_n)$, $v=(v_1,v_2,..,v_n)$ est un espace de Hilbert.*

2)L'espace $L_2(\Omega)=\left\{ f:\Omega\to\mathbb{R},\ \text{mesurable} : \|f\| = \left(\int\limits_{\Omega} f^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$ munit du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int\limits_{\Omega} fg\,dx$ est un epace de Hilbert.

Définition 1.3 *Un opérateur A défini par un ensemble $D(A)\subset H$ (H espace de Hilbert) fait associe à chaque $u\in D(A)$ un certain élément $v\in H$:*
a) A linéaire si, $\forall u_1,u_2\in D(A)\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad A(\lambda u_1+\mu u_2)=\lambda A(u_1)+\mu A(u_2)$.
b) A est borné s'il existe une constante $c>0$ tel que

$$\forall u\in D(A)\quad \|Au\|\le c\,\|u\| \qquad \text{sur } D(A).$$

– Par exemple l'opérateur intégrale $\Im : L_2([0,l])\to L_2([0,l])$ défini par

$$\Im(f(x)) = \int\limits_0^x f(\xi)d\xi$$

est borné.
En effet

$$\begin{aligned}\|\Im f\|_{L_2}^2 &= \int\limits_0^l |\Im f|^2\,dx \\ &= \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^x f(\xi)d\xi\right)^2 dx\end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Holder pour le terme $\int\limits_0^x f(\xi)d\xi$

$$\left(\int\limits_0^x 1.f(\xi)d\xi\right)^2 \le \left[\left(\int\limits_0^x d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^x f^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

donc

$$\begin{aligned}\|\Im f\|_{L_2}^2 &\le \int\limits_0^l \left[x\int\limits_0^x f^2(\xi)d\xi\right]dx \\ &\le \int\limits_0^l \left[x\int\limits_0^l f^2(\xi)d\xi\right]dx = \frac{l^2}{2}\|f\|_{L_2}^2\end{aligned}$$

d'où
$$\|\Im f\|_{L_2} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} \|f\|_{L_2}.$$

Remarque 1.1 *On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés.*

Définition 1.4 *Soient E et F des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que : $AB = I_F$ et $BA = I_E$; où I_E (resp .I_F) est l'opérateur identité de E (resp. de F). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.*

Théorème 1.1 *Soit I l'application identité de E définie par $I.U = U \quad \forall U \in E$. I est un opérateur inversible de norme 1. Soit $B \in \mathcal{L}(E,F)$ de norme 1 alors $(I+B)$ est inversible, la série $I - B + B^2 - .... + (-1)^n B^n + ...$ est convergente et*
$$(I+B)^{-1} = I - B + B^2 - .... + (-1)^n B^n + ...$$

Preuve. Soit $C_n = I - B + B^2 - .... + (-1)^n B^n$
$\|C_n - C_m\| \leq \|B^{m+1}\| + \|B^{m+2}\| + ... + \|B^n\| \leq \sum_{m+1}^{\infty} \|B^p\|$ qui est la série reste d'une série convergente : C_n est donc une suite de cauchy de $\mathcal{L}(H,H)$.
Soit C sa limite :
$$\|(I+B)C - I\| = \lim_{n\to\infty} \|(I+B)C_n - I\| = \lim_{n\to\infty} \|B\|^{n+1} = 0.$$
Donc $(I+B)C = I = C(I+B)$ et $C = (I+B)^{-1}$.
Soit maintenant A inversible, $(A+B) = A(I + A^{-1}B)$ est inversible dès que $(I + A^{-1}B)$ l'est, ce qui est le cas si $\|A^{-1}B\| < 1$, ce qui achève la démonstraion. ■
– On notera que si A est inversible $I = AA^{-1}$ et donc $1 \leq \|A\| \|A^{-1}\|$ de sorte que $\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \|A\|$
On ecrira facilement $(A+B)^{-1}$ sous forme de série puisque
$$A + B = A(I + A^{-1}B)$$
et
$$\begin{aligned}(A+B)^{-1} &= (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\\ &= (I - A^{-1}B + (A^{-1}B)^2 + ...)A^{-1}\\ &= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - ....\end{aligned}$$

Définition 1.5 *Soient E, F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$; il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(F,E)$ appelé adjoint de A, vérifiant la relation suivante :*
$$u \in E; v \in F, \qquad \langle Au, v\rangle_F = \langle u, A^*v\rangle_E.$$

Proposition 1.3 *Si A^{-1} existe. $(A^{*})^{-1}$ existe et $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$*

Définition 1.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H)$, A est dit auto-adjoint si $A = A^{*}$*

Définition 1.7 (*Transformation de Laplace*)
La transformation de Laplace de $f(x)$ noté $\mathcal{L}[f](p)$ où $F(p)$ est défini par

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_a^b e^{-pt} f(t) dt \qquad p > 1.$$

Définition 1.8 *On appelle produit de convolution la fonction :*

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_a^b f(y) g(x-y) dy \\ &= \int_a^b f(x-y) g(y) dy.\end{aligned}$$

Lemme 1.1 *(Propriété de linéarité)*
Pour n'importe quelles constantes complexes α et β

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g).$$

Lemme 1.2 *(Théorème de convolution)*
Soient données deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Alors :

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}[f] . \mathcal{L}[g] .$$

– Nous allons manitenant donner un dictionnaire d'images des quelques fonctions

La fonction $f(x)$	:	La transformation de Laplace $\mathcal{L}(f)$
1	:	$\frac{1}{p}$
$t^n(n=1,2,...)$	:	$\frac{n!}{p^{n+1}}$.
$e^{\lambda x}$	:	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin wx \quad (w>0)$	:	$\frac{w}{p^2+w^2}$
$\cos wx$	:	$\frac{p}{p^2+w^2}$
$\cosh wx$	:	$\frac{p}{p^2-w^2}$
$\sinh wx$	:	$\frac{w}{p^2-w^2}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
$e^{\lambda x}\sin wx$	:	$\frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2}$
$e^{\lambda x}\cos wx$	:	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+w^2}$
$t\sin wt$	:	$\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
$t\cos wt$	:	$\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
$t\sinh wt$	:	$\frac{2pw}{(p^2-w^2)^2}$
$t\cosh wt$	:	$\frac{p^2+w^2}{(p^2+w^2)^2}$

1.2 Opérateurs intégraux, noyaux

Soit l'opérateur $f \rightsquigarrow \int k(x,y)f(y)dy$, un tel opérateur est un exemple d'opérateur intégrale, la fonction $k(x,y)$ s'appelle le noyau de cet opérateur. Nous allons étudier de tels opérateurs sur des espaces $L_2([a,b])$ où $[a,b]$ est un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$ On rappelle que $f \in L_2([a,b])$ si $\int\limits_a^b f^2(x)dx < \infty$.

Définition 1.9 *On dit que $k(x,y)$ est une fonction de carré intégrable sur $[a,b]\times[a,b]$ si*

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b k(x,y)dxdy = M < \infty.$$

Définition 1.10 *On dit que $k(x,y)$ est symétrique si $k(x,y) = k(y,x)$.*

Définition 1.11 *(Opérateur intégrale)*
Soit $H = L^2([a,b])$ et k une fonction de carré intégrable sur $[a,b]\times[a,b]$.
On appel opérateur intégrale associé à la fonction k l'opérateur linéaire borné de $L^2([a,b])$ dans lui même défini par :

$$Kf(x) = \int\limits_a^b k(x,y)f(y)dy.$$

La norme de cet opérateur, noté encore K, est

$$\|K\| = \sup_{\|f\|=1} \|Kf\|.$$

On dit que $k(x,y)$ est le noyau de l'opérateur K.

Théorème 1.2 *Si le noyau $k(x,y)$ est symétrique ; l'opérateur K est auto adjoint.*

Preuve. Il convient de vérifier que K est bien borné de H dans H et que K est auto-adjoint si son noyau est symétrique
Vérifions d'abord que K est auto-adjoint si son noyau est symétrique :

$$\begin{aligned}\langle Kf, g\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right) g(x)dx \\ &= \int_a^b f(y)\left[\int_a^b k(x,y)g(x)dx\right] dy\end{aligned}$$

(d'après un théorème classique d'intégration (Fubini))

$$= \langle f, Kg \rangle .$$

Pour montrer que $Kf \in L_2([a,b])$ on applique l'inégalité de Schwartz :

$$\left(\left|\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right|\right)^2 \leq \int_a^b |k(x,y)|^2 \, dy. \int_a^b |f(y)|^2 \, dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\left|\int_a^b k(x,y)f(y)dy\right|\right)^2 dx &\leq \int_a^b |f(y)|^2 \, dy. \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \, dydx \\ &\leq \|f\|^2_{L_2([a,b])} .M. \end{aligned}$$

ce qui montre que K est bien un opérateur borné. ■

Théorème 1.3 *L'opérateur K défini précédemment est un opérateur compact, il est auto-adjoint si $k(x,y) = k(y,x)$.*

Preuve. a.)Soit $[a,b] = [0,1]$ et $k(x,y)$ continue sur $[0,1] \times [0,1]$ de sorte que $k(x,y) \leq A \quad \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.
Soit f_n une suite d'éléments de $L_2([0,1])$ tels que $\|f_n\| = 1$ et soit $g_n = Kf_n$:

$$|g_n(x)|^2 \leq \left(\int_0^1 |k(x,y)| \, |f_n(y)| \, dy\right)^2 \leq A^2$$

toujours d'après l'inégalité de Schwartz.
Soit y fixé, $x \rightsquigarrow k(x,y)$ est uniformément continue sur $[0,1]$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(y) : |x_1 - x_2| \leq n(y) \Rightarrow |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \leq \varepsilon.$$

Si $y \in [0,1]$ qui est un ensemble fermé borné, on peut démontrer qu'il existe un n ne dépendant pas de y qui a la même propriété que $n(y)$ de sorte que

$$|g_n(x_1) - g_n(x_2)|^2 \leq \left(\int_0^1 |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \, |f_n(y)| \, dy\right)^2 \leq \varepsilon \quad \text{si } |x_1 - x_2| \leq n.$$

On a ainsi démontré les deux propriétés suivantes :
i. $|g_n(x)|^2 \leq A^2 \quad \forall x \in [0,1]$: on dit que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.
ii. $\forall \varepsilon > 0, \exists n : |x_1 - x_2| \leq n \Rightarrow |g_n(x_1) - g_n(x_2)| \leq \varepsilon$: on dit que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
On démontre (théorème d'Ascoli) que si une suite a ces deux propriétés on peut en extraire une suite $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction (nécessairement continue) $g(x)$.

Ainsi, si $k(x,y)$ est continue sur $[0,1]\times[0,1]$, K est compact.

b.)Soit toujours $[a,b]=[0,1]$ et $K\in L_2([0,1])$.

Si K n'est pas une fonction continue on démontre qu'il existe des fonctions continues $\{k_n(x,y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |k_n(x,y)-k(x,y)|^2\,dxdy=0.$$

A chaque fonction $k_n(x,y)$ associé un opérateur compact K_n or :

$$\begin{aligned}\|(K-K_n)f\|^2 &= \left\|\int_0^1 (k(x,y)-k_n(x,y))f(y)dy\right\|^2\\ &\leq \left(\int_0^1\int_0^1 |k(x,y)-k_n(x,y)|^2\,dydx\right).\|f\|^2.\end{aligned}$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to\infty}\|K-K_n\|=0.$

L'opérateur K limite d'opérateurs compacts est compact.

c.)Soit $[a,b]=[0,\infty]$ ou $[-\infty,0]$ ou $[-\infty,+\infty]$

Prenons par exemple le premier cas et soit $k_n(x,y)$ la suite définie par

$$k_n(x,y)=\begin{cases} k(x,y) & \text{sur } [0,n]\times[0,n].\\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

Où $k_n(x,y)$ associe un opérateur compact K_n et on vérifie de nouveau que $\lim\limits_{n\to\infty}\|K-K_n\|=0$ de sorte que K est compact.

On procède de façon analogue pour les autres cas. ■

Proposition 1.4 *Soit $k(x,y)$ une fonction de carré intégrable sur $[a,b]\times[a,b]$ et K l'opérateur associé. Les opérateurs itérés $K_2,K_3,...,K_n$ définis par $K_2f=K(Kf)$, $K_3f=K(K_2f)$, ..., $K_nf=K(K_{n-1}f)$ sont aussi des opérateurs à noyaux.*

Le noyau de $K_n$est

$$k_n(x,y)=\int_a^b k(x,u)k_{n-1}(u,y)du.$$

Preuve. C'est un calcul élémentaire reposant sur le théorème de Fubini d'interversion de l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned} K(Kf)(x) &= \int_a^b k(x,u)Kf(u)du = \int_a^b k(x,u)\left(\int_a^b k(u,y)f(y)dy\right)du \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,u)k(u,y)du\right) f(y)dy = \int_a^b k_2(x,y)f(y)dy. \end{aligned}$$

en posant $k_2(x,y) = \int_a^b k(x,u)k(u,y)du$.

Si $k(x,y) = k(y,x)$ il est clair que $k_2(x,y) = k_2(y,x)$ et que K_2 est donc un opérateur auto-adjoint.

On établit de la même façon que $k_n(x,y) = \int_a^b k(x,u)k_{n-1}(u,y)du$. ■

Lemme 1.3 *Pour toute fonction* $u(x)$:

$$\int_a^x \int_a^y u(t)dtdy = \int_a^x (x-t)u(t)dt.$$

En générale on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} ... \int_a^{x_{n-1}} u(x_n)dx_n dx_{n-1}...dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-x_1)^{n-1}u(x)dx_1.$$

Preuve. Soit

$$g(y) = \int_a^y u(t)dt,$$

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^y u(t)dtdy &= \int_a^x g(y)dy \\ &= \int_a^x 1.g(y)dy = [yg(y)]_a^x - \int_a^x yg'(y)dy \text{ (intégration par partie)} \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x yu(y)dy \\ &= x\int_a^x u(t)dt - 0 - \int_a^x tu(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)u(t)dt. \end{aligned}$$

■

1.3 Définitions

Définition 1.12 *On appelle équation intégrale de Volterra une équation de la forme :*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{1.3.1}$$

1.Si $h(x) = 0$, on appelle équation de Volterra de première espèce, donc l'équation $(1.3.1)$ s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = 0. \tag{1.3.2}$$

2.Si $h(x) = c$ (c constante $\neq 0$), on appelle équation de Volterra de seconde espèce, donc l'équation $(1.3.1)$ s'écrit :

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{1.3.3}$$

Définition 1.13 *Si dans les équation $(1.3.2)$ et $(1.3.3)$ on a $f(x) = 0$, ces équations sont dites homogènes.*

Définition 1.14 *L'équation intégrale de Fredholm de 1ère espèce prendre la forme*

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy = 0. \tag{1.3.4}$$

Définition 1.15 *L'équation intégrale de Fredholm de 2ème espèce prendre la forme*

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{1.3.5}$$

Définition 1.16 *Si dans les équations (1.3.4) et (1.3.5) on a $f(x) = 0$, ces équations sont dites homogène.*

Exemple 1.2 *la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ est une solution de l'équation intégrale de Volterra :*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)} - \int_0^x \frac{y}{(1+x^2)}\varphi(y)dy. \tag{1.3.6}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} &= \frac{1}{(1+x^2)} - \int_0^x \frac{y}{(1+x^2)} \frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} dy \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)} \int_0^x \frac{y}{(1+y^2)^{3/2}} dy \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)} \frac{1}{2} \int_0^x 2y(1+y^2)^{-3/2} dy \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)} \frac{1}{2} \left[-2(1+y^2)^{-1/2} \Big|_0^x \right] \\
&= \frac{1}{(1+x^2)} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+x^2)} \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Équation intégrale de volterra

2.1 Relation avec les équations différentielles

On considère le problème de Cauchy de seconde ordre suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2f}{dx^2} + a(x)\frac{df}{dx} + b(x)f(x) = g(x) \\ \\ f(0) = \alpha \qquad\qquad\qquad \frac{df}{dx}(0) = \beta \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Soit

$$\varphi(x) = \frac{d^2f}{dx^2}. \tag{2.1.2}$$

L'intégration de deux cotées nous donne :

$$\frac{df}{dx} = \beta + \int_0^x \varphi(u)du. \tag{2.1.3}$$

En intégrant une seconde fois :

$$f(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x \left[\int_0^y \varphi(u)du\right] dy. \tag{2.1.4}$$

En utilisant le Lemme 1.3 avec $n = 2$, on obtient :

$$f(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-u)\varphi(u)du. \tag{2.1.5}$$

En repportant dans $(2.1.1)$ on voit que φ est solution de :

$$\varphi(x) + \beta a(x) + \int_0^x a(x)\varphi(u)du + \alpha b(x) + \beta x b(x) + \int_0^x (x-u)\varphi(u)b(x)du = g(x).$$

En posant : $G(x) = g(x) - \beta a(x) - \alpha b(x) - \beta x b(x)$, et $k(x,u) = -\left[a(x) + b(x).(x-u)\right]$.

La relation précédente devient :

$$\varphi(x) = G(x) + \int_0^x k(x,u)\varphi(u)du. \tag{2.1.6}$$

La résolution de (2.1.1) se ramène donc à la résolution de (2.1.6), C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Nous allons étudier des équations de la même nature que (2.1.6)

Exemple 2.1 *On peut former les équations intégrales correspondant à les équations différentielles*

$$1/\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1, \qquad y\prime(0) = 0 \end{cases} \qquad 2/\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

En effet, pour la première équation

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1,\ y\prime(0) = 0 \end{cases}$$

On pose

$$\varphi(x) = y''(x).$$

en intégrant les deux cotées, on obtient

$$y'(x) = \int_0^x \varphi(u)du.$$

en intégrant une seconde fois,

$$y(x) = 1 + \int_0^x \left[\int_0^y \varphi(u)du\right] dy = 1 + \int_0^x (x-u)\varphi(u)du.$$

en reportant dans l'équation différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -x\left[\int_0^x \varphi(u)du\right] - 1 - \int_0^x (x-u)\varphi(u)du \\ &= -1 - \int_0^x (2x-u)\varphi(u)du. \end{aligned}$$

c'est une équation intégrale de Volterra de $2^{ème}$ espèce.

2/

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

On pose

$$\varphi(x) = y''(x).$$

on intégrant les deux cotées on obtient :

$$y'(x) = 1 + \int_0^x \varphi(u)du.$$

on intégrant une seconde fois :

$$y(x) = x + \int_0^x \left[\int_0^y \varphi(u)du \right] dy = x + \int_0^x (x-u)\varphi(u)du.$$

en reportant dans l'équation différentielle, on obtient

$$\varphi(x) = -x - \int_0^x (x-u)\varphi(u)du.$$

c'est une équation intégrale de Volterra de $2^{ème}$ espèce.

2.2 Résolution de l'équation de Volterra

Définition 2.1 *On appelle noyau de Volterra sur un intervale borné $[a,b]$ une fonction $k(x,y)$ telle que $k(x,y) = 0$ si $y > x$.*

Définition 2.2 *Soit k un noyau de Volterra carré intégrable sur $[a,b] \times [a,b]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L_2([a,b])$. On appelle équation de Volterra de seconde espèce l'équation :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy + f(x). \tag{2.2.1}$$

où l'inconnue $\varphi \in L_2([a,b])$ et λ est réel.

Théorème 2.1 [10]*(Résolution de E-V à l'aide de la résolvante)*
L'équation (2.2.1) a pour tout λ une solution unique de la forme

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) + \lambda K f(x) + ... + \lambda^n K^n f(x) \right). \tag{2.2.2}$$

Ou

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x H(x,y,\lambda).f(y)dy \qquad \text{où} \quad H(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,y).$$

$(k_n(x,y)$ est le noyau de K_n n-ième itéré de $K)$.

Preuve. Pour simplifier, nous supposerons $[a,b]=[0,1]$. Au noyau $k(x,y)$ on associe un opérateur K dans $L_2([0,1])$ et l'équation (2.2.1) s'écrit $(I-\lambda K)\varphi=f$.
On sait que (d'après théorème 1.1) si $|\lambda|<\dfrac{1}{\|K\|}$ $(I-\lambda K)^{-1}$ et est égale précisément à $I+\lambda K+\lambda^2K^2+...+\lambda^nK^n+...$; de sorte que l'égalité (2.2.2) est vraie pour $|\lambda|<\dfrac{1}{\|K\|}$ et à condition de considérer une convergence dans $L_2([0,1])$.
Pour établir cela nous n'avons pas utilisé le fait que $k(x,y)$ est un noyau de Volterra, c'est ce fait qui permet d'obtenir la convergence ponctuelle uniforme et cette convergence pour $|\lambda|\geq\dfrac{1}{\|K\|}$.
Nous allons directement vérifier que la série (2.2.2) a cette propriété de convergence sur $[0,1]$.
Soit $H(x)=\int\limits_0^x|k(x,y)|^2\,dy$ et $G(y)=\int\limits_y^1|k(x,y)|^2\,dx$, par hypothèse H et G sont intégrable sur $[0,1]$. Nous posereons :

$$H=\int_0^1 H(x)dx \text{ et } G=\int_0^1 G(y)dy.$$

On notera $h(x)=\int\limits_0^x H(u)du$ c'est une fonction croissante dont la limite quand $x\to 1$ est H.
Nous allons vérifier que tous les noyaux k_n sont aussi des noyaux de volterra, ce que donnera une majoration de $\|K^n\|$.

$$k_2(x,y)=\int_0^1 k(x,u)k(u,y)du.$$

Or $k(x,u)k(u,y)$ est non nul seulement si $x\geq u\geq y$ donc

$$\begin{aligned} k_2(x,y) &= 0 && \text{si } y>x \\ k_2(x,y) &= \int_0^1 k(x,u)k(u,y)du && \text{si } y\leq x \end{aligned}$$

$k_2(x,y)$ est donc un noyau de Volterra, donc aussi $k_3(x,y)$,...,$k_n(x,y)$.
Soit $y\leq x$:

$$|k_2(x,y)|^2 \leq \int_y^x |k(x,u)|^2\,du\int_y^x |k(u,y)|^2\,du \leq H(x)G(y)$$

(d'après l'inégalité de Schwartz).

De même

$$|k_3(x,y)|^2\leq\int_y^x |k(x,u)|^2\,du\int_y^x |k_2(u,y)|^2\,du\leq H(x)G(y)\int_y^x H(u)du.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |k_2(x,y)|^2 &\leq H(x)G(y) \\ |k_3(x,y)|^2 &\leq H(x)G(y)[h(x)-g(y)] \end{aligned}$$

et par récurrence

$$|k_n(x,y)|^2 \leq H(x)G(y)\frac{[h(x)-g(y)]^{n-2}}{(n-2)!}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |K^n f(x)|^2 &= \left|\int_0^x k_n(x,y)f(y)dy\right|^2 \leq \int_0^x H(x)G(y)\frac{[h(x)-g(y)]^{n-2}}{(n-2)!}dy.\,\|f\|_2^2 \\ &\leq H(x)\frac{[h(x)]^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^x G(y)dy.\,\|f\|_2^2 \leq \frac{M^n}{(n-2)!}\,\|f\|_2^2\,. \end{aligned}$$

en désignant par M un nombre supérieur ou égal à H, G et $h(1)$.
Ainsi

$$\forall\lambda \qquad |\lambda^n K^n f(x)|^2 \leq \frac{(\lambda^2 M)^n}{(n-2)!}\,\|f\|_2^2\,.$$

qui est le terme général d'une série uniformément et absolument convergente $\forall\lambda$.

Unicité de la solution : elle est évident si $|\lambda| < \dfrac{1}{\|K\|}$
Dans le cas général on utilise la proposition 1.4 du chapitre précédent. Soit R l'opérateur défini sur $L_{2.}([0,1])$ par la relation : $R\varphi = f + \lambda K f$. φ est solution de $(2.2.1)$ si $\varphi = f + \lambda K f$ donc si $\varphi = R\varphi$.
Il suffit de montrer que cette dernière équation a une seule solution, et pour cela de vérifier qu'il existe un entier m et un réel α $(0 < \alpha < 1)$ tels que :

$$\|R^m\varphi_1 - R^m\varphi_2\| \leq \alpha\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

or

$$\begin{aligned} R^2\varphi &= f + \lambda K f + \lambda^2 K^2\varphi \\ R^3\varphi &= f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \lambda^3 K^3\varphi \\ &\vdots \\ &\vdots \\ R^n\varphi &= f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \ldots + \lambda^{n-1}K^{n-1} f + \lambda^n K^n\varphi. \end{aligned}$$

et d'après la majoration précédente

$$\|R^n\varphi_1 - R^n\varphi_2\|^2 \leq \frac{(\lambda^2 M)^n}{(n-2)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 .$$

ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 2.2 *Soit l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x k(x,y).\varphi(y)dy + f(x); \quad \textit{avec} \quad k(x,y) = e^{x-y}. \tag{2.2.3}$$

Calculons

$$\begin{aligned} k_2(x,y) &= \int_y^x k(x,u)k(u,y)du \\ &= \int_y^x e^{x-u}.e^{u-y}du \end{aligned}$$

$$k_2(x,y) = (x-y)e^{x-y}.$$

$$\begin{aligned} k_3(x,y) &= \int_y^x k(x,u)k_2(u,y)du \\ &= \int_y^x e^{x-u}(u-y)e^{u-y}du \end{aligned}$$

$$k_3(x,y) = \frac{(x-y)^2}{2!}e^{x-y}.$$

et par récurrence :

$$k_n(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-y}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} H(x,y,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,y) \\ &= e^{x-y}\left[1 + \lambda(x-y) + \frac{\lambda^2}{2}(x-y)^2 + ... + \frac{\lambda^n}{n!}(x-y)^n\right] \\ &= e^{x-y}e^{\lambda(x-y)} = e^{(x-y)(1+\lambda)}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x e^{(x-y)(1+\lambda)}.f(y)dy + f(x).$$

Remarque 2.1 *(utilisation de la transformation de Laplace)*
Si k est une fonction de $(x-y)$ on peut chercher à utiliser la transformation de Laplace puisque $\int_0^x k(x-y)f(y)dy = k * f$ de sorte que l'équation de volterra devient : $\varphi = \lambda k * \varphi + f$ et donc $\mathcal{L}[\varphi] = \lambda \mathcal{L}[k].\mathcal{L}[\varphi] + \mathcal{L}[f]$.

Exemple 2.3 *La solution de l'équation intégrale de volterra*

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy.$$

est

$$\varphi(x) = xe^x.$$

en effet

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sin x + 2\int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy \\
\mathcal{L}[\varphi(x)] &= \mathcal{L}[\sin x] + 2\mathcal{L}[\cos(x)].\mathcal{L}[\varphi(x)] \\
\mathcal{L}[\varphi(x)] &= \frac{1}{1+p^2} + 2\frac{p}{p^2+1}\left(\mathcal{L}[\varphi(x)]\right) \\
\frac{1}{1+p^2} &= \mathcal{L}[\varphi(x)]\left(1 - 2\frac{p}{p^2+1}\right) \\
\mathcal{L}[\varphi(x)] &= \frac{1}{(p-1)^2} \\
\varphi(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right] = xe^x.
\end{aligned}$$

2.2.1 Noyaux singuliers

Le raisonnement que nous avons fait qui prouve à la fois l'unicité et l'existence des solutions si $k(x,y)$ est de carré intégrable s'applique si $k(x,y) = \dfrac{H(x,y)}{(x-y)^\alpha}$ où $0 \leq \alpha \leq 1$ et $H(x,y)$ est une fonction continue.

En considérant les noyaux itérés, on démontre facilement le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soit* $(E) : \varphi(x) = \lambda \int\limits_a^x k(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$ *une équation de Volterra où* $k(x,y) = \dfrac{H(x,y)}{(x-y)^\alpha}$.
On suppose H *et* f *continues sur* $[a,b]$ *et* $0 \leq \alpha < 1$.
Il existe alors une solution unique de (E).

La démonstration consiste à vérifier qu'il existe n_0 tel que R^{n_0} soit une contraction.

Exemple 2.4 *(Équation intégrale d'Abel)*

Résoudre le problème d'Abel

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} u(y)dy.$$

En prenant la transformée de Laplace des rendements d'équation donnée

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right].\mathcal{L}\left[u(x)\right]$$

Cette équation transformée se réduit à :

$$\mathcal{L}\left[u(x)\right] = \sqrt{\frac{p}{\pi}}.\mathcal{L}\left[f(x)\right]$$

L'inversion de ce problème est effectuée comme suit :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p\mathcal{L}\left[f(x)\right]}{\sqrt{p}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}\left[f(x)\right]}{\sqrt{p}}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}}. \end{aligned}$$

qui est la solution souhaitée de l'équation d'Abel.

2.3 Équations de Volterra de première espèce

Définition 2.3 *Soit* $k(x,y)$ *un noyau de Volterra sur* $[a,b] \times [a,b]$. *On appelle équation de Volterra de première espèce une équation de la forme*

$$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x). \tag{2.3.1}$$

Où f est donnée.

– En générale ces équations sont plus difficilles à résoudre que celles de seconde espèce sauf si k et f sont assez régulières. Dans ce cas en se ramène à des équations de seconde espèce.

Théorème 2.3 *:On suppose f et k de classe C^1 et $k(x,x) \neq 0$ l'équation (2.3.1) se ramène alors à une équation de seconde espèce.*

Preuve. Soit φ une solution de (2.3.1) :$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$
Chacun des membres de cette égalité peut être dérivé de sorte que

$$k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} k(x,y)\varphi(y)dy = \frac{d}{dx} f(x).$$

$$\varphi(x) = \frac{\frac{df}{dx}}{k(x,x)} - \int_a^x \frac{1}{k(x,x)} \frac{\partial}{\partial x} k(x,y)\varphi(y)dy.$$

qui est une équation de Volterra de seconde espèce ■

Exemple 2.5 *Soit l'équation de Volterra de première espéce*

$$\int_a^x e^{x-y}\varphi(y)dy = f(x). \tag{2.3.2}$$

On peut transformer (2.3.2) à une équation de Volterra de seconde espèce

En effet, on a $k(x,y) = e^{x-y}$ alors $k(x,x) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x e^{x-y}\varphi(y)dy &= \frac{d}{dx} f(x) \\ \varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} e^{x-y}\varphi(y)dy &= \frac{d}{dx} f(x) \\ \varphi(x) + \int_a^x e^{x-y}\varphi(y)dy &= \frac{d}{dx} f(x). \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *D'une façon analogue aux équations intégrales de deuxième espèce, on peut utiliser la transformation de Laplace pour résoudre des équations intégrales de Volterra de première espèce.*

2.4 Systèmes des équations de Volterra :

Appliquant maintenant la méthode de résolution des équations de Volterra à noyau de type convolution (noyau depend de $(x-y)$) aux systèmes des équations de Volterra de type :

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^x k_{ik}(x-y)\varphi_k(y)dy \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{2.4.1}$$

Si l'on effectue la transformation de Laplace dans les deux termes de l'équation $(2.4.1)$, on obtient

$$\mathcal{L}\left[\varphi_i\right] = \mathcal{L}\left[f_i\right] + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_{ik}\left[k\right].\mathcal{L}_k\left[\varphi\right] \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

En résolvant ce système des équations, qui est un système linéaire par rapport à $\mathcal{L}\left[\varphi_i(x)\right]$, on trouve $\mathcal{L}\left[\varphi_i(x)\right]$ où $(i = 1, 2, ..., n)$ dont les transformations inverses représentent justement la solution du système des équations intégrales initiales $(2.4.1)$.

Exemple 2.6 *Résoudre le système linéaire d'équation :*

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x e^{-(x-y)}\varphi_1(y)dy + \int_0^x (x-y)\varphi_2(y)dy. \\ \\ \varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \sinh(x-y)\varphi_1(y)dy - \int_0^x e^{(x-y)}\varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

Solution 2.1 *:*

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x e^{-(x-y)}\varphi_1(y)dy + \int_0^x (x-y)\varphi_2(y)dy. \\ \\ \varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \sinh(x-y)\varphi_1(y)dy - \int_0^x e^{(x-y)}\varphi_2(y)dy. \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Laplace et en faisant appel au théorème de convolution (lemme 1.2) :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] = \mathcal{L}\left[x\right] + \mathcal{L}\left[e^{-x}\right].\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] + \mathcal{L}\left[x\right].\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]. \\ \\ \mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] = \mathcal{L}\left[1\right] + \mathcal{L}\left[\sinh(x)\right].\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] - \mathcal{L}\left[e^{x}\right].\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] = \dfrac{1}{p^2} + \left(\dfrac{1}{1+p}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] + \dfrac{1}{p^2}.\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]. \\ \\ \mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] = \dfrac{1}{p} + \left(\dfrac{1}{p^2-1}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] - \left(\dfrac{1}{p-1}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{1+p}\right)\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right]=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^2}.\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] \\ \\ \left(1+\dfrac{1}{p-1}\right)\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]=\dfrac{1}{p}+\left(\dfrac{1}{p^2-1}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{p}{p+1}\right)\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right]=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^2}.\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] \\ \\ \left(\dfrac{p}{p-1}\right)\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]=\dfrac{1}{p}+\left(\dfrac{1}{p^2-1}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right]. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

de l'équation 1 du système(2.4.2) :

$$\mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right]=\frac{p+1}{p^3}+\left(\frac{p+1}{p^3}\right)\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]. \tag{2.4.3}$$

En repportant (2.4.3) dans l'équation 2 de système (2.4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p-1}\right)\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] &= \frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p^2-1}\right).\left(\frac{p+1}{p^3}+\left(\frac{p+1}{p^3}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right]\right) \\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{(p-1).p^3}+\left(\frac{1}{(p-1).p^3}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] \\ \left(\frac{p}{p-1}-\frac{1}{(p-1).p^3}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] &= \frac{1}{p}+\frac{1}{(p-1).p^3} \\ \left(\frac{p^4-1}{(p-1).p^3}\right).\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] &= \frac{1}{p}+\frac{1}{(p-1).p^3} \\ &= \frac{p^2(p-1)+1}{(p-1).p^3}. \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{L}\left[\varphi_2(x)\right] = \frac{p^2(p-1)+1}{p^4-1}.$$

en repportant cette formule dans (2.4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\varphi_1(x)\right] &= \frac{p+1}{p^3}+\left(\frac{p+1}{p^3}\right).\left(\frac{p^2(p-1)+1}{p^4-1}\right) \\ &= \frac{p^2+p-1}{p(p^2+1)(p-1)}. \end{aligned}$$

On trouve les transformations inverses de $\mathcal{L}[\varphi_1(x)]$ et $\mathcal{L}[\varphi_2(x)]$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\left(\frac{-3p+1}{p^2+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}\right)\right) \\
\varphi_1(x) &= 1-\frac{3}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2-1}\right)-\frac{1}{p^2+1}\right) \\
\varphi_2(x) &= \frac{1}{2}\left(\cos(x)+\cosh(x)\right)-\sin(x).
\end{aligned}$$

donc la solution du système des équations intégrales est :

$$\begin{cases}
\varphi_1(x) = 1+\frac{1}{2}\left(\sin(x)-3\cos(x)+e^x\right). \\
\\
\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x)+\cosh(x)\right)-\sin(x).
\end{cases}$$

Chapitre 3

Équation intégrale de Fredholm

3.1 Relation avec les équations différentielles

On considére le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), & 0 < x < 1. \\ \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

De la même manière, on intègre les deux cotées de zéro à x, on obtient

$$u'(x) = c + \int_0^x g(t, u(t))dt, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

et

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dt \qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{3.1.2}$$

Pour déterminer la constante c, on prend $x = 1$ et on utilise la condition $u(1) = u_1$, ce qui donne

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1-t)g(t, u(t))dt$$

Ainsi, l'équation (3.1.2) devient

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)\, x + \int_0^x (x-t)g(t, u(t))dt - x \int_0^1 (1-t)g(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)\, x - \int_0^x t(1-x)g(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1-t)g(t, u(t))dt. \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme :

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)\,x - \int_0^1 k(x,t)g(t,u(t))dt. \tag{3.1.3}$$

où

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & t \leq x \\ \\ x(1-t) & t \geq x \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Exemple 3.1 *Le problème aux limites linéaire suivant*

$$\begin{cases} u^{"}(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1. \\ \\ u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1. \end{cases}$$

est équivalent à une équation intégrale linéaire de Fredholm de la forme :

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)\,x - \lambda \int_0^1 k(x,t)g(t,u(t))dt.$$

où $k(x,t)$ est donné par (3.1.4).

3.2 Résolution de l'équation de Fredholm

Définition 3.1 *Soit $k(x,y)$ un noyau de carré intégrable sur $[a,b] \times [a,b]$, λ un nombre réel (non nul) et $f \in L_2[a,b]$, on appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce l'équation suivante, où l'inconnue $\varphi \in L_2[a,b]$:*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{3.2.1}$$

On notera K un opérateur de noyau $k(x,y)$, (3.2.1) s'écrit alors

$$(I - \lambda K)\varphi = f.$$

comme précédement si $|\lambda| \leq \frac{1}{\|K\|}$ il éxiste une solution unique :

$$\varphi = (I - \lambda K)^{-1} f = \lim_{n\to\infty} \left(f + \lambda K f + ... + \lambda^n K^n f\right).$$

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 [10]*Soit* $H(x,y,\lambda) = \lim_{n\to\infty} \left[k_1(x,y) + \lambda k_2(x,y) + ... + \lambda^{n-1} k_n(x,y)\right]$ *Où* $k_n(x,y)$ *est le noyau de n-ième itéré de* k_n *de* K.
Soit $|\lambda| \leq \dfrac{1}{\|K\|}$ *: la série précédente est uniformement convergente sur* $[a,b]$ *et la solution unique de* $(3.2.1)$ *est :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b H(x,y,\lambda) f(y) dy.$$

Exemple 3.2 *Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x-y} \varphi(y) dy. \tag{3.2.2}$$

Pour trouver la solution de (3.2.2) en effet :

$$k(x,y) = e^{x-y}.$$

$$\begin{aligned} k_2(x,y) &= \int_0^1 k(x,u).k(u,y)du \\ &= \int_0^1 e^{x-u} e^{u-y} du = \int_0^1 e^{x-y} du \\ &= e^{x-y} = k(x,y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3(x,y) &= \int_0^1 k(x,u).k_2(u,y)du \\ &= \int_0^1 e^{x-y} du = e^{x-y} \\ &= k(x,y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_n(x,y) &= \int_0^1 k(x,u).k_{n-1}(u,y)du \\ &= e^{x-y} \\ &= k(x,y). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} H(x,y,\lambda) &= \lim_{n\to\infty} e^{x-y} \left[1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^{n-1}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[e^{x-y} \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right] \\ &= \frac{e^{x-y}}{1-\lambda}, \quad \text{Si} \quad |\lambda| < 1. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x)+\lambda\int_a^1 H(x,y,\lambda)f(y)dy\\ &= f(x)+\lambda\int_a^1 \frac{e^{x-y}}{1-\lambda}f(y)dy.\end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{1-\lambda}e^{x}\int_a^1 e^{-y}f(y)dy.$$

3.3 Méthode de Fredholm :

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{3.3.1}$$

est donnée par la formule :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda).f(y)dy. \tag{3.3.2}$$

ou la fonction $R(x,y,\lambda)$ est dite résolvent de Fredholm de l'équation $(3.3.1)$ est défini par l'égalité :

$$R(x,y,\lambda)=\frac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}. \tag{3.3.3}$$

sous la condition $D(\lambda)\neq 0$. ici $D(x,y,\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissance de λ :

$$D(x,y,\lambda)=k(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}B_n(x,y)\lambda^n. \tag{3.3.4}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}C_n(x,y)\lambda^n. \tag{3.3.5}$$

avec les coefficients ainsi définies :

$$B_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} k(x,y) & k(x,y_1) & \cdots & k(x,y_n)\\ k(y_1,y) & k(y_1,y_1) & \cdots & k(y_1,y_n)\\ k(y_2,y) & k(y_2,y_1) & \cdots & k(y_2,y_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k(y_n,y) & k(y_n,y_1) & \cdots & k(y_n,y_n)\end{vmatrix}dy_1\ldots dy_n. \tag{3.3.6}$$

et

$$B_0(x,y) = k(x,y),$$

$$C_n(x,t) = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} k(y_1,y_1) & k(y_1,y_2) & \cdots & k(y_1,y_n) \\ k(y_2,y_1) & k(y_2,y_2) & \cdots & k(y_2,y_n) \\ k(y_3,y_1) & k(y_3,y_2) & \cdots & k(y_3,y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(y_n,y_1) & k(y_n,y_2) & \cdots & k(y_n,y_n) \end{vmatrix} dy_1 \ldots dy_n. \tag{3.3.7}$$

Les fonction $D(\lambda)$ et $D(x,y,\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm.
Si le noyau $k(x,y)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,y)dxdy.$$

est finie, les séries $(3.3.4)$ et $(3.3.5)$ convergent quelque soit λ et sont donc des fonctions analytiques entières de λ ;
La résolvante

$$R(x,y,\lambda) = \frac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}.$$

est une fonction analytique de λ ; sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$ ces derniers sont pôles de la résolvante $R(x,y,\lambda)$.

Exemple 3.3 *A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la résolvante du noyau :*

$k(x,y) = x\exp(y)$, $a = 0$; $b = 1$.
on a $B_0(x,y) = x\exp(y)$.
Ensuite :

$$\begin{aligned} B_1(x,y) &= \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^y & xe^{y_1} \\ y_1e^y & y_1e^{y_1} \end{vmatrix} dy_1 = 0. \\ B_2(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^y & xe^{y_1} & xe^{y_2} \\ y_1e^y & y_1e^{y_1} & y_1e^{y_2} \\ y_2e^y & y_2e^{y_1} & y_2e^{y_2} \end{vmatrix} dy_1dy_2 = 0. \end{aligned}$$

puis les déterminants sous $\int$ sont nuls. Il est évident que tous les $B_n(x,y)$ suivants sont nuls eux aussi. trouvons les coefficients C_n :

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 k(y_1,y_1)dy_1 = \int_0^1 y_1e^{y_1}dy_1 = 1. \\ C_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} y_1e^{y_1} & y_1e^{y_2} \\ y_2e^{y_1} & y_2e^{y_2} \end{vmatrix} dy_1dy_2 = 0. \end{aligned}$$

Evidement, tous les C_n suivants sont nuls.
Dans notre cas, nous avons conformément aux formules $(3.3.4)$ et $(3.3.5)$

$$D(x,y,\lambda) = k(x,y) = x\exp(y), \quad D(\lambda) = 1-\lambda.$$

Donc

$$R(x,y,\lambda) = \frac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x\exp(y)}{1-\lambda}.$$

appliquons le résultat obtenu à l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b x\exp(y).\varphi(y)dy.$$

d'aprés la formule $(3.3.2)$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \frac{x\exp(y)}{1-\lambda}.f(y)dy, \qquad (\lambda \neq 1).$$

en particulier, nous obtenons pour $f(x) = \exp(-x)$:

$$\varphi(x) = \exp(-x) + \frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

Le calcul des coefficients $B_n(x,y)$ et $C_n(x,y)$ des séries $(3.3.4)$ et $(3.3.5)$ par les formules $(3.3.6)$ et $(3.3.7)$ n'est possible que dans des cas rares,
mais ces formules entrainent les relations de récurrence suivantes :

$$B_n(x,y) = C_nk(x,y) - n\int_a^b k(x,u)B_{n-1}(u,y)du. \tag{3.3.8}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(u,u)du. \tag{3.3.9}$$

Sachant que $C_0 = 1$ et $B_0(x,y) = k(x,y)$; les formules $(3.3.9)$ et $(3.3.8)$ permettent de trouver de proche en proche $C_1, B_1(x,y), B_2(x,y), C_3$; et ainsi de suite.

3.4 Noyaux dégénérés :

Définition 3.2 *On appelle noyau dégénéré une fonction $k(x,y)$ de la forme*

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y).$$

Les fonction $f_i(x), g_i(y)$, $i = 1...n$ sont supposées continues linéairement indépendente.

– L'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{3.4.1}$$

s'écrite

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y) \right) \varphi(y)dy. \tag{3.4.2}$$

décrivons l'équation (3.4.2)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n f_i(x) \int_a^b g_i(y)\varphi(y)dy. \tag{3.4.3}$$

posons

$$C_i = \int_a^b g_i(y)\varphi(y)dy \qquad (i = 1, ..., n).$$

l'égalité (3.4.3) devient alors

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n f_i(x) C_i. \tag{3.4.4}$$

d'où

$$\varphi(x) - f(x) = \lambda \sum_{i=1}^n f_i(x) C_i.$$

en repportant (3.4.4) dans (3.4.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - f(x) &= \lambda \sum_{i=1}^n f_i(x) \int_a^b g_i(y) \left[f(y) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k f_k(y) \right] dy. \\
\lambda \sum_{i=1}^n f_i(x) C_i &= \lambda \sum_{i=1}^n f_i(x) \int_a^b g_i(y) \left[f(y) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k f_k(y) \right] dy.
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{i=1}^n \left[C_i - \int_a^b g_i(y) \left[f(y) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k f_k(y) \right] dy \right] \lambda f_i(x) = 0.$$

Comme les fonctions $f_i(x)$ sont linéairement indépendent, il en resulte que :

$$\begin{aligned}
C_i - \int_a^b g_i(y) \left[f(y) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k f_k(y) \right] dy &= 0 \\
C_i - \lambda \int_a^b g_i(y) \sum_{k=1}^n C_k f_k(y) dy &= \int_a^b g_i(y) f(y) dy \\
C_i - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b g_i(y) f_k(y) dy &= \int_a^b g_i(y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

introduisons les notations

$$A_{ik} = \int_a^b g_i(y) f_k(y) dy, \; B_i = \int_a^b g_i(y) f(y) dy \quad (i = 1, ..., n).$$

Nous obtenons

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k A_{ik} = B_i \quad (i = 1, ..., n).$$

(i.e)

$$\begin{cases} C_1 - \lambda(C_1 A_{11} + C_2 A_{12} + ... + C_n A_{1n}) = B_1. \\ C_2 - \lambda(C_1 A_{21} + C_2 A_{22} + ... + C_n A_{2n}) = B_2. \\ \vdots \\ C_n - \lambda(C_1 A_{n1} + C_2 A_{n2} + ... + C_n A_{nn}) = B_n. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} (1 - \lambda A_{11}) C_1 - \lambda C_2 A_{12} - ... - \lambda C_n A_{1n} = B_1. \\ -\lambda C_1 A_{21} + (1 - \lambda A_{22}) C_2 - ... - \lambda C_n A_{2n} = B_2. \\ \vdots \\ \vdots \\ -\lambda C_1 A_{n1} - \lambda C_2 A_{n2} - ... - \lambda C_{n-1} A_{nn-1} + (1 - \lambda A_{nn}) C_n = B_n. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

Pour trouver les C_i calculons :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \cdots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1 - \lambda A_{22} & \cdots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & \cdots & 1 - \lambda A_{nn} \end{vmatrix}$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$ le système linéaire (3.4.5) est de Cramer, il admet une solution unique $(C_1, C_2, ..., C_n)$ obtenue par les formules :

$$C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta(\lambda)}.$$

tel que

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{11} & \cdots & B_1 & \cdots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \cdots & B_2 & \cdots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ -\lambda A_{n-1,1} & \cdots & B_{n-1} & \cdots & -\lambda A_{n-1,n} \\ -\lambda A_{n1} & \cdots & B_n & \cdots & 1 - \lambda A_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple 3.4 *Soit* $[a,b] = [0,\pi]$, $k(x,y) = \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$, *soit l'équation intégrale de Fredholm* $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \cos(x+y)\varphi(y)dy$.
Posons la solution φ *sous la forme*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{2} c_i f_i(x)\\ &= f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x).\end{aligned}$$

où

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta(\lambda)},\ c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta(\lambda)}. \tag{3.4.6}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22}\end{vmatrix}$$

avec :

$$a_{11} = \int_0^\pi \cos^2 y dy = \frac{\pi}{2},\ a_{12} = \int_0^\pi \cos y\sin y dy = 0,\ a_{21} = \int_0^\pi \sin y\cos y dy = 0,\ a_{22} = \int_0^\pi \sin^2 y dy = -\frac{\pi}{2}.$$

donc :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2}\end{vmatrix} = \left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right).$$

calculons maintenant Δ_1*et* Δ_2 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & -\lambda a_{12} \\ \beta_2 & 1-\lambda a_{22}\end{vmatrix}$$

où

$$\beta_1 = \int_0^\pi \cos y f(y)dy,\ \beta_2 = -\int_0^\pi \sin y f(y)dy.$$

donc :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \int_0^\pi \cos y f(y)dy & 0 \\ \beta_2 & 1+\lambda\frac{\pi}{2}\end{vmatrix} = \left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\int_0^\pi \cos y f(y)dy.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \beta_1 \\ -\lambda a_{21} & \beta_2\end{vmatrix} = -\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\int_0^\pi \sin y f(y)dy.$$

en repportant dans (3.4.6) :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)\int\limits_0^\pi \cos y f(y)dy}{\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{(2-\lambda\pi)}\int\limits_0^\pi \cos y f(y)dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\int\limits_0^\pi \sin y f(y)dy}{\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)} \\ c_2 &= \frac{2}{(2+\lambda\pi)}\int\limits_0^\pi \sin y f(y)dy. \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{2\lambda}{(2-\lambda\pi)}\left[\int\limits_0^\pi \cos y f(y)dy\right]\cos x - \frac{2\lambda}{(2+\lambda\pi)}\left[\int\limits_0^\pi \sin y f(y)dy\right]\sin x.$$

si on prend par exemple $f(x) = \cos 2x$ *:*

$$\varphi(x) = \cos 2x + \frac{4\lambda}{3\lambda\pi + 6}\sin x.$$

3.5 Noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{3.5.1}$$

On pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\lambda^n. \tag{3.5.2}$$

avec $\Psi_n(x)$ définis par les formules

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= \int_a^b k(x,y)f(y)dy. \\
\Psi_2(x) &= \int_a^b k(x,y)\Psi_1(y)dy = \int_a^b k_2(x,y)f(y)dy. \\
\Psi_3(x) &= \int_a^b k(x,y)\Psi_2(y)dy = \int_a^b k_3(x,y)f(y)dy. \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\Psi_n(x) &= \int_a^b k(x,y)\Psi_{n-1}(y)dy = \int_a^b k_n(x,y)f(y)dy.
\end{aligned}$$

Ici

$$\begin{aligned}
k_2(x,y) &= \int_a^b k(x,u)k_1(u;y)du; \\
k_3(x,y) &= \int_a^b k(x,u)k_2(u;y)du,
\end{aligned}$$

Et en général

$$k_n(x,y) = \int_a^b k(x,u)k_{n-1}(u;y)du, \tag{3.5.3}$$

n=2,3,...., et $k_1(x,y) \equiv k(x,y)$. Les fonctions $k_n(x,y)$ définies par les formules $(3.5.3)$ s'appellent noyaux itérés. Elles vérifient la relation

$$k_n(x,y) = \int_a^b k_m(x,u)k_{n-m}(u;y)du,$$

où m est un entier naturel quelconque inférieur à n :

La résolvante de l'équation intégrale $(3.5.1)$ est définie en fonction des noyaux itérés de la façon suivante :

$$R(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,y)\lambda^{n-1}. \tag{3.5.4}$$

la solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce $(3.5.1)$ s'exprime par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,y,\lambda)f(y)dy. \tag{3.5.5}$$

Exemple 3.5 *Trouver les itérés du noyau* $k(x,y) = x - y$ *si* $a = 0$, $b = 1$.

Utilisant les formules (3.5.3) on obtient de proche en proche :

$$\begin{aligned}
k_1(x,y) &= x-y,\\
k_2(x,y) &= \int_0^1 (x-u)(u-y)du = \frac{x+y}{2} - xy - \frac{1}{3},\\
k_3(x,y) &= -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-u)\left(\frac{u+y}{2} - yu - \frac{1}{3}\right)du = -\frac{x-y}{12},\\
k_4(x,y) &= \frac{1}{12}\int_0^1 (x-u)\,(u-y)\,du = -\frac{1}{12}k_2(x,y) = -\frac{1}{12}\left(\frac{x+y}{2} - xy - \frac{1}{3}\right),\\
k_5(x,y) &= -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-u)\left(\frac{u+y}{2} - yu - \frac{1}{3}\right)du = -\frac{1}{12}k_3(x,y) = \frac{x-y}{12^2},\\
k_6(x,y) &= \frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-u)(u-y)du = \frac{k_2(x,y)}{12^2} = -\frac{1}{12^2}\left(\frac{x+y}{2} - xy - \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme :

1)pour $n = 2k-1$:

$$k_{2k-1}(x,y) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-y).$$

2)pour $n = 2k$

$$k_{2k}(x,y) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+y}{2} - xy - \frac{1}{3}\right).$$

Où $k = 1, 2, 3.....$

Conclusion

Notre principal objectif est de présenter les méthodes qui se rencontrent dans la résolution d'une équation intégrale de Volterra et de Fredholm, la méthode suivie, pour résoudre une équation intégrale de Volterra ou de Fredholm est basée sur des méthodes différentes qui nous servent à caractériser et résoudre l'équation intégrale, telles que la résolution à l'aide du résolvante et aussi par la transformation de Laplace, la méthode de Fredholm, la méthode des noyaux dégénérées et la méthode des noyaux iérés.

Bibliographie

[1] **A. Rahmoune**, Équations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution, 2018

[2] **Abdul J. JERRI**, Introductionto integral equation with application, A Wiley, Intersciences puplication.1999.

[3] **M. KRASNOV, KISSÉLEV, G.MAKARENKO**, Équations integrales . Edition Mir Mos-cou. Tradiction Française Edition Mir 1977.

[4] **C. Constanda, M.E. Perez** Integral Methods in Science and Engineering, volume 1 : analytic methods Birkhauser Boston 2010

[5] **C.Caurduneanu**, Integral Equations and Applications, University Press, Cambridge 1991.

[6] **A.Kislev, G.Makarenko**, Equations Integrales. Edition Mir. Mouscou. 1972.

[7] **B.N. Mandal, A.Chakrabarti**, Aplied Singular Integral Equation. Published by Science Publishers, 2011.

[8] **S.G.Mikhlin,** Linear Integral Equations Hindustan Pub. Corp. Delhi, 1960.

[9] **A.D.Polyanin, A.V.Manzhirov**, Handbook of Integral Equations, 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton,Fla ; CRC Press, 2008.

[10] **H.Reinhard**, Equations Differentielles (Fondements et Applications), 2 eme Edition Dunod, Paris,1989.